

ВЛИЯНИЕ МЕЖЧАСТИЧНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКУЮ ФАЗУ ДВУХЧАСТИЧНОЙ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ БЕТЕ

В. А. Томилин^{}, А. М. Ростом, Л. В. Ильичёв*

*Институт автоматизации и электрометрии Сибирского отделения Российской академии наук
630090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 19 мая 2026 г.,
после переработки 3 августа 2026 г.
Принята к публикации 12 августа 2026 г.

Рассматривается система из пары бозонов с точечным взаимодействием в одномерной конфигурации в виде кольца с локализованным потенциальным дефектом. Для модельного класса дефектов найден энергетический спектр и описана его зависимость от параметров задачи. В результате медленной вариации параметров дефекта волновая функция системы приобретает фазовый множитель — геометрическую фазу. Показано, что взаимодействие приводит к увеличению геометрической фазы при выбранном контуре вариации параметров дефекта. Полученные результаты могут быть использованы для построения теоретической модели квантовых инерциальных датчиков.

Ключевые слова: квантовая геометрическая фаза, интегрируемые системы, анзац Бете

*Статья представлена в рамках публикации материалов конференции
«Физика ультрахолодных атомов» (ФУХА-2025), Новосибирск, декабрь 2025 г.*

DOI: 10.31857/S0044451026100066

1. ВВЕДЕНИЕ

Анализ и классификация многообразия наблюдаемых в квантовой механике явлений зачастую могут быть существенно упрощены путем установления соответствия с точно решаемыми моделями. Несмотря на свой «игрушечный» характер, они тем не менее способны углубить понимание явлений и эффектов в реальных системах. При этом особую важность приобретают точно решаемые модели для многочастичных систем. Их экспериментальная реализация стала возможной с прогрессом в области физики ультрахолодных атомов. Оптические и магнитооптические ловушки сейчас позволяют создавать и эффективно контролировать низкоразмерные пространственные конфигурации атомов [1, 2]. В частности, наблюдается интерес к реализации пространственных конфигураций ансамблей холодных атомов в виде тороидов с хорошей поперечной

локализацией [3–7] — подобные системы могут служить основой квантовых инерциальных сенсоров, в том числе работающих на принципе, аналогичном устройствам SQUID [8]. Хотя в большинстве экспериментальных ситуаций описание физики явлений не сводится к точно решаемым моделям, последние тем не менее могут быть полезны при анализе экспериментальных данных, поскольку обеспечивают относительно простое вычисление корреляционных функций [9–11].

Теоретические и экспериментальные исследования низкоразмерных атомных систем дают новые фундаментальные знания о физике многочастичных квантовых корреляций [12–16], поведении многочастичных систем в термодинамическом пределе [17–19] и физике фазовых переходов [20, 21].

В серии работ [22–24] была разработана оригинальная концепция квантового гироскопа и квантового акселерометра, основным элементом которых, чувствительным к ускорению системы отсчета, является пара мод атомарного конденсата, имеющих кольцевую пространственную конфигурацию с локализованной неоднородностью — дефектом. Необ-

^{*} E-mail: 8342tomilin@mail.ru

ходимым требованием к такому дефекту оказалась его асимметрия, т. е. способность задавать направление обхода кольца. Различие конструкций гироскопа и акселерометра сводится к различию пространственного положения кольцевых атомарных мод. При этом измеряемой величиной, несущей информацию об угловой скорости вращения (в случае гироскопа) или линейного ускорения (в случае акселерометра), являлась разница фаз, приобретаемая состояниями мод в результате определенной эволюции параметров дефекта¹⁾. Отметим, что использование кольцевых конфигураций с потенциальным дефектом для гироскопических приложений уже обсуждалось в [8], однако в упомянутой работе чувствительность к вращению достигалась за счет перемещения потенциала-дефекта по окружности кольца.

Недостатком построенной модели являлось пренебрежение взаимодействием между частицами, которое в общем случае играет весьма существенную роль в низкоразмерных системах. При этом, если ориентироваться на метрологические приложения, реализованные с использованием стандартных схем с атомным интерферометром [25, 26], то в них межатомное взаимодействие является помехой, снижающей общую чувствительность системы, — взаимодействие между атомами во время распространения в плечах интерферометра вносит нежелательную дополнительную фазу. В работе [27] был рассмотрен способ учета этого взаимодействия в рамках модели Либа–Линигера [28, 29]. Это одна из наиболее известных точно решаемых многочастичных моделей, описывающая систему бозонов с контактным взаимодействием в одномерной геометрии с использованием анзаца Бете [30]. Известны решения для периодических граничных условий (кольцевой геометрии) [28, 29] и для модели частиц в непроницаемом «ящике» [31], а также сформулированы некоторые общие требования к системе δ -образных потенциалов, допускающей решения в виде анзаца Бете [32].

Мотивация данной работы продиктована потенциальными приложениями в квантовой гироскопии. Работа [27] развивает идеи, заложенные в серии работ [22–24], посвященных созданию модели квантовых гироскопов и акселерометров на геометрической фазе, путем включения в модель взаимодействия между частицами. В [27] для рассмотрения

была выбрана простейшая двухчастичная модель, поскольку обобщение для большого числа частиц с учетом сохранения нетривиальной потенциальной конфигурации является достаточно трудной задачей²⁾. Способствовать ее решению может выяснение наличия либо отсутствия определенных симметрий в решении задачи для двух частиц. В первую очередь это касается поведения решений при изменении параметров барьера. Кроме того, для обоснования применения полученных результатов в квантовой гироскопии необходимо добавить в модель ускорение системы отсчета. Основные необходимые для этого соотношения выведены в настоящей работе.

