

# ДИНАМО МЕЛКОМАСШТАБНЫХ ПОЛЕЙ ДЛЯ ПОЛНОГО СПЕКТРА ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В МОДЕЛИ КАЗАНЦЕВА

*Л. Л. Кичатинов\**

*Институт солнечно-земной физики Сибирского отделения Российской академии наук  
664033, Иркутск, Россия*

Поступила в редакцию 2 февраля 2026 г.,  
после переработки 2 февраля 2026 г.  
Принята к публикации 7 февраля 2026 г.

Предложен метод определения коэффициентов уравнения Казанцева мелкомасштабного динамо для полного спектра гидродинамической турбулентности, включающего как инерционный интервал, так и область вязкой диссипации. Уравнение динамо с определенными таким методом коэффициентами решается численно для магнитного ( $Rm$ ) и обычного ( $Re$ ) чисел Рейнольдса в диапазоне от  $10^2$  до  $10^8$ . Пороговая величина  $Rm_c$  для включения динамо растет с увеличением  $Re$ , но этот рост останавливается по достижении постоянной величины  $Rm_c \simeq 300$  для  $Re \gtrsim 10^5$ . Скорость роста поля для малой величины магнитного числа Прандтля  $Pm = Rm/Re \ll 1$  мала и показывает логарифмическую зависимость от  $Rm$ . При этом спектр магнитной энергии локализуется в области масштабов омической диссипации, которая смещается в сторону уменьшения масштаба с ростом  $Pm$ . Это смещение останавливается на масштабах вязкой диссипации с приближением к величине  $Pm \simeq 1$ , при этом скорость роста поля резко возрастает. Такое возрастание продолжается и для  $Pm > 1$ , но также останавливается по достижении максимальной скорости роста, несколько меньшей обратного времени жизни наиболее короткоживущих вихрей. Предложено объяснение этих результатов.

**Ключевые слова:** динамо, турбулентность, вязкая диссипация, омическая диссипация, спектры энергии, скорость роста

DOI: 10.7868/S3034641X26030044

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Генерация магнитного поля течениями электропроводящего вещества — гидромагнитное динамо — является традиционным объяснением происхождения магнитных полей в астрофизике [1–3]. Присутствие турбулентности, возникающей из-за различного рода неустойчивостей, повышает эффективность генерации поля. Различают крупно- и мелкомасштабное динамо по сравнению с (внешним) масштабом турбулентности. Генерация крупномасштабных полей планет, звезд и галактик определяется присутствием вращения и вызванного им нарушением отражательной инвариантности турбулентных тече-

ний [1, 2]. Динамо мелкомасштабных полей присутствия вращения не требует.

Физика мелкомасштабного динамо на первый взгляд проста: растяжение силовых линий магнитного поля турбулентным течением при сохранении массы вещества в магнитных трубках увеличивает среднюю плотность магнитной энергии. Однако эта простота обманчива. Усиление поля сопровождается переносом магнитной энергии по спектру в область малых масштабов, где в конечном счете включается омическая диссипация. Скорости усиления поля и уменьшения его масштаба совпадают по порядку величины. Поэтому задача о мелкомасштабном динамо требует количественного сравнения этих конкурирующих процессов. Уравнение мелкомасштабного динамо, полученное Казанцевым [4], включает параметр усиления поля и зависящую от масштаба турбулентную диффузию, соответствующие двум названным выше процессам. Решение уравне-

\* E-mail: kit@iszf.irk.ru

ния Казанцева для модельного спектра турбулентности [5] подтвердило возможность мелкомасштабного динамо.

Впоследствии модель Казанцева применялась для изучения различных особенностей генерации магнитных полей [6–11]. Были проведены обобщения модели с учетом конечного времени корреляции турбулентного течения и отклонения ее статистики от гауссовой [12, 13]. И все же модель Казанцева в силу ее относительной простоты и прозрачности положенной в ее основу физики остается основным инструментом теории мелкомасштабного динамо.

Среди нерешенных проблем теории остаются неопределенность в зависимости скорости усиления поля от ключевых параметров модели [14, 15], определение характерных масштабов генерируемого поля [10] и другие. Возможно, это связано с трудностями определения коэффициентов уравнения Казанцева, зависящих от корреляционной функции турбулентных скоростей. Корреляционная функция не может быть задана произвольно. Она должна соответствовать положительно определенному спектру энергии [16] (довольно популярная «продольная» корреляционная функция  $T_{LL}(r) = v\ell(1 - r^2/\ell^2)/3$  соответствует знакопеременному спектру). Хорошо известно интегральное преобразование от спектра к корреляционной функции, но его применение для спектра энергии  $E(k) \propto k^{-5/3}$  представляет трудности. К тому же, как мы увидим, в коэффициент усиления поля уравнения Казанцева основной вклад дает область вязкой диссипации в спектре энергии, которую, следовательно, необходимо учитывать. Поэтому в задачах мелкомасштабного динамо либо используют модельный спектр, допускающий преобразование к корреляционной функции, либо применяют асимптотические методы, позволяющие доказать присутствие растущих решений для инерционного интервала масштабов.

