ЖЭТФ/JETP, 2026, том 169, вып. 2, стр. 243–255 © 2026

КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ПОЛИМЕРА С НЕЛИНЕЙНОЙ УПРУГОСТЬЮ В ВЯЗКОМ ПРИСТЕННОМ ПОДСЛОЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

С. А. Белан [a,b*]

[a] *Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук 142432, Черноголовка, Московская обл., Россия*

[b] *Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, факультет физики 101000, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 2 декабря 2025 г.,
после переработки 2 декабря 2025 г.
Принята к публикации 17 декабря 2025 г.

Представлен вывод кинетического уравнения для функции плотности вероятности координаты центра масс и вектора, соединяющего концы, конечнорастяжимого полимера с нелинейной упругостью в вязком пристенном подслое турбулентного течения несжимаемой жидкости с коротко-коррелированной во времени флуктуационной компонентой. Перечислены ключевые безразмерные параметры, определяющие различные режимы поведения полимера в рамках выбранной модели, и представлены аналитические выражения для некоторых статистических моментов компонент вектора растяжения и коэффициента упругости в приближении локального равновесия в условиях сильного растяжения. Показано, что модельное предположение о короткой коррелированности флуктуаций поля скорости жидкости в вязком подслое является самосогласованным в рассмотренном пределе.

Ключевые слова: модель конечнорастяжимого полимера с нелинейной упругостью, вязкий подслой турбулентности, уравнение Фоккера – Планка, число Вайсенберга

DOI: 10.7868/S3034641X26020112

1. ВВЕДЕНИЕ

Хаотическая динамика полимерных растворов представляет интерес в связи с наблюдаемыми в таких системах эффектами. Так, к примеру, добавление в турбулентную жидкость с большим числом Рейнольдса даже относительно небольшого количества полимерной примеси может приводить к существенному уменьшению гидродинамического сопротивления течению [1, 2]. Еще одним интересным явлением служит так называемая эластическая турбулентность — возбуждаемое при низких числах Рейнольдса состояние хаотического движения полимерного раствора [3–23]. При моделировании указанных эффектов существенным оказывается учет обратного влияния полимеров на движение переносящего и растягивающего их поля скорости. Основной сложностью на пути к получению аналитических и численных результатов в таких задачах является нелинейность и сцепленность уравнений движения жидкости и полимерной примеси.

В ряде теоретических работ также рассматривалась стохастическая динамика отдельных полимерных молекул в хаотических полях скорости [24–34], статистика которых предполагалась независящей от динамики полимеров. Такое рассмотрение соответствует случаю достаточно малой концентрации полимерной примеси, не оказывающей существенного воздействия на течение. Кроме того, предположение об отсутствии влияния полимеров на движение жидкости может оказаться оправданным в тех областях течения относительно концентрированного раствора, где локальные упругие напряжения, связанные с внутренними степенями свободы полимеров, относительно малы в сравнении с теми, что имеют место в основном объеме. Такая ситуация имеет место, к

* E-mail: belan@itp.ac.ru

примеру, в пристенной области эластической турбулентности (см. [35]).

Большая часть теоретических работ на тему динамики отдельных полимерных молекул в хаотических течениях посвящены случаю однородных и изотропных по статистическим свойствам флуктуаций поля скорости. В данной работе рассматривается задача теоретического моделирования статистики координаты и вектора растяжения конечнорастяжимого полимера с нелинейной упругостью, помещенного в вязкий подслой турбулентного течения несжимаемой жидкости. Течение в указанной области представляет собой пример пространственно-неоднородного и неизотропного хаотического поля скорости, что обусловлено граничными условиями непроницаемости и непроскальзывания на стенке [36, 37]. Основной целью исследования является получение кинетического уравнения для функции плотности вероятности координаты и вектора растяжения полимера в вязком подслое, выявление ключевых безразмерных параметров, определяющих различные режимы поведения полимера, а также получение из кинетического уравнения локально-равновесных выражений для средних значений некоторых связанных с растяжением полимера величин в сильно нелинейном режиме растяжений. Вывод кинетического уравнения выполнен в предположении об относительной малости времени корреляции турбулентных флуктуаций на фоне характерных масштабов времени результирующей динамики полимера.

