

ЛЗШМ- И ЭДСР-ИНТЕРФЕРОМЕТРИИ И ОДНОЭЛЕКТРОННАЯ ДИНАМИКА В ДВОЙНОЙ КВАНТОВОЙ ТОЧКЕ НА КРАЮ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ИЗОЛЯТОРА С МАГНИТНЫМИ БАРЬЕРАМИ

*Д. В. Хомицкий**, *Е. А. Лаврухина*

*Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
603022, Нижний Новгород, Россия*

Поступила в редакцию 18 февраля 2026 г.,
после переработки 10 апреля 2026 г.
Принята к публикации 15 апреля 2026 г.

Представлены результаты моделирования одноэлектронной динамики в режимах интерференции Ландау–Зенера–Штюкельберга–Майораны и электрического дипольного спинового резонанса для двойной квантовой точки, образованной тремя магнитными барьерами на краю топологического изолятора, сформированного на базе квантовой ямы HgTe/CdHgTe. Выбраны параметры системы, обеспечивающие присутствие четырех дискретных уровней, для которых реализуется связанная динамика спиновой и координатной степеней свободы. Результаты численного моделирования показывают, что возможны осцилляции вида осцилляций Раби как для спиновой, так и для зарядовой подсистемы, а также их комбинаций. Характерные резонансы исследованы в плоскости параметров системы. Дальнейшее развитие изложенных результатов открывает новые возможности применения квантовых точек в топологических изоляторах для задач квантовых вычислений.

Ключевые слова: топологический изолятор, магнитный барьер, квантовая точка, интерференция Ландау–Зенера–Штюкельберга–Майораны, электрический дипольный спиновый резонанс

DOI: 10.31857/S0044451026060077

1. ВВЕДЕНИЕ

Квантовые точки в топологических изоляторах [1–4] являются одним из объектов на базе материалов с нетривиальной топологией, потребность в которых существует в прикладных задачах физики полупроводников и структур на их основе. Главным преимуществом таких структур по сравнению с традиционными системами на основе полупроводников A(III)B(V) или кремния является устойчивость некоторых свойств, прежде всего транспортных, относительно влияния беспорядка, что обеспечивается качественными (топологическими) свойствами симметрии системы. Это позволяет рассчитывать на создание на базе топологических изоляторов новых поколений устройств нанoeлектрони-

ки и спинтроники с улучшенными характеристиками, что особенно важно при разработке блоков для обработки информации и квантовых вычислений. Одним из возможных приложений в этой области являются проекты по созданию кубитов на базе структур с одной или несколькими квантовыми точками. Подобные проекты требуют знания динамических свойств зарядовой и спиновой подсистем во внешних управляющих полях. Для их определения целесообразно проводить предварительное моделирование динамических свойств и отклика системы во внешнем нестационарном поле. Одним из методов исследования систем с несколькими параметрами является спектроскопия, основанная на интерференции Ландау–Зенера–Штюкельберга–Майораны (ЛЗШМ) [5–7]. На систему в таком режиме воздействует достаточно сильное поле в широком диапазоне частот и амплитуд, вызывая динамическое пересечение уровней на интервале действия поля. При этом во время взаимодействия со-

* E-mail: khomitsky@phys.unn.ru

стояний при пересечении уровней возможна интерференция амплитуд прямого и обратного перехода между ними. Это может вызывать как увеличение, так и уменьшение вероятности перехода с первоначально занятого уровня, что позволяет отнести данное явление к группе интерференционных, проявляющихся в характерных осциллирующих зависимостях вероятности перехода от параметров системы. Помимо этого, для спин-зависимых систем возможны комбинации режимов ЛЗШМ и других резонансов, в частности спинового, при которых также возникает интерференция амплитуд различных переходов. Хотя классическая ЛЗШМ-теория применяется прежде всего к двухуровневым системам, проявления подобной интерференции имеют место и в более сложных структурах, с более чем двумя взаимодействующими уровнями. Для некоторых многоуровневых ЛЗШМ-систем были получены аналитические решения [8, 9]. Более общие случаи исследовались численно, в том числе для двух взаимодействующих джозефсоновских кубитов [10, 11], а также для двух-электронных задач [12, 13]. Четырехуровневая конфигурация представляет собой минимальную модель для изучения ЛЗШМ-интерференции в спин-зарядовой динамике, когда каждой паре уровней отвечает различная проекция спина, а сами пары пространственно локализованы в разных квантовых точках. Примеры подобных систем можно найти в рассмотренных ранее задачах для двойных квантовых точек в структуре на основе GaAs/AlGaAs. В этом случае к ЛЗШМ-интерференции добавляется явление электрического дипольного спинового резонанса (ЭДСР), при котором в периодическом электрическом поле индуцируются переходы с переворотом спина при наличии спин-орбитального взаимодействия [14, 15]. Наши недавние теоретические исследования [16, 17] и экспериментальные работы нескольких коллективов [18–20] показали, что в таких системах реализуются различные режимы динамики, в том числе в виде интерференции между ЛЗШМ- и ЭДСР-режимами.

Возникает вопрос, можно ли индуцировать режимы ЛЗШМ-интерференции, а также ЭДСР и их комбинаций для динамики в двойной квантовой точке на базе топологически нетривиальных материалов, в том числе в топологических изоляторах. На сегодняшний день широкого экспериментального и технологического применения подобные структуры еще не получили. Что касается их теоретического моделирования, то история таких работ насчитывает по меньшей мере полтора десятилетия. Число работ в этой области исчисляется десятками, и

мы упомянем лишь некоторые из них, в которых на базе топологических изоляторов рассматриваются компактные объекты вида квантовых точек [21–28]. Упомянутые работы, как и настоящая статья, описывают исследования в основном теоретического характера. Объем экспериментальных результатов в области квантовых точек в топологических изоляторах на сегодняшний день значительно уступает теоретическим. В частности, в области технологий применения магнитных барьеров или магнитных примесей для воздействия на краевые состояния топологического изолятора можно выделить работы [29–31], в которых локализация электронных состояний обеспечивалась либо геометрическим профилем края [29], либо с краевыми состояниями взаимодействовали локализованные магнитные моменты [30, 31]. Близкая к этим работам методология развивалась в наших предшествующих теоретических работах, где рассматривались модели квантовых точек на основе краевых состояний в квантовой яме HgTe/CdHgTe, когда локализованные состояния формируются из краевых состояний топологического изолятора с помощью магнитных барьеров. Исследовались конфигурации как с одиночной [32–35], так и с двойной [36, 37] квантовыми точками. Характерные размеры квантовых точек, где формируются локализованные состояния, составляли 50–100 нм, а амплитуды обменного взаимодействия краевых состояний топологического изолятора и магнитных моментов материала барьеров находились в интервале 10–20 мэВ, что отвечает, например, взаимодействию с диэлектрическими магнитами семейства MnSe, EuSe [38–40]. Сравнительно медленный прогресс в экспериментальных и технологических достижениях создания квантовых точек в топологических изоляторах с помощью магнитных барьеров объясняется, на наш взгляд, прежде всего возможностями и нормами по точности изготовления и контакта магнитного барьера с краем топологического изолятора, чтобы обеспечить хорошие параметры обменного взаимодействия краевых состояний и состояний в магнитном материале. Мы надеемся, что новые эффекты в квантовых точках на базе топологических изоляторов, подобно рассматриваемым в настоящей статье динамическим эффектам для пространственной и спиновой эволюции, будут служить дополнительным стимулом и для их технологического совершенствования и более широкого распространения.

Что касается исследований эффектов вида ЛЗШМ-интерференции, тем более совместно с

ЭДСР, то таких работ для структур на базе топологических изоляторов к настоящему времени, по нашим сведениям, имеется совсем немного. Можно упомянуть работу [41], где рассматривалось влияние периодического электромагнитного поля на проводимость в системе с топологически защищенными краевыми состояниями, статью [42], где при моделировании были обнаружены когерентные осцилляции между объемными и краевыми состояниями топологического изолятора в периодическом поле, рассматриваемые в рамках ЛЗШМ-переходов, а также работу [43], где рассматривалась ЛЗШМ-интерференция волновых пакетов, созданных из краевых и объемных состояний топологического изолятора на основе модели Берневига–Хьюза–Жанга [1–3] для спектра топологических изоляторов. В статье [44] были представлены результаты моделирования динамики носителей, возбуждаемых при межзонных переходах терагерцевым излучением с участием фононов по механизму ЛЗШМ-туннелирования в топологическом изоляторе на основе $ZrTe_5$. В работе [45] изучалась ЛЗШМ-интерференция в присутствии симметрии кирально-зеркального типа (chiral-mirror-like) у краевых состояний. Подводя итог этому небольшому обзору, можно отметить, что в упомянутых работах рассматривались протяженные, делокализованные, состояния. Если говорить о задачах, где изучалась бы ЛЗШМ-интерференция и ЭДСР для локализованных состояний в квантовых точках на базе топологических изоляторов, то они, по нашим сведениям, до сих пор не были представлены в литературе. Поэтому их постановка и моделирование, описанные в настоящей работе, представляются актуальными, особенно в свете возможных приложений для создания кубитов на их базе.

В настоящей работе представлены результаты моделирования одноэлектронной динамики в режиме ЛЗШМ-интерференции и ЭДСР, а также их комбинаций для двойной квантовой точки, показанной на рис. 1. Здесь показаны три магнитных барьера (B1, B2, B3), между которыми из краевых состояний двумерного топологического изолятора на базе квантовой ямы $HgTe/CdHgTe$ формируются две области локализованных состояний, т. е. две квантовые точки QD1, QD2.

Модель спектра данной структуры была представлена в [36, 37] для двойной квантовой точки с большим числом дискретных уровней (порядка десяти). В настоящей работе параметры структуры



Рис. 1. Структура с двумя квантовыми точками (QD1, QD2), образованными тремя магнитными барьерами (B1, B2, B3) на краю топологического изолятора на базе квантовой ямы $HgTe/CdHgTe$

выбираются таким образом, чтобы в спектре присутствовало минимальное число (четыре) дискретных уровней, что отвечает модели двух взаимодействующих подсистем: спиновой и координатной (зарядовой). Первая подсистема соответствует выбранной проекции спина, а вторая — локализации электрона в левой либо в правой квантовой точке на рис. 1. Мы ограничиваемся одноэлектронным режимом динамики во внешнем электрическом поле, что соответствует случаю слабого обменного взаимодействия краевых состояний с магнитными барьерами с малым числом проникающих в двойную квантовую точку электронов. Результаты численного моделирования ЛЗШМ-интерференции и режима ЭДСР показывают, что динамика системы может сопровождаться осцилляциями Раби как для спиновой, так и для зарядовой подсистемы, а также их комбинации для различных резонансных переходов. Эти резонансы и конкретные примеры динамики исследованы в плоскости различных комбинаций параметров системы. Дальнейшее развитие представленных результатов открывает новые возможности применения квантовых точек в топологических изоляторах, в том числе для задач квантовых вычислений.

Работа состоит из пяти разделов. В разд. 2 мы описываем модель краевых состояний с магнитными барьерами и спектр дискретных уровней, а также спиновую поляризацию состояний. В разд. 3 приведены результаты численного расчета эволюции в периодическом электрическом поле, в том числе в форме двумерных карт усредненных по времени величин при ЛЗШМ- и ЭДСР-интерференциях, построенные в пространстве параметров системы, а также обсуждаются различные типы переходов. В разд. 4 анализируются примеры каждого типа эволюции из обнаруженных в разд. 3 с разверткой динамики во времени. В заключительном разд. 5 сформулированы выводы.