2. МОДЕЛЬ

Рассматривается система двух тождественных бозонов с импульсами $\hat{k}_1$ и $\hat{k}_2$ на одномерном кольце³⁾ длины L . Положение частиц на кольце описывается угловой координатой $x \in [0, L)$. Взаимодействие между частицами отталкивающее, имеет точечный характер и описывается константой c , которая в этом случае принимает положительные значения. Уравнение Шредингера в безразмерной системе единиц $\hbar = m = 1$ таким образом имеет вид [32]

$$\left(\frac{\hat{k}_1^2}{2} + \frac{\hat{k}_2^2}{2}\right)\Psi(x_1, x_2) + c\delta(x_1 - x_2)\Psi(x_1, x_2) = E\Psi(x_1, x_2). \quad (1)$$

Это двухчастичный вариант известной модели Либа–Линигера. Однако наличие локализованного потенциала, формирующего дефект, налагает нетривиальные граничные условия. Поскольку базисом решений (1) являются плоские волны, естественным оказывается описание дефекта в рамках формализма трансфер-матриц [34]. Трансфер-матрица M принадлежит группе $SU(1, 1)$ и связывает одночастичные амплитуды падающей и отраженной плоских волн по разные стороны дефекта (см. рис. 1):

²⁾ Тем не менее даже модели с малым числом частиц демонстрируют нетривиальные эффекты и имеют практические приложения. Примером может служить работа [33], в которой обсуждается динамика пары атомов, изначально находящихся в NOON-состоянии в одномерной яме, разделенной δ -образным барьером.

³⁾ В действительности речь идет лишь об операторах, собственные числа которых нумеруют стационарные состояния системы (см. далее); их можно соотнести с физическими импульсами частиц лишь в асимптотическом пределе при рассмотрении многочастичного рассеяния [32].

¹⁾ Как будет показано далее, значение этой фазы зависит лишь от геометрии пути в пространстве параметров, по которому проводится вариация, но не от самой скорости вариации. Поэтому такая фаза обычно называется геометрической.

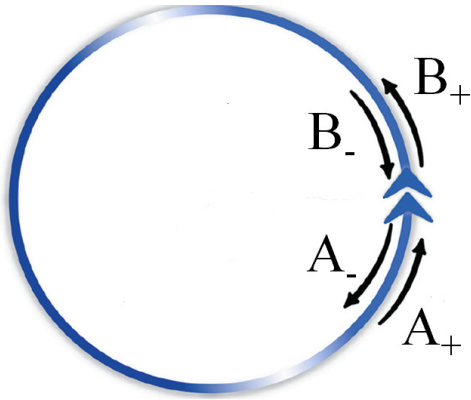


Рис. 1. Схема кольцевой потенциальной конфигурации с дефектом [27]. Отмечены падающие и отраженные волны

$$\begin{pmatrix} A_+ \\ A_- \end{pmatrix} \doteq \mathcal{M} \begin{pmatrix} B_+ \\ B_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ v^* & u^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_+ \\ B_- \end{pmatrix}; \quad (2)$$

$$|u|^2 - |v|^2 = 1.$$

Данный формализм был ранее эффективно использован для построения теоретической модели квантового гироскопа и акселерометра [22–24], однако в указанных работах рассматривался конденсат Бозе–Эйнштейна невзаимодействующих частиц. Структура решения при наличии взаимодействия приводит к нетривиальным граничным условиям в точке дефекта, как было описано в работе [27]. Ниже мы более подробно воспроизведем приведенный в ней вывод спектральных соотношений.

Решение уравнения (1) строится из элементарных волновых функций Бете [32], представляющих решение в одном из симплексов пространства координат частиц — в нашем случае это область $x_1 < x_2$ (решение во второй области достраивается из соотношений симметрии бозонной волновой функции по перестановке координат частиц). Они специфицируются импульсами частиц:

$$\Psi_{\{k_1, k_2\}}(x_1, x_2) = \sum_{p=e, \sigma} A^{(p)}(k_1, k_2) \exp \left[\sum_{j=1,2} i k_j x_{p(j)} \right], \quad (3)$$

где символ e обозначает тождественную перестановку, а σ — перестановку (12).

Поскольку дефект порождает отраженные волны и является точечным, то волны по обе его стороны должны иметь одинаковые по модулю и противоположные по знаку импульсы. Это утверждение справедливо для граничных условий в месте дефекта, сохраняющих симметрию уравнения (1) относительно изменения знаков импульсов, в частности, если коэффициенты трансфер-матрицы дефекта не

имеют зависимости от импульсов частиц (мы обсудим справедливость этого предположения более подробно в заключительной части работы). Как следствие, элементарная волновая функция $\Psi^{(el)}(x_1, x_2)$ в нашей модели в случае двух частиц оказывается суперпозицией четырех элементарных волновых функций Бете:

$$\begin{aligned} \Psi^{(el)}(x_1, x_2) &= \Psi_{\{k_1, k_2\}}(x_1, x_2) + \Psi_{\{k_1, -k_2\}}(x_1, x_2) + \\ &+ \Psi_{\{-k_1, k_2\}}(x_1, x_2) + \Psi_{\{-k_1, -k_2\}}(x_1, x_2), \quad (4) \\ \Psi(x_1, x_2) &= H(x_2 - x_1) \Psi^{(el)}(x_1, x_2) + \\ &+ H(x_1 - x_2) \Psi^{(el)}(x_2, x_1), \end{aligned}$$

где $H(x)$ — функция Хевисайда.

Любая трансфер-матрица может быть представлена в виде произведения «элементарных» трансфер-матриц, причем каждый из сомножителей относится к одной из трех канонических форм [34]. Мы будем использовать две из них (такой же выбор сделан в работах [22] и [24]):

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{ch } \eta & i \text{sh } \eta \\ -i \text{sh } \eta & \text{ch } \eta \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Первая матрица отвечает изменению фаз прошедших волн на α , а вторая — изменению их амплитуд, с коэффициентом прохождения, равным $1/\text{ch } \eta$, и дополнительным изменением фазы на $\pi/2$ при отражении. Поскольку матрицы-сомножители в (5) не коммутируют, то оказывается выполненным необходимое для потенциальных гироскопических применений условие — кольцо становится ориентируемым.