Работа имеет следующую структуру. В разд. 2 приводятся уравнения стохастической динамики полимера, характеризуемой координатой центра масс и вектором растяжения полимерной молекулы в хаотическом течении. Раздел 3 посвящен обсуждению структуры и статистических свойств поля скорости в вязком пристенном подслое турбулентности несжимаемой жидкости. В разд. 4 представлено искомое кинетическое уравнение для совместной плотности распределения вероятности координаты и вектора растяжения полимера. Процедура вывода вынесена в Приложения. Раздел 5 содержит обсуждение ключевых безразмерных параметров, регулирующих поведение полимера в вязком подслое. В разд. 6 рассматривается режим локального равновесия между статистикой сильно растянутого полимера и пространственно-неоднородной интенсивностью турбулентных флуктуаций градиентов поля скорости. В разд. 7 приводится краткое перечисление результатов работы с указанием основных уравнений и обсуждается их связь с некоторыми прежде известными результатами.

2. МОДЕЛЬ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ ПОЛИМЕРА В ТУРБУЛЕНТНОМ ТЕЧЕНИИ

Полимерная макромолекула — это объект с большим числом степеней свободы [38]. В этой работе будет принята простая модель конечнорастяжимого полимера с нелинейной упругостью, в рамках которой полимер характеризуется координатой центра масс $\mathbf{r}$ и вектором $\mathbf{R}$, соединяющим концы (рис. 1). Стохастическая динамика этих переменных описывается уравнениями (см., например, [39])

$$\begin{aligned} &\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{r}(t), t) + \xi(t), \\ &\dot{\mathbf{R}}(t) = -\gamma(R(t))\mathbf{R}(t) + \mathbf{R}(t)\nabla\mathbf{v}(\mathbf{r}(t), t) + \zeta(t), \end{aligned} \tag{1}$$

где $\gamma(R)$ — нелинейным образом зависящий от растяжения R коэффициент упругости полимера, $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{r}) + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ — поле скорости жидкости ($\mathbf{U}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ — средняя и флуктуирующая компоненты течения соответственно), а ξ и ζ представляют собой связанные с тепловыми флуктуациями ланжевеновские шумы, имеющие нулевые средние значения и автокорреляционные функции вида

$$\begin{aligned} \langle \xi_i(t_1)\xi_j(t_2)\rangle &= 2\kappa\delta_{ij}\delta(t_1 - t_2), \\ \langle \zeta_i(t_1)\zeta_j(t_2)\rangle &= 2\eta\delta_{ij}\delta(t_1 - t_2). \end{aligned}$$

Через κ и η обозначены коэффициенты трансляционной и относительной диффузии соответственно.

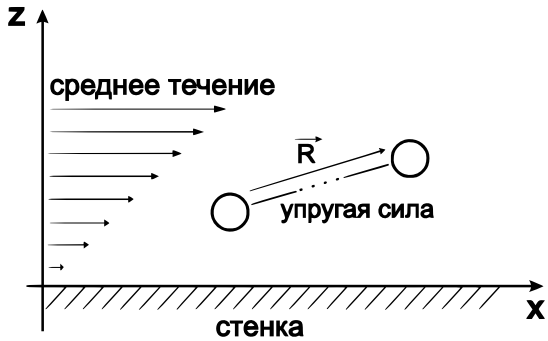

Рис. 1. Конечнорастяжимый полимер с нелинейным коэффициентом упругости в пристенной области турбулентного течения жидкости. Уравнения стохастической динамики полимера даются формулами (1). Средняя компонента поля скорости жидкости в пределах вязкого подслоя имеет форму сдвигового течения, см. уравнение (12). Флуктуации поля скорости параметризуются посредством тензора турбулентной диффузии, см. определение (11)

Влияние турбулентных флуктуаций и теплового шума на перенос и растяжение полимера должно описываться статистически. Введем совместную функцию плотности вероятности координаты $\mathbf{r}$ и вектора $\mathbf{R}$ в момент времени t:

$$W(\mathbf{r},\mathbf{R};t) = \langle \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}(t))\delta(\mathbf{R}-\mathbf{R}(t))\rangle_{\xi,\zeta,\mathbf{u}}. \qquad (2)$$

Здесь $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{R}(t)$ — решения уравнений стохастической динамики (1), а угловые скобки обозначают усреднение по тепловым флуктуациям и статистике хаотической компоненты течения жидкости.

