

ИССЛЕДОВАНИЕ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ И КРИТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ АНТИФЕРРОМАГНИТНОЙ МОДЕЛИ ПОТТСА НА СЛОИСТОЙ ГЕКСАГОНАЛЬНОЙ РЕШЕТКЕ

*М. К. Рамазанов**, *М. А. Магомедов*, *А. К. Муртазаев*

*Институт физики им. Х. И. Амирханова,
Дагестанский федеральный исследовательский центр Российской академии наук
367015, Магачкала, Россия*

Поступила в редакцию 10 февраля 2026 г.,
после переработки 15 мая 2026 г.
Принята к публикации 18 мая 2026 г.

Методом Монте-Карло выполнены исследования фазовых переходов, термодинамических и критических свойств антиферромагнитной модели Поттса с числом состояний спина $q = 3$ на слоистой гексагональной решетке с взаимодействиями ближайших соседей. На основе гистограммного метода анализа данных и метода кумулянтов Биндера четвертого порядка проведен анализ природы фазового перехода. Показано, что в исследуемой модели наблюдается фазовый переход второго рода. На основе соотношений теории конечно-размерного скейлинга рассчитаны значения основных статических критических индексов. Обнаружено, что рассматриваемая нами модель принадлежит к тому же классу универсальности критического поведения, что и трехмерная XY-модель.

Ключевые слова: модель Поттса, антиферромагнетик, фазовые переходы, метод Монте-Карло, критические индексы

DOI: 10.31857/S0044451026070055

1. ВВЕДЕНИЕ

Решеточная модель Поттса является обобщением модели Изинга, полученная путем изменения числа состояний спина q , служит теоретическим инструментом для изучения физических явлений в физике конденсированного состояния [1–3]. Природа фазовых переходов (ФП) и критическое поведение модели Поттса демонстрируют более разнообразные свойства, чем в модели Изинга, и зависят от числа состояний спина q , пространственной размерности d и топологии решетки, а также характера обменного взаимодействия. Согласно гипотезе универсальности, для каждой размерности существует критическое значение числа спиновых состояний q_c . Классическая ферромагнитная модель Поттса претерпевает ФП первого рода при $q > q_c$, а в случае $q \leq q_c$ — ФП второго рода [2]. Критическое значение числа спиновых состояний q_c классической ан-

тиферромагнитной модели Поттса зависит от микроструктуры решетки, и при $q > q_c$ ФП отсутствует [4, 5]. Более того, обнаружены наборы решеток, которые вовсе не имеют критического значения спиновых состояний q_c [6].

В двумерной ферромагнитной модели Поттса при $q > 4$ наблюдается ФП первого рода, в то время как при $q \leq 4$ переход непрерывен [2, 3]. Для трехмерного случая известно, что при $q \geq 3$ ферромагнитная модель Поттса демонстрирует ФП первого рода, тогда как при $q < 3$ — второго рода [7–12]. Поведение ферромагнитной модели Поттса хорошо описывается теорией универсальности. Антиферромагнитная модель Поттса демонстрирует гораздо более сложное и разнообразное поведение, поскольку ее физические свойства сильно зависят от микроскопической структуры решетки. В этой модели могут наблюдаться эффекты фрустрации, остаточная энтропия, а также нетривиальные упорядоченные состояния даже в отсутствие беспорядка.

В трехмерной антиферромагнитной модели Поттса с $q = 3$ и $q = 4$ на простой кубической решетке наблюдается ФП второго рода, тогда как

* E-mail: sheikh77@mail.ru

при $q = 5$ температура перехода снижается до нуля, а при $q = 6$ дальний порядок отсутствует при любых температурах [12]. Результаты, полученные методом Монте-Карло (МК) при исследовании антиферромагнитной модели Поттса с $q = 3$ на объемно-центрированной кубической решетке, показывают наличие в данной модели ФП второго рода. Значения критических индексов этой модели в пределах погрешности совпадают с соответствующими значениями критических индексов для трехмерной ХУ-модели, что свидетельствует о принадлежности исследуемой модели к тому же классу универсальности критического поведения, что и ХУ-модель [13]. Несмотря на дискретную природу спиновых переменных, данная модель принадлежит ХУ-классу универсальности, что является ярким примером того, как геометрия решетки и антиферромагнитное взаимодействие могут порождать эффективную непрерывную симметрию.

Интерес к модели Поттса связан еще с тем, что она описывает большой класс реальных физических систем: слоистые магнетики, пленки жидкого гелия, сверхпроводящие пленки, адсорбированные пленки и др. [2, 14]. К примеру, структурные ФП в материалах SrTiO_3 и $\text{Pb}_3(\text{PO}_4)_2$ [15] хорошо описываются двумерной моделью Поттса с числом спиновых состояний $q = 3$, а ФП в пирохлоре KOs_2O_6 — трехмерной ферромагнитной моделью Поттса с числом спиновых состояний $q = 4$ [16].