Трансфер-матрица описывает одночастичное рассеяние на потенциале, поэтому запись граничных условий для двухчастичных амплитуд $A^{(p)}(k_1, k_2)$, входящих в (3), (4), требует дополнительных соображений. Аргументы k_1, k_2 относятся к разным частицам, поэтому ясно, что трансфер-матрица должна связывать амплитуды с фиксированным значением одного из аргументов. Пусть, к примеру, амплитуды плоских волн в левой (по отношению к направлению обхода кольца) окрестности барьера равны $A^{(e)}(k_1, k_2)$ и $A^{(e)}(-k_1, k_2)$. Тогда соответствующие амплитуды в правой окрестности барьера должны отличаться фазовым множителем $e^{\pm i k_1 L}$, набегавшим в результате обхода кольца в том или ином направлении. Наличие дефекта задает порядок нумерации частиц на кольце, поэтому перемещение из правой окрестности барьера в левую или наоборот сводится к перестановке частиц. Соответственно, трансфер-матрица должна связывать двухчастичные амплитуды из (3), отличающиеся

верхним индексом (p). Рассмотрение рассеяния частицы с номером 2 сводится к одновременной замене $\sigma \rightarrow e$ и перестановке импульсов k_1 и k_2 . В результате имеем следующий набор граничных условий:

$$\begin{pmatrix} A^{(e)}(k_1, k_2) \\ A^{(e)}(-k_1, k_2) \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} A^{(\sigma)}(k_1, k_2)e^{ik_1 L} \\ A^{(\sigma)}(-k_1, k_2)e^{-ik_1 L} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} A^{(\sigma)}(k_1, k_2) \\ A^{(\sigma)}(k_1, -k_2) \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} A^{(e)}(k_1, k_2)e^{ik_2 L} \\ A^{(e)}(k_1, -k_2)e^{-ik_2 L} \end{pmatrix}.$$

Граничные условия при переходе из области $x_1 < x_2$ в область $x_1 > x_2$ с учетом контактного взаимодействия получаются стандартным приемом — интегрированием уравнения Шредингера в малой окрестности границы секторов [32]:

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial (x_1 - x_2)} \right|_{x_1 - x_2 = +0} - \left. \frac{\partial \Psi}{\partial (x_1 - x_2)} \right|_{x_1 - x_2 = -0} = 2c\Psi|_{x_1 - x_2 = 0}, \quad (7)$$

что приводит к следующему выражению для двухчастичных амплитуд:

$$A^{(p)}(k_1, k_2) = \left(1 + \frac{ic}{k_{p(1)} - k_{p(2)}} \right) A(k_1, k_2). \quad (8)$$

Граничные условия (6), (8) образуют полную систему уравнений для определения двухчастичных амплитуд. В силу принадлежности трансфер-матрицы к группе $SU(1, 1)$ получившаяся система из четырех уравнений разбивается на две совпадающие линейные системы. Условие ее совместности приводит к следующему набору спектральных соотношений:

$$\begin{aligned} (k_1^2 - k_2^2 - c^2) \operatorname{Re}(u e^{ik_1 L}) - 2ck_1 \operatorname{Im}(u e^{ik_1 L}) &= \\ &= k_1^2 - k_2^2 + c^2, \\ (k_2^2 - k_1^2 - c^2) \operatorname{Re}(u e^{ik_2 L}) - 2ck_2 \operatorname{Im}(u e^{ik_2 L}) &= \\ &= k_2^2 - k_1^2 + c^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Полезно сравнить полученный результат с решением для случая чисто периодических граничных условий. В этом случае решение в каждом секторе представляется одной элементарной функцией Бете $\Psi_{\{k_1, k_2\}}$, а решения в разных секторах связаны соотношением $\Psi_{\{k_1, k_2\}}(x_1, x_2) = \Psi_{\{k_1, k_2\}}(x_2, x_1 + L)$. Соответствующая система спектральных соотношений имеет вид

$$\begin{aligned} (k_1 - k_2 - ic) e^{ik_1 L} &= k_1 - k_2 + ic, \\ (k_2 - k_1 - ic) e^{ik_2 L} &= k_2 - k_1 + ic. \end{aligned} \quad (10)$$

Возведение в квадрат модуля обеих частей каждого уравнения непосредственно приводит к системе (9) с $u = 1$, т. е. уравнения для случая однородного кольца непосредственно возникают путем осуществления предельного перехода. Отметим также, что при действительных значениях u система (9) остается инвариантной относительно инверсии импульсов k_1, k_2 — как и следовало ожидать, поскольку этот случай соответствует симметричному (неориентированному) дефекту. В случае же ориентированного дефекта указанная симметрия нарушается.

Уравнения (9) описывают два семейства кривых в плоскости $k_1 k_2$ — «горизонтальное» и «вертикальное», транспонированные друг относительно друга (рис. 2 а). Каждую кривую можно пронумеровать целым числом, характеризующим близость кривой к началу координат. Таким образом, собственные энергии задачи можно нумеровать двумя индексами (i, j) , обозначающими номера горизонтальной и вертикальной кривых, пересечение которых дает решение уравнения (1):

$$E^{(ij)} = \frac{k_1^{(i,j)2}}{2} + \frac{k_2^{(i,j)2}}{2}. \quad (11)$$

При этом при совпадающих значениях индексов (и соответственно совпадающих значениях импульсов частиц) волновая функция системы тождественно обращается в нуль. Аналогичная система нумерации (и эффект обращения в нуль при совпадении импульсов) имеет место и в случае однородного потенциала. Логарифмирование уравнений системы (10) дает

$$\begin{aligned} k_1 L + 2 \operatorname{arctg} \frac{k_1 - k_2}{c} &= 2\pi I_1, \\ k_2 L + 2 \operatorname{arctg} \frac{k_2 - k_1}{c} &= 2\pi I_2, \\ I_{1,2} &= \pm 1/2, \pm 3/2, \pm 5/2, \dots \end{aligned} \quad (12)$$

Фиксация выбора полуцелых чисел $I_{1,2}$ (которые фактически также связаны с номерами горизонтальных и вертикальных кривых) при условии $I_1 < I_2$ дает единственную пару значений импульсов частиц. Решения системы (12) представлены на рис. 3. Визуально системы решений на рис. 3 и 2 а схожи; однако отметим, что наличие дополнительного изменяемого параметра u в (10) существенно расширяет класс возможных преобразований систем решений. Для целей данной работы наиболее важно установить, как они ведут себя при вариации параметров дефекта. Именно эта вариация должна привести к появлению чувствительной к внешнему