Данная статья предлагает численный метод преобразования спектра энергии, включающего область диссипации, к корреляционной функции. Метод позволяет определить два коэффициента уравнения Казанцева для чисел Рейнольдса  $Re \lesssim 10^8$ . Решение задачи на собственные значения с этими коэффициентами дает скорости роста и собственные функции кинематической задачи мелкомасштабного динамо в зависимости от обычного и магнитного чисел Рейнольдса. Преобразование собственных функций в свою очередь дает спектр магнитной энергии. Заметим, что нахождение зависящей от масштаба турбулентной диффузии в уравнении Казанцева представляет самостоятельный интерес и опре-

деляет скорость разбегания близких частиц в турбулентном потоке [17, 18].

## 2. МОДЕЛЬ

Модель Казанцева формулируется для магнитного поля в изотропном, стационарном и однородном в статистическом смысле турбулентном потоке с дельта-коррелированным во времени полем скорости (последнее предположение, впрочем, является излишним [17]). В этом случае корреляционный тензор магнитного поля  $\mathbf{b}(\mathbf{r}, t)$ ,

$$\begin{aligned} \langle b_i(\mathbf{r}_1, t) b_j(\mathbf{r}_2, t) \rangle = \\ = B_{LL} \frac{r_i r_j}{r^2} + \frac{1}{2r} \frac{\partial(r^2 B_{LL})}{\partial r} \left( \delta_{ij} - \frac{r_i r_j}{r^2} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

определяется так называемой продольной корреляционной функцией  $B_{LL}(r, t)$  [16], зависящей лишь от расстояния  $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  и времени  $t$ . Уравнение динамо записывается для этой функции в виде

$$\frac{\partial B_{LL}}{\partial t} = \frac{2}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} r^4 (\eta_T(r) + \eta) \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} + Q(r) B_{LL}. \quad (2)$$

Здесь  $\eta$  — магнитная диффузия,  $\eta_T(r)$  — зависящая от масштаба турбулентная диффузия, которая вместе с коэффициентом  $Q(r)$  усиления поля определяется корреляционной функцией  $T_{LL}$  турбулентного течения:

$$\begin{aligned} \eta_T(r) &= T_{LL}(0) - T_{LL}(r), \\ Q(r) &= -\frac{2}{r^4} \frac{d}{dr} r^4 \frac{dT_{LL}}{dr}. \end{aligned} \quad (3)$$

Точнее,  $T_{LL}(r)$  — это проинтегрированная по времени корреляционная функция турбулентной скорости  $\mathbf{u}$ :

$$T_{LL}(r) = \int_0^\infty U_{LL}(r, \tau) d\tau, \quad (4)$$

$$U_{LL}(r, \tau) = r_i r_j \langle u_i(\mathbf{r}_1, t) u_j(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}, t + \tau) \rangle / r^2.$$

Смысл зависящей от масштаба диффузии (3) очевиден. В корреляционную функцию  $T_{LL}(r)$  дают вклад флуктуации масштаба  $\gtrsim r$ . Поэтому разность  $T_{LL}(0) - T_{LL}(r)$  дает диффузию из-за флуктуаций масштаба  $\lesssim r$ . Коэффициент  $Q(r)$  учитывает усиление поля из-за растяжения силовых линий флуктуациями таких масштабов.

Численное решение одномерного в пространстве уравнения (2) не представляет сложностей, если функции (3) известны. Проблему представляет

лишь определение этих функций. Функция  $T_{LL}(r)$  связана с соответствующим спектром  $W(k)$  интегральным соотношением [16]

$$T_{LL}(r) = \int_0^\infty W(k)g(kr)\frac{dk}{(kr)^2}, \quad (5)$$

где

$$g(kr) = \frac{\sin(kr)}{kr} - \cos(kr) \quad (6)$$

и  $W(k) = E(k)\tau_k$  есть произведение спектра турбулентности  $E(k)$ ,

$$\langle u^2 \rangle = \int_0^\infty E(k)dk, \quad (7)$$

и времени жизни  $\tau_k$  турбулентных вихрей масштаба  $1/k$ .

Применение формулы (5) с последующим вычислением коэффициентов (3) не является оптимальной последовательностью действий. В вычислении коэффициента генерации  $Q(r)$  помогает то обстоятельство, что  $g(kr)/(kr)^2$  из (6) является собственной функцией диффузионного оператора,

$$\frac{1}{r^4} \frac{d}{dr} r^4 \frac{d}{dr} \frac{g(kr)}{(kr)^2} = -k^2 \frac{g(kr)}{(kr)^2}. \quad (8)$$

Для вычисления  $Q(r)$  применим формулу

$$Q(r) = \frac{2}{r^2} \int_0^\infty W(k)g(kr) dk. \quad (9)$$

Неопределенность для малых  $r$  устраняется формулой

$$g(z) = \frac{z^2}{3} \left[ 1 - \frac{z^2(1 - z^2/28)}{10} \right] + O(z^8). \quad (10)$$

Отсюда, в частности, следует

$$Q(0) = \frac{2}{3} \int_0^\infty W(k)k^2 dk. \quad (11)$$

Величина  $Q(0)$  входит в формулу для скорости роста магнитной энергии:

$$\frac{\partial \langle b^2 \rangle}{\partial t} = 30\eta B''_{LL}(0) + Q(0)\langle b^2 \rangle, \quad (12)$$

где  $B''_{LL}(0)$  означает вторую пространственную производную для  $r = 0$ . Отсюда следует, что (положительная) величина  $Q(0)$  есть скорость передачи

энергии магнитному полю. Первое слагаемое в правой части (12) учитывает омическую диссипацию.