2. ГАМИЛЬТониан, СПЕКТР И УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ

2.1. Гамильтониан и спектр дискретных уровней

Гамильтониан одномерных краевых состояний топологического изолятора в структуре HgTe/CdHgTe, записанный в присутствии барьеров с намагниченностью для случая трех барьеров и двух сформированных между ними областей конфинмента (квантовых точек), имеет вид [36]

$$H = Ak_y\sigma_z - M_1S(-L_1 - y)(\sigma_x \cos \theta_1 + \sigma_y \sin \theta_1) - M_b(S(y) - S(y - L_b))(\sigma_x \cos \theta_b + \sigma_y \sin \theta_b) - M_2S(y - L_2 - L_b)(\sigma_x \cos \theta_2 + \sigma_y \sin \theta_2). \quad (1)$$

Здесь $S(y)$ — ступенчатая функция, ось y ориентирована вдоль края, а расположения барьеров и образованных ими квантовых точек показаны на рис. 1, где первая квантовая точка, центральный барьер и вторая квантовая точка имеют размеры L_1 , L_b и L_2 соответственно. Управляющими параметрами спектра являются амплитуды барьеров $M_{1,b,2}$ и углы ориентации их намагниченности $\theta_{1,b,2}$ в плоскости xy . Мы будем менять в основном угол намагниченности центрального барьера θ_b , оставляя остальные параметры фиксированными.

Волновые функции стационарного гамильтониана (1) с энергией E в каждой из пяти областей на рис. 1 имеют следующий вид [36]:

$$\psi_{y < -L_1} = B \left(\begin{array}{c} 1 \\ -i\sqrt{M_1^2 - E^2 + E} e^{i\theta_1} \end{array} \right) e^{\frac{\sqrt{M_1^2 - E^2}}{A} y}, \quad (2)$$

$$\psi_{QD1} = \left(\begin{array}{c} C_1 e^{\frac{iEy}{A}} \\ C_2 e^{-\frac{iEy}{A}} \end{array} \right), \quad (3)$$

$$\psi_{0 < y < L_b} = D_1 \left(\begin{array}{c} 1 \\ i\sqrt{M_b^2 - E^2 - E} e^{i\theta_b} \end{array} \right) e^{-\frac{\sqrt{M_b^2 - E^2}}{A} y} + D_2 \left(\begin{array}{c} 1 \\ -i\sqrt{M_b^2 - E^2 + E} e^{i\theta_b} \end{array} \right) e^{\frac{\sqrt{M_b^2 - E^2}}{A} y}, \quad (4)$$

$$\psi_{QD2} = \left(\begin{array}{c} H_1 e^{\frac{iEy}{A}} \\ H_2 e^{-\frac{iEy}{A}} \end{array} \right), \quad (5)$$

$$\psi_{y > L_b + L_2} = J \left(\begin{array}{c} 1 \\ i\sqrt{M_2^2 - E^2 + E} e^{i\theta_2} \end{array} \right) e^{-\frac{\sqrt{M_2^2 - E^2}}{A} y}. \quad (6)$$

Коэффициенты B , $C_{1,2}$, $D_{1,2}$, J определяются из условий непрерывности двухкомпонентной волновой функции (2)–(6) на границах магнитных барьеров $y = 0$, $y = L_b$ и $y = L_b + L_2$. Дальние границы

крайних барьеров считаются настолько удаленными, что волновая функция убывает внутри барьеров до нуля. Этому соответствует типичная ширина крайних барьеров, превышающая 100–150 нм [35], что лежит в пределах современных технологических возможностей. Энергия E дискретных уровней находится из корней соответствующего характеристического уравнения.

На рис. 2а показана зависимость энергий E дискретных уровней от угла намагниченности центрального барьера θ_b при фиксированных значениях остальных параметров системы: $A = 360$ мэВ·нм [1–4], $M_{1,b,2} = 7$ мэВ, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$, $L_{1,2} = 100$ нм, $L_b = 200$ нм. Мы выбираем равные амплитуды всех трех магнитных барьеров, чтобы получить, с одной стороны, нужное число дискретных уровней, а с другой — достаточно эффективную туннельную связь между квантовыми точками, разделенными центральным барьером. В отличие от спектров со сравнительно большим числом уровней, рассмотренных в [36, 37], здесь для выбранных параметров спектр почти на всем интервале изменения угла θ_b имеет, как это видно на рис. 2а, четыре дискретных уровня, и лишь в сравнительно небольшой краевой области число уровней равно пяти. Отметим, что в спектре присутствует небольшой антикроссинг уровней в точках их пересечения, однако открываемая щель слишком мала, чтобы быть заметной на рис. 2а. В работе [36], где рассматривался подобный спектр, для щели Δ в точках антикроссинга была получена оценка

$$\Delta \sim (AM/L)^{1/2} \exp(-LM/A),$$

где M — высота барьера, разделяющего квантовые точки, L — ширина квантовой точки. Для параметров спектра на рис. 2а данная оценка дает величину $\Delta \approx 0.072$ мэВ, которая слишком мала, чтобы быть заметной на рис. 2а.

Мы будем работать в области параметра θ_b , для которой имеются четыре дискретных уровня, реализуя тем самым модель системы для спин-зависимой ЛЗШМ-интерференции в двойной квантовой точке [16, 17], но сформированной на краю топологического изолятора с исходно безмассовыми краевыми состояниями. Наклон и цвет линий на рис. 2а обозначают пространственную локализацию состояний (синий — в правой точке, оранжевый — в левой), а спиновые проекции в плоскости xy показаны стрелками. Можно видеть, что структура уровней позволяет реализовать различные типы переходов [37]. Возможны как переходы ЭДСР-типа с изменением преимущественно спиновой проекции при сохране-

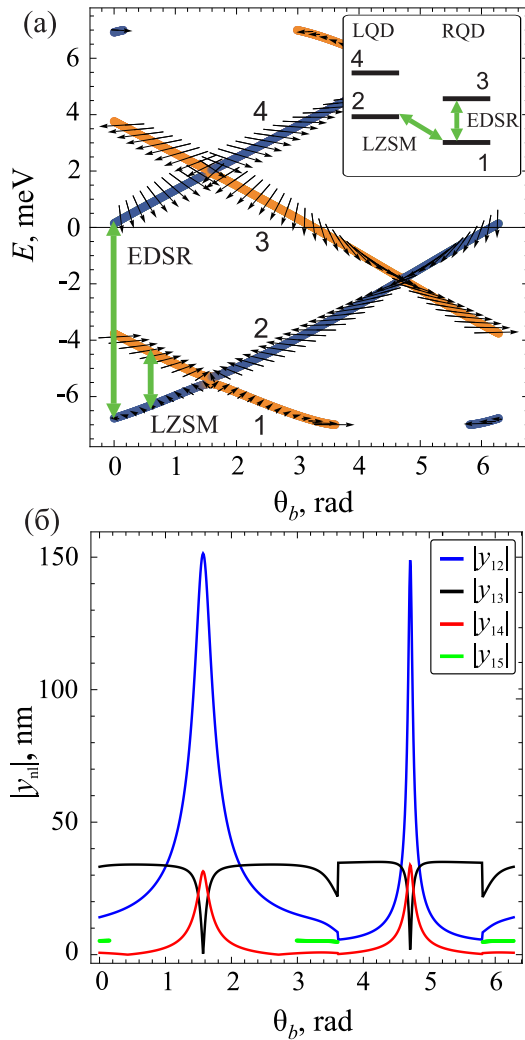


Рис. 2. а — Спектр дискретных уровней в двойной квантовой точке на рис. 1 как функция угла θ_b намагниченности центрального барьера для параметров гамильтониана (1) $A = 360$ мэВ·нм, $M_{1,2} = 7$ мэВ, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$, $L_{1,2} = 100$ нм, $L_b = 200$ нм. Основная область изменения θ_b отвечает формированию четырех уровней. Цвет уровней обозначает пространственную локализацию (синий — в правой точке, оранжевый — в левой), спиновые проекции в плоскости xy показаны стрелками. Стрелками обозначены переходы вида ЛЗШМ (LZSM) между состояниями 1 и 2 в левой (LQD) и правой (RQD) точках и вида ЭДСР (EDSR) между состояниями 1 и 3 в правой точке, соответствующие схеме, показанной на вставке. б — Зависимость модуля дипольного матричного элемента $|y_{ni}|$ для основных переходов от θ_b . В области $\theta_b \approx 0.5$ модули $|y_{13}|$ и $|y_{12}|$ достигают своих сопоставимых значений

нии локализации в одной точке, что отвечает переходам между уровнями, отмеченными одним цветом (например, переход 1–3), так и переходы между со-

стояниями, локализованными в разных точках, что отвечает разному цвету (наклону) для начального и конечного состояний, т. е. переходы ЛЗШМ-типа (например, переходы 1–2). Схема переходов обоих типов показана на вставке к рис. 2 а по принадлежности состояний к левой и правой квантовым точкам (LQD и RQD). Присутствие переходов обоих типов позволяет рассчитывать на нетривиальную картину ЛЗШМ-интерференции как для координатной, так и для спиновой степени свободы, которая будет рассмотрена в следующем разделе.

На рис. 2 б показана зависимость модуля дипольного матричного элемента $|y_{ij}|$ для основных переходов от θ_b . В области $\theta_b \approx 0.5$, для которой далее проводится анализ динамики, модули $|y_{13}|$ и $|y_{12}|$ достигают сопоставимых значений, что соответствует переходам типа ЭДСР и ЛЗШМ-переходам, отмеченным на рис. 2 а. Для типичной амплитуды потенциала электрического поля $V \sim Fy$ со значением $F = 0.005$ мэВ/нм, когда можно говорить о двухуровневом приближении в динамике, значение модуля матричного элемента $|Fy_{ij}|$ составляет 0.75 мэВ для перехода 1–2 и 0.16 мэВ для перехода 1–3. Эти оценки означают, что в двухуровневом приближении характерные времена переходов составляют $\tau \approx 0.1$ нс. Характерную длину свободного пробега электрона при фермиевской скорости $v_F = 5 \cdot 10^7$ см/с [1–3] на краевом состоянии для такого времени можно оценить как $L_p \sim v_F \tau \sim 50$ мкм. Такой размер сравним с лучшими образцами, на которых исследуются проявления свойств топологических изоляторов [4]. Рабочая область между крайними барьерами нашей структуры на рис. 1, однако, значительно меньше и составляет около 0.5 мкм, что для образцов высокого качества обеспечивает баллистический транспорт. Эти оценки оправдывают применение простого приближения когерентной динамики в периодическом электрическом поле, которое будет рассмотрено в следующем подразделе.

2.2. Уравнения динамики в нестационарном поле

Моделирование ЛЗШМ-интерференции подразумевает решение нестационарного уравнения Шредингера в переменном электрическом поле, которое вызывает переходы между уровнями. Для локализованных электронных состояний, формирующихся на краю топологического изолятора в HgTe/CdHgTe в присутствии магнитных барьеров, электрическое поле можно вводить в гамильтониан в приближении

квазистационарного скалярного потенциала, осциллирующего на частоте ω [34]:

$$V(y, t) = -Fy \sin \omega t, \quad (7)$$

где амплитуда поля F для удобства измеряется в мЭВ/нм, а частота ω отвечает интервалу, определяемому уровнями энергии на рис. 2. Решение $\Psi(y, t)$ нестационарного уравнения Шредингера с гамильтонианом $H + V(y, t)$, определенном в (1) и (7), можно представить в виде разложения по базису из стационарных состояний $\psi_n(y)$, отвечающих энергиям уровней E_n и заданных соотношениями (2)–(6):

$$\Psi(y, t) = \sum_n C_n(t) e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} \psi_n(y), \quad (8)$$

где коэффициенты разложения $C_n(t)$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dC_n}{dt} = i \frac{F}{\hbar} \sum_l C_l(t) y_{nl} e^{-i \frac{(E_l - E_n)t}{\hbar}}. \quad (9)$$

Динамика определяется дипольными матричными элементами координаты y_{nl} , которые для рассматриваемой структуры с двойной точкой изучались в [37]. Наблюдаются ненулевые матричные элементы как между состояниями с различной областью локализации волновой функции в левой и правой точках в силу конечной прозрачности центрального барьера, так и между состояниями с различной проекцией спина ввиду эффективной спин-орбитальной связи в гамильтониане (1). Система (9) дополняется начальным условием $C_n(0)$, отвечающим нахождению на нижнем уровне $n = 1$ в спектре при фиксированном значении θ_b на рис. 2.