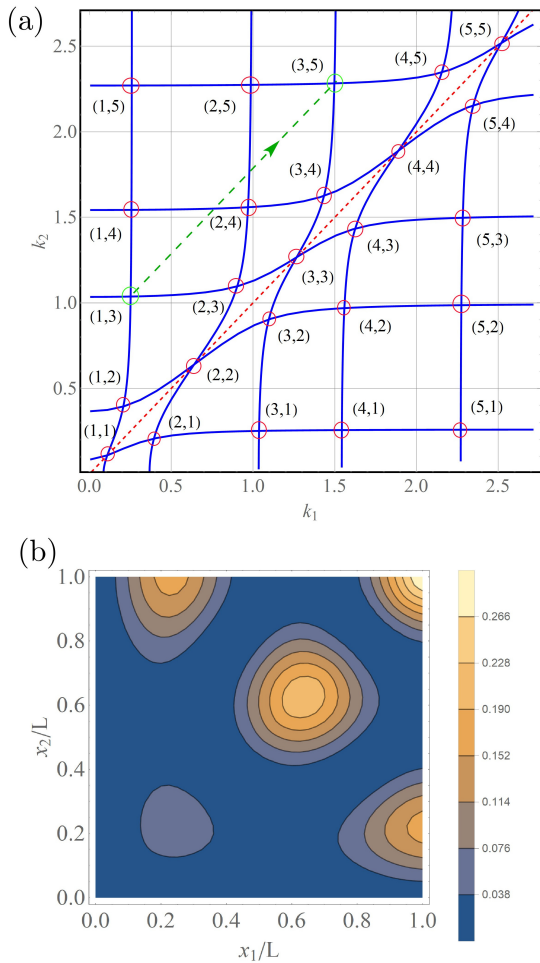


Рис. 2. *a* — Семейства кривых, порождающих решения спектральных соотношений при наличии потенциального дефекта, при $\eta = 2$, $\alpha = 0$, $c = 0.1$, $L = 5$. Кружками отмечены корни дисперсионных соотношений, а индексы означают номера вертикальных и горизонтальных кривых, пересечение которых порождает каждый корень [27]. Штриховая прямая соединяет два корня с номерами (1, 3) и (3, 5), переходящие друг в друга при вариации на 2π параметра α дефекта (см. в тексте). *b* — Квадрат модуля волновой функции состояния (1, 3), нормированной на единицу, при тех же параметрах задачи

ускорению измеримой величины — разности геометрических фаз двух кольцевых конфигураций с дефектами, задающими различную ориентацию. Для этого мы введем понятие геометрической фазы в наиболее общем виде.

Пусть $|\Psi\rangle$ — вектор гильбертова пространства, представляющий стационарное состояние системы. Рассмотрим его эволюцию при адиабатически медленной вариации параметров дефекта η и α , которые для удобства обозначим коллективным индексом « $\mathbf{s}$ », по некоторому заранее выбранному

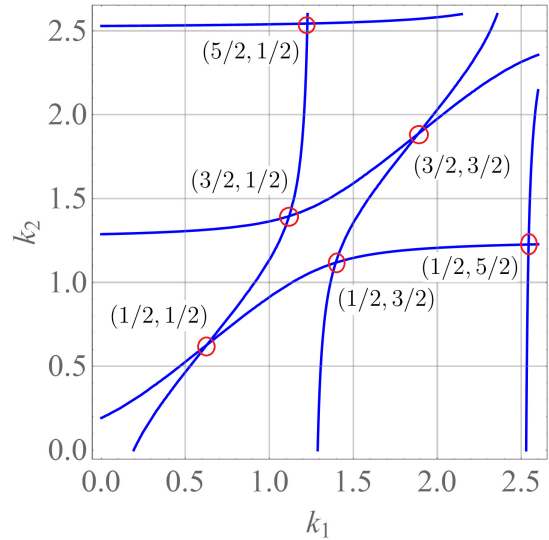


Рис. 3. Решения спектральных соотношений для случая однородного кольца при $c = 0.1$, $L = 5$. Решения отмечены кружками. В скобках указаны соответствующие значения (I_1, I_2)

контуру $\mathcal{C}$. В соответствии с адиабатической теоремой состояние системы остается стационарным, а его вектор состояния приобретает параметрическую зависимость: $|\Psi\rangle = |\Psi(\mathbf{s})\rangle$. Вообще говоря, данная зависимость определяется не единственным возможным образом, так как векторы вида $|\Phi(\mathbf{s})\rangle = e^{i\theta(\mathbf{s})}|\Psi(\mathbf{s})\rangle$, отличающиеся калибровочным преобразованием, являются равноправными представителями состояния системы. В случае вариации по гладкому контуру в пространстве параметров разумно потребовать, чтобы фазы состояний, отличающихся значениями параметра $\mathbf{s}$ на инфинитезимально малую величину $d\mathbf{s}$, также мало различались между собой. Последнее условие удобно записать с использованием структуры скалярного произведения (не предполагая при этом какую-либо конкретную нормировку волновой функции):

$$\arg(\langle\Phi(\mathbf{s})|\Phi(\mathbf{s} + d\mathbf{s})\rangle) \simeq \frac{\langle\Phi(\mathbf{s})|\nabla_{\mathbf{s}}|\Phi(\mathbf{s})\rangle}{\langle\Phi(\mathbf{s})|\Phi(\mathbf{s})\rangle} d\mathbf{s} = 0. \quad (13)$$

Иначе говоря, эволюция состояния вдоль контура должна быть устроена таким образом, чтобы векторы $|\Phi(\mathbf{s})\rangle$ и $\nabla_{\mathbf{s}}|\Phi(\mathbf{s})\rangle d\mathbf{s}$ были всюду ортогональны. Поэтому (13) называют также условием параллельного переноса. Важным обстоятельством является то, что хотя фазовые множители близко лежащих состояний отличаются мало, для сильно разнесенных состояний это утверждение неверно. Пусть $\mathbf{s}_i$, $\mathbf{s}_f$ — соответственно начальное и конечное значения набора параметров. Тогда из (13) нетрудно полу-

читать выражение для разности фаз векторов $|\Phi(\mathbf{s}_i)\rangle$ и $|\Phi(\mathbf{s}_f)\rangle$, которое удобно записать в более симметричной форме в виде интеграла по траектории [35]:

$$\theta \doteq \theta_g = \arg(\langle \Phi(\mathbf{s}_i) | \Phi(\mathbf{s}_f) \rangle) = \arg(\langle \Psi(\mathbf{s}_i) | \Psi(\mathbf{s}_f) \rangle) + \frac{i}{2} \int_C \frac{\langle \Psi(\mathbf{s}) | \nabla_{\mathbf{s}} \Psi(\mathbf{s}) \rangle - \langle \nabla_{\mathbf{s}} \Psi(\mathbf{s}) | \Psi(\mathbf{s}) \rangle}{\langle \Psi(\mathbf{s}) | \Psi(\mathbf{s}) \rangle} d\mathbf{s}. \quad (14)$$

Первое слагаемое в этом выражении обычно называют полной фазой θ_{tot} , поскольку оно определяет разность фаз начального и конечного состояний (в выбранной калибровке), а интегральное слагаемое с точностью до знака — динамической фазой θ_{dyn} , порожденной процессом вариации параметров системы. Каждое из этих двух слагаемых по отдельности может быть устранено подходящим выбором калибровки, однако их разность $\theta_g \doteq \theta_{tot} - \theta_{dyn}$ при этом остается неизменной. Поэтому именно эта фаза θ_g и является величиной, измеримой в эксперименте. Ясно, что она фактически не зависит от скорости проведения вариации по контуру C , коль скоро исследуемое состояние $|\Psi(\mathbf{s})\rangle$ остается всюду стационарным. В этой связи θ_g называется также геометрической фазой [36–38].

