

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ДИСПЕРСИОННЫХ ЗАКОНОВ И УЛЬТРАСЛОЖНЫЕ ДИАГРАММЫ ПРОВОДИМОСТИ

А. Я. Мальцев*

*Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук
119333, Москва, Россия*

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 28 июня 2026 г.,
после переработки 28 июня 2026 г.
Принята к публикации 8 июля 2026 г.

Изучается вероятность появления ультрасложных диаграмм проводимости в проводниках, отвечающих приближению сильной связи и имеющих простую либо объемноцентрированную кубическую решетку. Наличие ультрасложных диаграмм проводимости позволяет наблюдать целый ряд весьма нетривиальных эффектов в сильных магнитных полях, однако вероятность их возникновения в конкретном веществе довольно мала. В случае простой или объемноцентрированной кубической решетки главное приближение сильной связи не позволяет оценить эту вероятность в силу особенностей возникающих в этом приближении спектров. Для оценки этой вероятности мы используем высшие поправки к главному приближению, дающие более точные аналитические выражения для электронных спектров.

Ключевые слова: сложные поверхности Ферми, гальваномагнитные явления

DOI: 10.31857/S0044451026090077

Таким образом, все векторы

$$\mathbf{p} \equiv \mathbf{p} + n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2 + n_3 \mathbf{a}_3, \quad n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z},$$

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматриваются дисперсионные соотношения, возникающие в кристаллах кубической симметрии в приближении сильной связи. Как хорошо известно, электронные состояния в кристаллах определяются номером энергетической зоны и значением квазиимпульса $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$, определенного с точностью до векторов обратной решетки L^* . Базис $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ решетки L^* задается при этом соотношениями

$$\mathbf{a}_1 = 2\pi\hbar \frac{\mathbf{l}_2 \times \mathbf{l}_3}{(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3)}, \quad \mathbf{a}_2 = 2\pi\hbar \frac{\mathbf{l}_3 \times \mathbf{l}_1}{(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3)},$$

$$\mathbf{a}_3 = 2\pi\hbar \frac{\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2}{(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3)},$$

где $(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3)$ представляют базис кристаллографической решетки L .

определяют одно и то же электронное состояние для заданной разрешенной зоны. Как следствие, значения квазиимпульса электрона можно считать точками трехмерного тора

$$\mathbf{p} \in \mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3 / L^*,$$

получаемого факторизацией пространства $\mathbb{R}^3$ по векторам обратной решетки.

На практике удобно рассматривать оба представления, $\mathbf{p} \in \mathbb{T}^3$ и $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$.

Зависимость энергии электрона от его квазиимпульса, $\epsilon(\mathbf{p})$, определяет дисперсионное соотношение (дисперсионный закон) для заданной энергетической зоны в кристалле. В зависимости от представления $\epsilon(\mathbf{p})$ можно считать либо функцией на торе $\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3 / L^*$, либо 3-периодической функцией в полном пространстве $\mathbb{R}^3$.

Как известно, при изучении проводников наибольший интерес представляют зоны проводимости,

* E-mail: maltsev@itp.ac.ru

т.е. разрешенные энергетические зоны, лишь частично заполненные электронами. Как также хорошо известно, каждый проводник имеет уровень Ферми (энергию Ферми) ϵ_F , ниже которого все электронные состояния заняты, а выше — свободны. Каждой зоне проводимости отвечает при этом своя поверхность Ферми

$$S_F : \epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon_F,$$

которую также можно рассматривать либо как гладкую компактную поверхность в торе $\mathbb{T}^3$, либо как 3-периодическую поверхность в полном $\mathbf{p}$ -пространстве (рис. 1 а). Большинство электронных явлений в проводниках определяется поведением электронов вблизи поверхности Ферми.

Настоящая работа связана с описанием транспортных электронных явлений в проводниках в присутствии сильных магнитных полей. Наличие внешнего магнитного поля $\mathbf{B}$ вызывает эволюцию электронных состояний в $\mathbf{p}$ -пространстве согласно динамической системе

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}_{\text{gr}}(\mathbf{p}) \times \mathbf{B}] \equiv \frac{e}{c} [\nabla \epsilon(\mathbf{p}) \times \mathbf{B}] \quad (1)$$

(см., например, [1–4]).

Геометрически траектории системы (1) задаются пересечениями плоскостей, ортогональных $\mathbf{B}$, и поверхностей постоянной энергии $\epsilon(\mathbf{p}) = \text{const}$ (рис. 1 б).

Условие сильных магнитных полей может быть формально записано в виде $\omega_B \tau \gg 1$, где $\omega_B = eB/m^*c$ — циклотронная частота, а τ — время свободного пробега электрона (m^* играет роль эффективной электронной массы в кристалле).

Более точно, величина B является достаточно большой, если электрон успевает проходить достаточно большое расстояние (много большее размеров зоны Бриллюэна) вдоль траекторий системы (1) между двумя актами рассеяния. Сразу можно отметить, что такая ситуация возникает лишь для достаточно чистых монокристаллических образцов при низких температурах ($T \leq 1$ К) в достаточно сильных магнитных полях ($B \geq 1$ Тл).

Как можно видеть, для достаточно сложных поверхностей Ферми форма траекторий системы (1) может быть также очень сложной (рис. 1 б). В частности, траектории (1) могут быть как замкнутыми, так и открытыми (незамкнутыми) в $\mathbf{p}$ -пространстве (и в торе $\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/L^*$). Как было показано в [5–8], поведение транспортных электронных явлений в пределе $\omega_B \tau \rightarrow \infty$ при этом сильно зависит от формы траекторий (1) и, в частности, от наличия

или отсутствия открытых траекторий на поверхности Ферми.

Форма траекторий (1) на заданной поверхности Ферми существенно зависит от направления $\mathbf{B}$. Здесь нас будет интересовать поведение тензора электропроводности $\sigma^{kl}(\mathbf{B})$ в пределе $B \rightarrow \infty$. В силу сказанного выше для нас будут важны «угловые диаграммы», отмечающие появление открытых траекторий на поверхности Ферми (а также их тип) для различных направлений

$$\mathbf{n} = \mathbf{B}/B \in \mathbb{S}^2.$$

Задача описания всех возможных типов траекторий системы (1) (для произвольного дисперсионного соотношения $\epsilon(\mathbf{p})$) была поставлена Новиковым в работе [9]. Эта задача, как и многочисленные ее приложения, активно исследовалась в его топологической школе (см., например, [10–29]). В частности, к настоящему времени получена полная классификация всех возможных типов открытых траекторий (1) (а также отвечающих им режимов поведения тензора $\sigma^{kl}(\mathbf{B})$ при $B \rightarrow \infty$), которую мы будем использовать при описании упомянутых выше угловых диаграмм. Здесь мы также будем называть такие диаграммы угловыми диаграммами проводимости (металла) в сильных магнитных полях.

Для простых поверхностей Ферми (рис. 2 а, б) угловые диаграммы проводимости также очень просты. А именно, каждое направление $\mathbf{B}$ отвечает наличию лишь замкнутых траекторий (довольно простой формы) на поверхности Ферми. Поведение тензора проводимости в сильных магнитных полях описывается при этом формулой [5]:

$$\sigma_{\text{closed}}^{kl} \simeq \frac{ne^2\tau}{m^*} \begin{pmatrix} (\omega_B\tau)^{-2} & (\omega_B\tau)^{-1} & (\omega_B\tau)^{-1} \\ (\omega_B\tau)^{-1} & (\omega_B\tau)^{-2} & (\omega_B\tau)^{-1} \\ (\omega_B\tau)^{-1} & (\omega_B\tau)^{-1} & * \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$\omega_B\tau \rightarrow \infty.$$

Формула (2) описывает асимптотическое поведение компонент $\sigma^{kl}(\mathbf{B})$ в пределе $B \rightarrow \infty$, в частности предполагается, что каждый матричный элемент в (2) имеет безразмерный множитель порядка 1. Величина n представляет здесь концентрацию носителей тока в металле (символ «*» обозначает безразмерную величину порядка 1). В формуле (2) предполагается также, что ось z направлена вдоль направления $\mathbf{B}$.

Необходимо, однако, сразу сделать важное замечание. «Простые» поверхности Ферми можно разделить на два типа, а именно, поверхности Ферми

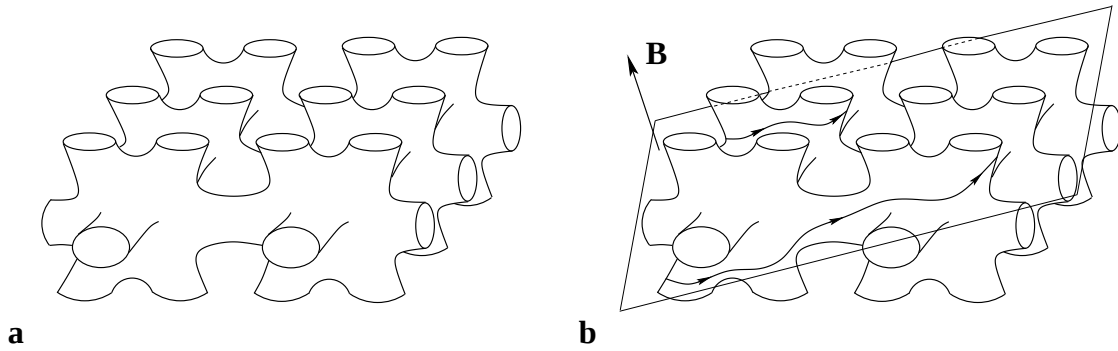


Рис. 1. *a* — Поверхность Ферми достаточно сложной формы в $\mathbf{p}$ -пространстве. *b* — Траектории системы (1) на поверхности Ферми

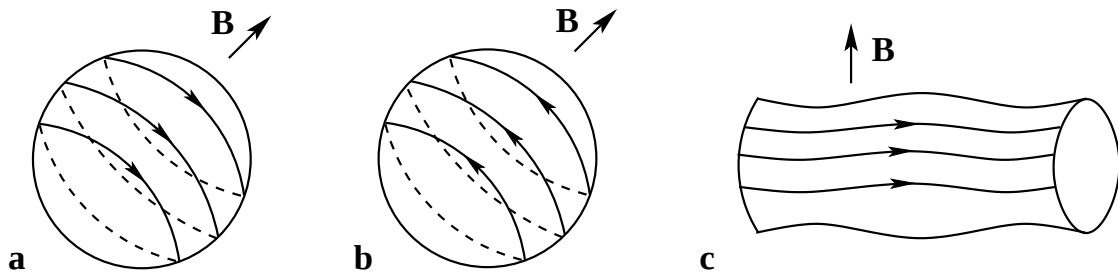


Рис. 2. *a, b* — Простые поверхности Ферми электронного и дырочного типов, несущие замкнутые траектории системы (1). *c* — Периодические траектории системы (1)

электронного типа (рис. 2 *a*) и поверхности Ферми дырочного типа (рис. 2 *b*). Поверхности Ферми электронного типа ограничивают области $\epsilon(\mathbf{p}) < \epsilon_F$, в то время как поверхности дырочного типа ограничивают области $\epsilon(\mathbf{p}) > \epsilon_F$, что непосредственно отражается в поведении холловской проводимости $\sigma^{xy}(\mathbf{B})$. А именно, вклад поверхности Ферми электронного типа в холловскую проводимость задается в главном порядке формулой [1–4, 8]

$$\sigma^{xy} = -\sigma^{yx} = \frac{ec}{B} \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (3)$$

в то время как вклад от поверхности Ферми дырочного типа дается формулой

$$\sigma^{xy} = -\sigma^{yx} = -\frac{ec}{B} \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (4)$$

В формулах (3), (4) величина V представляет объем, ограничиваемый поверхностью Ферми в $\mathbf{p}$ -пространстве. Отметим, что величины (3), (4) не зависят от направления $\mathbf{B}$, т. е. постоянны на всей угловой диаграмме при заданной величине B (для «простых» поверхностей Ферми).

Можно также отметить, что для дисперсионного соотношения $\epsilon(\mathbf{p})$ с интервалом значений

$$\epsilon_{\min} \leq \epsilon(\mathbf{p}) \leq \epsilon_{\max}$$

поверхности Ферми электронного типа возникают при ϵ_F , близких к $\epsilon_{\min}$, а поверхности Ферми дырочного типа — при ϵ_F , близких к $\epsilon_{\max}$.