Важный вывод следует из того обстоятельства, что интеграл в (11) расходится для степенного спектра  $E(k) \propto k^{-5/3}$  при больших  $k$ . Это означает, что для вычисления  $Q(r)$  (9) необходимо учитывать область вязкой диссипации в спектре турбулентности, и наибольший темп передачи энергии магнитному полю происходит в этой области спектра. Это, однако, не означает, что спектр генерируемого поля также имеет максимум в области вязкой диссипации. Этому может препятствовать омическая диссипация. Как мы увидим, с уменьшением отношения  $\text{Pm} = \nu/\eta$  вязкости  $\nu$  к магнитной диффузии  $\eta$  максимум магнитного спектра смещается в сторону меньших волновых чисел.

Корреляционную функцию магнитного поля и скорость роста магнитной энергии можно определить из решения задачи на собственные значения:

$$\gamma B(r) = \frac{2}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} r^4 (\eta_T(r) + \eta) \frac{\partial B(r)}{\partial r} + Q(r)B(r), \quad (13)$$

к которой приводит поиск решения уравнения динамо (2) в виде

$$B_{LL}(r, t) = \exp(\gamma t)B(r)/3.$$

Собственные значения, очевидно, вещественны. В последующем рассматриваются собственные моды, соответствующие наибольшей скорости роста  $\gamma$ . Граничными условиями для уравнения (13) будут требования регулярности корреляционной функции для  $r = 0$ ,  $B'(0) = 0$  и стремление ее к нулю при больших значениях аргумента.

Спектр турбулентности в инерционном интервале известен [19]:

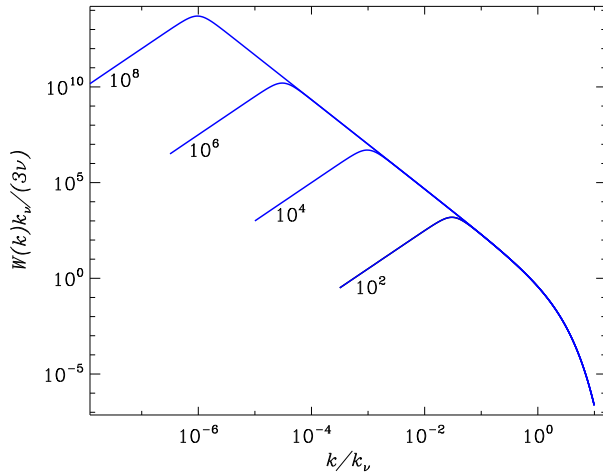
$$E(k) = 2C\epsilon^{2/3}k^{-5/3},$$

где  $\epsilon$  — скорость инжекции энергии на единицу массы и  $C \simeq 3/2$ . Характерная скорость турбулентных вихрей масштаба  $1/k$  составляет  $v_k = (\epsilon/k)^{1/3}$ , а время жизни вихря —  $\tau_k = 1/(kv_k) = (\epsilon k^2)^{-1/3}$ . Отсюда для инерционного интервала имеем

$$W(k) = 3\epsilon^{1/3}k^{-7/3}. \quad (14)$$

Инерционный интервал волновых чисел ограничен сверху значением  $k_\nu = (\epsilon/\nu^3)^{1/4}$ , для которого время  $\tau_k$  сравнивается с временем вязкой диссипации  $1/(k^2\nu)$ . Область  $k \sim k_\nu$  важна для мелкомасштабного динамо. Поэтому формулу (14) запишем как

$$W(k) = 3\frac{\nu}{k_\nu} \left( \frac{k}{k_\nu} \right)^{-7/3}, \quad (15)$$



**Рис. 1.** Спектры  $W(k)$  (16) для значений числа Рейнольдса, указанных около соответствующих им линий

где размерность спектра выделена коэффициентом  $\nu/k_\nu$ .

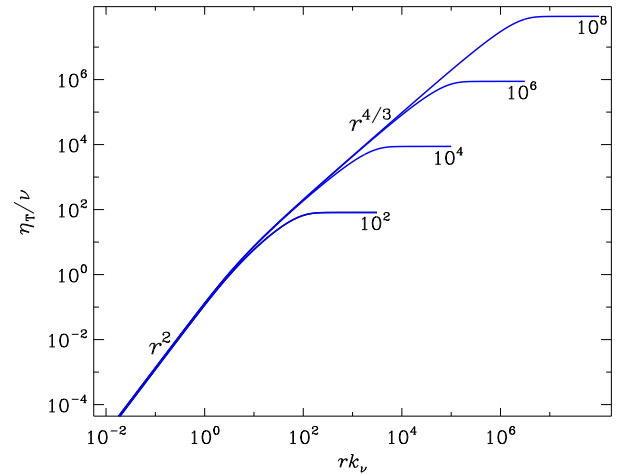
В области диссипации,  $k > k_\nu$ , спектр переходит к экспоненциальной зависимости от волнового числа [20]. Распространить спектр (15) на эту область можно, умножив его на  $\exp(-k/k_\nu)$ . Инерционный интервал волновых чисел ограничен снизу величиной  $k_0 = 1/\ell_0$  ( $\ell_0$  — масштаб инжекции энергии). В области  $k \sim k_0$  спектр имеет максимум и убывает с уменьшением  $k$  для меньших волновых чисел. Число Рейнольдса  $Re = \ell_0 v_{k_0}/\nu$  можно выразить через отношение масштабов,  $Re = (k_\nu/k_0)^{4/3}$ . В расчетах данной статьи используется модель «полного» спектра:

$$W(k) = 3 \frac{\nu}{k_\nu} \frac{(k/k_\nu)^n \exp(-k/k_\nu)}{Re^{-3p/4} + (k/k_\nu)^p}, \quad p = 7/3 + n. \quad (16)$$