В качестве контура вариации параметров дефекта выберем контур $\eta = \text{const}$, $\alpha \in [0, 2\pi]$. Поскольку варьируется лишь один параметр, то общее выражение для геометрической фазы (14) существенно упрощается:

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &\rightarrow e^{i\theta_g} |\Psi\rangle, \\ \theta_g &= \arg(\langle \Psi(\alpha=0) | \Psi(\alpha=2\pi) \rangle) + \\ &+ \frac{i}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\langle \Psi | \frac{\partial}{\partial \alpha} \Psi \rangle - \langle \frac{\partial}{\partial \alpha} \Psi | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} d\alpha, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \int \Phi^*(x_1, x_2) \Psi(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \quad (16)$$

При изменении параметра α каждое семейство кривых из (9) меняется, однако в силу симметрии относительно перестановки k_1 и k_2 оба семейства кривых меняются одинаково. Изменение α на величину, кратную 2π , очевидно должно перевести систему, изначально находящуюся в некотором стационарном состоянии, в другое стационарное состояние. Соответственно, решения спектральных соотношений при вариации α будут смещаться вдоль отрезков прямых $k_2 = k_1 + \text{const}$, соединяющих различные решения при $\alpha = 0$, проиллюстрированные на рис. 2 а [27].

3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Основным состоянием в рассмотренной модели является состояние $(-1, 1)$. Мы договоримся сохранять порядок $i < j$, как в обычной модели Либба–Линигера с однородным потенциалом. По аналогии с ней среди возбужденных состояний можно выделить возбуждения типа I, отличающиеся от основного значением одного индекса, и типа II, когда оба индекса сдвигаются на одинаковую величину [29]. Хотя их физические свойства различаются (в частности, возбуждения типа II подчиняются иным дисперсионным соотношениям), поведение геометрической фазы оказывается качественно схожим. В этом смысле выбор конкретного начального состояния для демонстрации зависимости от взаимодействия не принципиален; однако различные начальные состояния демонстрируют различную чувствительность к изменению параметра барьера η . Вычисление геометрической фазы проведено для возбужденного начального состояния с индексами (1, 3) (см. выделенную точку на рис. 2 а) — это возбуждение типа II, для которого вариация этого параметра приводит к заметным изменениям поведения геометрической фазы. Вид его волновой функции представлен на рис. 2 б. На рис. 4 представлены зависимости приобретаемой геометрической фазы от величины взаимодействия s при различных значениях параметра дефекта η . Видно, что при увеличении взаимодействия геометрическая фаза также монотонно увеличивается, достигая некоторого асимптотического значения. При этом более чувствительной к величине взаимодействия геометрическая фаза оказывается в системе с дефектом, обладающим большим коэффициентом отражения (это соответствует большим значениям η).

Перечисленные характерные особенности наблюдаемых зависимостей объясняются конкуренцией двух эффектов — влияния потенциального дефекта и межчастичного взаимодействия. Ясно, что при увеличении взаимодействия влияние дефекта на стационарные уровни энергии уменьшается, что следует из явного вида спектральных соотношений (9) (это по крайней мере справедливо для не слишком больших значений импульсов). В результате при больших s зависимость геометрической фазы от этого параметра носит асимптотический характер. Вместе с тем значение асимптотики увеличивается с параметром η . Наличие слабопроницаемого дефекта неизбежно приводит к более сильной зависимости волновых функций системы от его параметров, поскольку он представляет собой фактически еще

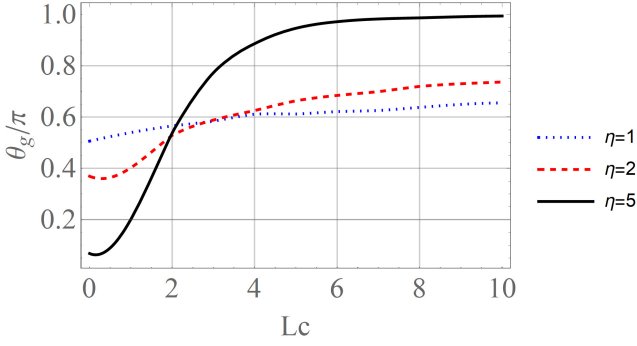


Рис. 4. Геометрическая фаза, вычисленная для стационарного состояния (1, 3), в зависимости от безразмерного (в системе единиц $\hbar = m = 1$) произведения Lc длины окружности кольца на параметр взаимодействия при различных значениях η [27]. При больших η и больших c геометрическая фаза асимптотически стремится к максимальному значению π . При малых η и Lc асимптотика составляет $\pi/2$.

одну (бесконечно тяжелую) отталкивающую частицу. Поэтому при вариации последних соответствующий интеграл в выражении для геометрической фазы принимает большие значения.

В области слабого взаимодействия соотношение обратное — большая проникаемость дефекта порождает большую геометрическую фазу. В пределе нулевого взаимодействия нетрудно найти аналитическое решение дисперсионных соотношений (9):

$$k_{1,2}L = \alpha - \frac{\pi}{2} + \arccos\left(\frac{1}{\text{ch } \eta}\right) + 2\pi n_{1,2}, \quad n_{1,2} \in \mathbb{Z}. \quad (17)$$

Стационарное состояние определяется выбором целых чисел $n_{1,2}$. Двухчастичные амплитуды с индексами e, σ становятся равными. Непосредственная подстановка в (15) показывает, что динамическое слагаемое в этом случае становится малым. В результате основной вклад в геометрическую фазу будет давать первое слагаемое из (15), т. е. полная фаза θ_{tot} . Ее предел при больших η равен

$$\arg\langle\Psi(\alpha=0)|\Psi(\alpha=2\pi)\rangle \rightarrow -\arccos\left(\frac{1}{\text{ch } \eta}\right) + \frac{\pi}{2}. \quad (18)$$

Наибольшая геометрическая фаза обеспечивается при наличии более проникаемого дефекта. Несмотря на малую величину коэффициента отражения, дефект все же придает взаимодействующим с ним плоским волнам дополнительную фазу, определяющуюся первой из «элементарных» трансфер-матриц в (5), что и объясняет полученный результат.