В настоящей работе проводится исследование антиферромагнитной модели Поттса с числом состояний спина $q = 3$ на слоистой гексагональной решетке. К настоящему моменту времени двумерная модель Поттса изучена достаточно хорошо [17–20]. Работ, посвященных изучению ФП и критических свойств трехкомпонентной модели Поттса на слоистой гексагональной решетке, очень мало. В основном, встречаются работы, посвященные исследованию трехмерной ферромагнитной модели Поттса [10, 11].

Данные аналитических подходов для трехмерной модели Поттса в случае $q > 3$ свидетельствуют в пользу ФП первого рода, но строгого аргумента, доказывающего или опровергающего этот факт, нет [8, 9, 21, 22]. В связи с этим, в настоящей работе на основе репличного обменного алгоритма метода Монте-Карло нами проведено исследование ФП, термодинамических и критических свойств антиферромагнитной модели Поттса с числом состояний спина $q = 3$ на слоистой гексагональной решетке. Исследование данной модели на основе современных методов и идей позволит получить ответ на ряд во-

просов, связанных с ФП и критическим поведением трехмерных антиферромагнитных спиновых решеточных систем.

2. МОДЕЛЬ И МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ

Гамильтониан модели Поттса с числом состояний $q = 3$ с учетом взаимодействий ближайших соседей может быть представлен в следующем виде:

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle, i \neq j} S_i S_j = -J \sum_{\langle i,j \rangle, i \neq j} \cos \theta_{i,j}, \quad (1)$$

где J — параметр обменного антиферромагнитного взаимодействия ($J < 0$), $\theta_{i,j}$, — угол между взаимодействующими спинами $S_i - S_j$. Суммирование в выражении (1) проводится для каждой пары соседних спинов.

Решетка состоит из гексагональных слоев, сложенных вдоль оси z . Спины расположены в узлах решетки. Каждый спин имеет пять ближайших соседей: три соседа на плоскости и два соседа в соседних слоях. Соседние слои расположены параллельно друг другу без смещений. Расчеты проводились для систем с периодическими граничными условиями (ПГУ) и линейными размерами $L \times L \times L = N$, $L = 12-60$, где L измеряется в размерах элементарной ячейки.

Направления спинов заданы таким образом, что выполняется равенство

$$\cos \theta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } S_i = S_j; \\ -1/2, & \text{если } S_i \neq S_j. \end{cases} \quad (2)$$

Согласно условию (2), для двух спинов, S_i и S_j , энергия парного обменного взаимодействия $E_{i,j} = -J$, если $S_i = S_j$. В случае когда $S_i \neq S_j$, энергия $E_{i,j} = J/2$. Таким образом, энергия парного взаимодействия спинов равна одной величине при их одинаковом направлении и принимает другое значение при несовпадении направлений спинов.

В настоящее время спиновые системы на основе микроскопических гамильтонианов успешно изучаются методом МК [23–26]. Одним из наиболее эффективных для исследования подобных систем является репличный обменный алгоритм метода МК. В настоящем исследовании этот алгоритм был использован в следующем виде:

1. Одновременно моделируются R реплик X_1, X_2, \dots, X_R с температурами T_1, T_2, \dots, T_R .

2. После выполнения одного МК-шага/спин для всех реплик проводится обмен данными между парой соседних реплик X_i и X_{i+1} в соответствии со схемой Метрополиса с вероятностью

$$w(X_i \rightarrow X_{i+1}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta \leq 0, \\ \exp(-\Delta), & \text{если } \Delta > 0, \end{cases}$$

где

$$\Delta = -(E_i - E_{i+1})(1/T_i - 1/T_{i+1}),$$

E_i и E_{i+1} — внутренние энергии реплик, T — температура (здесь и далее температура дана в единицах $|J|/k_B$).