Эта модель воспроизводит степенной спектр (15) в инерционном интервале  $k_0 < k < k_\nu$ , экспоненциальную зависимость в области диссипации, и  $W(k) \propto k^n$  для  $k < k_0$  (в последующих расчетах  $n = 2$ ). На рис. 1 показаны спектры для ряда значений числа Рейнольдса.

### 3. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Применялись конечно-разностные методы как по радиусу  $r$ , так и волновому числу  $k$ . По обоим переменным узлы конечно-разностной сетки располагались в интервале от нуля до максимального значения, равного  $r_{max} = 100\ell_0$  и  $k_{max} = 10k_\nu$ . В настолько широких интервалах масштабов сетки не могут быть равномерными.



**Рис. 2.** Зависящие от масштаба коэффициенты диффузии  $\eta_T(r)$ . Числа у линий означают соответствующие числа Рейнольдса

Для узлов по волновым числам: второй узел  $k_2 = \delta k_0$  ( $k_1 = 0$ ), где  $\delta \ll 1$  — параметр модели; последующие узлы дают итерации

$$k_{m+1} - k_m = (k_m - k_{m-1})(1 + \varepsilon), \quad (17)$$

где  $\varepsilon \ll 1$  — также малый параметр. Относительная величина расстояния между узлами,

$$(k_{m+1} - k_m)/k_m = \delta k_0/k_m + \varepsilon, \quad (18)$$

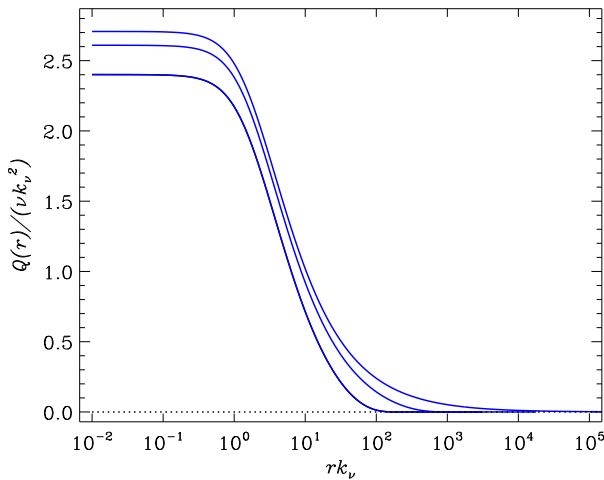
приближается к  $\varepsilon$  с увеличением  $m$ . Итерации останавливаются по достижении максимального значения  $k_{max}$ .

Аналогично для узлов по радиусу:  $r_1 = 0$ ,  $r_2 = \delta/k_\nu$  и далее согласно итерационной формуле

$$r_{m+1} - r_m = (r_m - r_{m-1})(1 + \varepsilon) \quad (19)$$

вплоть до  $r_{max}$ . Расчеты проводились для  $\delta = \varepsilon = 0.01$ . Это позволяло обойтись умеренным количеством узлов сетки (менее 2000) даже для наибольшего значения  $Re = 10^8$  в расчетах.

Еще одно обстоятельство требует пояснения. Несмотря на относительно малое расстояние между узлами сетки, функция (6) при больших значениях ее аргумента может быть сильно неоднородной между соседними узлами. Провести интегрирование по формуле (9), а также вычислить подобный интеграл для коэффициента диффузии помогает то обстоятельство, что быстро осциллирующие тригонометрические функции из (6) входят в подынтегральные выражения в произведении с гладкими функциями, слабо изменяющимися на межузельных интервалах.



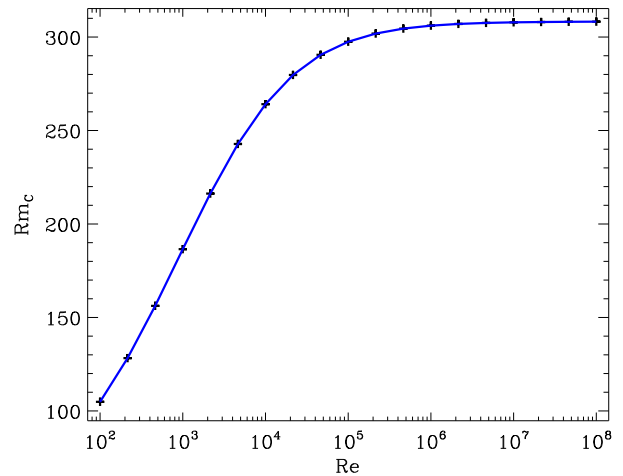
**Рис. 3.** Нормированный коэффициент усиления  $Q$  (9) магнитного поля в зависимости от относительного масштаба  $rk_\nu$ . Три профиля соответствуют значениям числа Рейнольдса  $10^2$ ,  $10^3$  и  $10^8$  (от нижней кривой к верхней)

Эти плавно меняющиеся функции аппроксимировались кубическим сплайном. Интеграл от произведения кубического сплайна и тригонометрических функций по межузельному интервалу вычисляется аналитически и выражается через коэффициенты сплайна. Верхний предел интегрирования в (5) и (9) полагался равным  $k_{max}$ .