Параметр межчастичного взаимодействия c связан с физическими характеристиками процесса мно-

гочастичного рассеяния. Величина $\hbar^2/mc$ имеет размерность длины и характеризует длину s -рассеяния в одномерной геометрии. Она может быть выражена через длину s -рассеяния в газе свободных частиц a_{free} и характерный поперечный размер кольца $a_{\perp}$ [39]:

$$\frac{\hbar^2}{mc} = \frac{a_{\perp}^2}{2a_{\text{free}}} \left(1 - C \frac{a_{\text{free}}}{a_{\perp}}\right), \quad (19)$$

где $C \approx 1.46 \dots$. Для атомов ^{87}Rb , занимающих сверхтонкий подуровень $|f, m_f = 1\rangle$, при нулевом магнитном поле $a_{\text{free}} \approx 100a_B$, где a_B — боровский радиус [40]. Таким образом, в потенциальной конфигурации в виде тонкого кольца со средним радиусом 50 мкм и поперечным размером ≈ 0.12 мкм (частота поперечного удержания $5 \cdot 10^4$ рад/с) безразмерный параметр $mcL/\hbar^2$ оказывается равным ≈ 242.8 . Для ^{87}Rb длиной рассеяния можно управлять в широких пределах при помощи резонансов Фешбаха [41, 42]. Поэтому можно заключить, что приведенный на рис. 4 диапазон значений параметра взаимодействия по горизонтальной оси вполне соотносится с возможностями современной экспериментальной техники.

Постановка рассмотренной задачи продиктована предложенными ранее схемами инерциальных сенсоров на основе атомарного конденсата Бозе–Эйнштейна. В этой связи целесообразно обсудить возможные обобщения развитого в данной работе формализма на случай наличия ускорения системы отсчета. В качестве примера рассмотрим влияние вращения системы отсчета с угловой скоростью Ω относительно оси, расположенной для простоты ортогонально плоскости одномерного кольца, по-прежнему содержащего пару бозонов с точечным взаимодействием. В этом случае к гамильтониану системы добавятся слагаемые, линейные по импульсам частиц [22], а уравнение Шредингера примет вид

$$\left(\frac{\hat{k}_1^2}{2} + \frac{\hat{k}_2^2}{2} - \Omega\hat{k}_1 - \Omega\hat{k}_2\right)\Psi(x_1, x_2) + c\delta(x_1 - x_2)\Psi(x_1, x_2) = E\Psi(x_1, x_2). \quad (20)$$

В отсутствие дополнительного дефекта его решение можно представить в виде $f(x_1, x_2)\Psi_{\{k_1, k_2\}}(x_1, x_2)$, где функция $\Psi_{\{k_1, k_2\}}(x_1, x_2)$ определена в (3), а $f(x_1, x_2)$ не должна нарушать перестановочную симметрию. Нетрудно проверить, что при выборе

$$f(x_1, x_2) = e^{i\Omega(x_1 + x_2)}$$

имеет место соотношение

$$\left(\frac{\hat{k}_1^2}{2} + \frac{\hat{k}_2^2}{2} - \Omega\hat{k}_1 - \Omega\hat{k}_2\right)f(x_1, x_2)\Psi_{\{k_1, k_2\}}(x_1, x_2) =$$

$$= f(x_1, x_2)\left(\frac{\hat{k}_1^2}{2} + \frac{\hat{k}_2^2}{2} - \frac{\Omega^2}{2}\right)\Psi_{\{k_1, k_2\}}(x_1, x_2), \quad (21)$$

т.е. уравнение Шредингера приводится к виду (1) со «сдвинутыми» уровнями энергии. Следовательно, при наличии дополнительного дефекта выражения (4) для новой элементарной волновой функции остаются справедливыми. Верны также и условия (7) на границе секторов. Однако граничное условие в точке дефекта изменяется следующим образом:

$$\begin{pmatrix} A^{(e)}(k_1, k_2) \\ A^{(e)}(-k_1, k_2) \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} A^{(\sigma)}(k_1, k_2)e^{ik_1L+i\Omega L} \\ A^{(\sigma)}(-k_1, k_2)e^{-ik_1L+i\Omega L} \end{pmatrix}, \quad (22)$$

$$\begin{pmatrix} A^{(\sigma)}(k_1, k_2) \\ A^{(\sigma)}(k_1, -k_2) \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} A^{(e)}(k_1, k_2)e^{ik_2L+i\Omega L} \\ A^{(e)}(k_1, -k_2)e^{-ik_2L+i\Omega L} \end{pmatrix},$$

что приводит к новой системе спектральных соотношений:

$$\begin{aligned} (k_1^2 - k_2^2 - c^2) \operatorname{Re}(u e^{ik_1L}) - 2ck_1 \operatorname{Im}(u e^{ik_1L}) &= \\ = (k_1^2 - k_2^2 + c^2) \cos \Omega L + 2ck_2 \sin \Omega L, \\ (k_2^2 - k_1^2 - c^2) \operatorname{Re}(u e^{ik_2L}) - 2ck_2 \operatorname{Im}(u e^{ik_2L}) &= \\ = (k_2^2 - k_1^2 + c^2) \cos \Omega L + 2ck_1 \sin \Omega L. \end{aligned} \quad (23)$$

Кратко обсудим полученный результат. Во-первых, по сравнению с (9) больше не сохраняется симметрия относительно инверсии импульсов, даже в случае действительных коэффициентов трансформации. Это связано с наличием выделенного внешним ускорением направления обхода кольца. Во-вторых, имеется чувствительность к изменению знака угловой скорости вращения⁴⁾. Это позволяет надеяться на различные значения геометрической фазы у противоположно ориентированных колец, а также возможности оптимизации этой разницы по параметру взаимодействия s .