Со значением амплитуды F связана разность значений потенциала (7), приложенного к структуре на рис. 1, которая равна

$$\Delta V = F \alpha (L_1 + L_b + L_2). \quad (10)$$

В (10) параметр $\alpha \sim 1$ зависит от положения крайней левой и крайней правой точек на рис. 1, между которыми приложено электрическое поле. Типичная разность потенциалов (10) в рассматриваемой модели составляет порядка 2.5–25 мЭВ. При таких значениях ΔV , как это видно на рис. 2 а, возникает динамическое пересечение уровней в соседних квантовых точках в течение одного периода поля, что приводит к режиму ЛЗШМ-интерференции [7].

Расположение уровней на рис. 2 а позволяет дать оценку областей параметров, при которых можно

ожидать индуцирование того или иного режима динамики. Обозначим расстояние между уровнями n и l как Δ_{nl} . Для уровней 1 и 2, отвечающих нижним состояниям в правой и левой точках, разделенным барьером, расстояние между ними можно оценить из гамильтониана (1) как $\Delta_{12} \sim M_b |\cos \theta_b| / 2$, что дает величину $\Delta_{12} \approx 3.1\text{--}3.5$ мЭВ для рассматриваемых ниже углов ориентации намагниченности центрального барьера. Исходя из этого можно сделать оценку, согласно которой ЛЗШМ-режим с пересечением уровней 1 и 2 на периоде поля будет наблюдаться при условии

$$\Delta V > \Delta_{12}, \quad (11)$$

которое для спектра на рис. 2 а при $\theta_b \leq 0.5$ будет выполнено в полях $F > 0.01$ мЭВ/нм. На приведенных ниже рис. 5 и 6 эта оценка подтверждается: справа от порога (11) формируется хорошо различимая структура чечевицеобразных «узоров» ЛЗШМ-интерференции.

Что касается наблюдения ЭДСР-переходов, то они не требуют специального условия относительно амплитуды электрического поля и поэтому наблюдаются для всех амплитуд F при выполнении резонансного условия $\hbar\omega = \Delta_{13}$, как это будет видно ниже на рис. 5 и 6. Наблюдение же гибридного режима, когда в динамику вовлекаются все четыре уровня, требует выполнения условия, при котором параметр ΔV превышает расстояние Δ_{14} между уровнями 1 и 4 на рис. 2 а, т. е. при

$$\Delta V > \Delta_{14}. \quad (12)$$

Для нашей системы условие (12) выполняется в полях $F > 0.026$ мЭВ/нм. Действительно, на приведенных ниже рис. 5 и 6 правее данной границы можно увидеть характерную дугообразную кривую на всех панелях, что для рис. 5 означает присутствие в динамике всех четырех уровней, т. е. гибридный режим.

3. КАРТЫ ЛЗШМ- И ЭДСР-ИНТЕРФЕРЕНЦИЙ

3.1. Карты интерференции в плоскости $(\theta_b, \hbar\omega)$

Мы начнем исследование динамики с построения карт усредненных по времени величин, описывающих заселенности \bar{P}_n уровней E_n на рис. 2 а, т. е. построения контурных карт функций

$$\bar{P}_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |C_n(t)|^2 dt, \quad (13)$$

где $T_0 \gg T$ — время наблюдения за системой, включающее в себя много периодов $T = 2\pi/\omega$ электрического поля с потенциалом (7). Кроме того, мы рассмотрим поведение во времени некоторых средних значений измеримых величин, а именно, вероятности пребывания в правой квантовой точке $P_r(t)$ и значения i -й проекции спина $S_i(t)$ в единицах \hbar , определенных в состоянии с волновой функцией (8) следующим образом:

$$P_r(t) = \int_0^\infty |\Psi(y, t)|^2 dy, \quad (14)$$

$$S_i(t) = \int_{-\infty}^\infty \Psi^+(y, t) \sigma_i \Psi(y, t) dy, \quad (15)$$

где $i = x, y, z$. Вероятность пребывания в левой квантовой точке $P_l(t)$ связана с (14) условием нормировки волновой функции $P_l(t) = 1 - P_r(t)$. По аналогии с (13) нас будут интересовать усредненные по большому интервалу времени T_0 значения величин (14), (15):

$$\bar{P}_r = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} P_r(t) dt, \quad (16)$$

$$\bar{S}_i = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} S_i(t) dt. \quad (17)$$

Вначале мы проанализируем зависимость усредненных величин (13), (16) и (17) от пары параметров $(\theta_b, \hbar\omega)$. Параметр θ_b определяет положение уровней энергии на рис. 2 а, тогда как $\hbar\omega$ отвечает энергии фотона на частоте электрического поля с потенциалом (7), которое вызывает переходы между этими уровнями. Результаты расчета для заселенностей (13) показаны на рис. 3 для интервала изменения угла θ_b от 0 до π и частоты электрического поля в единицах $\hbar\omega$ от 1 до 10 мэВ. Для средних значений (16) и (17) соответствующие карты показаны на рис. 4. Амплитуда поля F в (7) на рис. 3 и рис. 4 равна 0.006 мэВ/нм.

Рассмотрим зависимость усредненных значений заселенностей уровней (13) на рис. 3. Можно видеть резонансные линии для переходов $E_n - E_l$ и их субгармоник, т. е. целочисленных и дробных резонансов, частота которых описывается выражением

$$\hbar\omega_{nl}^{(k)} = (E_n - E_l)/k, \quad (18)$$

где $k = 1$ отвечает главной гармонике, т. е. резонансному переходу между уровнями E_n и E_l , а значения $k = 2, 3, \dots$ описывают субгармоники. Обсудим структуру этих линий более подробно. На рис. 3 а видно, что переходы с уровня E_1 на вышележащие уровни группируются в две серии. Для серии с низкими частотами переходов, при $\hbar\omega < 4$ мэВ, соответствующие всплески заселенностей наблюдаются на уровне E_2 , как это видно на рис. 3 б. Сравнивая рис. 3 а, б со структурой уровней на рис. 2 а, можно сделать вывод, что верхняя из линий отвечает переходу $E_1 \rightarrow E_2$ на главной гармонике резонанса (18) при $k = 1$, а нижняя линия отвечает второй субгармонике в (18) при $k = 2$. Это переход между состояниями, отвечающими локализации волновой функции в разных квантовых точках, для которых уровни испытывают динамическое пересечение на периоде поля, приводящее к ЛЗШМ-интерференции. Детальное описание этого перехода будет представлено в подразд. 3.3, а примеры динамики будут обсуждаться в разд. 4.

Следующая интенсивная линия с энергией перехода $\hbar\omega \approx 7$ мэВ на рис. 3 а, в отвечает переходу между уровнями E_1 и E_3 . Как следует из рис. 2 а, этот переход характеризуется сохранением локализации электрона в правой квантовой точке с изменением знака проекций спина, поэтому его можно назвать переходом в режиме ЭДСР. На рис. 3 а, в видна также значительно более слабая линия в области энергий $\hbar\omega \approx 3.5$ мэВ, отвечающая субгармонике $k = 2$ для этого перехода. Более подробно мы обсудим такой тип переходов в подразд. 3.4, а примеры динамики будут даны в разд. 4.

Далее, наиболее высокая по энергии линия перехода на рис. 3 а, г отвечает переходам между уровнями E_1 и E_4 при энергии $\hbar\omega \approx 7.5-10$ мэВ. Для этого перехода также наблюдается вторая субгармоника при энергиях 3.5–5 мэВ. Этот переход, как и переход $E_1 \rightarrow E_2$, сопровождается сменой области локализации электрона и относится к ЛЗШМ-типу.

Наконец, на рис. 3 а, б, г видно, что при значении параметра $\theta_b = \pi/2$ происходит новый всплеск переходов $E_1 \rightarrow E_2$ и $E_3 \rightarrow E_4$, причем на низких частотах, при $\hbar\omega \leq 1$ мэВ. Из структуры уровней на рис. 2 а можно сделать вывод, что этот всплеск обусловлен сближением уровней $E_1 \rightarrow E_2$ и $E_3 \rightarrow E_4$ соответственно.

В дополнение к вероятностям переходов значительный интерес представляют зависимости усредненных по времени значений вероятности пребывания в правой квантовой точке (16) и средних значений проекций спина (17), которые показаны на

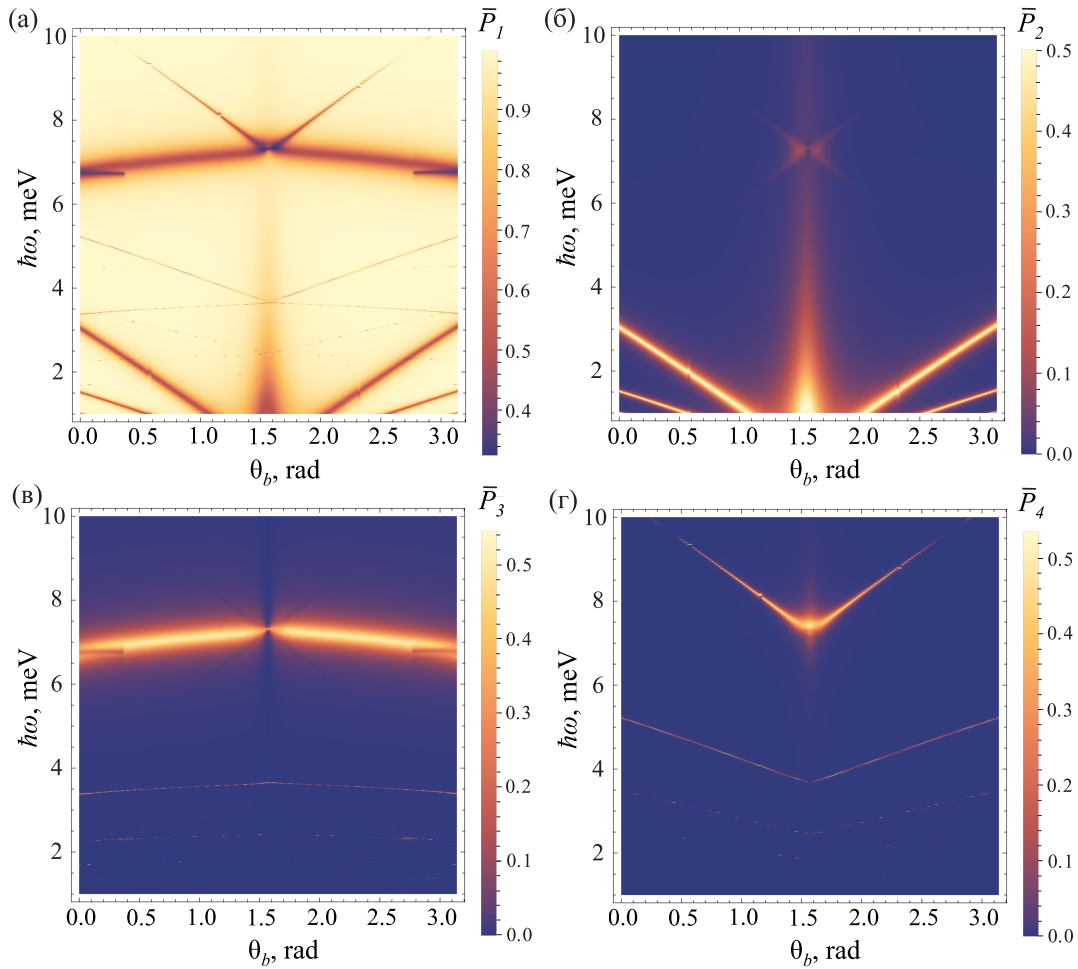


Рис. 3. Карты усредненных заселенностей \bar{P}_n из (13) для переходов из начального уровня E_1 на все вышележащие уровни E_n спектра на рис. 2а, построенные как функции от угла намагниченности центрального барьера θ_b и энергии $\hbar\omega$ на частоте периодического потенциала (7) с амплитудой потенциала $F = 0.006$ мэВ/нм