В репличном обменном алгоритме для каждой реплики реализуется случайное блуждание по «температурному интервалу», которое, в свою очередь, стимулирует случайное блуждание в поле потенциальной энергии. Это облегчает решение проблемы «застревания» системы в многочисленных состояниях с локальной минимальной энергией, характерной для спиновых систем с фрустрациями. Для повышения эффективности этого метода необходимо увеличение числа реплик, что требует серьезного роста вычислительных мощностей. Современные компьютеры обладают достаточной мощностью, что позволяет моделировать необходимое количество реплик и получать результаты с высокой точностью. Для достижения качественного результата в рассматриваемой модели достаточно использовать 100 реплик. Для вывода системы в состояние термодинамического равновесия отсекался участок длиной $\tau_0 \times 10^4$ шагов МК на спин, что в несколько раз больше длины неравновесного участка. Усреднение термодинамических параметров проводилось вдоль марковской цепи длиной до $\tau = \tau_0 \times 50$ шагов МК на спин.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Для наблюдения за температурным ходом поведения теплоемкости C и восприимчивости χ мы использовали выражения

$$C = NK^2 (\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2),$$

$$\chi = \begin{cases} NK (\langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2), & T < T_N, \\ NK \langle m^2 \rangle, & T \geq T_N. \end{cases}$$

Здесь $K = |J|/k_B T$, m — параметр порядка системы, который вычислялся по формуле

$$m = |M_A| + |M_B|,$$

где M_A и M_B — намагниченности двух подрешеток.

Намагниченность подрешетки определялась следующим образом:

$$\langle |M_r| \rangle = \left\langle \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2} \right\rangle, \quad r = A, B.$$

По аналогии с антиферромагнитной моделью Изинга (или другими словами, с моделью Поттса с числом состояний $q = 2$) гексагональная решетка была разделена на две подрешетки и сделана попытка расчета намагниченности подрешетки для использования ее в качестве параметра порядка. Хотя система сильно вырождена и полный магнитный момент ее равен нулю, намагниченность подрешетки принимает отличные от нуля значения. Анализ 3D-структур основного состояния не позволил нам определить какую-то закономерность и тип упорядочения в системе. Однако рассчитанный параметр порядка принимает ненулевое значение, что говорит о каком-то «замороженном квазиупорядке», природу которого мы на данный момент не смогли установить.

На рис. 1 представлена температурная зависимость параметра порядка m для системы с линейными размерами $L = 12$ (здесь и далее статистическая погрешность не превышает размеров символов, использованных для построения зависимостей). Как видно на рисунке, в низкотемпературной области значение параметра принимает значение $m \approx 0.68$. Такое поведение параметра порядка свидетельствует о том, что в основном состоянии в системе наблюдается частичное упорядочение.

На рис. 2 представлены температурные зависимости теплоемкости C для систем с различными линейными размерами L . Как видно на рисунке, для

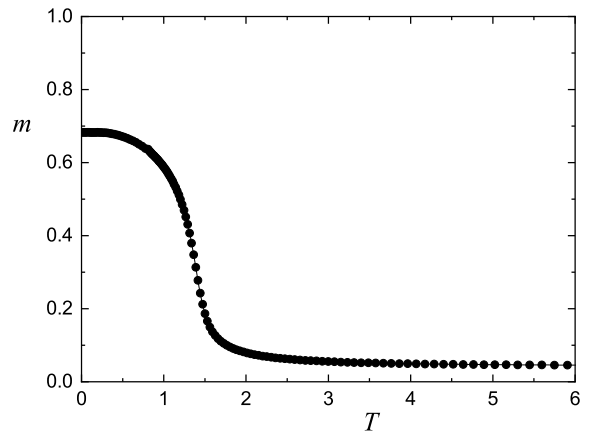


Рис. 1. Температурная зависимость параметра порядка для системы с линейными размерами $L = 12$

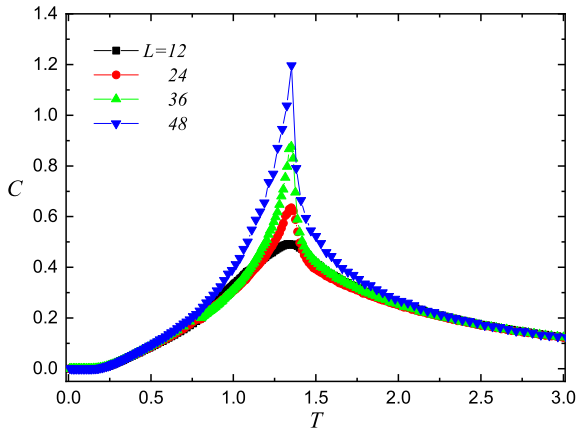


Рис. 2. Температурные зависимости теплоемкости для систем с различными линейными размерами

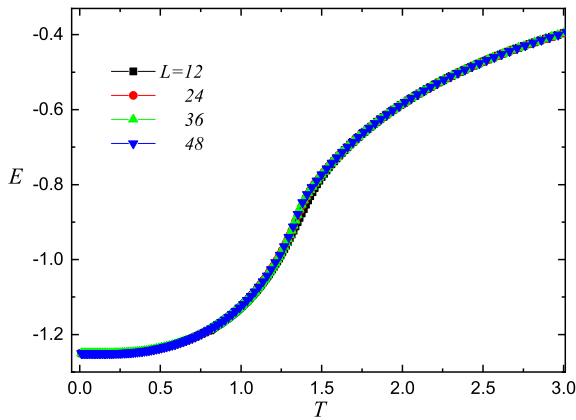


Рис. 3. Температурные зависимости энергии для систем с различными линейными размерами