Периодические открытые траектории (рис. 2 *c*) представляют простейшие из открытых траекторий системы (1). Их вклад в тензор $\sigma^{kl}(\mathbf{B})$ в пределе $\omega_B \tau \rightarrow \infty$ задается асимптотической формулой [5]

$$\Delta\sigma_{\text{periodic}}^{kl} \simeq \frac{ne^2\tau}{m^*} \begin{pmatrix} (\omega_B\tau)^{-2} & (\omega_B\tau)^{-1} & (\omega_B\tau)^{-1} \\ (\omega_B\tau)^{-1} & * & * \\ (\omega_B\tau)^{-1} & * & * \end{pmatrix}. \quad (5)$$

В формуле (5), как и в формуле (2), ось z направлена вдоль магнитного поля $\mathbf{B}$. Кроме того, в формуле (5) направление оси x совпадает со средним направлением открытых траекторий в $\mathbf{p}$ -пространстве. Нетрудно видеть, что главное отличие формулы (5) от формулы (2) состоит в появлении сильной анизотропии проводимости в плоскости, ортогональной $\mathbf{B}$. Отметим также, что при появлении открытых траекторий на поверхности Ферми формулы (3), (4) перестают выполняться.

Можно видеть, что периодические траектории, приведенные на рис. 2 *c*, являются устойчивыми при малых вращениях $\mathbf{B}$ в плоскости, ортогональной их среднему направлению, и разрушаются при других

вращениях $\mathbf{B}$. Появление таких траекторий на поверхности Ферми, таким образом, отвечает одномерным отрезкам на угловой диаграмме (т. е. на сфере направлений $S^2 \ni \mathbf{n} = \mathbf{B}/B$).

Легко видеть, что появление открытых траекторий системы (1) возможно лишь на достаточно сложных поверхностях Ферми. В целом, сложность поверхности Ферми характеризуется ее родом g , а также топологическим рангом S_F .

Род поверхности Ферми связан с ее представлением в виде компактной (ориентируемой) поверхности

$$S_F \subset \mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/L^*,$$

вложенной в трехмерный тор. В этом представлении поверхность Ферми гомеоморфна одной из канонических поверхностей (рис. 3 а), определяемых значением g . Род поверхности Ферми может принимать значения $g = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

Ранг поверхности Ферми связан с особенностями ее вложения в $\mathbb{T}^3$ и $\mathbb{R}^3$ и равен количеству независимых направлений, в которых она простирается в $\mathbf{p}$ -пространстве (рис. 3 б). Ранг поверхности Ферми может принимать значения 0, 1, 2 и 3.

Легко видеть, что поверхности Ферми, представленные на рис. 2 а, б, имеют род $g = 0$ и ранг $S_F = 0$, а поверхность Ферми, представленная на рис. 2 с, — род $g = 1$ и ранг $S_F = 1$. Здесь нас будут интересовать более сложные поверхности Ферми, имеющие род $g \geq 3$ и ранг $S_F = 3$.

Главным типом открытых траекторий системы (1) являются устойчивые открытые траектории, т. е. траектории, сохраняющиеся и не меняющие существенно своей формы при малых вращениях $\mathbf{B}$, а также вариациях уровня ϵ_F . Согласно [10, 11, 13], устойчивые открытые траектории (1) обладают замечательными свойствами. А именно:

- 1) каждая устойчивая открытая траектория (1) лежит в прямой полосе конечной ширины (в плоскости, ортогональной $\mathbf{B}$), проходя ее насквозь (рис. 4);
- 2) среднее направление устойчивых открытых траекторий в $\mathbf{p}$ -пространстве задается пересечением плоскости, ортогональной $\mathbf{B}$, и некоторой целочисленной (порожденной двумя векторами обратной решетки) плоскости Γ , неизменной при малых вращениях $\mathbf{B}$.

Вклад устойчивых открытых траекторий в тензор $\sigma^{kl}(\mathbf{B})$ также сильно анизотропен в плоскости, ортогональной $\mathbf{B}$, и описывается формулой (5) в главном порядке при $B \rightarrow \infty$. Данное свойство особенно удобно для экспериментального исследования таких траекторий и, в частности, сыграло важ-

ную роль для введения топологических чисел, наблюдаемых в проводимости нормальных металлов, в работе [18].

Появление устойчивых открытых траекторий на поверхности Ферми отвечает двумерным областям $\Omega_\alpha \subset S^2$ (зонам устойчивости) на угловой диаграмме, каждая из которых отвечает своей целочисленной плоскости Γ_α . Как нетрудно видеть, появление устойчивых открытых траекторий возможно лишь на достаточно сложных поверхностях Ферми (типа представленных на рис. 1).

Угловые диаграммы, содержащие зоны устойчивости Ω_α , возникают в интервале энергий

$$\epsilon_F \in (\epsilon_1^A, \epsilon_2^A),$$

более узком, чем полный интервал значений $\epsilon(\mathbf{p})$:

$$\epsilon_{\min} \leq \epsilon_1^A < \epsilon_2^A \leq \epsilon_{\max}.$$

Мы будем называть такие диаграммы сложными диаграммами проводимости.

В действительности, интервал $(\epsilon_1^A, \epsilon_2^A)$ имеет дополнительную структуру, связанную в том числе с поведением холловской проводимости в сильных магнитных полях [27, 28]. А именно, в случае общего положения интервал $(\epsilon_1^A, \epsilon_2^A)$ может быть разделен на три интервала

$$(\epsilon_1^A, \epsilon_2^A) = (\epsilon_1^A, \epsilon_1^B) \cup [\epsilon_1^B, \epsilon_2^B] \cup (\epsilon_2^B, \epsilon_2^A),$$

отвечающих разным типам сложных угловых диаграмм.

Для значений $\epsilon_F \in (\epsilon_1^A, \epsilon_1^B)$ диаграммы проводимости (диаграммы типа A_-) содержат конечное число зон устойчивости (рис. 5 а). Большая часть диаграммы, как правило, заполнена при этом направлениями $\mathbf{B}$, отвечающими наличию лишь замкнутых траекторий на поверхности Ферми. Для всех таких направлений $\mathbf{B}$ холловская проводимость имеет здесь электронный тип, при этом можно пользоваться соотношением

$$\sigma^{xy} = -\sigma^{yx} = \frac{ec}{B} \frac{2V_-}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (6)$$

где V_- — объем области $\epsilon(\mathbf{p}) < \epsilon_F$ в торе $\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/L^*$. Можно видеть, что холловская проводимость имеет при этом одно и то же значение (при заданной величине B) в этой части угловой диаграммы.

Аналогично для значений $\epsilon_F \in (\epsilon_2^B, \epsilon_2^A)$ диаграммы проводимости (диаграммы типа A_+) содержат

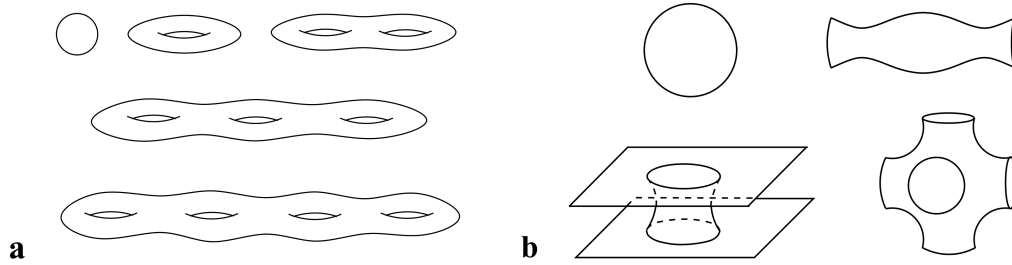


Рис. 3. *a* — Абстрактные поверхности Ферми рода 0, 1, 2, 3 и 4. *b* — Поверхности Ферми ранга 0, 1, 2 и 3

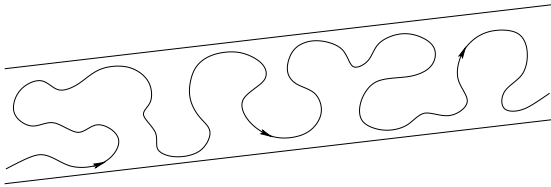


Рис. 4. Вид устойчивой открытой траектории системы (1) в плоскости, ортогональной $\mathbf{B}$ (схематично)

конечное число зон устойчивости (рис. 5 *b*). Большая часть диаграммы при этом также отвечает появлению лишь замкнутых траекторий на поверхности Ферми. Холловская проводимость имеет в этой части дырочный тип и задается соотношением

$$\sigma^{xy} = -\sigma^{yx} = -\frac{ec}{B} \frac{2V_+}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (7)$$

где V_+ — объем области $\epsilon(\mathbf{p}) > \epsilon_F$ в торе $T^3 = \mathbb{R}^3/L^*$.

Диаграммы типа A_- и A_+ разделяются еще более сложными диаграммами (диаграммами типа B), которые мы будем называть ультрасложными диаграммами проводимости (рис. 6).

В случае общего положения диаграммы типа B возникают в конечном интервале энергий $[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$ [27, 28], разделяющем интервалы $(\epsilon_1^A, \epsilon_1^B)$ и $(\epsilon_2^B, \epsilon_2^A)$. Диаграммы типа B общего положения содержат бесконечное число зон Ω_α , а среди областей, отвечающих наличию лишь замкнутых траекторий на поверхности Ферми, есть как области электронной, так и области дырочной холловской проводимости (рис. 6). Как и ранее, в областях первого типа здесь можно пользоваться формулой (6), а в областях второго типа — формулой (7).

Точки накопления мелких зон Ω_α отвечают, как правило, появлению сложных «хаотических» траекторий (траекторий Царева или Дынникова) на поверхности Ферми. Самые сложные из них (траектории Дынникова) обладают весьма сложной формой, «блуждая всюду» в плоскости, ортогональной $\mathbf{B}$ (рис. 7 *a*).

Сложная форма таких траекторий отражается также в их вкладе в тензор проводимости в пределе $B \rightarrow \infty$ (подавление проводимости вдоль направления $\mathbf{B}$, появление дробных степеней $\omega_B \tau$ в компонентах $\sigma^{kl}(\mathbf{B})$ и др. [19, 25]). Отметим здесь также, что многочисленные свойства хаотических траекторий в целом представляют большой интерес и активно исследуются и в настоящее время (см. [29–43]).

Можно также отметить, что измельчение зон Ω_α сопровождается усложнением формы устойчивых открытых траекторий (рис. 7 *b*) и усложнением их вклада в тензор $\sigma^{kl}(\mathbf{B})$, постепенно переводя их в «хаотический» режим.

Несмотря на то, что появление диаграмм типа B является общим свойством дисперсионных законов общего положения, они пока не были обнаружены экспериментально. С нашей точки зрения, это обстоятельство обусловлено чрезвычайной узостью интервала $[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$ для реальных дисперсионных законов. В настоящей работе мы приведем оценку положения интервала $[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$ и его ширины для аналитических соотношений $\epsilon(\mathbf{p})$, основанных на приближении сильной связи для кристаллов кубической симметрии.

В работе [44] приведена оценка положения интервала $[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$ для простой, гранецентрированной и объемноцентрированной кубических решеток в главном приближении сильной связи. Надо сказать, однако, что главное приближение сильной связи не позволяет оценить ширину интервала $[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$ для простой и объемноцентрированной решеток и определяет только его положение ($\epsilon_F \simeq 0$). Причина этого в том, что в главном приближении сильной связи соотношения $\epsilon(\mathbf{p})$ для этих решеток не являются дисперсионными законами общего положения и интервал $[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$ для них стягивается в точку ($\epsilon_1^B = \epsilon_2^B$).