Найденные таким методом коэффициенты диффузии показаны на рис. 2. Можно выделить три области масштабов, различающихся поведением турбулентной диффузии. В области вязкой диссипации,  $rk_\nu < 1$ , неоднородность турбулентного течения близка к линейной зависимости от координат. Поэтому здесь  $\eta_T \propto r^2$  (можно показать, что в этой области  $\eta(r) = r^2 Q(0)/20$ ). Для инерционного интервала,  $1 < rk_\nu < Re^{3/4}$ , расчеты воспроизводят правило Ричардсона,  $\eta_T \propto r^{4/3}$ , для разбегания близких частиц в турбулентном потоке [21,22]. Наконец, для  $r > \ell_0$  диффузия приближается к постоянной величине  $\eta_T \simeq \ell_0 v_{k_0}/3$  для крупномасштабных полей.

Коэффициент усиления  $Q(r)$  показан на рис. 3. Нормированная величина  $Q/(\nu k_\nu^2)$  быстро приближается к универсальному профилю с возрастанием числа Рейнольдса и мала для  $rk_\nu \gg 1$ .

Уравнение на собственные значения (13) решалось методом обратных итераций [23] с конечно-разностным представлением производных второго порядка точности. Внешнее граничное условие применялось для  $r_{max}$ :  $B(r_{max}) = 0$ . Решение линейного уравнения на собственные значения нормировалось условием  $B(0) = 1$ .



**Рис. 4.** Зависимость пороговой величины  $Rm_c$  для мелкомасштабного динамо от числа Рейнольдса. Крестиками помечены точки проведенных расчетов

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

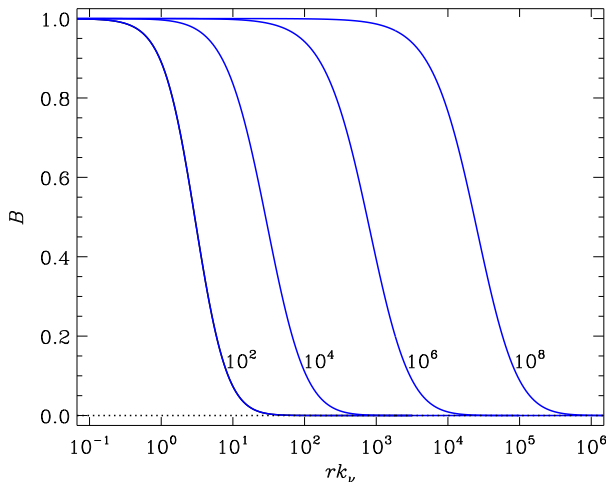
Растущие решения с  $\gamma > 0$  появляются по превышении магнитным числом Рейнольдса  $Rm = \ell_0 v_{k_0}/\eta$  некоторой пороговой величины  $Rm_c$ . Зависимость  $Rm_c$  от числа Рейнольдса показана на рис. 4.

В литературе высказывались различные мнения по поводу этой зависимости. В [7] сделан вывод о неограниченном возрастании  $Rm_c$  для  $Rm \ll 1$ . На рис. 4 видно, что первоначальный рост сменяется стабилизацией на уровне  $Rm_c \simeq 300$ , но стабилизация происходит при больших значениях  $Re \geq 10^6$ , не доступных трехмерным численным экспериментам. Предположение о стабилизации роста  $Rm_c$  высказывалось в [24, 25].

Корреляционные функции  $B(r)$ , соответствующие пороговому режиму динамо, показаны на рис. 5. На рисунке видно, что длина корреляции магнитного поля возрастает относительно масштаба вязкой диссипации при увеличении  $Re$ . Это объясняется уменьшением  $Rm = Rm_c/Re$  и усилением омической диссипации. При этом область генерации поля смещается по спектру в сторону больших масштабов. Это хорошо видно по форме спектров магнитной энергии,

$$E_m(k) = \frac{2}{3\pi} \int_0^{r_{max}} B(r)g(kr)(kr)^2 dr, \quad (20)$$

показанных на рис. 6 (численное интегрирование в (20) проводилось изложенным выше методом). Положения максимумов спектров в области насыщения на рис. 4 подчиняется соотношению



**Рис. 5.** Собственные функции  $B(r)$  уравнения динамо (13) для пороговых значений  $Rm_c$ . Линии помечены соответствующими значениями числа Рейнольдса