рис. 4 а, б, в, г соответственно. Видно, что наибольшая амплитуда изменения вероятности локализации P_r на рис. 4 а наблюдается для переходов $E_1 \rightarrow E_2$ и $E_1 \rightarrow E_4$. Переходы $E_1 \rightarrow E_2$ и $E_1 \rightarrow E_4$ также сопровождаются сменой знака x -проекции спина, как это видно на рис. 4 б. Переходы $E_1 \rightarrow E_3$ сопровождаются сменой знака всех трех проекций спина. Интересно отметить, что при многоуровневой динамике, когда волновая функция есть линейная комбинация различных состояний, появляется и z -проекция спина с нетривиальным изменением ее в плоскости параметров, как это видно на рис. 4 з. Обобщая результаты, приведенные на рис. 4, можно сказать, что в рассматриваемой системе достаточно четко идентифицируются переходы как с изменением области пространственной локализации, так и с изменением спиновых проекций, что позволяет рас-

считывать в будущем на их применение при моделировании зарядового и спинового кубитов. Аналогичная картина резонансов и их субгармоник для координатной и спиновой степеней свободы наблюдалась для ЛЗШМ- и ЭДСР-интерференций в двойной квантовой точке на основе GaAs/AlGaAs, где спектр носителей заряда был квадратичным по квазиимпульсу с дополнительным вкладом от спин-орбитального взаимодействия [16, 17].

3.2. Карты интерференции в плоскости $(F, \hbar\omega)$

Для анализа структуры переходов и их зависимости от параметров периодического потенциала (7) рассматривается сечение при фиксированном значении θ_b на рис. 3 и 4 с варьированием частоты и ам-

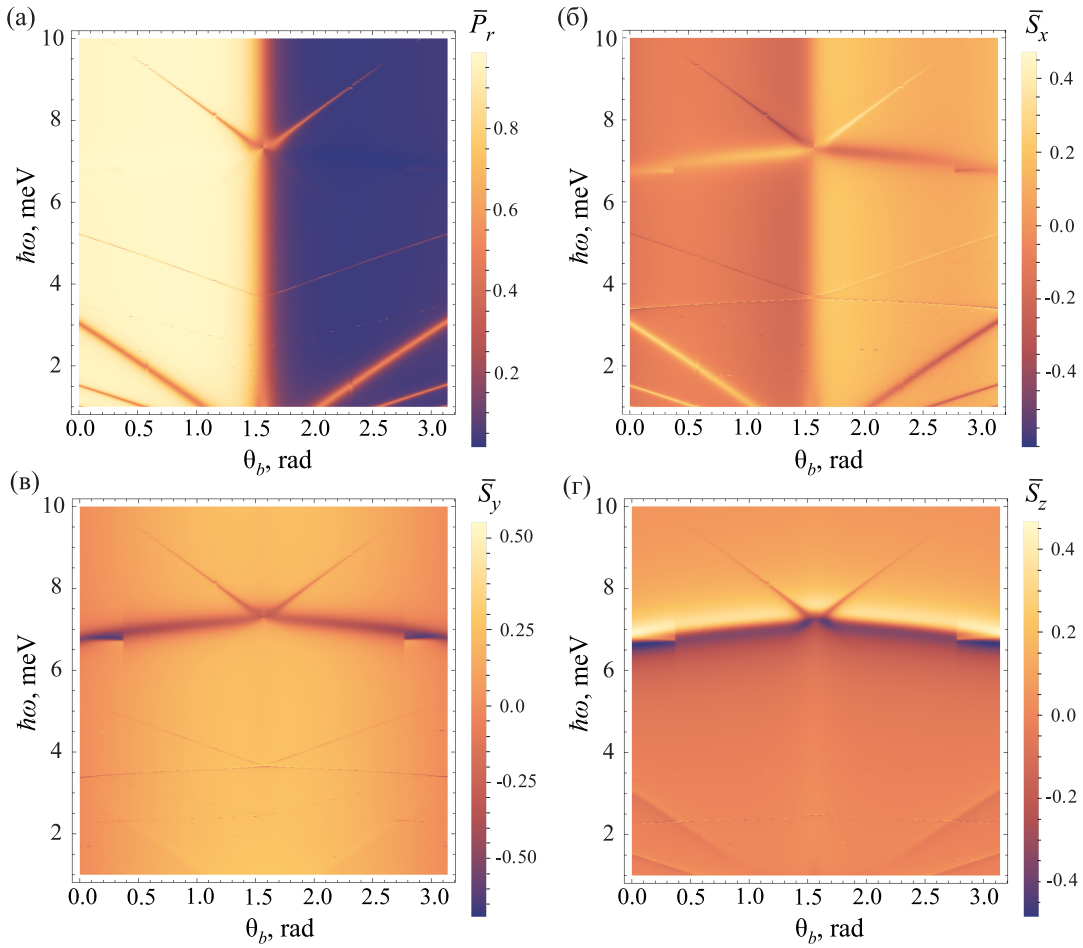


Рис. 4. Усредненные зависимости вероятности пребывания в правой точке \bar{P}_n из (16) (а) и проекций спина \bar{S}_i из (17) (б–г), отвечающие картам заселенностей уровней на рис. 3, при инициализации системы на уровне E_1 спектра, показанного на рис. 2 а

плитуды электрического поля. Сначала рассматриваются усредненные по времени значения амплитуд заселенностей уровней (13), ранее представленные на рис. 3, но теперь в плоскости параметров $(F, \hbar\omega)$. Такая зависимость позволит более четко представить картину заселенности уровней на рис. 2 а и связанных с ними значений наблюдаемых величин (16), (17). На рис. 5 показаны карты значений заселенностей (13) для $n = 1, \dots, 4$ в диапазоне амплитуд потенциала F от 0 до 0.07 мэВ/нм и частоты в единицах $\hbar\omega$ от 1 до 10 мэВ при инициализации системы на уровне E_1 спектра, показанного на рис. 2 а. Значение параметра $\theta_b = 0.5$ отвечает вертикальному разрезу на рис. 3 и 4. Можно заметить, что карты заселенности уровней на рис. 5, как и на рис. 3 и 4, удобно исследовать совместно со средними значениями физических величин (16), (17) на той

же плоскости параметров $(F, \hbar\omega)$, поскольку переходы связаны с изменением пространственного положения и/или проекций спина. На рис. 6 мы приводим соответствующие карты для средних значений вероятности пребывания в правой точке (16) и всех трех спиновых проекций (17) для тех же значений параметров, что на рис. 5. Кроме того, для более детального рассмотрения частотной зависимости переходов мы выберем два сечения на панелях рис. 5, отвечающих малой и большой амплитудам потенциала (7). На рис. 7 показаны частотные зависимости усредненных заселенностей (13) для малой амплитуды $F = 0.006$ мэВ/нм (а) и большой амплитуды $F = 0.065$ мэВ/нм (б). Вклад в заселенность от соответствующих состояний отмечен различным цветом. Ниже мы обсудим различные типы переходов более детально.

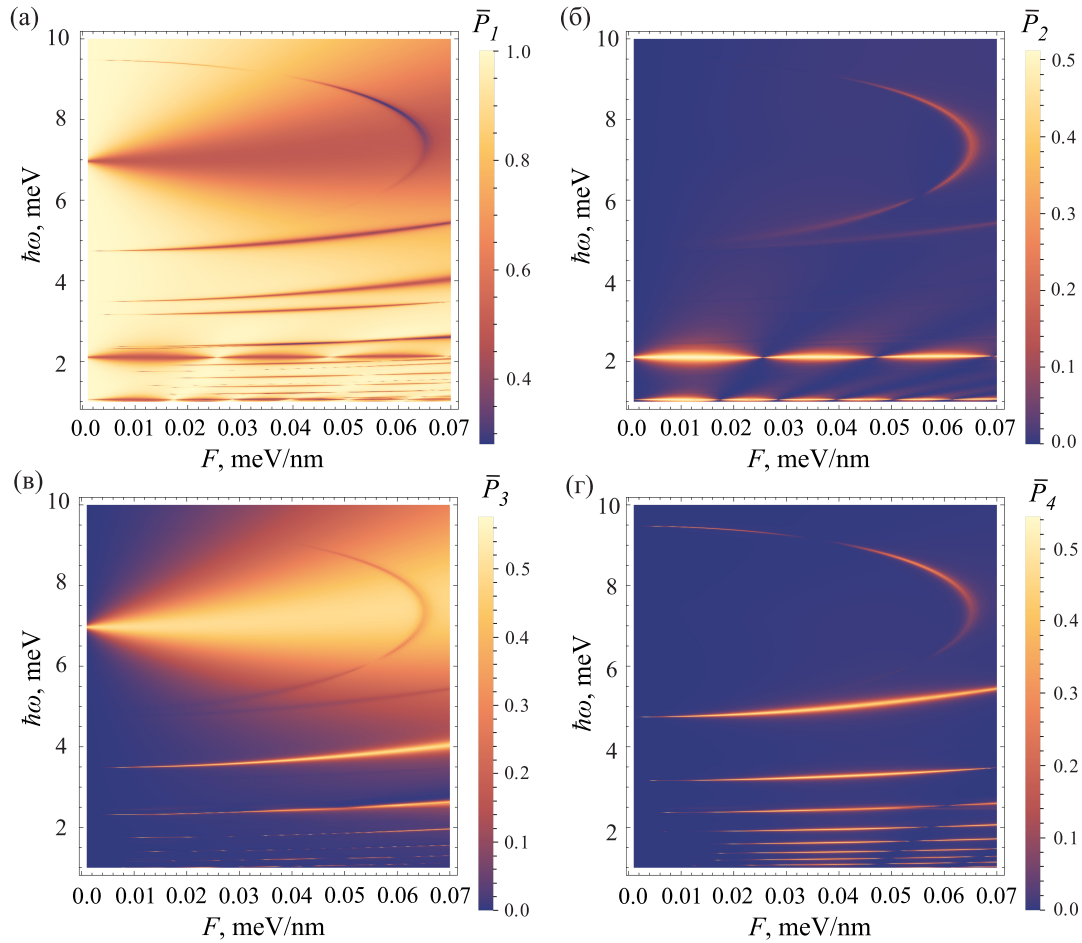


Рис. 5. Карты усредненных по времени заселенностей уровней (13) при $n = 1$ (а), $n = 2$ (б), $n = 3$ (в), $n = 4$ (г) и фиксированном значении параметра $\theta_b = 0.5$ на рис. 3 и 4 при инициализации системы на первом энергетическом уровне E_1 . В нижней части панелей а, б при $\hbar\omega \leq 2.2$ мэВ видны резонансы для ЛЗШМ-переходов между уровнями 1 и 2 на рис. 2 а на частоте ω_{21} и ее субгармониках (18). На панелях а, в во всем интервале частот видны линии, отвечающие переходам в режиме ЭДСР между уровнями 1 и 3 на рис. 2 а на частоте ω_{31} и ее субгармониках (18) (субгармоники также видны на панели г). При больших амплитудах поля в верхней части панелей видна дугообразная линия, отвечающая гибричному резонансу с участием всех четырех уровней