Описанное выше свойство присуще, в действительности, всем дисперсионным соотношениям $\epsilon(\mathbf{p})$, содержащим лишь нечетные фурье-гармоники, так что

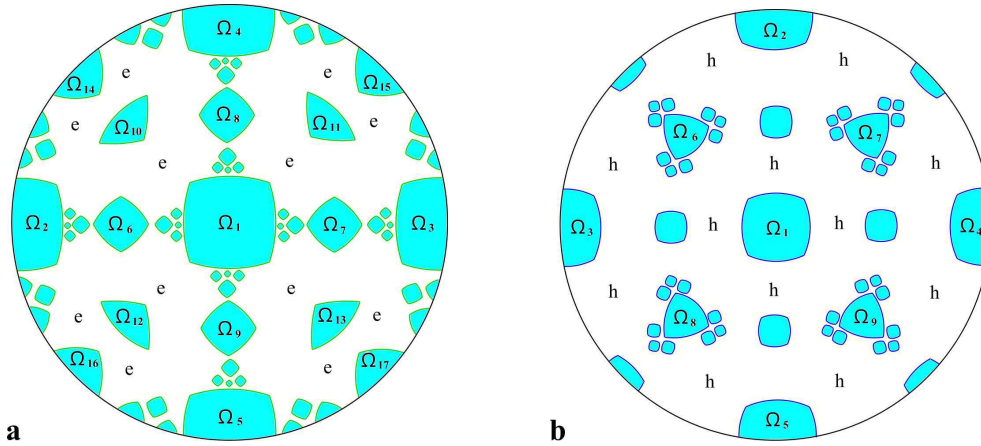


Рис. 5. *a* — Сложная угловая диаграмма типа A_- (схематично). *b* — Сложная угловая диаграмма типа A_+ (схематично). (Знаками e и h обозначен тип холловской проводимости в областях наличия лишь замкнутых траекторий на поверхности Ферми)

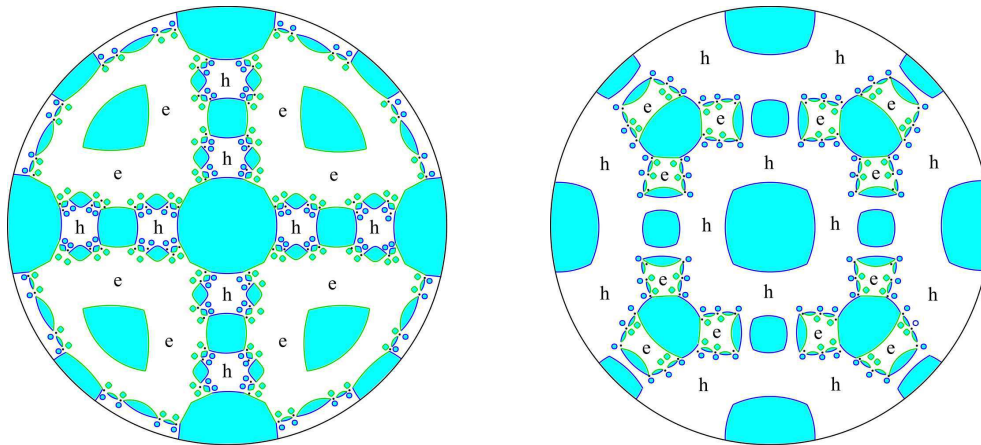


Рис. 6. Диаграммы типа B (схематично). Знаками e и h обозначен тип холловской проводимости в областях наличия лишь замкнутых траекторий на поверхности Ферми

$$\epsilon \left(\mathbf{p} + \frac{1}{2} (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3) \right) = -\epsilon(\mathbf{p}).$$

В частности, это относится к дисперсионному соотношению

$$\epsilon(\mathbf{p}) \sim \cos \frac{p_x l}{\hbar} + \cos \frac{p_y l}{\hbar} + \cos \frac{p_z l}{\hbar},$$

возникающему в главном порядке приближения сильной связи для простой кубической решетки. Поверхность Ферми

$$\cos \frac{p_x l}{\hbar} + \cos \frac{p_y l}{\hbar} + \cos \frac{p_z l}{\hbar} = 0$$

содержит незамкнутые траектории (1) при любом направлении $\mathbf{B}$ [15], а соответствующая ей угловая диаграмма имеет наиболее сложный вид (будучи

полностью заполненной зонами Ω_α , а также «хаотическими» и «специальными рациональными» направлениями $\mathbf{B}$ [15, 26, 29]). Для значений $\epsilon_F < 0$ угловые диаграммы проводимости имеют при этом тип A_- (или относятся к классу простых), а для $\epsilon_F > 0$ — тип A_+ (или относятся к классу простых).

Аналогичная ситуация возникает также в случае объемноцентрированной кубической решетки, где дисперсионное соотношение имеет в главном порядке вид

$$\epsilon(\mathbf{p}) \sim \cos \frac{p_x l}{\hbar} \cos \frac{p_y l}{\hbar} \cos \frac{p_z l}{\hbar}.$$

В настоящей работе мы приведем оценку ширины интервала $[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$ для простой и объемноцентрированной кубических решеток с учетом высших поправок в приближении сильной связи. Поправки

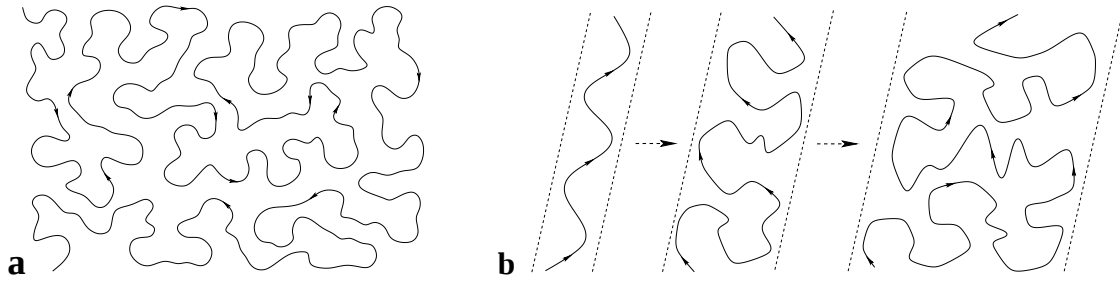


Рис. 7. *a* — Хаотическая траектория Дынникова в плоскости, ортогональной $\mathbf{B}$ (схематично). *b* — Усложнение формы устойчивых открытых траекторий при уменьшении размеров зон Ω_α

к главному приближению задаются здесь высшими фурье-гармониками, определяемыми геометрией решетки. С общей точки зрения, соответствующие дисперсионные законы являются частным случаем аналитических дисперсионных соотношений, также широко рассматриваемых в литературе (см., например, [6–8]). В следующем разделе мы кратко опишем упрощенный метод оценки положения интервала $[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$, а также проведем эту оценку для простой кубической решетки. В разд. 3 мы проведем оценку положения $[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$ для объемноцентрированной решетки, где поверхности Ферми обладают более сложной геометрией.

2. МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ИНТЕРВАЛА $[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$ И СЛУЧАЙ ПРОСТОЙ КУБИЧЕСКОЙ РЕШЕТКИ

Для нахождения интервала $[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$, конечно, необходимо исследование системы (1) на поверхностях Ферми $\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon_F$ при различных значениях ϵ_F . В действительности, угловые диаграммы, аналогичные диаграммам для поверхностей Ферми, могут быть построены и для всего дисперсионного закона [17]. Такие угловые диаграммы содержат зоны устойчивости W_α , которые теперь образуют всюду плотное множество на сфере $\mathbb{S}^2$ (рис. 8 *a*). Каждая из зон Ω_α является подобластью некоторой зоны W_α , отвечающей той же целочисленной плоскости Γ_α .

Для каждого $\mathbf{n} = \mathbf{B}/B \in \Omega_\alpha$ система (1) обладает определенной структурой на соответствующей поверхности Ферми [10, 13, 17]. А именно, поверхность Ферми содержит определенное число цилиндров замкнутых траекторий, разделяющих ее на «носители открытых траекторий», которые, в свою очередь, представляют собой периодически деформированные целочисленные плоскости (с отверстиями) в $\mathbf{p}$ -пространстве (рис. 9 *a*). На границе зоны Ω_α происходит разрушение описанной структуры тра-

екторий, вызываемое обращением в нуль высоты одного из цилиндров замкнутых траекторий, разделяющих носители открытых траекторий (рис. 9 *b*).

Для $\mathbf{n} \in W_\alpha$ аналогичная структура системы (1) сохраняется в некотором интервале

$$\epsilon_F \in [\tilde{\epsilon}_1(\mathbf{n}), \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{n})],$$

где $\tilde{\epsilon}_1(\mathbf{n})$ и $\tilde{\epsilon}_2(\mathbf{n})$ — некоторые непрерывные функции на сфере $\mathbb{S}^2$ [17], такие что

$$\tilde{\epsilon}_1(\mathbf{n}) \leq \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{n})$$

(т. е. в каждой точке сферы).

На границе зоны W_α происходит исчезновение как минимум двух цилиндров замкнутых траекторий (электронного и дырочного типа), разделяющих носители открытых траекторий. Данное условие определяет в общем случае как положение границы W_α , так и значение функции

$$\tilde{\epsilon}_0(\mathbf{n}) = \tilde{\epsilon}_1(\mathbf{n}) = \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{n})$$

при $\mathbf{n} \in \partial W_\alpha$ [17].

Согласно [27, 28], величины ϵ_1^B и ϵ_2^B удовлетворяют соотношениям

$$\epsilon_1^B = \min_{\mathbb{S}^2} \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{n}) \quad , \quad \epsilon_2^B = \max_{\mathbb{S}^2} \tilde{\epsilon}_1(\mathbf{n}). \quad (8)$$

Глобально, в случае общего положения при этом имеет место соотношение

$$\max_{\mathbb{S}^2} \tilde{\epsilon}_1(\mathbf{n}) > \min_{\mathbb{S}^2} \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{n}).$$

Нахождение функций $\tilde{\epsilon}_1(\mathbf{n})$ и $\tilde{\epsilon}_2(\mathbf{n})$ в общем случае представляет собой довольно сложную вычислительную задачу. Для приближенного вычисления ширины интервала $[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$, однако, можно использовать специальные методы, дающие хорошую (а в ряде случаев точную) оценку его положения. Мы используем метод, предложенный в [44] и подходящий

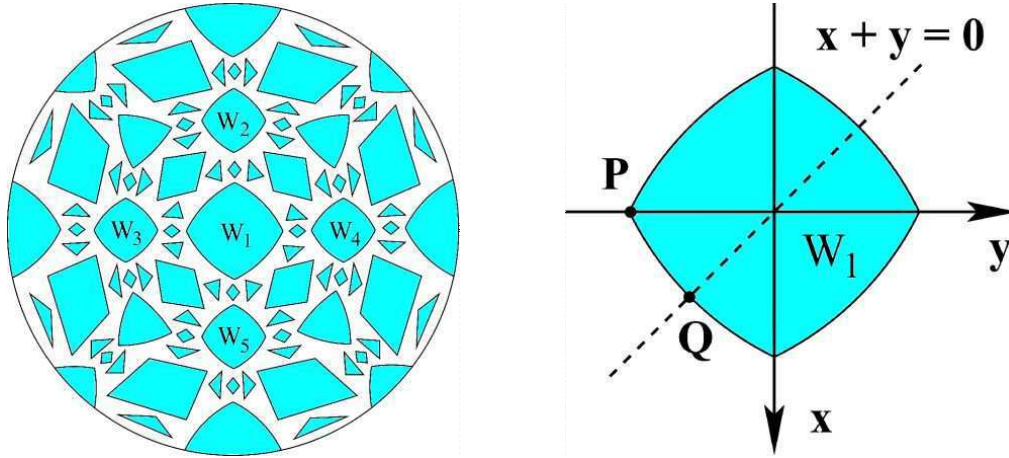


Рис. 8. *a* — зоны W_α на «полной» угловой диаграмме для дисперсионного соотношения $\epsilon(\mathbf{p})$. *b* — «Симметричные» точки P и Q на границе симметричной зоны W_1

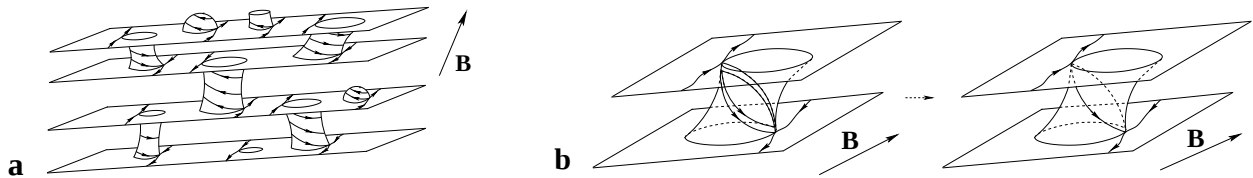


Рис. 9. *a* — Сложная поверхность Ферми, разделенная замкнутыми траекториями на носители открытых траекторий. *b* — Обращение в нуль высоты цилиндра замкнутых траекторий на границе зоны Ω_α или W_α

для многих соотношений $\epsilon(\mathbf{p})$, обладающих достаточно богатой симметрией.