Важно также обсудить влияние выбора контура вариации параметра дефекта. При выбранном контуре $\eta = \text{const}$, $\alpha \in (0, 2\pi)$ начальное и конечное состояния относятся к одной и той же системе решений, рассчитанных для дефекта с действительным коэффициентом пропускания. Это упрощает расчет, поскольку, как было отмечено выше, при

наличии комплексности теряется симметрия относительно инверсии в пространстве импульсов. Принципиальная важность комплексного коэффициента пропускания барьера была отмечена в работе [24], также посвященной генерации геометрической фазы в отсутствие межчастичного взаимодействия для регистрации линейного ускорения системы отсчета. В ней было показано, что геометрическая фаза тождественно обращается в нуль, если коэффициент пропускания барьера действительный. Представляется, что для настоящей работы это условие не является необходимым, поскольку комплексность возникает как при выборе анзаца (3), так и при построении граничных условий (6). Однако принципиальной (причем в том числе и для задачи с большим числом частиц) по-прежнему является ориентируемость дефекта, проявляющаяся в нарушении симметрии относительно инверсии в пространстве импульсов. Без ее нарушения *разность* геометрических фаз двух колец окажется тождественно равной нулю.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На примере двухчастичной модели изучено влияние взаимодействия на геометрическую фазу, возникающую в системе двух тождественных бозонов, удерживаемых в пространственной конфигурации в виде тонкого кольца с локализованной неоднородностью («дефектом»). Геометрическая фаза создается вариацией параметров, характеризующих потенциал дефекта. Показано, что наличие отталкивающего взаимодействия между частицами приводит к усилению эффекта генерации геометрической фазы. В зависимости от величины взаимодействия более выгодным в смысле величины приобретаемой геометрической фазы может оказаться дефект с большим или меньшим коэффициентом пропускания.

Усложнение, вносимое появлением дефекта кольцевой структуры, заставило ограничиться в настоящей работе рассмотрением всего пары частиц. В случае N -частичной модели число слагаемых в соответствующем уравнении (3) окажется равным 2^N . По этой причине перспективы получения полного решения, аналогичного классической задаче с анзацем Бете, пока остаются неясными. Мы также не стали приводить соответствующий расчет геометрических фаз в присутствии вращения, поскольку практическая ценность такого двухчастичного гироскопа невысока. Тем не менее, если задача систематического обобщения

⁴⁾ В случае симметричного дефекта имеется симметрия относительно одновременного изменения знака Ω и импульсов частиц, что также сходится с простыми физическими соображениями — инверсия импульсов равносильна операции отражения в плоскости кольца.

спектральных соотношений (9) на N -частичную модель будет решена, будет сравнительно несложно учесть в ней эффекты ускорения системы отсчета — пример такого обобщения был рассмотрен в предыдущем разделе. Таким образом, приведенный вывод соотношения (23) является необходимым предварительным шагом на пути к построению реалистичной модели многочастичного гироскопа.

Стоит также подчеркнуть следующие важные обстоятельства, позволившие свести задачу к точно решаемой. Влияние потенциального дефекта фактически проявляется лишь в постановке граничных условий (6). В свою очередь, совместность этих условий со структурой анзаца Бете обеспечивается независимостью коэффициентов трансфер-матрицы дефекта от импульсов частиц. Полезно провести сравнение рассмотренной задачи с другим популярным модельным классом локализованных потенциальных дефектов — δ -образными потенциалами. Для систем таких потенциалов имеет место необходимое условие интегрируемости (что в данном контексте является синонимом рассеяния без дифракции) в виде наличия специальной симметрии — так называемое условие обобщенного калейдоскопа [32]. В частности, для двух частиц с точечным отталкивающим взаимодействием на кольце с дополнительным δ -потенциалом было показано [43], что интегрируемость сохраняется для антисимметричных относительно отражений на кольце волновых функций. В противном случае возникают дифракционные явления, что приводит к невозможности свести решение к функции с конечным набором импульсов частиц, аналогично тому, как это происходит при рассеянии даже пары взаимодействующих частиц на δ -потенциале на бесконечной прямой [44]. В [45] была исследована связь этого явления с переходом в режим квантового хаоса. Рассмотренный в нашей работе дефект, характеризующийся трансфер-матрицей (5), относится к иному классу — он принципиально несимметричен. Интегрируемость же обеспечивается специальным видом граничных условий в точке барьера. Еще раз подчеркнем, что независимость трансфер-матрицы от импульсов частиц весьма существенна. Тем не менее отметим, что указанная независимость (или по крайней мере слабая зависимость) должна иметь место лишь в определенном диапазоне импульсов (см. рис. 2), связанном с контуром вариации потенциалов дефекта. Поэтому при конкретизации его вида и в случае, если дефект не точечный, учет дифракционных явлений будет необходим. Тем не менее представляется, что для конкретного дефекта

возможно выбрать такое возбужденное состояние, для которого найденные в настоящей работе решения в виде анзаца (3) будут справедливыми по крайней мере в режиме слабой дифракции.

Отдельным вопросом является метод построения необходимого типа дефекта. Локализованность дефекта позволяет описывать его в рамках удобного «абстрактного» формализма, однако методы его практической реализации (например, в виде дополнительного пучка оптического излучения с перетяжкой в области кольца) находятся в противоречии с необходимой для гироскопических приложений асимметрией. Возможно рассмотрение комбинации локализованных барьера и ямы, подобно тому, как это было сделано в [23]. Однако в этом случае вряд ли можно надеяться на сведение задачи к точно решаемой, поскольку учет межчастичного взаимодействия неизбежно приведет к потере интегрируемости. Кроме того, использование колец с такой комбинацией потенциалов в качестве гравиметра невозможно в силу тождественного равенства нулю геометрической фазы, как было показано в [24]. В качестве альтернативного подхода можно было бы перейти к рассмотрению ансамбля частиц с ненулевым (целым) спином. Тогда необходимой асимметрии потенциального дефекта можно было бы достичь с использованием дополнительной конфигурации магнитного поля.

Финансирование. Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (грант № 23-12-00182-П).

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов. Вклад авторов равноценен.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. A. Cazalilla, R. Citro, T. Giamarchi, E. Orignac, and M. Rigol, *Rev. Mod. Phys.* **83**, 1405 (2011).
2. I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 885 (2008).
3. E. M. Wright, J. Arlt, and K. Dholakia, *Phys. Rev. A* **63**, 013608 (2000).
4. Th. Elsässer, B. Nagorny, and A. Hemmerich, *Phys. Rev. A* **67**, 051401 (2003).
5. E. Courtade, O. Houde, J.-F. Clément et al., *Phys. Rev. A* **74**, 031403 (2006).