3.3. Переходы в режиме ЛЗШМ-интерференции

Переходы между уровнями E_1 и E_2 согласно схеме-вставке на рис. 2 а отвечают движению уровней друг относительно друга с взаимным пересечением на периоде электрического поля. Это обуславливает характер переходов между ними в режиме ЛЗШМ-интерференции. При значении параметра $\theta_b = 0.5$ на рис. 2 а они происходят на частоте $\hbar\omega \approx 2.2$ мэВ. При меньших значениях θ_b расстояние между этими уровнями растёт, как это видно на рис. 2 а, поэтому частота перехода также растёт с уменьшением угла θ_b . Графически данному пере-

ходу отвечает наклонная линия на рис. 3 а, достигающая значения $\hbar\omega \approx 3$ мэВ при $\theta_b = 0$. На рис. 5 а, б и 6 а при фиксированном значении $\theta_b = 0.5$ этому переходу отвечает яркая горизонтальная линия при $\hbar\omega \approx 2.2$ мэВ с переменной шириной. Сходная по структуре горизонтальная линия на частоте $\hbar\omega \approx 1.1$ мэВ, лежащая ниже основного перехода на рис. 5 а, б и 6 а, отвечает второй субгармонике, т. е. значению $k = 2$ в (18) для рассматриваемого перехода. И основная гармоника, и вторая субгармоника перехода $E_1 \rightarrow E_2$ хорошо видны на обеих панелях рис. 7 для слабой и сильной амплитуд периодического потенциала F . На соответствующих резонансных частотах 2.2 мэВ и 1.1 мэВ заселенность P_1 первого

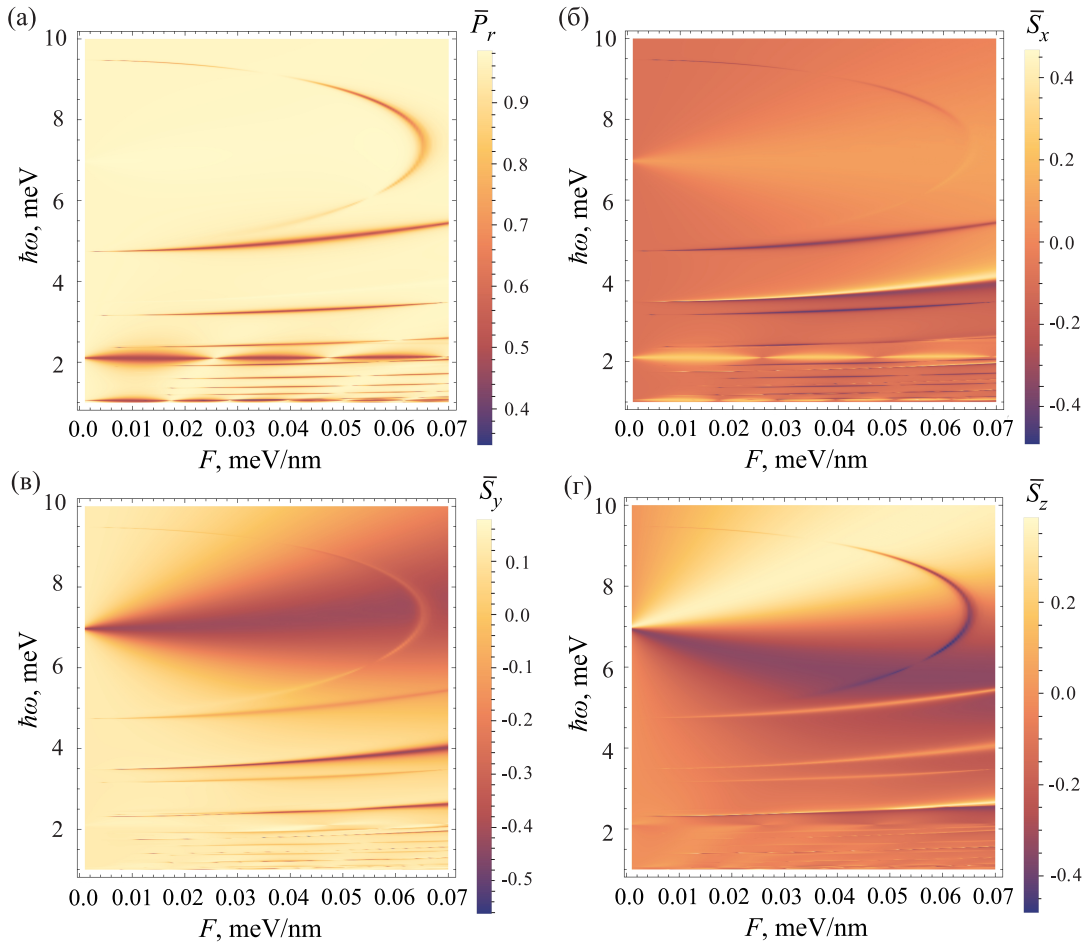


Рис. 6. Карты усредненных по времени значений вероятности пребывания в правой точке (16) (а) и спиновых проекций (17) для $i = x, y, z$ (б-г) для тех же значений параметров и с такой же классификацией линий, что на рис. 5

уровня показывает локальный минимум, а заселенность P_2 второго уровня синхронно растет.

Обсудим зависимость заселенности уровней 1 и 2 от амплитуды поля F . Эта зависимость имеет близкий к периодическому характер, который отчетливо прослеживается на резонансных линиях на рис. 5 а, б. Такая структура характерна для ЛЗШМ-интерференции, когда положение уровней динамически изменяется и при их пересечении происходят переходы. При этом в двухуровневом приближении средняя по времени вероятность перехода с первого на второй уровень может быть оценена по формуле [7, 16]

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \sum_k \frac{\Delta_k^2}{(\hbar\omega k - \Delta E)^2 + \Delta_k^2}. \quad (19)$$

Здесь $\Delta E = E_2 - E_1$ — расстояние между уровнями, между которыми рассматриваются переходы, а па-

раметр Δ_k , определяющий амплитуду перехода для k -й гармоники, задается выражением

$$\Delta_k = \gamma J_k \left(\frac{\Delta V}{\hbar\omega} \right), \quad (20)$$

где $\gamma \sim (A/L_b) \exp(-\sqrt{M^2 - E^2}L_b/A)$ — оценка амплитуды матричного элемента туннелирования, связывающего уровни 1 и 2 со средней энергией E , относящиеся к разным квантовым точкам, разделенным туннельно прозрачным барьером шириной L_b и высотой M [46]. Далее, J_k есть k -я функция Бесселя, а амплитуда потенциала ΔV определена в (10). Формула (19) применима, если параметр адиабатичности для ЛЗШМ-переходов

$$\delta = \frac{\gamma^2}{4\hbar v_E} \quad (21)$$

много меньше единицы, что означает быстрое взаимное пересечение уровней [7, 16]. В (21)

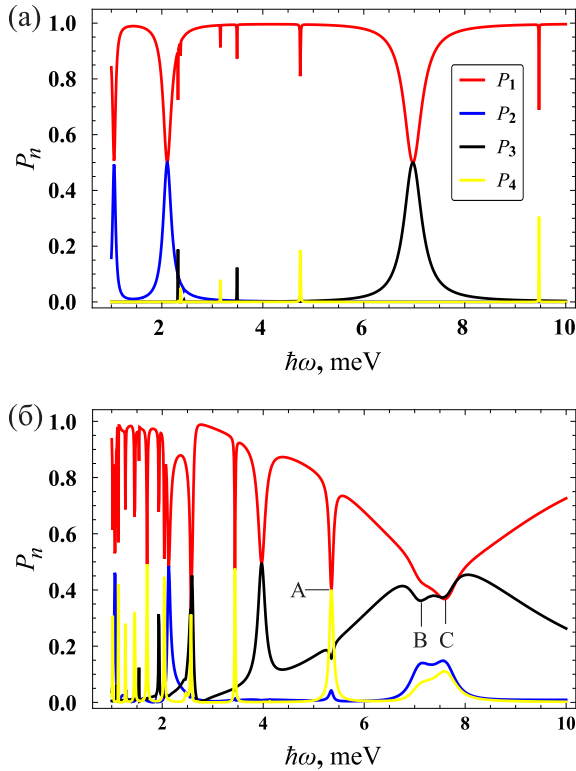


Рис. 7. Частотные зависимости заселенностей всех уровней P_1 – P_4 из (13) для фиксированного значения амплитуды F потенциала (7), показанные для малой амплитуды $F = 0.006$ мэВ/нм (а) и большой амплитуды $F = 0.065$ мэВ/нм (б). На панели б точки А, В и С отмечают гибридные резонансы, когда в динамику вовлекаются все четыре уровня

$v_E = d(E_2 - E_1)/dt$ есть скорость относительного движения уровней в энергетических единицах, которую для периодического возмущения (7) можно оценить как $v_E = \omega \Delta V$. Подставляя в (21) типичные значения параметров $\gamma \approx 0.1$ мэВ, $\hbar\omega = 2$ мэВ и $\Delta V = 15$ мэВ, мы получим, что $\delta \approx 10^{-4}$, что оправдывает применение выражения (19). Результат расчета вероятности переходов по формулам (19), (20) с параметром $\alpha = 3/4$ для амплитуды (10), предназначенный для моделирования фрагмента рис. 5 б вблизи частот $\hbar\omega = 1$ – 2 мэВ, показан на рис. 8. Можно видеть, что согласие двухуровневого приближения (19) с численным расчетом является достаточно хорошим. Следовательно, соответствующие «чечевицеобразные» горизонтальные области на рис. 5 а, б действительно отвечают процессам ЛЗШМ-интерференции.

Что касается проявлений перехода $E_1 \rightarrow E_2$ и его субгармоник для зависимостей средних значений наблюдаемых величин на рис. 6, то наибо-

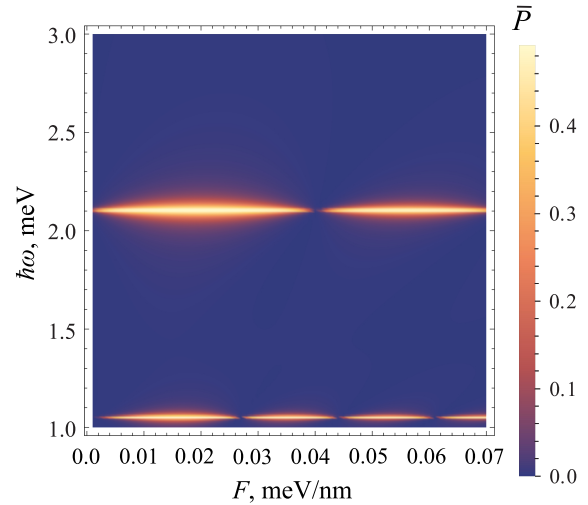


Рис. 8. Аналитическая аппроксимация (19), (20) вероятности переходов между уровнями 1 и 2 в режиме ЛЗШМ-интерференции на рис. 5 а, б в области частот $\hbar\omega = 1$ – 2 мэВ. Параметр $\gamma = 0.1$ мэВ, параметр $\alpha = 3/4$ для ΔV из (10). Наблюдается хорошее согласие с численным расчетом

лее отчетливо они видны для вероятности пребывания в определенной точке, показанной на рис. 6 а для правой точки, а также для x -проекции спина, показанной на рис. 6 б. Форма линий близка к профилям на рис. 5 а, б для заселенностей уровней \bar{P}_1 и \bar{P}_2 . Остальные проекции спина, как это видно на рис. 6 в, г, при данном переходе изменяются в меньшей степени. Таким образом, ЛЗШМ-интерференция в нашей системе может проявляться как для координатной, так и для спиновой степеней свободы.