всех значений L на температурной зависимости теплоемкости наблюдаются максимумы. С ростом линейных размеров системы наблюдается рост максимумов теплоемкости, причем максимумы в пределах погрешности приходятся на одну и ту же температуру. Такое поведение теплоемкости свидетельствует о высокой эффективности использованного способа добавления ПГУ и о достижении насыщения по числу моделируемых спинов N для многих исследуемых нами параметров. Яркий выраженный максимум теплоемкости может указывать на существование ФП в исследуемой модели.

Температурные зависимости энергии для систем с различными линейными размерами L представлены на рис. 3. Как видно на рисунке, вблизи критической температуры наблюдается плавный рост энергии. Известно, что плавное увеличение энергии в критической области в спиновых системах свидетельствует о ФП второго рода. Поведение темпера-

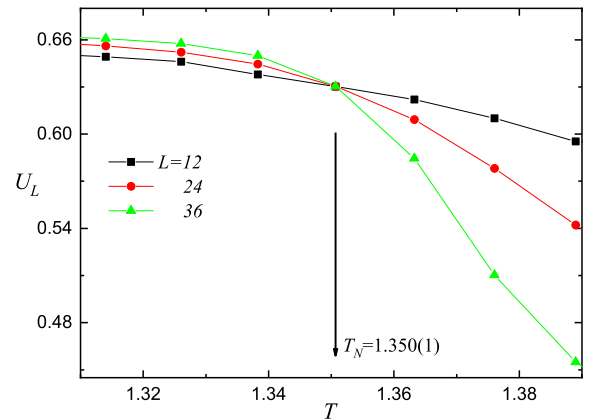
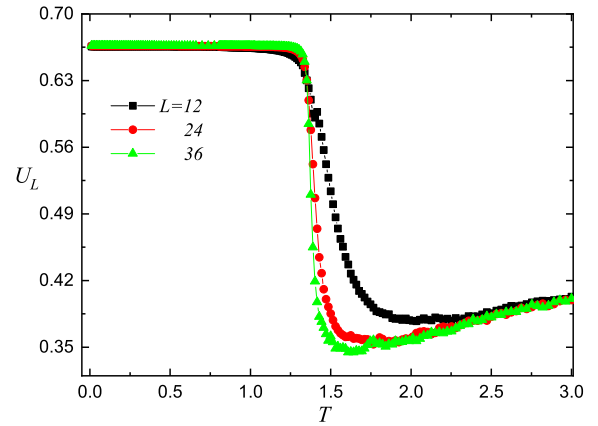


Рис. 4. Температурные зависимости кумулянта Биндера U_L

турной зависимости теплоемкости и энергии данной модели указывает в пользу ФП второго рода.

Для анализа характера ФП мы использовали метод кумулянтов Биндера четвертого порядка [27]:

$$V_L = 1 - \frac{\langle E^4 \rangle_L}{3\langle E^2 \rangle_L^2}, \quad U_L = 1 - \frac{\langle m^4 \rangle_L}{3\langle m^2 \rangle_L^2}, \quad (3)$$

где V_L — кумулянт по энергии, U_L — кумулянт по параметру порядка.

Выражения (3) позволяют определить критическую температуру с большой точностью для ФП первого и второго рода соответственно. Применение кумулянтов Биндера позволяет также хорошо тестировать тип ФП в системе. В случае ФП второго рода кривые температурной зависимости кумулянтов Биндера U_L имеют четко выраженную точку пересечения [27]. Анализ наших данных показывает, что характерные зависимости U_L от температуры при разных значениях L (рис. 4, верхняя панель) в критической области пересекаются в одной точке $T_N = 1.350(1)$ (рис. 4, нижняя панель), где