6. S. Gupta, K. W. Murch, K. L. Moore, T. P. Purdy, and D. M. Stamper-Kurn, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 143201 (2005).
7. A. Görlitz, J. M. Vogels, A. E. Leanhardt et al., *Phys. Rev. Lett.* **87**, 130402 (2001).
8. S. Ragole and J. M. Taylor, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 203002 (2016).
9. L. Khaykovich, F. Schreck, G. Ferrari et al., *Science* **296**, 1290 (2002).
10. K. E. Strecker, G. B. Partridge, A. G. Truscott, and R. G. Hulet, *Nature* **417**, 150 (2002).
11. N. Fabbri, M. Panfil, M. Clément et al., *Phys. Rev. A* **91**, 043617 (2015).
12. N. A. Slavnov, *Theor. Math. Phys.* **79**, 502 (1989).
13. T. Kinoshita, T. Wenger, and D. S. Weiss, *Nature* **440**, 900 (2006).
14. A. Imambekov and L. I. Glazman, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 206805 (2008).
15. M. Olshanii and V. Dunjko, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 090401 (2003).
16. K. K. Kozłowski, J. M. Maillet, N. A. Slavnov et al., *J. Stat. Mech.* **2011**, 03018 (2011).
17. V. Dunjko, V. Lorent, and M. Olshanii, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 5413 (2001).
18. G. Lang, F. Hekking, and A. Minguzzi, *SciPost Phys.* **3**, 003 (2017).
19. A. Minguzzi and P. Vignolo, *AVS Quantum Sci.* **4**, 027102 (2022).
20. T. Donner, S. Ritter, T. Bourdel, A. Öttl, M. Köhl, and T. Esslinger, *Science* **315**, 1556 (2007).
21. N. Gemelke, X. Zhang, C.-L. Hung, and C. Chin, *Nature* **460**, 995 (2009).
22. V. A. Tomilin and L. V. Il'ichov, *JETP* **135**, 264 (2022) [B. A. Томили́н, Л. В. Ильичёв, *ЖЭТФ* **162**, 307 (2022)].
23. A. M. Rostom, V. A. Tomilin, and L. V. Il'ichov, *JETP Lett.* **119**, 389 (2024) [A. М. Ростом, В. А. Томили́н, Л. В. Ильичёв, *Письма в ЖЭТФ* **119**, 381 (2024)].
24. V. A. Tomilin, A. M. Rostom, and L. V. Il'ichov, *JETP Lett.* **120**, 540 (2024) [B. A. Томили́н, А. М. Ростом, Л. В. Ильичёв, *Письма в ЖЭТФ* **120**, 560 (2024)].
25. S. Dimopoulos, P. W. Graham, J. M. Hogan, and M. A. Kasevich, *Phys. Rev. D* **78**, 042003 (2008).
26. R. Jannin, P. Cladé, and S. Guellati-Khélifa, *Phys. Rev. A* **92**, 013616 (2015).
27. V. A. Tomilin, A. M. Rostom, and L. V. Il'ichov, *JETP Lett.* **123**, 566 (2026) [B. A. Томили́н, А. М. Ростом, Л. В. Ильичёв, *Письма в ЖЭТФ* **123**, 567 (2026)].
28. E. Lieb and W. Liniger, *Phys. Rev.* **130**, 1605 (1963).
29. E. Lieb, *Phys. Rev.* **130**, 1616 (1963).
30. H. Bethe, *Z. Phys.* **71**, 205 (1931).
31. M. Gaudin, *Phys. Rev. A* **4**, 386 (1971).
32. M. Gaudin, *La Fonction d'Onde de Bethe*, Masson, Paris (1983) [М. Годен, *Волновая функция Бете*, Мир, Москва (1987)].
33. Y. Liu and Y. Zhang, *Phys. Rev. A* **91**, 053610 (2015).
34. L. L. Sánchez-Soto, J. J. Monzón, A. G. Barriuso, and J. F. Carinena, *Phys. Rep.* **513**, 191 (2012).
35. A. Bohm, A. Mostafazadeh, H. Koizumi, Q. Niu, and J. Zwanziger, *The Geometric Phase in Quantum Systems*, Springer, Berlin (2003).
36. M. V. Berry, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **392**, 45 (1984).
37. A. Bohm, L. J. Boya, and B. Kendrick, *Phys. Rev. A* **43**, 1206 (1991).
38. D. Chruściński and A. Jamiolkowski, *Geometric Phases in Classical and Quantum Mechanics*, Birkhäuser, Boston (2004).
39. M. Olshanii, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 938 (1998).
40. E. G. M. van Kempen, S. J. J. M. F. Kokkelmans, D. J. Heinzen, and B. J. Verhaar, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 093201 (2002).
41. E. Tiesinga, B. J. Verhaar, and H. T. C. Stoof, *Phys. Rev. A* **47**, 4114 (1993).
42. S. Inouye, M. R. Andrews, J. Stenger et al., *Nature* **392**, 151 (1998).
43. M. Olshanii, M. Albert, G. Aupetit-Diallo et al., *SciPost Phys. Core* **8**, 083 (2025).
44. P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill, New York (1953).
45. M. Olshanii, G. Aupetit-Diallo, S. G. Jackson et al., arXiv:2511.13385.

Effect of Particle Interaction on the Geometric Phase of the Two-Particle Bethe Wavefunction

V. A. Tomilin^{}, A. M. Rostom, L. V. Il'ichov*

Institute of Automation and Electrometry of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences
630090, Novosibirsk, Russia

^{*}E-mail: 8342tomilin@mail.ru

Received May 19, 2026

Revised August 03, 2026

Accepted August 12, 2026

Abstract

A system consisting of a pair of bosons with point-like interaction on a one-dimensional ring with localized potential defect is considered. For a model class of defects, the energy spectrum of the system is obtained and its dependence on the parameters of the problem is described. As a results of slow variation of defect's parameters, the wavefunction of the system gains a phase factor – the geometric phase. It is shown that interaction leads to increase of this geometric phase for a chosen contour of variation. Obtained results can be used for building theoretical model of quantum inertial sensors.

Keywords: quantum geometric phase, integrable systems, Bethe ansatz

Funding. This research was supported by Russian Science Foundation (project No. 23-12-00182-P).

Conflict of interests. The authors declare that they have no conflict of interests.

Authors' contributions. The contributions of the authors are equal.