Во-первых, заменим (8) выражениями

$$\epsilon_1^B = \min_{\cup \partial W_\alpha} \tilde{\epsilon}_0(\mathbf{n}), \quad \epsilon_2^B = \max_{\cup \partial W_\alpha} \tilde{\epsilon}_0(\mathbf{n}) \quad (9)$$

(минимум и максимум берутся лишь по границам зон W_α), дающими для большинства «физически реалистичных» соотношений $\epsilon(\mathbf{p})$ те же значения ϵ_1^B и ϵ_2^B .

Во-вторых, для оценки выражений (9) мы используем значения $\tilde{\epsilon}_0(\mathbf{n})$ на границах наиболее крупных зон W_α , где их вариация является достаточно большой. Более точно, для оценки значений ϵ_1^B и ϵ_2^B мы используем значения $\tilde{\epsilon}_0(P)$ и $\tilde{\epsilon}_0(Q)$ в «симметричных» точках P и Q границы симметричной зоны W_1 , показанных на рис. 8 *b*. Отслеживая исчезновение цилиндров замкнутых траекторий на соответствующих поверхностях Ферми, мы сможем определять положение точек P и Q на сфере S^2 , а также значения $\tilde{\epsilon}_0(P)$ и $\tilde{\epsilon}_0(Q)$.

В этом разделе мы проведем оценку положения интервала $[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$ в приближении сильной связи для простой кубической решетки. Для простоты мы будем использовать значения ϵ и $\mathbf{p}$, приведенные

к безразмерному виду, и обозначать компоненты $\mathbf{p}$ обычными координатами $\mathbf{p} = (x, y, z)$.

В качестве поправки к главному приближению мы рассмотрим перескоки на узлы, следующие за ближайшими (рис. 10). Полное дисперсионное соотношение при этом принимает вид

$$\begin{aligned} \epsilon_\delta(\mathbf{p}) &= \cos x + \cos y + \cos z + \\ &+ \delta [\cos(x+y) + \cos(x-y) + \cos(x+z) + \\ &+ \cos(x-z) + \cos(y+z) + \cos(y-z)] = \\ &= \cos x + \cos y + \cos z + \\ &+ 2\delta(\cos x \cos y + \cos x \cos z + \cos y \cos z). \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнения поверхностей Ферми

$$\begin{aligned} \cos x + \cos y + \cos z + \\ + 2\delta(\cos x \cos y + \cos x \cos z + \cos y \cos z) &= \epsilon_F \end{aligned}$$

инвариантны относительно замены

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x + \pi, \quad y \rightarrow y + \pi, \quad z \rightarrow z + \pi, \\ \delta &\rightarrow -\delta, \quad \epsilon_F \rightarrow -\epsilon_F. \end{aligned}$$

Можно видеть, таким образом, что поверхности Ферми $\epsilon_{-\delta}(\mathbf{p}) = \epsilon_F$ получаются из поверхностей

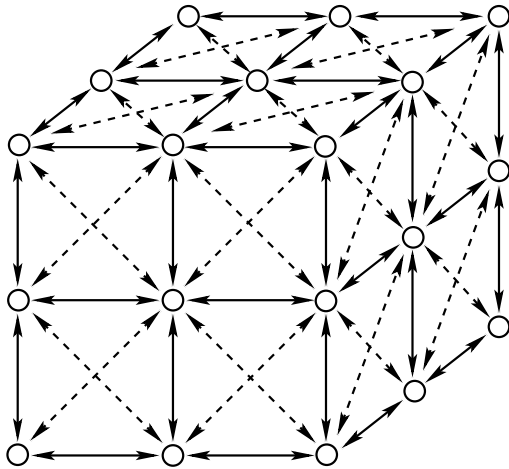


Рис. 10. Главные и дополнительные перескоки между узлами простой кубической решетки в приближении сильной связи

$\epsilon_\delta(\mathbf{p}) = -\epsilon_F$ сдвигом в $\mathbf{p}$ -пространстве, и при изучении формы траекторий (1) нам достаточно ограничиться значениями $\delta \geq 0$ (вещественность δ является следствием симметрии решетки).

При $\delta = 0$ поверхность Ферми $\epsilon(\mathbf{p}) = 0$ имеет род 3 и ранг 3 (рис. 11), и это свойство сохраняется при достаточно малых значениях δ и ϵ_F .

При направлениях $\mathbf{B}$, достаточно близких к z , на таких поверхностях Ферми легко выделить цилиндры C_1 и C_2 (электронного и дырочного типа), разрезающие эти поверхности на носители открытых траекторий при $\mathbf{n} \in W_1$ (и $\epsilon_F \in [\tilde{\epsilon}_1(\mathbf{n}), \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{n})]$) (рис. 11).

Нетрудно видеть, что соотношение (10), а также поверхности Ферми $\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon_F$, симметричны относительно плоскостей

$$\Pi_n: \quad x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

(а также плоскостей $y = \pi n, z = \pi n, n \in \mathbb{Z}$).

Точка $P \in \mathbb{S}^2$ (рис. 8b) отвечает исчезновению обоих цилиндров C_1 и C_2 . Согласно рис. 9b, это отвечает появлению цилиндров нулевой высоты, содержащих пару седловых особых точек системы (1). Как нетрудно видеть, в силу симметрии, седловые особые точки лежат при этом в плоскостях Π_n .

В плоскостях Π_n исчезновение цилиндров C_1 и C_2 отвечает одновременному касанию пары овалов, заданных соотношением

$$\epsilon(\mathbf{p}) \Big|_{\Pi_n} = \epsilon_F,$$

некоторыми плоскостями $\Pi(\mathbf{B})$, ортогональными $\mathbf{B}$ (или, что то же, прямыми $\Pi(\mathbf{B}) \cap \Pi_n$). В частности,

в четных плоскостях Π_n прямые $\Pi(\mathbf{B}) \cap \Pi_n$ должны касаться пар овалов, задаваемых соотношением

$$(1 + 2\delta)(\cos y + \cos z) + 2\delta \cos y \cos z = \epsilon_F - 1,$$

а в нечетных

$$(1 - 2\delta)(\cos y + \cos z) + 2\delta \cos y \cos z = \epsilon_F + 1$$

(см. рис. 12).

Условие совпадения наклона касательных в четных и нечетных плоскостях Π_n дает необходимую нам зависимость величины ϵ_F (т.е. $\tilde{\epsilon}_0(P)$) от величины δ .

Аналогично, точка $Q \in \mathbb{S}^2$ отвечает появлению цилиндров нулевой высоты (C_1 и C_2), содержащих особые точки системы (1). Как нетрудно видеть из геометрии наших поверхностей Ферми, каждый цилиндр нулевой высоты содержит теперь четыре седловых особых точки (1). По топологическим причинам полное число седловых особых точек на наших поверхностях также при этом равно 4. Отсюда следует, что каждая плоскость $\Pi(\mathbf{B})$, содержащая цилиндры C_1 нулевой высоты, должна также содержать и цилиндры C_2 нулевой высоты (примыкающие к тем же седлам).

При значении $\delta = 0$ мы имеем $\tilde{\epsilon}_0(Q) = 0$, а в качестве нужной нам плоскости выступает, например, плоскость

$$z = (y - x)/2. \quad (11)$$

Как следует из симметрии закона дисперсии (10), при $\delta \neq 0$, плоскость $\Pi(\mathbf{B})$, содержащая цилиндры электронного типа, проходит, в частности, через точки $(-\pi, -\pi, 0)$ и $(\pi, \pi, 0)$ (центры цилиндров). Аналогично, через точки $(0, -2\pi, \pi)$ и $(2\pi, 0, \pi)$ проходит плоскость $\Pi(\mathbf{B})$, содержащая цилиндры дырочного типа. Обе эти плоскости, очевидно, совпадают с плоскостью (11) при $\delta = 0$. В силу сказанного выше, однако, эти плоскости должны совпадать друг с другом и при $\delta \neq 0$. Это означает, что плоскость (11) остается неизменной также при $\delta \neq 0$, при этом меняется лишь значение $\tilde{\epsilon}_0(Q, \delta)$, а также положение седловых особых точек внутри этой плоскости (рис. 13). Другими словами, в рассматриваемом случае положение точки $Q \in \mathbb{S}^2$ остается неизменным при вариациях δ .

В силу симметрии задачи для нахождения значения $\tilde{\epsilon}_0(Q, \delta)$ достаточно наложить условие касания плоскости (11) и поверхности $\epsilon_\delta(\mathbf{p}) = \tilde{\epsilon}_0(Q, \delta)$ в одном из седел (с координатами (x, y, z)). Условие касания подразумевает при этом коллинеарность градиента $\epsilon_\delta(\mathbf{p})$

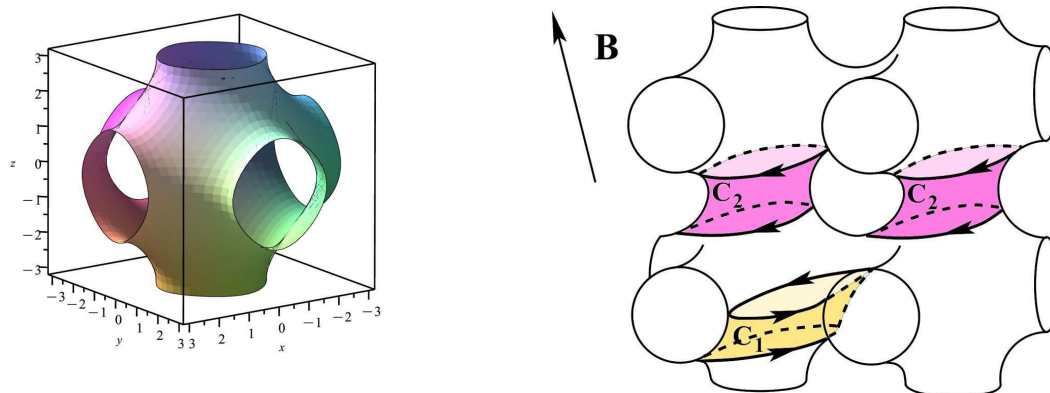


Рис. 11. Поверхности Ферми $\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon_F$ при достаточно малых значениях δ и ϵ_F и цилиндры замкнутых траекторий, разрезающие поверхности Ферми на носители открытых траекторий (простая кубическая решетка)

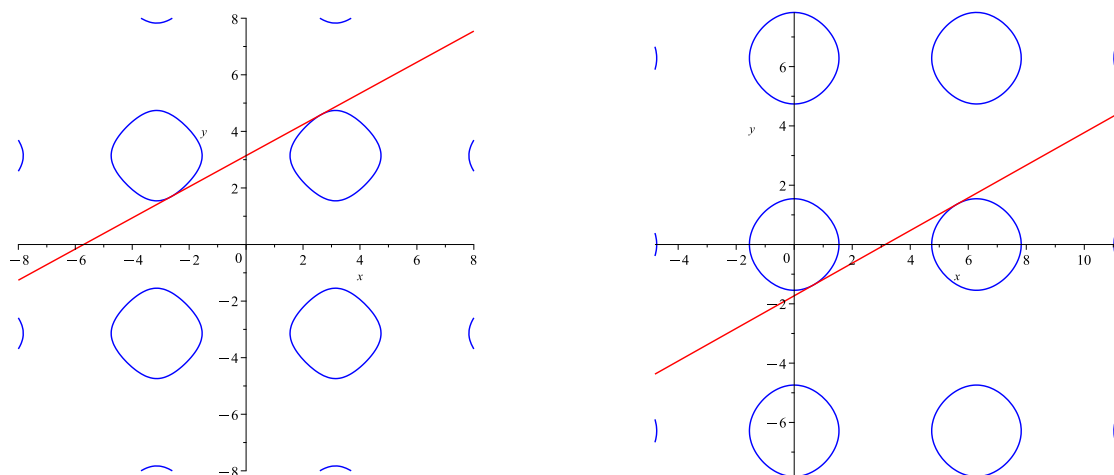


Рис. 12. Одновременное касание пары овалов, задаваемое соотношением $\epsilon_\delta(\mathbf{p}) = \epsilon_F$ ($\delta = 0.2$, $\epsilon_F = -0.1728265816$), прямыми $\Pi(\mathbf{B}) \cap \Pi_n$ в четных и нечетных плоскостях Π_n (простая кубическая решетка)