3.4. Переходы в режиме ЭДСР и его субгармоник

Рассмотрим переходы между уровнями E_1 и E_3 на рис. 2 а, которые отвечают переходам с изменением проекций спина при сохранении локализации волновой функции в одной (правой) квантовой точке. Такая картина переходов отвечает электрическому дипольному спиновому резонансу. Вероятности пребывания на уровнях \bar{P}_1 и \bar{P}_3 , показанные на рис. 5 а, в, почти зеркально симметричны и характеризуются очень широким резонансом с центром на частоте перехода $\hbar\omega \approx 7$ мэВ, отвечающей расстоянию между уровнями E_1 и E_3 на рис. 2 а при $\theta_b = 0.5$. Ширина этого резонанса растет с амплитудой поля F . Этот рост можно оценить по формуле, описывающей амплитуду заселенности P_n возбуж-

денного уровня при воздействии на двухуровневую систему периодического возмущения с амплитудой V_{nm} и отклонением частоты от точного резонанса на величину $\Delta\omega$ [47]:

$$P_n = \frac{|V_{nm}|^2}{2(|V_{nm}|^2 + (\hbar\Delta\omega)^2/4)}. \quad (22)$$

Подставляя в (22) значения модуля матричного элемента $|V_{nm}| = F|y_{13}|$, где из данных на рис. 2 б при $\theta_b = 0.5$ амплитуда $|y_{13}| = 32$ нм, мы получим, что при $F = 0.07$ мЭВ/нм характерная ширина для половины высоты максимума P_n достигает 4 мЭВ. Это значение хорошо согласуется с максимальной шириной резонанса на картах \bar{P}_1 и \bar{P}_3 на рис. 5 а, в. Таким образом, переход $E_1 \rightarrow E_3$ может быть интерпретирован как резонанс в двухуровневой подсистеме, состояния которой отличаются ориентацией спина, индуцируемый периодическим электрическим полем. Следовательно, данный переход относится к режиму ЭДСР. Что касается карт усредненных по времени значений спиновых проекций на рис. 6, то они отвечают спину волновой функции (8), являющейся нестационарной комбинацией функций состояний с различным спином. Поэтому знаки проекций спина на рис. 6 не могут быть однозначно отнесены к какому-либо одному из стационарных состояний E_1 или E_3 , что особенно наглядно видно на рис. 6 г, где показана карта z -проекции спина, обращающейся в нуль для каждого из состояний по отдельности.

Помимо основной гармоники ЭДСР, на рис. 5 а, в, а также на рис. 6 б–г видны несколько субгармоник, соответствующих значениям $k = 2, \dots, 5$ в (18). Ширина этих субгармоник уже не описывается простой формулой (22). Их проявление связано с многоуровневым характером динамики в нашей системе, когда переходы и между другими уровнями, в частности, отвечающие за туннелирование между точками, могут усиливать субгармоники ЭДСР [16, 17]. Примечательно, что положение этих пиков слегка дрейфует по частоте с ростом амплитуды потенциала F , что также является признаком вовлечения в динамику более чем двух уровней и указывает на существенно более сложную картину эволюции по сравнению с чисто двухуровневой системой.

3.5. Переходы в гибридном режиме

Далее анализируется переход между уровнями E_1 и E_4 , резонансная частота которого при $\theta_b = 0.5$

составляет $\hbar\omega \approx 9.5$ мЭВ. Однозначная классификация данного перехода в рамках ЛЗШМ- или ЭДСР-режима затруднена. Это связано с тем, что для достаточно сильных амплитуд потенциала F происходит динамическое пересечение всех четырех уровней на рис. 2 а. Как следствие, после динамического роста заселенности уровня E_4 индуцируются переходы и между другими парами уровней, например, переходы вида $E_4 \rightarrow E_2$ или $E_4 \rightarrow E_3$. Следы таких переходов можно видеть в схожих текстурах на различных панелях рис. 5, отвечающих динамике с участием уровня E_4 , показанной на рис. 5 г. Основной переход $E_1 \rightarrow E_4$, соответствующий верхней линии максимумов на рис. 5 г, наблюдается при $\hbar\omega \approx 9.5$ мЭВ в слабом поле. При увеличении амплитуды поля F максимум резонанса смещается в область меньших частот, что связано с динамическим сдвигом Штарка и усилением вклада остальных уровней в эволюцию системы. Проявление данной линии на других панелях рис. 5 подтверждает многоуровневый характер динамики. Зависимость данной линии от амплитуды F демонстрирует характерный чечевицеобразный узор, типичный для ЛЗШМ-интерференции, аналогичный рассмотренному в подразд. 3.3 для перехода $E_1 \rightarrow E_2$. Однако применение аналитического приближения (19) к переходу $E_1 \rightarrow E_4$ менее оправдано вследствие выраженного многоуровневого смешивания состояний. Это отчетливо проявляется на рис. 7 б, где показана частотная зависимость заселенностей в сильном поле. Отсюда видно, что вблизи ряда точек А, В и С с частотами $\hbar\omega = 5.36$ мЭВ, $\hbar\omega = 7.11$ мЭВ и $\hbar\omega = 7.61$ мЭВ формируется сложная структура с сопоставимым вкладом в заселенность от всех четырех уровней. При этом резонанс между уровнями E_1 и E_3 при $\hbar\omega \approx 7$ мЭВ, наблюдаемый на рис. 7 а в слабом поле, сохраняется, испытывая уширение по частоте. Кроме того, на него в области частот точек В и С накладывается резонанс между уровнями E_1 и E_4 , а также в динамику вовлекается уровень E_2 , взаимодействующий с уровнем E_4 . В результате наблюдается гибридный резонанс, в котором задействованы и координатная, и спиновая степени свободы, как это видно по поведению средних значений координатных и спиновых величин на рис. 6.

4. ПРИМЕРЫ ЭВОЛЮЦИИ В РАЗЛИЧНЫХ РЕЖИМАХ

В данном разделе мы рассмотрим несколько типичных примеров динамики в избранных точ-

ках карт, рассмотренных в предыдущем разделе. Мы сосредоточимся на переходах, характерных для ЛЗШМ- и ЭДСР-динамики, а также для выделенных случаев гибридных режимов динамики.

4.1. Динамика в режиме ЛЗШМ-интерференции

Рассмотрим пример динамики на уровнях E_1 и E_2 , протекающей в режиме ЛЗШМ-интерференции с переходами между состояниями, локализованными в разных областях пространства. Выберем для этого основную гармонику $\hbar\omega = 2.2$ мэВ на рис. 7 а. На рис. 9 представлены: динамика заселенностей уровней $|C_n(t)|^2$ (а); вероятности пребывания в правой квантовой точке $P_r(t)$ (14) и вероятности пребывания в левой точке $P_l(t) = 1 - P_r(t)$ (б); временные зависимости спиновых проекций (15) (в); траектория спинового вектора $\mathbf{S}(t) = (S_x(t), S_y(t), S_z(t))$, отображенная на сфере Блоха (г). Можно видеть, что динамика протекает преимущественно в координатном пространстве, а спиновые проекции практически не меняют знак, приводя к небольшим по амплитуде осцилляциям в плоскости (S_x, S_z) , видимым на панели г.

Интересно отметить, что, хотя каждое из двух доминирующих состояний ψ_1, ψ_2 с заселенностями $|C_1(t)|^2, |C_2(t)|^2$ обладает нулевой z -проекцией спина, их нестационарная линейная комбинация (8) имеет ненулевую амплитуду осцилляций для этой проекции. Можно предположить, что наблюдаемый вариант динамики можно использовать для кодирования информации в пространственной степени свободы, присваивая событиям с нахождением электрона в левой либо правой точках значения «0» и «1» соответственно. Характерное время осцилляций на рис. 9 составляет порядка 0.1 нс, что отвечает частоте переключения ~ 10 ГГц между состояниями координатной подсистемы, с которыми можно соотнести значения 0 и 1 по принципу «нахождение электрона в правой/левой квантовой точке» [37]. Такие частоты следует считать удовлетворительными для современных и потенциальных приложений при создании кубитов, в нашем случае зарядового кубита.

4.2. Динамика в режиме ЭДСР

Далее мы рассмотрим пример динамики в режиме ЭДСР, когда происходит переход между состояниями в одной области пространства, но с разными проекциями спина. Рассмотрим основную гармонику при $\hbar\omega = 7$ мэВ, когда наблюдается центр ре-

зонансного перехода между уровнями E_1 и E_3 на рис. 7 а. Соответствующая развертка динамики во времени показана на рис. 10 по той же схеме, что на рис. 9. Видно, что динамика в пространственной области на панели б почти отсутствует, в то время как спиновые проекции на панели в осциллируют во времени, формируя круговую траекторию в трехмерном пространстве спинового вектора, показанную на панели г. Таким образом, в нашей системе реализуется хорошо известный эффект ЭДСР, составляющий основу манипуляций со спином в электрическом поле. Характерное время осцилляций в спиновой подсистеме согласно рис. 10 в составляет около 0.1 нс, как и для координатной подсистемы на рис. 9 в. Следовательно, гипотетический спиновый кубит на осцилляциях, показанных на рис. 10, может работать также в области частот ~ 10 ГГц, как и зарядовый кубит, упоминавшийся в предыдущем пункте. Такие частоты следует считать весьма большими как для текущих, так и для перспективных кубитных приложений. Заметим, что близость частот осцилляций координатной и спиновой подсистем можно было ожидать, отметив близость значений модуля дипольного матричного элемента на рис. 2 б в области угла $\theta_b = 0.5$ для переходов 1–2 и 1–3.

Отметим, что спиновые вращения могут наблюдаться и при переходах между другой парой уровней, отвечающей локализации в области одной и той же квантовой точки. На рис. 11 показана эволюция тех же величин, что и на рис. 10, но для начального состояния, находящегося на уровне E_2 на рис. 2 а при $\theta_b = 0.5$, на котором электрон локализован в левой квантовой точке. Нижний уровень E_1 предполагается занятым. Частота периодического поля $\hbar\omega \approx 8$ мэВ отвечает переходу с уровня E_2 на уровень E_4 , состояние которого также локализовано в левой квантовой точке. Можно видеть типичные осцилляции Раби для заселенностей уровней E_2 и E_4 на рис. 11 а, а также хорошо выраженные спиновые вращения в плоскости (S_x, S_y) по большому кругу сферы на рис. 11 г. Время переворота спина, как это видно на рис. 11 в, вновь составляет около 0.1 нс, т. е. линейная частота Раби спиновых осцилляций имеет порядок 10 ГГц, что является достаточно хорошим показателем для приложений при создании спиновых кубитов.