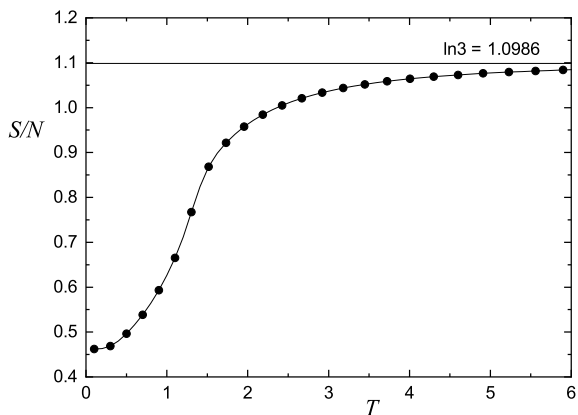


Рис. 5. Температурная зависимость энтропии S/N

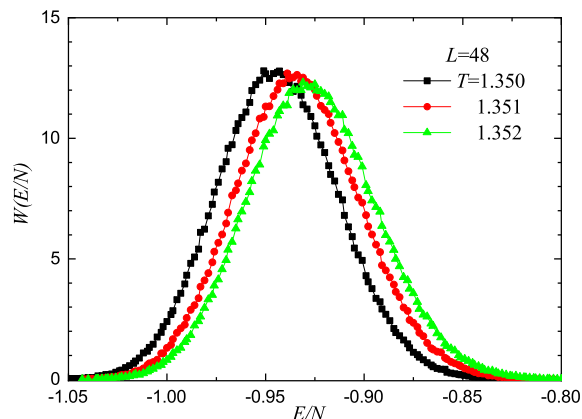


Рис. 7. Гистограммы распределения энергии для различных температур

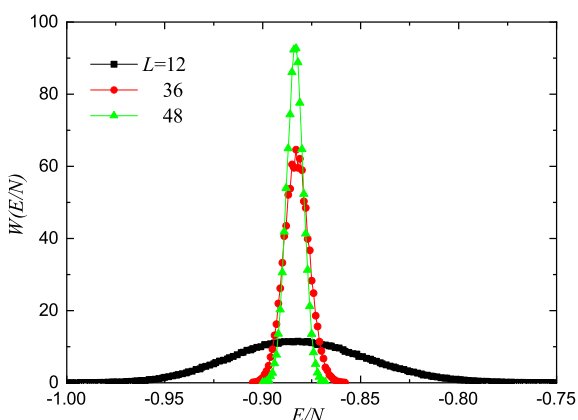


Рис. 6. Гистограммы распределения энергии для разных L

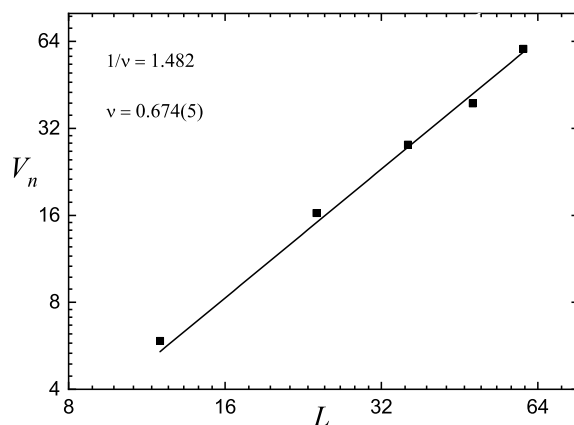


Рис. 8. Зависимость параметра V_n от линейных размеров системы L при $T = T_N$ в двойном логарифмическом масштабе

T_N — критическая температура. Это свидетельствует в пользу наличия в данной модели ФП второго рода.

Для построения температурной зависимости энтропии S использовалось выражение

$$S(T) = S(0) + \int_0^T \frac{C}{t} dt, \quad (4)$$

где $S(0)$ — остаточная энтропия.

Формула (4) позволяет вычислить энтропию системы с точностью до величины $S(0)$. Для определения $S(0)$ мы рассчитывали энтропию системы до достаточно высоких температур ($T_{max} = 12$) и использовали выражение $S(\infty) = \ln(3)$.

Зависимость энтропии S от температуры для системы с линейными размерами $L = 24$ представлена на рис. 5. В низкотемпературной области энтропия стремится к отличному от нуля значению $S(0) \approx 0.46$. Такое поведение свидетельствует о том, что основное состояние системы сильно вырождено.

Несмотря на сильное вырождение, в данной системе не наблюдаются эффекты фрустрации, так как в основном состоянии все связи удовлетворены.