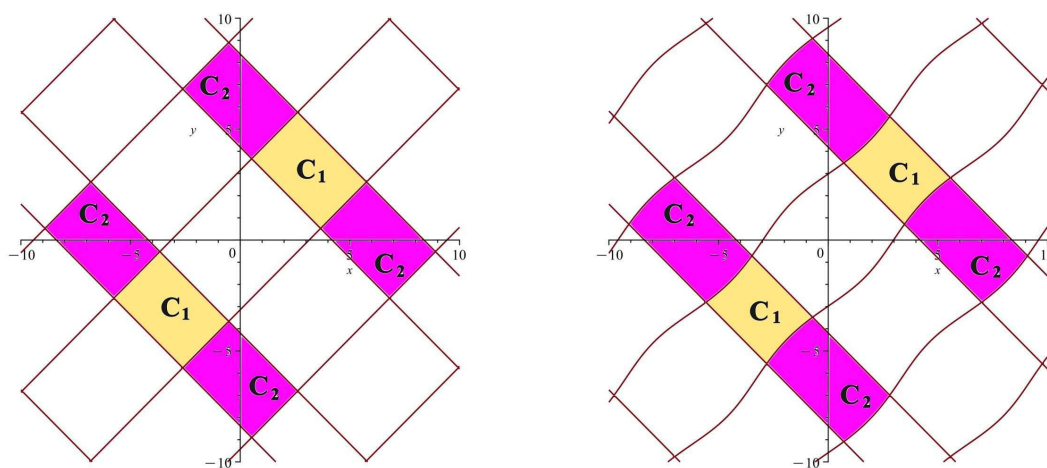


Рис. 13. Линии уровня $\epsilon_0(\mathbf{p}) = 0$ и $\epsilon_\delta(\mathbf{p}) = \epsilon_F$ ($\delta = 0.2$, $\epsilon_F = -0.3$) в плоскости (11) для дисперсионного закона (10) (простая кубическая решетка)

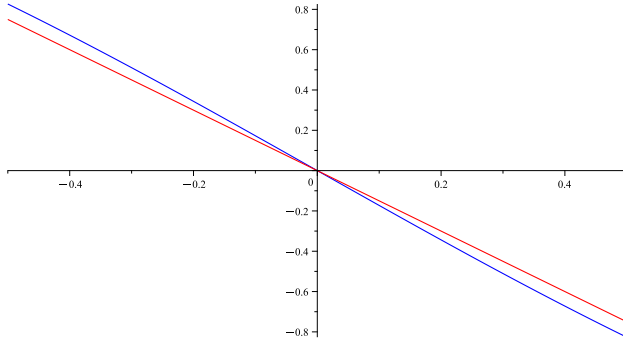


Рис. 14. Значения $\tilde{\epsilon}_0(P, \delta)$ и $\tilde{\epsilon}_0(Q, \delta)$ для дисперсионного закона (10) в интервале $-0.5 < \delta < 0.5$ (простая кубическая решетка)

$$\begin{aligned} \nabla \epsilon_\delta(\mathbf{p}) &= \begin{pmatrix} -\sin x (1 + 2\delta \cos y + 2\delta \cos z) \\ -\sin y (1 + 2\delta \cos x + 2\delta \cos z) \\ -\sin z (1 + 2\delta \cos x + 2\delta \cos y) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\sin x (1 + 2\delta \cos y + 2\delta \cos \frac{y-x}{2}) \\ -\sin y (1 + 2\delta \cos x + 2\delta \cos \frac{y-x}{2}) \\ -\sin \frac{y-x}{2} (1 + 2\delta \cos x + 2\delta \cos y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

и вектора $(1, -1, 2)$ в точке (x, y, z) .

Решая систему

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_0(Q, \delta) &= \cos x + \cos y + \cos \frac{y-x}{2} + \\ &+ 2\delta \left(\cos x \cos y + (\cos x + \cos y) \cos \frac{y-x}{2} \right), \\ \sin x \left(1 + 2\delta \cos y + 2\delta \cos \frac{y-x}{2} \right) &= \\ &= -\sin y \left(1 + 2\delta \cos x + 2\delta \cos \frac{y-x}{2} \right), \\ \sin x \left(1 + 2\delta \cos y + 2\delta \cos \frac{y-x}{2} \right) &= \\ &= \frac{1}{2} \sin \frac{y-x}{2} \left(1 + 2\delta \cos x + 2\delta \cos y \right) \end{aligned}$$

относительно x , y и $\tilde{\epsilon}_0(Q, \delta)$, мы получаем нужную зависимость.

Результаты вычислений функций $\tilde{\epsilon}_0(P)$ и $\tilde{\epsilon}_0(Q)$ представлены на рис. 14. Всюду в интервале $0 < \delta < 0.5$ мы имеем соотношение $\tilde{\epsilon}_0(P) < \tilde{\epsilon}_0(Q)$ (и $\tilde{\epsilon}_0(P) > \tilde{\epsilon}_0(Q)$ в интервале $-0.5 < \delta < 0$). Как нетрудно видеть, вблизи значения $\delta = 0.5$ оценка ширины интервала $[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B] \simeq [\tilde{\epsilon}_0(P), \tilde{\epsilon}_0(Q)]$ составляет порядка 1.5% от ширины зоны проводимости.

При значении $\delta \simeq 0.5$ топология поверхностей Ферми вблизи интервала $[\tilde{\epsilon}_0(P), \tilde{\epsilon}_0(Q)]$ изменяется. А именно, поверхности Ферми приобретают дополнительные (очень тонкие) «ручки», и их род увеличивается до 7. При $\delta > 0.5$, таким образом, оценка

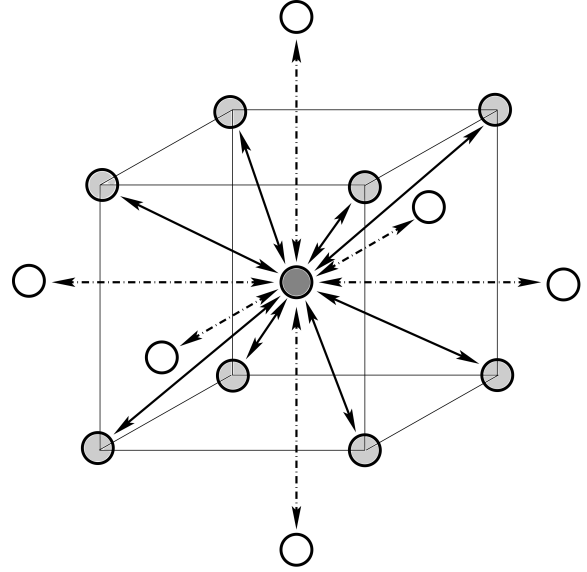


Рис. 15. Главные и дополнительные перескоки в объемно-центрированной кубической решетке

интервала $[\tilde{\epsilon}_0(P), \tilde{\epsilon}_0(Q)]$ должна проводиться исходя из новой геометрии поверхностей Ферми. В данной работе мы рассматриваем высшие члены в (10) как поправки к основному приближению, поэтому ограничимся интервалом значений $-0.5 < \delta < 0.5$ для простой кубической решетки.

3. ОБЪЕМНОЦЕНТРИРОВАННАЯ КУБИЧЕСКАЯ РЕШЕТКА

Как и в предыдущем разделе, мы рассмотрим приближение, основанное на перескоках между ближайшими и следующими за ними узлами решетки (рис. 15). Приведя величины ϵ и $\mathbf{p}$ к безразмерному виду, используем следующую нормировку:

$$\begin{aligned} \epsilon(\mathbf{p}) &= \frac{1}{4} \left[\cos(x+y+z) + \cos(x+y-z) + \right. \\ &\quad \left. + \cos(x-y+z) + \cos(-x+y+z) + \right. \\ &\quad \left. + \delta \cos 2x + \delta \cos 2y + \delta \cos 2z \right] = \\ &= \cos x \cos y \cos z + \frac{\delta}{4} (\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z). \end{aligned} \quad (12)$$

Легко видеть, что сдвиг

$$x \rightarrow x + \pi, \quad y \rightarrow y + \pi, \quad z \rightarrow z + \pi$$

переводит поверхности $\epsilon_{-\delta}(\mathbf{p}) = \epsilon_F$ в поверхности $\epsilon_\delta(\mathbf{p}) = -\epsilon_F$. Таким образом, нам, как и ранее, достаточно исследовать случай $\delta \geq 0$ и использовать ту же картину траекторий при $\delta \leq 0$ с заменой $\epsilon_F \rightarrow -\epsilon_F$.

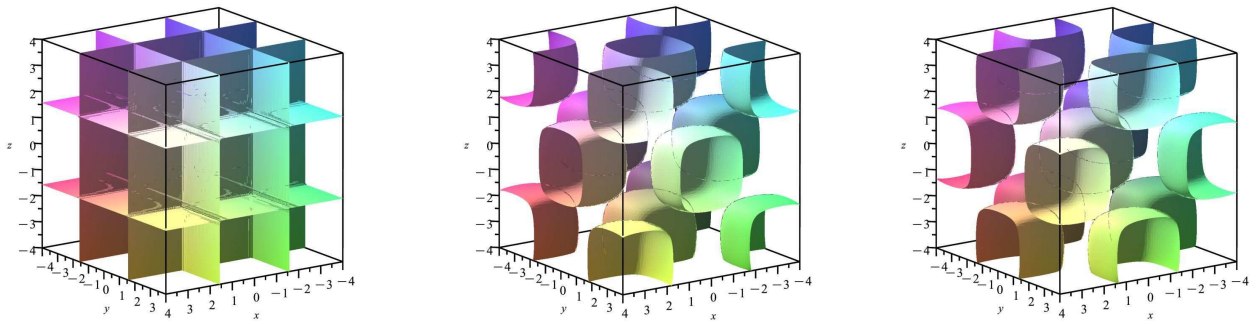


Рис. 16. Поверхности Ферми (13) при $\epsilon_F = 0$, $\epsilon_F < 0$ и $\epsilon_F > 0$ соответственно

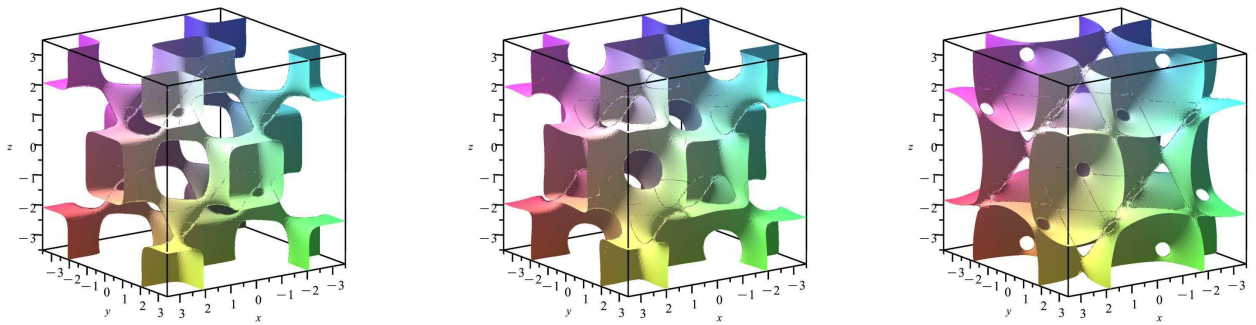


Рис. 17. Поверхности Ферми $\epsilon_\delta(\mathbf{p}) = \epsilon_F$ при $\epsilon_F = -0.3$, $\epsilon_F = -0.22$ и $\epsilon_F = -0.14$ ($\delta = 0.5$) для соотношения (12) (объемноцентрированная решетка)

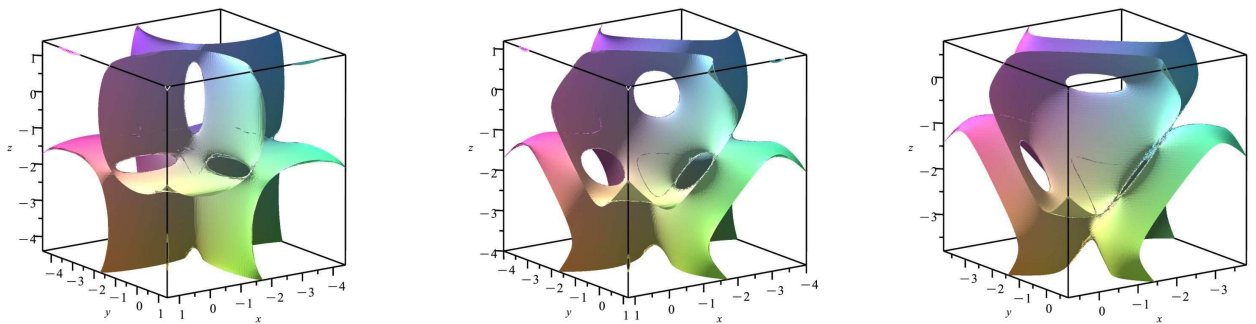


Рис. 18. Поверхности Ферми $\epsilon_{0.1}(\mathbf{p}) = -0.06$, $\epsilon_{0.5}(\mathbf{p}) = -0.2$, $\epsilon_{0.9}(\mathbf{p}) = -0.245$ для соотношения (12) (объемноцентрированная решетка)