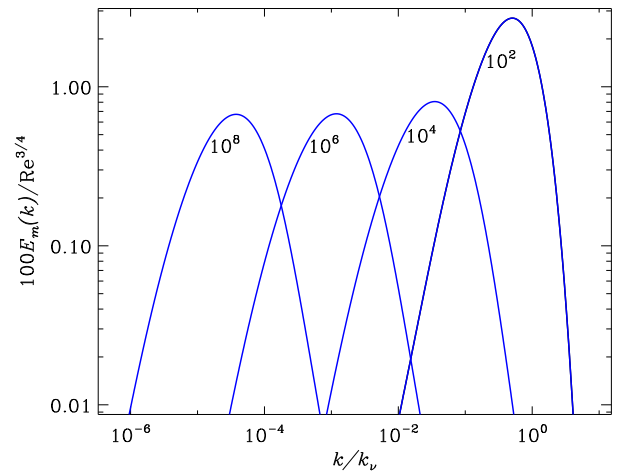
$k/k_\nu \propto Rm^{3/4}$ . Это означает, что для  $Rm < 1$  усиление поля происходит на масштабе омической диссипации  $k_\eta \simeq (\epsilon/\eta^3)^{1/4}$  инерционного интервала.

Полуширина спектров на рис. 6 имеет тот же порядок величины, что и положение их максимумов. Поэтому при нормировке  $B(0) = 1$  корреляционной функции амплитуда спектра пропорциональна  $Re^{3/4}$ .

С увеличением  $Rm$  при фиксированном числе Рейнольдса спектр наиболее быстро растущей моды смещается в сторону увеличения волнового числа  $k$ . Это хорошо видно на рис. 7, где дано сравнение спектров для  $Rm_c$  и  $Rm = Re$  (заметим, что спектры (20) решений уравнения Казанцева всюду положительны, как и должно быть). При увеличении  $Rm$  выше числа Рейнольдса смещение спектра к большим  $k$  останавливается, вероятно, из-за отсутствия для  $k > k_\nu$  достаточно интенсивных для генерации поля течений.

Это обстоятельство имеет отношение к зависимости скорости роста поля от параметров задачи. Скорость роста поля не может быть больше обратного времени жизни  $1/\tau_k$  генерирующих поле турбулентных вихрей. Наименьшее время жизни  $\tau_{k_\nu} = 1/(\nu k_\nu^2)$  имеют вихри масштаба вязкой диссипации. Поэтому нормированные к этому времени скорости роста на рис. 8 меньше единицы.

Генерация поля при малых магнитных числах Прандтля происходит на масштабах омической диссипации (см. рис. 6, 7). Здесь конкурируют два процесса: усиление поля в данном масштабе и диффузионное затухание. Скорости обоих процессов

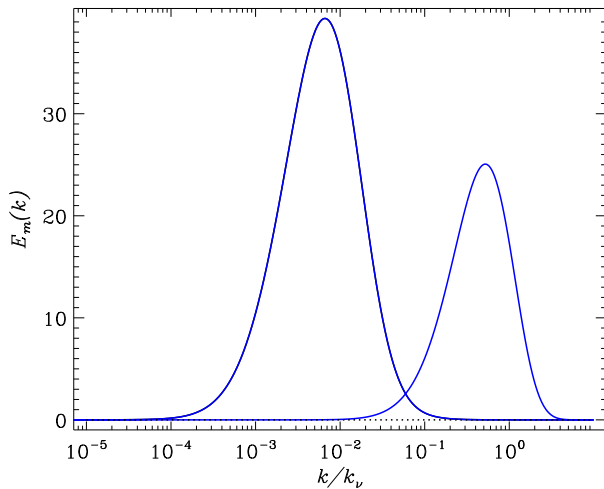


**Рис. 6.** Спектры (20) магнитной энергии для порогового динамо. Линии помечены соответствующими значениями числа Рейнольдса. Коэффициент  $100/Re^{3/4}$  введен для удобства представления спектров для различных  $Re$  на одном графике

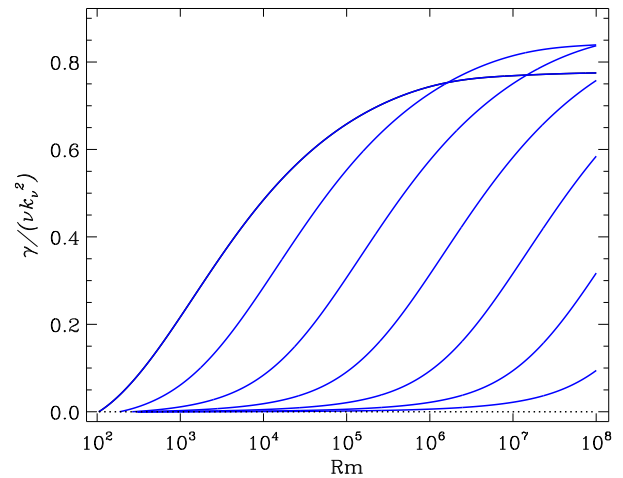
( $\sim 1/\tau_k$ ) совпадают по порядку величины. Поэтому скорость роста поля для малых  $Rm$  также мала,  $\gamma \propto \ln(Rm/Rm_c)$  [15]. С приближением к  $Rm \simeq 1$  диффузия уменьшается и скорость роста возрастает быстрее. Однако обсуждавшийся в литературе неограниченный рост  $\gamma \propto Rm^{1/2}$  не обнаруживается. С дальнейшим увеличением  $Rm > 1$  скорость роста  $\gamma$  приближается к постоянной величине несколько ниже  $1/\tau_{k_\nu}$ .