Для определения рода ФП мы также использовали гистограммный анализ данных метода МК [28, 29]. Этот метод позволяет надежно определить род ФП. Полученные на основе гистограммного анализа данных результаты показывают, что в данной модели наблюдается ФП второго рода. Это продемонстрировано на рис. 6 и 7. На рис. 6 представлены гистограммы распределения энергии для систем с различными линейными размерами. Графики построены для температуры, близкой к критической ($T = 1.350$). На рисунке видно, что в зависимости вероятности W от энергии наблюдается один максимум для всех значений L , что свидетельствует в пользу ФП второго рода. Наличие одного максимума на гистограммах распределения энергии является

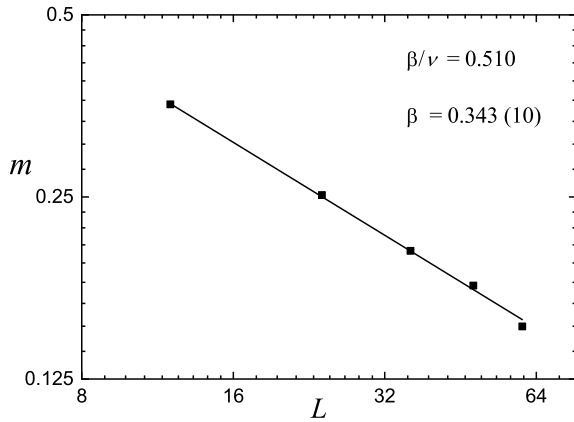


Рис. 9. Определение критического показателя β по наклону m относительно L в двойном логарифмическом масштабе

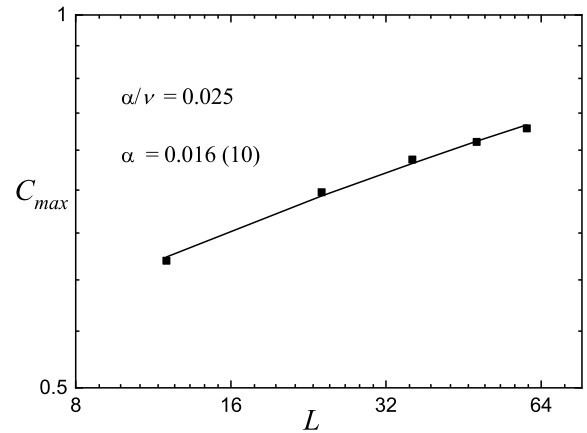


Рис. 11. Определение критического показателя α по наклону C_{max} относительно L в двойном логарифмическом масштабе

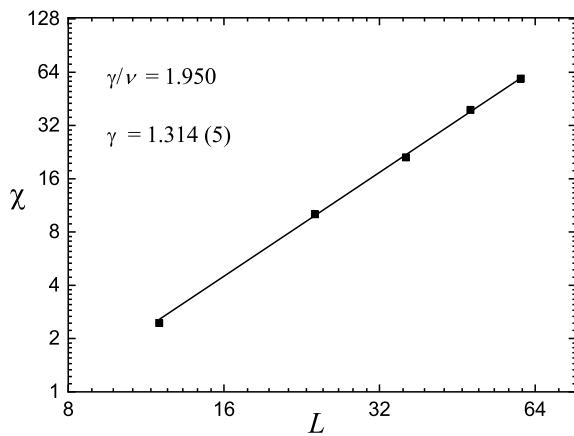


Рис. 10. Определение критического показателя γ по наклону χ относительно L в двойном логарифмическом масштабе

ся характерным признаком ФП второго рода. Кроме того, на рисунке видно, что при увеличении линейных размеров системы ширина гистограммы уменьшается, что характерно для ФП второго рода.

На рис. 7 представлены гистограммы распределения энергии для системы с линейными размерами $L = 48$. Графики построены при различных температурах, близких к критической температуре. На рисунке видно, что в зависимости вероятности W от энергии E для всех температур наблюдается один максимум, который свидетельствует в пользу ФП второго рода. Данные гистограммного анализа подтверждают, что в данной модели наблюдаются ФП второго рода.

При фазовом переходе второго рода поведение различных физических величин вблизи критической температуры подчиняется степенным зако-

нам. Следовательно, можно провести стандартный конечно-размерный скейлинговый анализ для термодинамических величин, из которого следует, что в системе с размерами $L \times L \times L$ при $T = T_N$ и достаточно больших L выполняются следующие выражения [30]:

$$m \propto L^{-\beta/\nu}, \quad \chi \propto L^{\gamma/\nu}, \quad V_n \propto L^{1/\nu} gV_n,$$

где gV_n — некоторая постоянная, а в качестве V_n могут выступать

$$V_n = \frac{\langle m^n E \rangle_L}{3 \langle m^n \rangle} - \langle E \rangle \quad (n = 1, 2, 3).$$

Данные выражения были использованы для расчета критических индексов параметра порядка β , восприимчивости γ и радиуса корреляции ν .

На рис. 8 в двойном логарифмическом масштабе представлена зависимость параметра V_n для $n = 1$ от линейных размеров решетки L при $T_N = 1.350(1)$. Зависимость на рисунке построена в соответствии с методом наименьших квадратов. Угол наклона прямой определяет значение $1/\nu$. Из линейной аппроксимации точек получаем $\nu = 0.674(5)$. Данное значение использовалось для определения критических индексов теплоемкости α , восприимчивости γ и параметра порядка β .