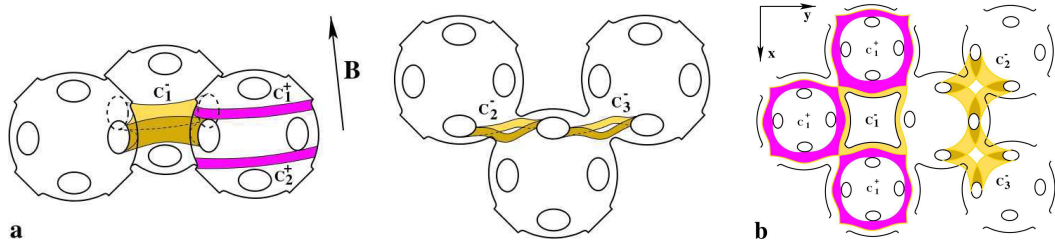


Рис. 19. *a* — Цилиндры $C_1^-, C_1^+, C_2^+, C_2^-, C_3^-$ при направлении $\mathbf{B}$, близком к $\hat{z}$. *b* — Форма цилиндров C_1^-, C_2^- и C_3^- при $\mathbf{B} \parallel \hat{z}$ (вид сверху)

Дисперсионное соотношение нулевого приближения

$$\epsilon(\mathbf{p}) = \cos x \cos y \cos z$$

обладает особыми свойствами. А именно, протяженная поверхность Ферми возникает лишь при значении $\epsilon_F = 0$, а при всех $\epsilon_F < 0$ и $\epsilon_F > 0$ поверхности Ферми

$$\cos x \cos y \cos z = \epsilon_F \quad (13)$$

являются компактными (рис. 16).

Легко видеть, что как при $\epsilon_F < 0$, так и при $\epsilon_F > 0$ все траектории (1) являются замкнутыми при всех направлениях $\mathbf{B}$ (и имеют электронный и дырочный тип соответственно). Как следствие, в нулевом приближении имеем

$$\epsilon_1^A = \epsilon_1^B = \epsilon_2^B = \epsilon_2^A = 0.$$

Таким образом, появление второго члена в (12) приводит не только к ненулевой ширине интервала $[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$, но и интервала $(\epsilon_1^A, \epsilon_2^A)$.

При $\delta > 0$ дисперсионный закон (12) становится законом общего положения. Как нетрудно показать, протяженные поверхности Ферми возникают в интервале

$$\epsilon_F \in (\epsilon_1^A, \epsilon_2^A) = \left(-\frac{3\delta}{4} + \frac{\delta^3}{2}, -\frac{\delta}{4} \right)$$

(и симметричным образом при $\delta < 0$).

В интервалах $\epsilon_F \in (\epsilon_1^A, \epsilon_2^A)$ поверхности Ферми имеют род 6 и ранг 3 (рис. 17).

Мы используем здесь интервалы $[\tilde{\epsilon}_0(Q, \delta), \tilde{\epsilon}_0(P, \delta)]$ (рис. 8) для оценки интервалов $[\epsilon_1^B(\delta), \epsilon_2^B(\delta)]$. Как мы уже говорили, в общем случае имеет место включение

$$[\tilde{\epsilon}_0(Q, \delta), \tilde{\epsilon}_0(P, \delta)] \subseteq [\epsilon_1^B(\delta), \epsilon_2^B(\delta)],$$

при этом для больших зон W_α эти интервалы совпадают по порядку величины (и нередко совпадают точно).

Вблизи интервалов $[\tilde{\epsilon}_0(Q, \delta), \tilde{\epsilon}_0(P, \delta)]$ геометрия поверхностей Ферми для соотношения (12) может быть описана сравнительно просто. А именно, поверхность Ферми образована «сфероидами», расположенными в узлах гранецентрированной решетки (решетка, обратная к объемноцентрированной, является гранецентрированной), соединенными (очень короткими) цилиндрами. Надо отметить, что сечения этих цилиндров имеют разную форму для разных значений δ (рис. 18).

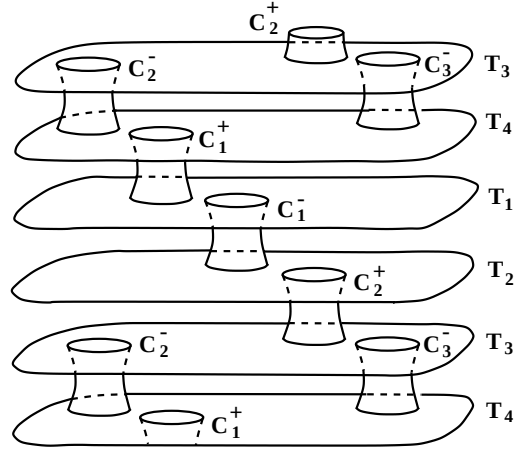


Рис. 20. Топологическая схема соединения носителей T_1, T_2, T_3, T_4 и цилиндров $C_1^-, C_2^-, C_3^-, C_1^+, C_2^+$ в поверхность Ферми при $\mathbf{n} \simeq \hat{z}$ (объемноцентрированная решетка)

Для направлений $\mathbf{B}$, близких к $\hat{z}$, поверхность Ферми содержит 4 носителя открытых траекторий $\{T_1, T_2, T_3, T_4\}$, разделенных 5 цилиндрами замкнутых траекторий $\{C_1^-, C_2^-, C_3^-, C_1^+, C_2^+\}$ (рис. 19).

Очевидно, цилиндр C_1^- симметричен относительно отражения $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$, в то время как цилиндры C_2^-, C_3^- , а также C_1^+, C_2^+ , переходят друг в друга при этом отражении. Топологическая схема соединения носителей T_1, T_2, T_3, T_4 и цилиндров $C_1^-, C_2^-, C_3^-, C_1^+, C_2^+$ представлена на рис. 20.

Исчезновение любого из цилиндров при отклонении $\mathbf{n} = \mathbf{B}/B$ от $\hat{z}$ приводит к разрушению соединений им носителей открытых траекторий (появляется возможность перескока траекторий с одного носителя на другой). Это разрушение, однако, может быть устранено изменением значения ϵ_F , если одновременно с ним не происходит исчезновения еще одного цилиндра замкнутых траекторий, имеющего противоположный тип. Как мы уже упоминали, границы зон W_α определяются поэтому исчезновением как минимум одного цилиндра электронного и одного — дырочного типа (и разрушением всех носителей открытых траекторий).

В силу симметрии оба цилиндра дырочного типа (C_1^+ и C_2^+) исчезают одновременно (при одних и тех же направлениях $\mathbf{B}$). Как следствие, любая точка границы W_1 отвечает одновременному исчезновению цилиндров C_1^+ и C_2^+ .

В нашей ситуации для невозможности восстановления какой-либо из пар носителей открытых траекторий ($\{T_1, T_2\}$ или $\{T_3, T_4\}$) при изменении значения ϵ_F необходимо также исчезновение всех цилиндров C_1^-, C_2^-, C_3^- (рис. 20).

Таким образом, граница W_1 определяется исчезновением пары $\{C_1^+, C_2^+\}$, а также либо цилиндра C_1^- , либо пары $\{C_2^-, C_3^-\}$ (в зависимости от того, что исчезает последним).

Исходя из формы поверхностей Ферми для различных δ (рис. 18), можно заключить, что высота цилиндра C_1^- довольно велика, а высоты цилиндров C_2^- и C_3^- довольно малы при малых значениях δ . При $\delta \rightarrow 1$ ситуация меняется на противоположную, т. е. высота C_1^- становится малой, а высоты C_2^- и C_3^- заметно увеличиваются. Можно утверждать, таким образом, что при малых значениях δ положение точек P и Q определяется исчезновением цилиндров $\{C_1^+, C_2^+, C_1^-\}$, а при $\delta \rightarrow 1$ — исчезновением цилиндров $\{C_1^+, C_2^+, C_2^-, C_3^-\}$.

На рис. 21 *a* представлена картина сечения поверхностей Ферми $\epsilon_\delta(\mathbf{p}) = \tilde{\epsilon}_0(P)$ выделенными плоскостями $\Pi_{1,2}(\mathbf{B}) \perp \mathbf{B}$ для точки P , определяемой исчезновением цилиндров C_1^-, C_1^+ и C_2^+ .

Плоскость $\Pi_1(\mathbf{B})$ задается уравнением $z = \mu y$ (с некоторым коэффициентом μ) и касается S_F в частности в точках A и B с некоторыми координатами $(b, a, \mu a)$ и $(b, -a, -\mu a)$.

Плоскость $\Pi_2(\mathbf{B})$ задается уравнением

$$(z - 2\mu a) = \mu y$$

и касается S_F в точке C с координатами $(0, c, \mu c + 2\mu a)$.

Мы имеем, таким образом,

$$\epsilon_\delta(b, a, \mu a) = \tilde{\epsilon}_0(P, \delta),$$

$$\epsilon_\delta(0, c, \mu c + 2\mu a) = \tilde{\epsilon}_0(P, \delta),$$

$$\nabla \epsilon_\delta(b, a, \mu a) \parallel (0, -\mu, 1),$$

$$\nabla \epsilon_\delta(0, c, \mu c + 2\mu a) \parallel (0, -\mu, 1)$$

(касание в точке B при этом происходит автоматически), или

$$\begin{aligned} & \cos b \cos a \cos \mu a + \\ & + \frac{\delta}{4} (\cos 2b + \cos 2a + \cos 2\mu a) = \tilde{\epsilon}_0(P, \delta), \\ & \cos c \cos(\mu c + 2\mu a) + \\ & + \frac{\delta}{4} (1 + \cos 2c + \cos(2\mu c + 4\mu a)) = \tilde{\epsilon}_0(P, \delta), \\ & \cos a \cos \mu a + \delta \cos b = 0, \\ & \cos b \sin a \cos \mu a + \delta \sin a \cos a + \\ & + \mu \cos b \cos a \sin \mu a + \mu \delta \sin \mu a \cos \mu a = 0, \\ & \mu \cos c \sin(\mu c + 2\mu a) + \mu \delta \sin(\mu c + 2\mu a) \cos(\mu c + 2\mu a) + \\ & + \sin c \cos(\mu c + 2\mu a) + \delta \sin c \cos c = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

На рис. 21 *b* представлена картина сечения поверхностей Ферми $\epsilon_\delta(\mathbf{p}) = \tilde{\epsilon}_0(P)$ выделенными плоскостями $\Pi_{1,2}(\mathbf{B}) \perp \mathbf{B}$ для точки P , определяемой исчезновением цилиндров C_2^-, C_3^-, C_1^+ и C_2^+ .

Плоскость $\Pi_1(\mathbf{B})$ теперь задается уравнением

$$z - \frac{\pi}{2} = \mu \left(y - \frac{\pi}{2} \right)$$

(с некоторым коэффициентом μ) и касается S_F в точке A с некоторыми координатами $(b, a, \mu a + \pi(1 - \mu)/2)$.

Плоскость $\Pi_2(\mathbf{B})$ задается уравнением

$$z = \mu y + \lambda$$

(с некоторым λ) и касается S_F в точке C с координатами $(0, c, \mu c + \lambda)$ и точке B с координатами $(h, d, \mu d + \lambda)$.