4.3. Динамика в гибридном режиме

Обратимся к гибриднему режиму эволюции, при котором в динамике участвуют все четыре

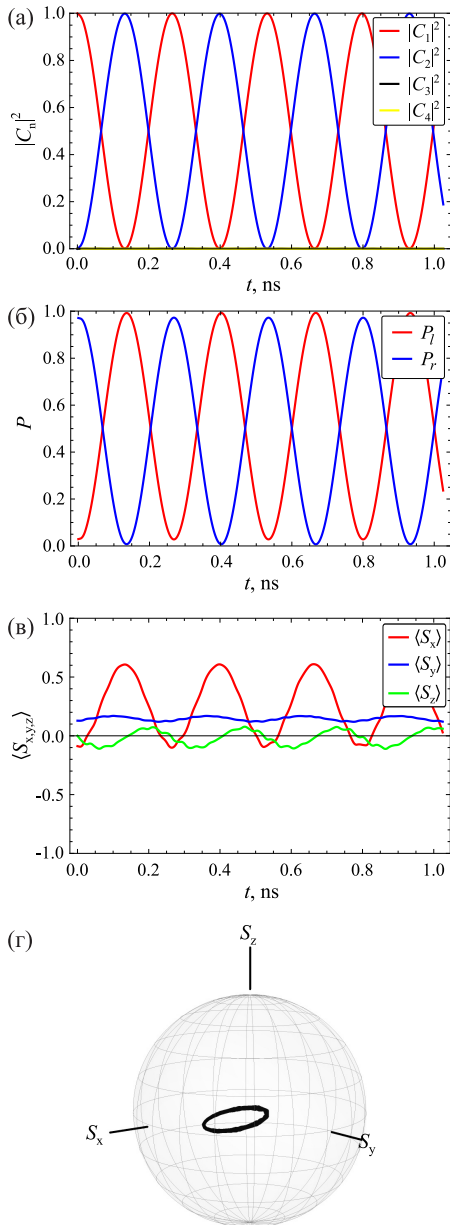


Рис. 9. Зависимости от времени заселенности уровней (а), вероятностей пребывания в правой и левой точках (б), спиновых проекций (в) и картина динамики в пространстве вектора спина для перехода между уровнями E_1 и E_2 в точке $\hbar\omega = 2.2$ мэВ на рис. 7 а (г). Наблюдаются осцилляции положения в правой и левой точках и спиновые вращения с малой амплитудой в плоскости (S_x, S_z)

уровня. Выберем в качестве примера точку А на рис. 7 б, для которой частота периодического потенциала $\hbar\omega = 5.36$ мэВ, а амплитуда потенциала $F = 0.065$ мэВ/нм, что отвечает достаточно сильно полю, вовлекающему в динамику все уровни.

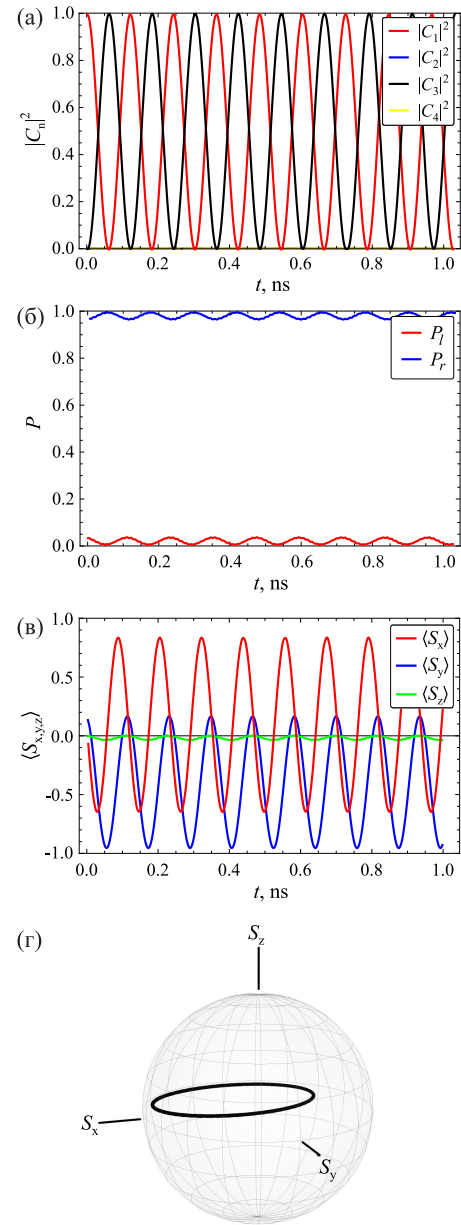


Рис. 10. Зависимости от времени заселенности уровней (а), вероятностей пребывания в правой и левой точках (б), спиновых проекций (в) и картина динамики в пространстве вектора спина, для перехода между уровнями E_1 и E_3 в точке $\hbar\omega = 7$ мэВ на рис. 7 а и амплитуде поля $F = 0.006$ мэВ/нм (г). Наблюдаются спиновые вращения в плоскости (S_x, S_y) при нахождении электрона в области правой квантовой точки

На рис. 12 показаны зависимости от времени заселенности уровней, вероятностей пребывания в правой и левой точках, спиновых проекций, а также картина динамики в пространстве вектора спина. Можно видеть осцилляции заселенности всех че-

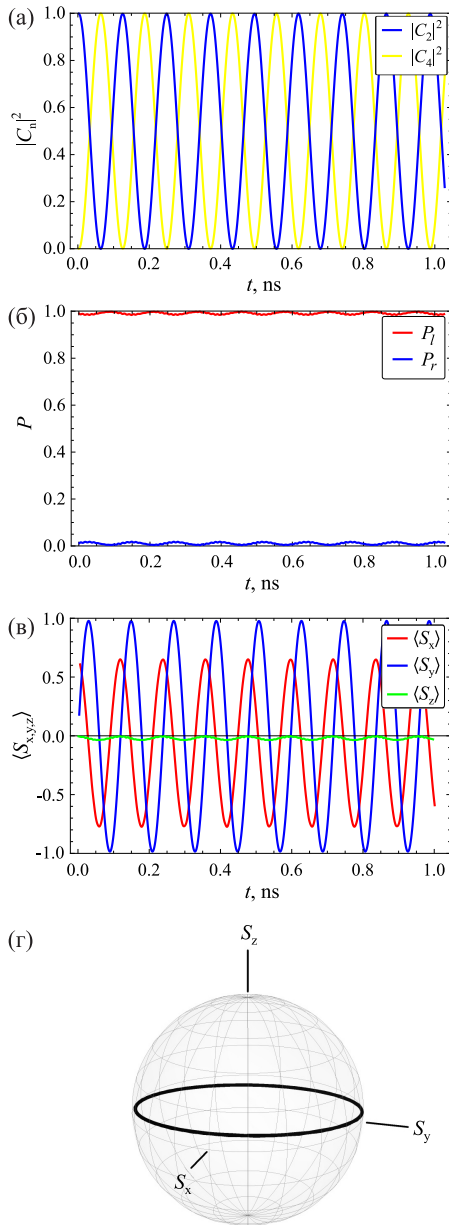


Рис. 11. Зависимости от времени заселенности уровней (а), вероятностей пребывания в правой и левой точках (б), спиновых проекций (в) и картина динамики в пространстве вектора спина для перехода между уровнями E_2 и E_4 при $\hbar\omega = 8$ мэВ и амплитуде поля $F = 0.006$ мэВ/нм (г). Наблюдаются спиновые вращения по большому кругу в плоскости (S_x, S_y) , при нахождении электрона в области левой квантовой точки

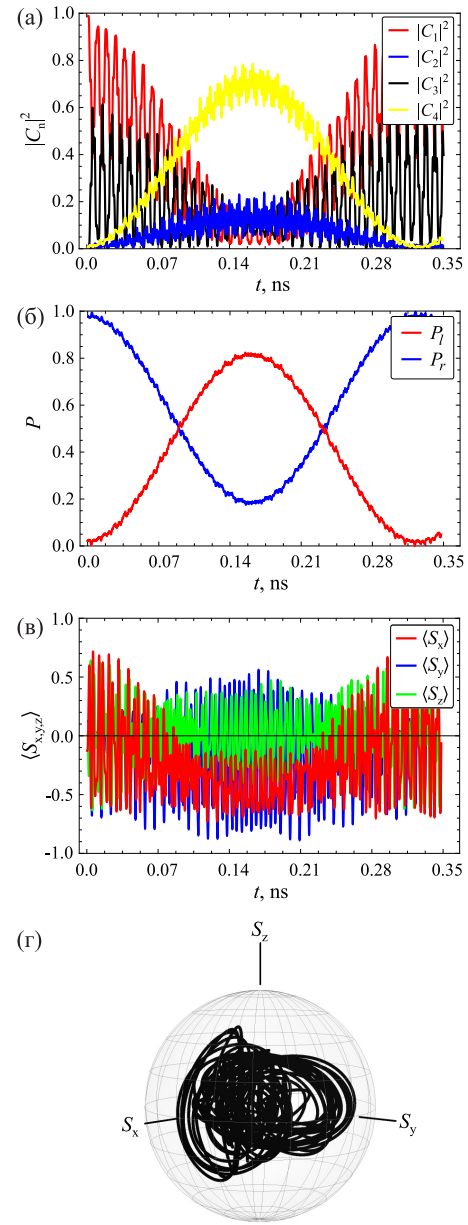


Рис. 12. Зависимости от времени заселенности уровней (а), вероятностей пребывания в правой и левой точках (б), спиновых проекций (в) и картина динамики в пространстве вектора спина, для гибридного резонанса в точке А на рис. 7 б при $\hbar\omega = 5.36$ мэВ (г). Наблюдаются осцилляции заселенности всех четырех уровней, переходы между правой и левой точками, сопровождаемые сложной динамикой вектора спина

тырех уровней, приводящие к связанной динамике для координатной и спиновой степеней свободы. В частности, наблюдаются пространственные переходы между правой и левой точками на панели б с простыми по форме осцилляциями вероятностей

$P_r(t)$ и $P_l(t)$. Что касается спиновой динамики на панели в и в трехмерном представлении на панели г, то она имеет достаточно сложный характер, если сравнивать ее с пространственной эволюцией. Причина такого усложнения спиновой динамики заключает-

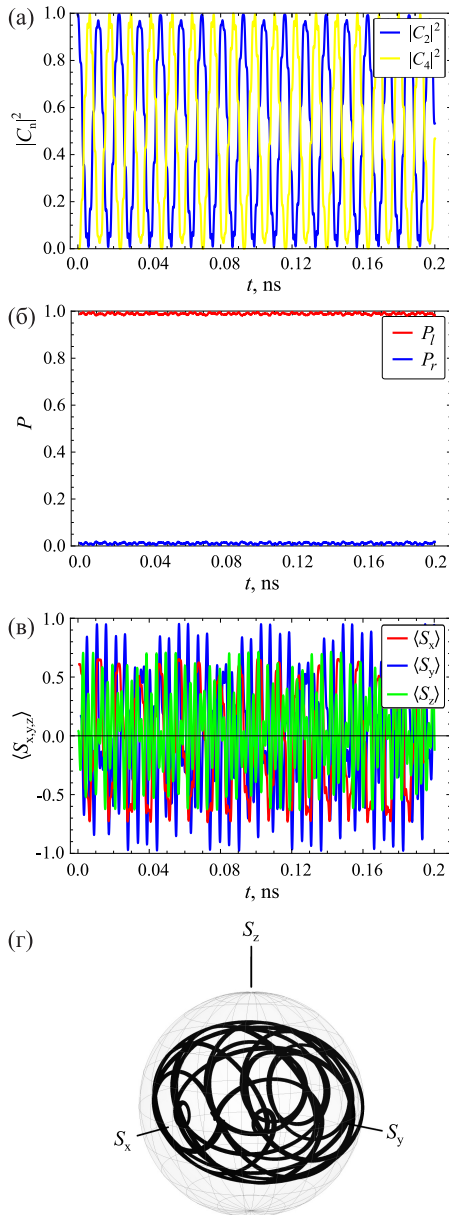


Рис. 13. Зависимости от времени заселенности уровней (а), вероятностей пребывания в правой и левой точках (б), спиновых проекций (в) и картина динамики в пространстве вектора спина для перехода $E_2 \rightarrow E_4$ на рис. 11, но при большой амплитуде поля $F = 0.065$ мэВ/нм (г). Наблюдаются сложные осцилляции заселенностей уровней с вкладом от уровня E_3 на панели а и более сложная динамика спиновых вращений в плоскости (S_x, S_y)

ся в том, что для всех четырех состояний, участвующих в динамике, проекции спина имеют различное значение, как это видно на рис. 2 а. Для их нестационарной линейной комбинации проекции спина также являются сложными функциями времени, в отличие

от картин для преимущественно двухуровневой эволюции на рис. 9–11.