Таблица. Критические индексы трехмерной антиферромагнитной модели Поттса с $q = 3$

	T_N	α	β	γ	ν
Наши данные	1.350(1)	0.016(10)	0.343(10)	1.314(5)	0.674(5)
[13]	2.728(3)	-0.018(10)	0.341(11)	1.312(8)	0.673(5)
3D XY-модель [29]	—	0.015(9)	0.348(25)	1.317(4)	0.6718(2)

На рис. 9 и 10 в двойном логарифмическом масштабе представлены зависимости магнитного параметра порядка m и восприимчивости χ от линейных размеров решетки L . Углы наклона этих прямых определяют значения $\beta/\nu = 0.503(10)$ и $\gamma/\nu = 1.950(5)$. С использованием значения индекса $\nu = 0.674(5)$, были определены значения $\beta = 0.343(10)$ и $\gamma = 1.314(5)$.

Для определения критического индекса теплоемкости α использовался нелинейный метод наименьших квадратов на основе выражения

$$C_{max}(L) = A_1 - A_2 L^{\alpha/\nu},$$

где A_1 и A_2 — некоторые коэффициенты.

На рис. 11 представлен график зависимости максимумов удельной теплоемкости от величины L в двойном логарифмическом масштабе. Значение критического показателя $\alpha/\nu = 0.025(10)$, а $\alpha = 0.016(10)$.

В таблице приведены значения критических параметров, рассчитанные нами для рассматриваемой модели. Отметим, что значения критических индексов в пределах погрешности совпадают с соответствующими значениями индексов для трехмерной ХУ-модели [31], что свидетельствует о принадлежности исследуемой нами модели к тому же классу универсальности критического поведения, что и ХУ-модель. Аналогичный результат был получен ранее в работе [13], в которой было показано, что антиферромагнитная модель Поттса с $q = 3$ на объемно-центрированной кубической решетке принадлежит к тому же классу универсальности критического поведения, что и трехмерная ХУ-модель.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследование фазовых переходов, термодинамических и критических свойств антиферромагнитной модели Поттса с числом состояний спина $q = 3$ на слоистой гексагональной решетке выполнено с использованием репличного алгоритма метода Монте-Карло. Проведен анализ характера фазовых переходов на основе метода кумулянта Биндера и гистограммного анализа данных. Показано, что в рассматриваемой модели наблюдается фазовый переход второго рода. Сравнение наших результатов с критическими показателями трехмерной ХУ-модели подтверждает гипотезу о том, что обе модели принадлежат к одному и тому же классу универсальности.

Финансирование. Исследование выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ (тема № FMSW-2025-0021).

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов. Вклад авторов равноценен.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. J. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*, Academic Press, London, New York (1982) [Р. Бэксстер, *Точно решаемые модели в статистической механике*, Мир, Москва (1985)].
2. F. Y. Wu, *Rev. Mod. Phys.* **54**, 235 (1982).
3. R. J. Baxter, *J. Phys. C* **6**, 445 (1973).
4. P. W. Kasteleyn and C. M. Fortuin, *J. Phys. Soc. Jpn.* **26**, 11 (1969).
5. C. M. Fortuin and P. W. Kasteleyn, *Physica* **57**, 536 (1972).
6. F. Y. Wu and W. A. Guo, *Phys. Rev. E* **86**, 020101 (2012).
7. A. Bazavov, B. A. Berg, and S. Dubey, *Nucl. Phys. B* **802**, 421 (2008).
8. C. A. Sanchez-Villalobos, B. Delamotte, and N. Wschebor, *Phys. Rev. E* **108**, 064120 (2023).
9. J. Gaite, *Nucl. Phys. B* **1011**, 116801 (2025).
10. М. К. Рамазанов, М. А. Магомедов, А. К. Муртазаев, and М. К. Мазгаева, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **168**, 495 (2025) [М. К. Рамазанов, М. А. Магомедов, А. К. Муртазаев, М. К. Мазгаева, *ЖЭТФ* **168**, 495 (2025)].
11. М. К. Рамазанов, А. К. Муртазаев, Т. Р. Ризванова, М. Р. Дзамалудинов, and М. А. Магомедов, *Phys. Solid State* **67**, 1693 (2025) [М. К. Рамазанов, А. К. Муртазаев, Т. Р. Ризванова, М. Р. Дзамалудинов, М. А. Магомедов, *ФТТ* **67**, 1760 (2025)].
12. Ch. Yamaguchi and Y. Okabe, *J. Phys. A* **34**, 8781 (2001).
13. D. R. Kurbanova, M. A. Magomedov, M. R. Dzhamaludinov, M. K. Ramazanov, and A. K. Murtazaev, *Physica A* **676**, 130870 (2025).
14. H. T. Diep, *Frustrated Spin Systems*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore (2004).