Мы имеем теперь

$$\epsilon_\delta(b, a, \mu a + \pi(1 - \mu)/2) = \tilde{\epsilon}_0(P, \delta),$$

$$\epsilon_\delta(0, c, \mu c + \lambda) = \tilde{\epsilon}_0(P, \delta),$$

$$\epsilon_\delta(h, d, \mu d + \lambda) = \tilde{\epsilon}_0(P, \delta),$$

$$\nabla \epsilon_\delta(b, a, \mu a + \pi(1 - \mu)/2) \parallel (0, -\mu, 1),$$

$$\nabla \epsilon_\delta(0, c, \mu c + \lambda) \parallel (0, -\mu, 1),$$

$$\nabla \epsilon_\delta(h, d, \mu d + \lambda) \parallel (0, -\mu, 1),$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{\delta}{4} (\cos 2b + \cos 2a + \cos 2(\mu a + \pi(1 - \mu)/2)) + \\ & + \cos b \cos a \cos(\mu a + \pi(1 - \mu)/2) = \tilde{\epsilon}_0(P, \delta), \\ & \frac{\delta}{4} (1 + \cos 2c + \cos 2(\mu c + \lambda)) + \\ & + \cos c \cos(\mu c + \lambda) = \tilde{\epsilon}_0(P, \delta), \\ & \frac{\delta}{4} (\cos 2h + \cos 2d + \cos 2(\mu d + \lambda)) + \\ & + \cos h \cos d \cos(\mu d + \lambda) = \tilde{\epsilon}_0(P, \delta), \\ & \cos a \cos(\mu a + \pi(1 - \mu)/2) + \delta \cos b = 0, \\ & \cos b \sin a \cos(\mu a + \pi(1 - \mu)/2) + \delta \sin a \cos a + \\ & + \mu (\cos b \cos a + \delta \cos(\mu a + \pi(1 - \mu)/2)) \times \\ & \times \sin(\mu a + \pi(1 - \mu)/2) = 0, \\ & \mu \cos c \sin(\mu c + \lambda) + \mu \delta \sin(\mu c + \lambda) \cos(\mu c + \lambda) + \\ & + \sin c \cos(\mu c + \lambda) + \delta \sin c \cos c = 0, \\ & \cos d \cos(\mu d + \lambda) + \delta \cos h = 0, \\ & \cos h \sin d \cos(\mu d + \lambda) + \delta \sin d \cos d + \\ & + \mu (\cos h \cos d + \delta \cos(\mu d + \lambda)) \sin(\mu d + \lambda) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

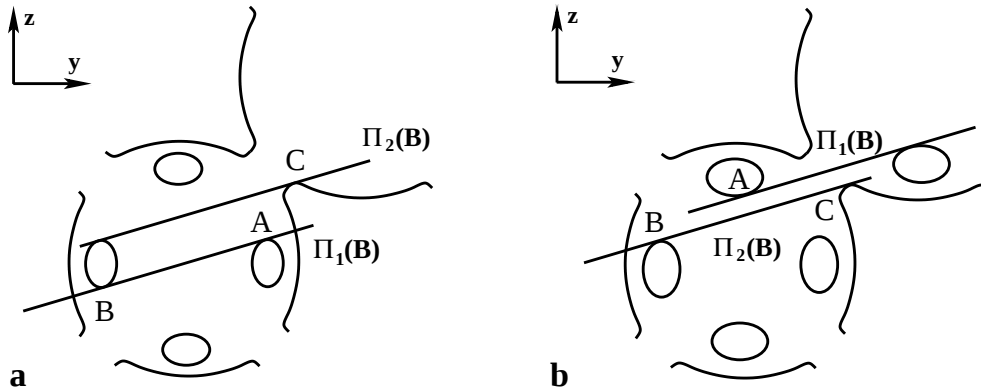


Рис. 21. *a* — Сечение поверхности Ферми $\epsilon_\delta(\mathbf{p}) = \tilde{\epsilon}_0(P)$ плоскостями $\Pi_{1,2}(\mathbf{B})$, содержащими цилиндры C_1^- и C_1^+ , C_2^+ нулевой высоты. *b* — Сечение поверхности Ферми $\epsilon_\delta(\mathbf{p}) = \tilde{\epsilon}_0(P)$ плоскостями $\Pi_{1,2}(\mathbf{B})$, содержащими цилиндры C_2^- , C_3^- и C_1^+ , C_2^+ нулевой высоты (проекция на плоскость yz)

Решая независимо системы (14) и (15) и выбирая при каждом δ решение, отвечающее большему значению μ , мы получаем нужную нам зависимость $\tilde{\epsilon}_0(P)$.

Для направления $\mathbf{n} = Q$ удобно сделать замену

$$x = \frac{v-u}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{v+u}{\sqrt{2}}.$$

В новых координатах дисперсионное соотношение (12) имеет вид

$$\epsilon_\delta(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \left(\cos \sqrt{2}u + \cos \sqrt{2}v \right) \cos z + \frac{\delta}{2} \cos \sqrt{2}u \cdot \cos \sqrt{2}v + \frac{\delta}{4} \cos 2z.$$

На рис. 22 *a* представлена картина сечения поверхностей Ферми $\epsilon_\delta(\mathbf{p}) = \tilde{\epsilon}_0(Q)$ специальными плоскостями $\Pi_{1,2}(\mathbf{B}) \perp \mathbf{B}$ для точки Q , определяемой исчезновением цилиндров C_1^- , C_1^+ и C_2^+ .

Плоскость $\Pi_1(\mathbf{B})$ задается в новых координатах уравнением

$$z = \nu \left(u - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \right)$$

(с некоторым ν) и касается S_F в точке C с координатами $(c, \pi/\sqrt{2}, \nu(c - \pi/\sqrt{2}))$.

Плоскость $\Pi_2(\mathbf{B})$ задается уравнением

$$z = \nu u + \zeta$$

(с некоторым ζ) и касается S_F в точке A с координатами $(a, 0, \nu a + \zeta)$ и в точке B с координатами $(b, h, \nu b + \zeta)$.

Полная система для параметров задачи имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\cos \sqrt{2}c - 1 \right) \cos \nu(c - \pi/\sqrt{2}) - \\ & - \frac{\delta}{2} \cos \sqrt{2}c + \frac{\delta}{4} \cos 2\nu(c - \pi/\sqrt{2}) = \tilde{\epsilon}_0(Q, \delta), \\ & \frac{1}{2} \left(\cos \sqrt{2}a + 1 \right) \cos(\nu a + \zeta) + \\ & + \frac{\delta}{2} \cos \sqrt{2}a + \frac{\delta}{4} \cos 2(\nu a + \zeta) = \tilde{\epsilon}_0(Q, \delta), \\ & \frac{1}{2} \left(\cos \sqrt{2}b + \cos \sqrt{2}h \right) \cos(\nu b + \zeta) + \\ & + \frac{\delta}{2} \cos \sqrt{2}b \cos \sqrt{2}h + \frac{\delta}{4} \cos 2(\nu b + \zeta) = \tilde{\epsilon}_0(Q, \delta), \\ & \nu \left(\cos \sqrt{2}c - 1 \right) \sin \nu(c - \pi/\sqrt{2}) + \nu \delta \sin 2\nu(c - \pi/\sqrt{2}) + \\ & + \sqrt{2} \sin \sqrt{2}c \cos \nu(c - \pi/\sqrt{2}) - \sqrt{2} \delta \sin \sqrt{2}c = 0, \\ & \nu \left(\cos \sqrt{2}a + 1 \right) \sin(\nu a + \zeta) + \nu \delta \sin 2(\nu a + \zeta) + \\ & + \sqrt{2} \sin \sqrt{2}a \cos(\nu a + \zeta) + \sqrt{2} \delta \sin \sqrt{2}a = 0, \\ & \cos(\nu b + \zeta) + \delta \cos \sqrt{2}b = 0, \\ & \nu \left(\cos \sqrt{2}b + \cos \sqrt{2}h \right) \sin(\nu b + \zeta) + \nu \delta \sin 2(\nu b + \zeta) + \\ & + \sqrt{2} \sin \sqrt{2}b \cos(\nu b + \zeta) + \sqrt{2} \delta \sin \sqrt{2}b \cos \sqrt{2}h = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

На рис. 22 *b* представлена картина сечения поверхностей Ферми $\epsilon_\delta(\mathbf{p}) = \tilde{\epsilon}_0(Q)$ специальной плоскостью $\Pi(\mathbf{B}) \perp \mathbf{B}$ для точки Q , определяемой исчезновением цилиндров C_2^- , C_3^- , C_1^+ и C_2^+ .

Плоскость $\Pi(\mathbf{B})$ задается уравнением $z = \nu u + \lambda$ (с некоторыми ν и λ) и касается поверхности S_F в 5 (неэквивалентных) точках. В силу симметрии для определения зависимости $\tilde{\epsilon}_0(Q)$ нам достаточно рассмотреть ее касание в 3 точках A , B и C с координатами $(a_1, 0, a_3)$, (b_1, b_2, b_3) , (c_1, c_2, c_3) (их проекции показаны на рис. 22).

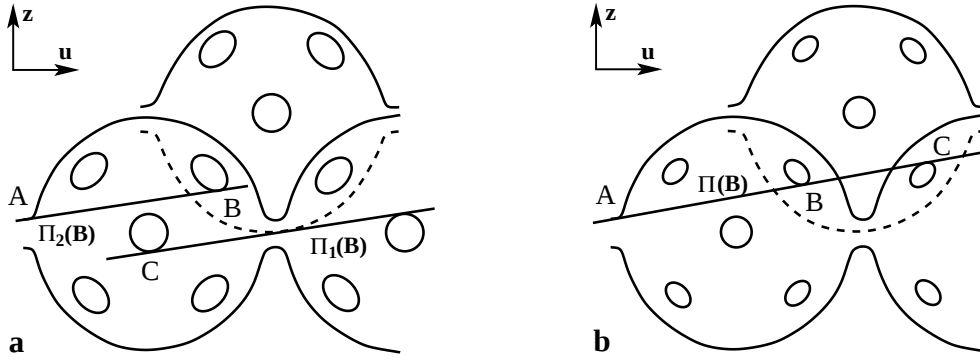


Рис. 22. *a* – Сечение поверхности Ферми $\epsilon_\delta(\mathbf{p}) = \tilde{\epsilon}_0(Q)$ плоскостями $\Pi_{1,2}(\mathbf{B})$, содержащими цилиндры C_1^- и C_1^+ , C_2^- нулевой высоты. *b* – Сечение поверхности Ферми $\epsilon_\delta(\mathbf{p}) = \tilde{\epsilon}_0(Q)$ плоскостью $\Pi(\mathbf{B})$, содержащей цилиндры C_2^- , C_3^- и C_1^+ , C_2^+ нулевой высоты (проекция на плоскость $x + y = 0$)

Полная система для параметров задачи теперь имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\cos \sqrt{2}a_1 + 1 \right) \cos a_3 + \\ & \quad + \frac{\delta}{2} \cos \sqrt{2}a_1 + \frac{\delta}{4} \cos 2a_3 = \tilde{\epsilon}_0(Q, \delta), \\ & \frac{1}{2} \left(\cos \sqrt{2}b_1 + \cos \sqrt{2}b_2 \right) \cos b_3 + \\ & \quad + \frac{\delta}{2} \cos \sqrt{2}b_1 \cos \sqrt{2}b_2 + \frac{\delta}{4} \cos 2b_3 = \tilde{\epsilon}_0(Q, \delta), \\ & \frac{1}{2} \left(\cos \sqrt{2}c_1 + \cos \sqrt{2}c_2 \right) \cos c_3 + \\ & \quad + \frac{\delta}{2} \cos \sqrt{2}c_1 \cos \sqrt{2}c_2 + \frac{\delta}{4} \cos 2c_3 = \tilde{\epsilon}_0(Q, \delta), \\ & \nu = \frac{b_3 - a_3}{b_1 - a_1} = \frac{c_3 - b_3}{c_1 - b_1}, \\ & \cos b_3 + \delta \cos \sqrt{2}b_1 = \cos c_3 + \delta \cos \sqrt{2}c_1 = 0, \\ & \sqrt{2} \sin \sqrt{2}a_1 \cos a_3 + \sqrt{2}\delta \sin \sqrt{2}a_1 + \\ & \quad + \nu \sin a_3 \left(\cos \sqrt{2}a_1 + 1 \right) + \nu\delta \sin 2a_3 = 0, \\ & \sqrt{2} \sin \sqrt{2}b_1 \cos b_3 + \sqrt{2}\delta \sin \sqrt{2}b_1 \cos \sqrt{2}b_2 + \\ & \quad + \nu \sin b_3 \left(\cos \sqrt{2}b_1 + \cos \sqrt{2}b_2 \right) + \nu\delta \sin 2b_3 = 0, \\ & \sqrt{2} \sin \sqrt{2}c_1 \cos c_3 + \sqrt{2}\delta \sin \sqrt{2}c_1 \cos \sqrt{2}c_2 + \\ & \quad + \nu \sin c_3 \left(\cos \sqrt{2}c_1 + \cos \sqrt{2}c_2 \right) + \nu\delta \sin 2c_3 = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Решая независимо системы (16) и (17) и выбирая при каждом δ решение, отвечающее большему значению ν , мы получаем нужную нам зависимость $\tilde{\epsilon}_0(Q)$.