### 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ПЕРСПЕКТИВЫ

Можно предложить следующее объяснение полученных результатов. В мелкомасштабном динамо конкурируют два процесса: усиление поля из-за растяжения силовых линий и диффузия (омическая и турбулентная). Турбулентная диффузия дает перенос магнитной энергии по спектру в сторону меньших масштабов, где в итоге включается омическая диссипация. Скорости усиления поля  $Q(r)$  (рис. 3) и турбулентного дробления масштабов  $\eta_T(r)/r^2$  (рис. 2) возрастают с уменьшением масштаба  $r$  вплоть до масштаба  $1/k_\nu$  вязкой диссипации. Скорость омической диссипации  $\eta/r^2$  растет с уменьшением масштаба быстрее скорости турбулентной диффузии и превышает последнюю для  $r < 1/k_\eta$ , где омическая диффузия останавливает усиление поля. Поэтому наибольшая скорость генерации поля достигается для области спектра  $k \sim k_\eta$  (рис. 6, 7).



**Рис. 7.** Спектры магнитного поля для  $Re = 10^5$ . Слева: нейтрально устойчивая мода для критической величины магнитного числа Рейнольдса  $Rm_c = 297$ . Справа: спектр растущей моды для  $Rm = 10^5$  (умножен на 30 для удобства представления на рисунке)



**Рис. 8.** Нормированные скорости роста  $\gamma/(\nu k_v^2)$  как функции  $Rm$  для фиксированных чисел Рейнольдса. Число Рейнольдса имеет постоянную величину для каждой линии рисунка, но возрастает как  $10^N$  с целочисленными  $N = 1, 2, \dots, 8$  от левой к правой линии

При увеличении магнитного числа Прандтля до  $Rm \sim 1$  и далее область генерации поля смещается к  $k \sim k_v$ , где турбулентное дробление масштабов ослабевает из-за отсутствия вихрей меньших масштабов в спектре турбулентности, и смещение спектра магнитной энергии в сторону меньших  $k$  останавливается. При этом скорости роста заметно возрастают (рис. 8). Из-за уменьшения омической диффузии это возрастание продолжается и для  $Rm > 1$ , но ограничивается величиной  $\gamma_{max} \simeq 1/\tau_{k_v}$  обратного времени жизни наиболее мелкомасштабных вихрей. Численный метод данной работы ограничен значениями чисел Рейнольдса  $Re, Rm \leq 10^8$ . При этом насыщение скорости роста на рис. 8 удается показать лишь для  $Re < 10^4$ . Величина  $\gamma_{max}$  несколько возрастает с числом Рейнольдса, вероятно, из-за подобного возрастания максимальной скорости усиления поля (рис. 3).

Случай  $Rm \ll 1$  важен для приложений к Солнцу и звездам с конвективной турбулентностью. Модель Казанцева показывает действие мелкомасштабного динамо для этого случая. Однако скорости роста здесь малы. Это создает проблему: эффект динамо появляется из-за превышения скоростью усиления поля равной по порядку величины скорости диффузии в модели, точность которой неизвестна. Поэтому кажется уместной проверка модели мелкомасштабного динамо по данным наблюдений либо экспериментов.

Модель Казанцева принято считать кинематической, т. е. применимой к случаю, когда энергия поля мала по сравнению с кинетической энергией турбулентности. На нелинейной стадии динамо усиление поля останавливается в результате воздействия магнитных сил на течение [26]. При этом применение уравнения Казанцева ограничено лишь неопределенностью результатов такого воздействия. Ограничение может быть снято, если корреляционные функции как магнитного поля, так и турбулентного течения известны для некоторого интервала масштабов  $r$ . Тогда подстановка корреляционных функций в правую часть уравнения (2) могла бы позволить оценить погрешность уравнения (левая часть для нелинейного режима должна обратиться в нуль). Заметим, что корреляционные функции мелкомасштабных магнитных полей и течений на поверхности Солнца доступны для наблюдений [27,28].

Развитием предложенного в данной работе метода численного решения задачи о мелкомасштабном динамо может быть учет гидродинамической спиральности в спектре турбулентности.