Осцилляции с числом участвующих состояний больше трех могут возникать и для изначально двухуровневой динамики при увеличении амплитуды периодического поля. Так, на рис. 13 показаны графики для эволюции для перехода между той же парой уровней E_2 и E_4 , что и на рис. 11, но для большой амплитуды поля $F = 0.065$ мэВ/нм. Сравнивая рис. 11 и 13, можно видеть, что с увеличением амплитуды поля форма осцилляций всех рассматриваемых величин становится более сложной. К вкладу заселенностей уровней E_2 и E_4 на рис. 13 а добавляется небольшой, но все же ненулевой вклад от уровня E_3 . Сильнее всего изменяется форма спиновых вращений на рис. 13 г по сравнению с простой круговой орбитой на рис. 11 г.

Конечно, такие сложные спиновые траектории, как на рис. 13 г, уже сложнее приспособить для задач квантовых вычислений в модели спинового кубита. Тем не менее существенным преимуществом спиновых осцилляций на рис. 13 в, г является их значительно более высокая частота по сравнению с динамикой на рис. 11 в, г. На рис. 13 спин переворачивается за время ~ 0.01 нс, т. е. на порядок быстрее, чем на рис. 11. Определяемая по времени переворота спина частота Раби на рис. 13 достигает 100 ГГц, что является очень высоким значением, перспективным для создания спиновых кубитов на базе рассматриваемой системы. Поэтому дальнейшие работы в этой области следует считать перспективными. Детальное описание таких кубитов вместе с моделированием квантовых операций выходит за рамки данной работы и представляет интересную задачу для будущих исследований.

5. ВЫВОДЫ

Исследована динамика в периодическом электрическом поле для состояний в двойной квантовой точке, образованной магнитными барьерами на краю топологического изолятора на базе квантовой ямы HgTe/CdHgTe. Рассмотрены режимы интерференции Ландау – Зенера – Штюкельберга – Майораны и электрического дипольного спинового резонанса. Показано, что возможно индуцирование осцилляций и их субгармоник как для спиновой, так и для зарядовой подсистемы, а также их комбинаций. Проведено исследование этих режимов в плоскости параметров системы. Дальнейшее развитие представленных результатов открывает новые возмож-

ности применения квантовых точек в топологических изоляторах для задач квантовых вычислений.

Благодарности. Авторы выражают благодарность С. А. Студеникину, В. А. Бурдову, А. А. Конакову, а также многим участникам симпозиума «Нанофизика и нанoeлектроника» (Нижний Новгород, 2025) и конференции «Спиновая физика, спиновая химия и спиновая технология» (Санкт-Петербург, 2025) за полезные обсуждения данной работы.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ FSWR-2026-0004.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов. Вклад авторов равноценен.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Z. Hasan and C. L. Kane, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 3045 (2010).
2. X.-L. Qi and S.-C. Zhang, *Rev. Mod. Phys.* **83**, 1057 (2011).
3. B. A. Bernevig, *Topological Insulators and Topological Superconductors*, Princeton Univ. Press, Princeton, USA (2013).
4. Z. D. Kvon, D. A. Kozlov, E. B. Olshanetsky et al., *Phys.-Uspekhi* **63**, 629 (2020) [З. Д. Квон, Д. А. Козлов, Е. Б. Ольшанецкий и др., *УФН* **190**, 673 (2020)].
5. E. E. Nikitin and F. D. Dzhakomo, *Phys.-Uspekhi* **48**, 515 (2005) [Ф. Д. Джакомо, Е. Е. Никитин, *УФН* **175**, 545 (2005)].
6. S. N. Shevchenko, S. Ashhab, and F. Nori, *Phys. Rep.* **492**, 1 (2010).
7. O. V. Ivakhnenko, S. N. Shevchenko, and F. Nori, *Phys. Rep.* **995**, 1 (2023).
8. N. A. Sinitsyn, *Phys. Rev. B* **92**, 205431 (2015).
9. E. A. Yuzbashyan, *Ann. Phys.* **392**, 323 (2018).
10. A. M. Satanin, M. V. Denisenko, S. Ashhab, and F. Nori, *Phys. Rev. B* **85**, 184524 (2012).
11. V. O. Munyaev and M. V. Bastrakova, *Phys. Rev. A* **104**, 012613 (2021).
12. C. E. Creffield and G. Platero, *Phys. Rev. B* **65**, 113304 (2002).
13. J. M. Taylor, J.R. Petta, A. C. Johnson et al., *Phys. Rev. B* **76**, 035315 (2007).
14. E. I. Rashba and Al. L. Efros, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 126405 (2003).
15. V. N. Golovach, M. Borhani, and D. Loss, *Phys. Rev. B* **74**, 165319 (2006).
16. D. V. Khomitsky and S. A. Studenikin, *Phys. Rev. B* **106**, 195414 (2022).
17. D. V. Khomitsky, M. V. Bastrakova, V. O. Munyaev et al., *Phys. Rev. B* **108**, 205404 (2023).
18. J. Stehlik, M. D. Schroer, M. Z. Maiale et al., *Phys. Rev. Lett.* **112**, 227601 (2014).
19. A. Bogan, S. Studenikin, M. Korkusinski et al., *Phys. Rev. Lett.* **120**, 207701 (2018).
20. S. Studenikin, C. Hnatovsky, and A. Sachrajda, *Appl. Phys. Lett.* **127**, 054004 (2025).
21. A. Kundu, A. Zazunov, A. L. Yeyati et al., *Phys. Rev. B* **83**, 125429 (2011).
22. C. Timm, *Phys. Rev. B* **86**, 155456 (2012).
23. G. J. Ferreira and D. Loss, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 106802 (2013).
24. G. Dolcetto, N. Traverso Ziani, M. Biggio et al., *Phys. Rev. B* **87**, 235423 (2013).
25. C. Ertler, M. Raith, and J. Fabian, *Phys. Rev. B* **89**, 075432 (2014).
26. M. V. Entin and L. Braginsky, *Phys. Rev. B* **96**, 115403 (2017).
27. V. A. Sablikov and A. A. Sukhanov, *Phys. Rev. B* **98**, 115423 (2018).
28. R. Saxena, E. Grosfeld, and S. E. de Graf, *Phys. Rev. B* **106**, 035407 (2022).
29. S. Cho, D. Kim, P. Syers et al., *Nano Lett.* **12**, 469 (2012).
30. A. Kononov, S. V. Egorov, Z. D. Kvon et al., *JETP Lett.* **101**, 814 (2015) [A. Kononov, S. V. Egorov, Z. D. Kvon et al., *Письма в ЖЭТФ* **101**, 913 (2015)].
31. B. M. Cano, Y. Ferreira, and P. A. Pantaleón, *Nano Lett.* **23**, 6249 (2023).
32. D. V. Khomitsky, A. A. Chubunov, and A. A. Konakov, *J. Exp. Theor. Phys.* **123**, 1043 (2016) [D. V. Khomitsky, A. A. Chubunov, A. A. Konakov, *ЖЭТФ* **150**, 1200 (2016)].
33. D. V. Khomitsky, E. A. Lavrukina, A. A. Chubunov et al., *Semicond.* **51**, 1505 (2017) [Д. В. Хомицкий, Е. А. Лаврухина, А. А. Чубанов и др., *ФТП* **51**, 1557 (2017)].

34. D. V. Khomitsky, K. S. Kabaev, and E. A. Lavrukina, *J. Exp. Theor. Phys.* **131**, 809 (2020) [Д. В. Хомицкий, К. С. Кабаев, Е. А. Лаврухина, *ЖЭТФ* **158**, 929 (2020)].
35. D. V. Khomitsky, A. A. Konakov, and E. A. Lavrukina, *J. Phys. Cond. Mat.* **34**, 405302 (2022).
36. E. A. Lavrukina, D. V. Khomitsky, and A. V. Telezhnikov, *Semicond.* **57**, 352 (2023) [Е. А. Лаврухина, Д. В. Хомицкий, А. В. Тележников, *ФТП* **57**, 551 (2023)].
37. E. A. Lavrukina and D. V. Khomitsky, *Fizika i Tehnika Poluprovodnikov* **59**, 344 (2025) (in Russian) [Е. А. Лаврухина, Д. В. Хомицкий, *ФТП* **59**, 344 (2025)].
38. Q. Liu, C.-X. Liu, C. Xu et al., *Phys. Rev. Lett.* **102**, 156603 (2009).
39. W. Luo and X.-L. Qi, *Phys. Rev. B* **87**, 085431 (2013).
40. A. G. Mal'shukov, *Phys. Rev. B* **90**, 045311 (2014).
41. A. Farrel and T. Pereg-Barnea, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 106403 (2015).
42. M. Kolodrubetz, B. M. Fregoso, and J. E. Moore, *Phys. Rev. B* **94**, 195124 (2016).
43. G. J. Ferreira, R. P. Maciel, P. H. Penteado et al., *Phys. Rev. B* **98**, 165120 (2018).
44. T. Jiang, P. P. Orth, L. Luo et al., *Commun. Phys.* **6**, 297 (2023).
45. S. Hu, S. Li, M. Hu et al., *Phys. Rev. A* **111**, 052414 (2025).
46. D. V. Khomitsky and E. A. Lavrukina, *J. Phys. Conf. Ser.* **2103**, 012201 (2021).
47. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics. Non-Relativistic Theory*, Exeter, Pergamon Press (1991), § 40 [Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Наука, Москва (1989), § 40].

LZSM and EDSR Interferometry and Single-Electron Dynamics in a Double Quantum Dot at the Edge of a Topological Insulator with Magnetic Barriers*D. V. Khomitsky*, E. A. Lavrukina*Lobachevsky National Research State University of Nizhny Novgorod
603022, Nizhny Novgorod, Russia

*E-mail: khomitsky@phys.unn.ru

Received February 18, 2026

Revised April 10, 2026

Accepted April 15, 2026

Abstract

The results of modeling of the single-electron dynamics in the regime of Landau–Zener–Stückelberg–Majorana interference and the electric dipole spin resonance are presented for a double quantum dot formed by three magnetic barriers at the edge of a topological insulator based on the HgTe/CdHgTe quantum well. The parameters of the system are chosen to assure the presence of four discrete levels for which the coupled dynamics of spin and coordinate degrees of freedom takes place. The results of numerical modeling demonstrate the possibility of Rabi-like oscillations both for the spin and charge subsystems, and also of their combinations. The typical resonances are studied in the plane of the system parameters. Further development of the described results opens new possibilities for the application of quantum dots in topological insulators for the problems of quantum computations.

Keywords: topological insulator, magnetic barrier, quantum dot, Landau–Zener–Stückelberg–Majorana interference, electric dipole spin resonance

Funding. The work was carried out within the framework of the State assignment of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation No. FSWR-2026-0004.

Conflict of interest. The authors declare that they have no conflict of interest.

Authors' contributions. The contributions of the authors are equal.