На рис. 23 представлены значения функций $\tilde{\epsilon}_0(P)$ и $\tilde{\epsilon}_0(Q)$, а также границы интервала $(\epsilon_1^A(\delta), \epsilon_2^A(\delta))$ в диапазоне $-1 < \delta < 1$. Можно видеть, что во всем диапазоне ширина интервала $[\tilde{\epsilon}_0(Q, \delta), \tilde{\epsilon}_0(P, \delta)]$ не превышает 0.1 ширины интервала $(\epsilon_1^A(\delta), \epsilon_2^A(\delta))$. Можно видеть также, что

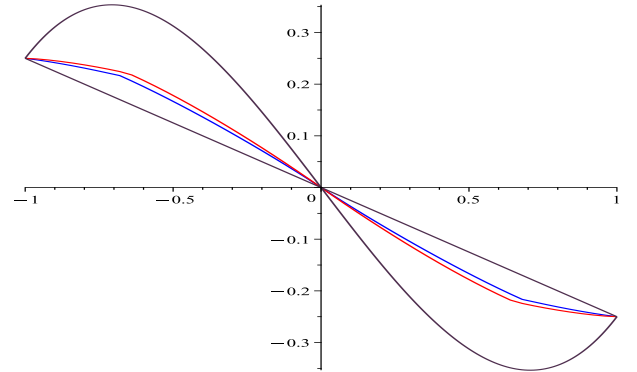


Рис. 23. Границы интервалов $[\tilde{\epsilon}_0(Q, \delta), \tilde{\epsilon}_0(P, \delta)]$, $[\tilde{\epsilon}_0(P, \delta), \tilde{\epsilon}_0(Q, \delta)]$ и $(\epsilon_1^A(\delta), \epsilon_2^A(\delta))$ для соотношения (12) в диапазоне $-1 < \delta < 1$ (объемноцентрированная решетка)

максимальная ширина интервала $[\tilde{\epsilon}_0(Q, \delta), \tilde{\epsilon}_0(P, \delta)]$ (при $\delta \simeq 0.6$) не превышает 1% от ширины интервала $[\epsilon_{\min}(\delta), \epsilon_{\max}(\delta)]$ для дисперсионного закона (12).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведена оценка ширины интервала энергий, отвечающего появлению ультрасложных диаграмм проводимости для аналитических дисперсионных соотношений, возникающих в проводниках кубической симметрии в случае сильной связи. В исследовании было использовано введение высших поправок к главному приближению в пределе сильной связи, что позволяет провести оценку ширины этого интервала для случаев простой и объемноцентрированной кубических решеток. Оценка ширины такого интервала имеет непосредственное отношение к оценке вероятности возникновения ультрасложных

трасложных диаграмм проводимости в материалах, описываемых приближением сильной связи. Кроме того, исследование зависимости указанного интервала от параметров спектра позволяет также провести оценку возможности получения ультрасложных диаграмм проводимости и наблюдения связанных с ними эффектов путем внешнего воздействия на исследуемый образец.

Финансирование. Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда, грант № 26-11-00292, <https://rscf.ru/project/26-11-00292/>.

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. Kittel, *Quantum Theory of Solids*, Wiley, New York (1963) [Ч. Киттель, *Квантовая теория твердых тел*, Наука, Москва (1967)].
2. J. M. Ziman, *Principles of the Theory of Solids*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1972) [Дж. Займан, *Принципы теории твердого тела*, Мир, Москва (1974)].
3. N. W. Ashcroft and N. D. Mermin, *Solid State Physics*, Saunders College Publ., Philadelphia (1976) [Н. Ашкрофт, Н. Мермин, *Физика твердого тела*, Мир, Москва (1979)].
4. A. A. Abrikosov, *Fundamentals of the Theory of Metals*, Elsevier Science & Technology, Oxford (1988) [А. А. Абрикосов, *Основы теории металлов*, Наука, Москва (1987)].
5. I. M. Lifshitz, M. Ya. Azbel, and M. I. Kaganov, *Sov. Phys. JETP* **4**, 41 (1957) [И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, *ЖЭТФ* **31**, 63 (1956)].
6. I. M. Lifshitz and V. G. Peschansky, *Sov. Phys. JETP* **8**, 875 (1959) [И. М. Лифшиц, В. Г. Песчанский, *ЖЭТФ* **35**, 1251 (1958)].
7. I. M. Lifshitz and V. G. Peschansky, *Sov. Phys. JETP* **11**, 137 (1960) [И. М. Лифшиц, В. Г. Песчанский, *ЖЭТФ* **38**, 188 (1960)].
8. I. M. Lifshitz, M. Ya. Azbel, and M. I. Kaganov, *Electron Theory of Metals*, Consultants Bureau, New York (1973) [И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, *Электронная теория металлов*, Наука, Москва (1971)].
9. S. P. Novikov, *Russ. Math. Surv.* **37**, 1 (1982) [С. П. Новиков, *УМН* **37**, 3 (1982)].
10. A. V. Zorich, *Russ. Math. Surv.* **39**, 287 (1984) [А. В. Зорич, *УМН* **39**, 235 (1984)].
11. I. A. Dynnikov, *Russ. Math. Surv.* **47**, 172 (1992) [И. А. Дынников, *УМН* **47**, 161 (1992)].
12. S. P. Tsarev, *Seminar Talks* (1992–1993) [С. П. Царев, *Доклады на семинарах* (1992–1993)].
13. I. A. Dynnikov, *Math. Notes* **53**, 494 (1993) [И. А. Дынников, *Матем. заметки* **53**, 57 (1993)].
14. A. V. Zorich, in *Proc. Geometric Study of Foliations, (Tokyo, November 1993)*, ed. by T. Mizutani et al., World Scientific, Singapore (1994), p. 479.
15. I. A. Dynnikov, *Surfaces in 3-Torus: Geometry of Plane Sections*, Proc. of ECM2, BuDA (1996).
16. I. A. Dynnikov, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2* **179**, AMS, Providence, RI (1997), p. 45.
17. I. A. Dynnikov, *Russ. Math. Surv.* **54**, 21 (1999) [И. А. Дынников, *УМН* **54**, 21 (1999)].
18. S. P. Novikov and A. Ya. Maltsev, *JETP Lett.* **63**, 855 (1996) [С. П. Новиков, А. Я. Мальцев, *Письма в ЖЭТФ* **63**, 809 (1996)].
19. A. Ya. Maltsev, *J. Exp. Theor. Phys.* **85**, 934 (1997) [А. Я. Мальцев, *ЖЭТФ* **112**, 1710 (1997)].
20. S. P. Novikov and A. Ya. Maltsev, *Phys. Usp.* **41**, 231 (1998) [С. П. Новиков, А. Я. Мальцев, *УФН* **168**, 249 (1998)].
21. A. Ya. Maltsev and S. P. Novikov, *Bull. Braz. Math. Soc., New Series* **34**, 171 (2003).
22. A. Ya. Maltsev and S. P. Novikov, *J. Stat. Phys.* **115**, 31 (2004).
23. R. De Leo, *Phys. Lett. A* **332**, 469 (2004).
24. R. De Leo, *Physica B* **362**, 62 (2005).
25. A. Ya. Maltsev and S. P. Novikov, *Proc. Steklov Inst. Math.* **302**, 279 (2018) [А. Я. Мальцев, С. П. Новиков, *Труды МИАН* **302**, 296 (2018)].
26. R. De Leo, *A Survey on Quasiperiodic Topology, in Advanced Mathematical Methods in Biosciences and Applications*, ed. by F. Berezovskaya and B. Toni, Springer (2018); arXiv:1711.01716.
27. A. Ya. Maltsev, *J. Exp. Theor. Phys.* **127**, 1087 (2018) [А. Я. Мальцев, *ЖЭТФ* **154**, 1183 (2018)].
28. A. Ya. Maltsev, *J. Exp. Theor. Phys.* **129**, 116 (2019) [А. Я. Мальцев, *ЖЭТФ* **156**, 140 (2019)].
29. I. A. Dynnikov, A. Ya. Maltsev, and S. P. Novikov, *Russ. Math. Surv.* **77**, 1061 (2022); arXiv:2306.11257 [И. А. Дынников, А. Я. Мальцев, С. П. Новиков, *УМН* **77**, 109 (2022)].

30. A. Zorich, *How Do the Leaves of Closed 1-Form Wind Around a Surface*, in *Pseudoperiodic Topology*, ed. by V. I. Arnold, M. Kontsevich, and A. Zorich, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 **197**, AMS, Providence, RI (1999), p. 135.
31. R. De Leo, Russ. Math. Surv. **55**, 166 (2000) [Р. Де Лео, УМН **55**, 181 (2000)].
32. R. De Leo, Russ. Math. Surv. **58**, 1042 (2003) [Р. Де Лео, УМН **58**, 197 (2003)].
33. R. De Leo, Exp. Math. **15**, 109 (2006).
34. R. De Leo and I. A. Dynnikov, Russ. Math. Surv. **62**, 990 (2007) [Р. Де Лео, И. А. Дынников, УМН **62**, 151 (2007)].
35. I. A. Dynnikov, Proc. Steklov Inst. Math. **263**, 65 (2008) [И. А. Дынников, Труды МИАН **263**, 72 (2008)].
36. R. De Leo and I. A. Dynnikov, Geom. Dedicata **138**, 51 (2009).
37. A. Skripchenko, Discrete Contin. Dyn. Syst. **32**, 643 (2012).
38. A. Skripchenko, Ann. Glob. Anal. Geom. **43**, 253 (2013).
39. I. Dynnikov and A. Skripchenko, *On Typical Leaves of a Measured Foliated 2-Complex of Thin Type*, in *Topology, Geometry, Integrable Systems, and Mathematical Physics: Novikov's Seminar 2012–2014*, ed. by V. M. Buchstaber, B. A. Dubrovin, and I. M. Krichever, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 **234**, AMS, Providence, RI (2014), p. 173; arXiv:1309.4884.
40. I. Dynnikov and A. Skripchenko, Trans. Moscow Math. Soc. **76**, 287 (2015).
41. A. Avila, P. Hubert, and A. Skripchenko, Invent. Math. **206**, 109 (2016).
42. A. Avila, P. Hubert, and A. Skripchenko, Bull. Soc. Math. France **144**, 539 (2016).
43. I. Dynnikov, P. Hubert, and A. Skripchenko, Int. Math. Res. Not. **2023**, 6461 (2023).
44. A. Ya. Maltsev, *On Chaotic Regimes of Conductivity Behavior in the Tight-Binding Approximation*, arXiv:2510.17589 [А. Я. Мальцев, ЖЭТФ **169**, 82 (2026)].

Analytical Approximations of Dispersion Laws and Ultra-Complex Conductivity Diagrams

*A. Ya. Maltsev**Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences
119333, Moscow, RussiaL. D. Landau Institute for Theoretical Physics of the Russian Academy of Sciences
142432, Chernogolovka, Moscow region, Russia

*E-mail: maltsev@itp.ac.ru

Received June 28, 2026

Revised June 28, 2026

Accepted July 8, 2026

Abstract

We study the probability of the emergence of ultra-complex conductivity diagrams in conductors that satisfy the tight-binding approximation and have the simple or body-centered cubic lattice. The presence of ultra-complex conductivity diagrams allows us to observe a number of highly nontrivial effects in strong magnetic fields, however, the probability of their emergence in a given substance is quite low. In the case of the simple or body-centered cubic lattice, the leading tight-binding approximation does not allow us to estimate this probability due to the peculiarities of the spectra in this situation. To estimate this probability, we use higher-order corrections to the leading approximation, which yield more accurate analytical expressions for the electron spectra.

Keywords: complex Fermi surfaces, galvanomagnetic phenomena**Funding.** This work was supported by the Russian Science Foundation, grant No. 26-11-00292, <https://rscf.ru/project/26-11-00292/>.**Conflict of interest.** The author declares that he has no conflicts of interest.