**Финансирование.** Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ.

**Конфликт интересов.** Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ya. B. Zeldovich, A. A. Ruzmaikin, and D. D. Sokoloff, *Magnetic Fields in Astrophysics*, Gordon and Breach Sci. Publ., New York (1983) [Я. Б. Зельдович, А. А. Рузмайкин, Д. Д. Соколов, *Магнитные поля в астрофизике*, Изд-во Института компьютерных исследований, Ижевск (2006)].
2. F. Krause and K.-H. Rädler, *Mean-Field Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory*, Akademie-Verlag, Berlin (1980) [Ф. Краузе, К.-Х. Рэдлер *Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо*, Мир, Москва (1984)].
3. G. Rüdiger, L. L. Kitchatinov, and R. Hollerbach, *Magnetic Processes in Astrophysics: Theory, Simulations, Experiments*, Wiley-VCH Verlag GmbH, Weinheim (2013).
4. A. P. Kazantsev, Sov. Phys. JETP **26**, 1031 (1967) [А. П. Казанцев, ЖЭТФ **53**, 1806 (1967)].
5. V. G. Novikov, A. A. Ruzmaikin, and D. D. Sokolov, Sov. Phys. JETP **58**, 527 (1983) [В. Г. Новиков, А. А. Рузмайкин, Д. Д. Соколов, ЖЭТФ **85**, 909 (1983)].
6. M. Chertkov, G. Falkovich, I. Kolotkov, and M. Vergassola, Phys. Rev. Lett. **83** 4065 (1999).
7. S. Boldyrev and F. Cattaneo, Phys. Rev. Lett. **92** 14451 (2004).
8. S. Boldyrev, F. Cattaneo, and R. Rosner, Phys. Rev. Lett. **95**, 25501 (2005).
9. S. Bovino, D. R. G. Schleicher, and J. Schober, New J. Phys. **15** 013055 (2013).
10. N. Kriel, J. R. Beattie, A. Seta, and C. Federrath, Mon. Not. R. Astron. Soc. **513** 2457 (2022).
11. I. V. Makarova, E. V. Yushkov, and D. D. Sokolov, Zh. Exp. Teor. Fiz. **168** (2025) [И. В. Макарова, Е. В. Юшков, Д. Д. Соколов, ЖЭТФ **168**, 843 (2025)].
12. A. V. Kopyev, A. M. Kiselev, A. S. Il'yn, V. A. Sirota, and K. P. Zybin, Astrophys. J. **927**, 172 (2022).
13. A. V. Kopyev, A. S. Il'yn, V. A. Sirota, and K. P. Zybin, Mon. Not. R. Astron. Soc. **527**, 1055 (2024).
14. L. M. Malyshkin and S. Boldyrev, Phys. Rev. Lett. **105**, 215002 (2010).
15. N. Kleeorin and I. Rogachevskii, Phys. Scripta **86**, 018404 (2012).
16. A. S. Monin and A. M. Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics*, ed. by J. Lumley, MIT Press, Cambridge (1975) [А. С. Монин, Ф. М. Яглом, *Статистическая гидромеханика. Часть 2*, Мир, Москва (1967)].
17. S. I. Vainshtein and L. L. Kitchatinov, J. Fluid Mech. **168**, 73 (1986).
18. L. L. Kitchatinov, J. Fluid Mech. **208**, 115 (1989).
19. A. Kolmogorov, Dokl. Akad. Nauk SSSR **30**, 301 (1941) [А. М. Колмогоров, ДАН СССР **30**, 299 (1941)].
20. D. O. Martinez, S. Chen, G. D. Doolen, R. H. Kraichnan, L.-P. Wang, and Y. Zhou, J. Plasma Phys. **57**, 195 (1997).
21. L. F. Richardson, Proc. R. Soc. London A **110**, 709 (1926).
22. A. Obukhov, Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Geogr. Geofiz. **5**, 453 (1941) [А. М. Обухов, Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз. **5**, 453 (1941)].
23. W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing*, Cambridge Univ. Press (1992).
24. A. A. Schekochihin, S. C. Cowley, J. L. Maron, and J. C. McWilliams, Phys. Rev. Lett. **92**, 054502 (2004).
25. A. B. Iskakov, A. A. Schekochihin, S. C. Cowley, J. C. McWilliams, and M. R. E. Proctor, Phys. Rev. Lett. **98**, 208501 (2007).
26. E. V. Yushkov, A. S. Lukin, and D. D. Sokoloff, JETP **129**, 1086 (2019) [Е. В. Юшков, А. С. Лукин, Д. Д. Соколов, ЖЭТФ **156**, 1192 (2019)].
27. V. Abramenko, V. Yurchishin, H. Wang, and P. R. Goode, Sol. Phys. **201**, 225 (2001).
28. V. I. Abramenko, Mon. Not. R. Astron. Soc. **471**, 3871 (2017).

**Small-Scale Dynamo for Full Spectrum of Hydrodynamic Turbulence in Kazantsev Model***L. L. Kitchatinov*Institute of Solar-Terrestrial Physics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences  
664003, Irkutsk, Russia**Abstract**

We propose a method for computing coefficients in the Kazantsev equation of small-scale dynamo for full spectrum of hydrodynamic turbulence comprising the inertial range together with the range of viscous dissipation. The dynamo equation with so defined coefficients is solved numerically for magnetic ( $Rm$ ) and hydrodynamic ( $Re$ ) Reynolds numbers from  $10^2$  to  $10^8$ . The threshold value  $Rm_c$  for onset of dynamo increases initially with  $Re$  but then saturates at a constant value of  $Rm_c \simeq 300$  for  $Re \gtrsim 10^5$ . In the case of small Prandtl number  $Pm = Rm/Re \ll 1$ , the field growth rate is also small and depends logarithmically on  $Rm$ . In this case, the magnetic energy spectrum peaks around the scale of Ohmic dissipation, which decreases with increasing  $Pm$ . The decrease stops at the scales of viscous dissipation while the growth rate increases sharply when  $Pm$  approaches the value of one. The increase in the growth rate proceeds for  $Pm > 1$  but slows down and then saturates at a value somewhat below the inverse lifetime of most short living vortices. An explanation of the results is proposed.

**Keywords:** dynamo, turbulence, viscous dissipation, Ohmic dissipation, energy spectra, growth rates

**Funding.** The work is financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of Russian Federation.

**Conflict of interest.** The author declares no conflict of interest.