15. Y. Huang, K. Chen, Y. Deng, J. L. Jacobsen, R. Kotecky, J. Salas, A. D. Sokal, and J. M. Swart, *Phys. Rev. E* **87**, 012136 (2013).
16. R. Igarashi and M. Ogata, *J. Phys. Conf. Ser.* **200**, 022019 (2010).
17. M. A. Fadeeva and L. N. Shchur, *J. Exp. Theor. Phys.* **135**, 869 (2022) [М. А. Фадеева, Л. Н. Щур, *ЖЭТФ* **162**, 909 (2022)].
18. A. K. Murtazaev, M. K. Ramazanov, M. K. Mazagaeva, and M. A. Magomedov, *J. Exp. Theor. Phys.* **129**, 421 (2019) [А. К. Муртазаев, М. К. Рамазанов, М. К. Мазагаева, М. А. Магомедов, *ЖЭТФ* **156**, 502 (2019)].
19. D. R. Kurbanova, M. K. Ramazanov, M. A. Magomedov, and A. K. Murtazaev, *J. Exp. Theor. Phys.* **136**, 729 (2023) [Д. Р. Курбанова, М. К. Рамазанов, М. А. Магомедов, А. К. Муртазаев, *ЖЭТФ* **163**, 816 (2023)].
20. M. K. Ramazanov, A. K. Murtazaev, M. A. Magomedov, and M. K. Mazagaeva, *Phys. Met. Metallogr.* **124**, 429 (2023) [М. К. Рамазанов, А. К. Муртазаев, М. А. Магомедов, М. К. Мазагаева, *ФММ* **124**, 339 (2023)].
21. G. R. Golner, *Phys. Rev. B* **8**, 3419 (1973).
22. K. G. Wilson and J. Kogut, *Phys. Rep.* **12**, 75 (1974).
23. M. K. Ramazanov and A. K. Murtazaev, *JETP Lett.* **109**, 589 (2019) [М. К. Рамазанов, А. К. Муртазаев, *Письма в ЖЭТФ* **109**, 610 (2019)].
24. A. O. Sorokin, *JETP Lett.* **111**, 41 (2020) [А. О. Со рокин, *Письма в ЖЭТФ* **111**, 34 (2020)].
25. R. Masrour and A. Jabar, *Physica A* **541**, 123377 (2020).
26. A. K. Murtazaev, M. K. Badiev, M. K. Ramazanov, and M. A. Magomedov, *Physica A* **555**, 124530 (2020).
27. K. Binder and D. Heermann, *Monte Carlo Simulation in Statistical Physics: An Introduction*, Springer, Berlin, Heidelberg (2010).
28. A. M. Ferrenberg and R. H. Swendsen, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 2635 (1988).
29. A. M. Ferrenberg and R. H. Swendsen, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 1195 (1989).
30. P. Peczak, A. M. Ferrenberg, and D. P. Landau, *Phys. Rev. B* **43**, 6087 (1991).
31. Wanwan Xu, Yanan Sun, Jian-Ping Lv, and Youjin Deng, *Phys. Rev. B* **100**, 064525 (2019).

The Study of Phase Transitions and Critical Properties of an Antiferromagnetic Potts Model on a Layered Hexagonal Lattice

*М. К. Ramazanov**, *М. А. Magomedov*, *А. К. Murtazaev*

Amirkhanov Institute of Physics, Dagestan Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences
367015, Makhachkala, Russia

*E-mail: sheikh77@mail.ru

Received February 10, 2026

Revised May 15, 2026

Accepted May 18, 2026

Abstract

A Monte Carlo study of phase transitions, thermodynamic, and critical properties of the antiferromagnetic Potts model with $q = 3$ spin states on a layered hexagonal lattice with nearest-neighbor interactions was carried out. Using a histogram data analysis method and the fourth-order Binder cumulant method, the nature of the phase transition was analyzed. It was shown that the model under study exhibits a second-order phase transition. The values of the main static critical exponents were calculated using relations from finite-size scaling theory. It was found that the model under consideration belongs to the same universality class of critical behavior as the three-dimensional XY model.

Keywords: Potts model, antiferromagnet, phase transitions, Monte Carlo method, critical exponents

Funding. This study was carried out within the framework of the State Assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (topic No. FMSW-2025-0021).

Conflict of interest. The authors declare that they have no conflicts of interest.

Authors' contributions. The contributions of the authors are equal.