Как было сказано во Введении, основной целью работы является вывод кинетического уравнения для функции $W(\mathbf{r},\mathbf{R};t)$. Такой вывод может быть проведен, если положить, что турбулентные флуктуации представляют собой гауссов белый шум, т. е. случайный процесс с нормальной статистикой и формально нулевым временем корреляции. Обоснование оправданности данного предположения для рассматриваемой системы будет приведено ниже.

3. ПОЛЕ СКОРОСТИ В ВЯЗКОМ ПОДСЛОЕ НЕСЖИМАЕМОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ

В этом разделе описываются свойства турбулентного течения в вязком подслое, определяющие форму коэффициентов, параметризующих кинетическое уравнение для плотности вероятности $W(\mathbf{r},\mathbf{R};t)$ (см. определение (2)).

Здесь и далее толщину вязкого подслоя будем обозначать как L. Ось декартовой системы координат, направленную по нормали к стенке, обозначим через z. Сама стенка соответствует координатной плоскости x–y, причем ось x сонаправлена среднему течению.

В силу непроницаемости стенки, условия непроскальзывания на ее поверхности и доминирующей роли вязкости в пределах вязкого подслоя (см., например, [36, 37]), поле скорости на расстояниях $z \ll L$ от стенки может рассматриваться как гладкая функция координат, причем для средней компоненты в этой области справедливо

$$U_x(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{kx}\left(\frac{z}{L}\right)^k \sim \frac{U_L}{L}z, \quad U_y = 0, \quad U_z = 0, \qquad (3)$$

в то время как хаотическую компоненту с учетом условия несжимаемости можно представить как

$$u_x(x,y,z;t) = u_L\sum_{k=1}^{\infty} b_{kx}(x,y;t)\left(\frac{z}{L}\right)^k \approx \approx b_{1x}(x,y;t)\frac{z}{L} \sim \frac{z}{L}u_L, \qquad (4)$$

$$u_y(x,y,z;t) = u_L\sum_{k=1}^{\infty} b_{ky}(x,y;t)\left(\frac{z}{L}\right)^k \approx \approx b_{1y}(x,y;t)\frac{z}{L} \sim \frac{z}{L}u_L, \qquad (5)$$

$$u_z(x,y,z;t) = u_L\sum_{k=2}^{\infty} b_{kz}(x,y;t)\left(\frac{z}{L}\right)^k \approx \approx b_{1z}(x,y;t)\left(\frac{z}{L}\right)^2 \sim \left(\frac{z}{L}\right)^2 u_L. \qquad (6)$$

Коэффициенты $b_{kx}(x,y;t)$, $b_{ky}(x,y;t)$ и $b_{kz}(x,y;t)$ представляют собой случайные функции координат и времени. Через U_L и u_L обозначены характерные амплитуды средней и флуктуационной компонент поля скорости жидкости на границе вязкого подслоя. Отметим, что U_L и u_L представляют собой величины одного порядка, причем $L \sim \nu/U_L$, где ν — кинематическая вязкость жидкости [37].

Эйлерово время корреляции поля скорости, т. е. время корреляции турбулентных флуктуаций в фиксированной точке, определено как

$$\tau_c = \frac{\int_0^\infty \langle \mathbf{u}(x,y,z;t)\cdot\mathbf{u}(x,y,z;t+\tau)\rangle d\tau}{\langle u^2(x,y,z;t)\rangle}, \qquad (7)$$

а длина корреляции пространственных флуктуаций поля скорости в направлении вдоль среднего течения равна

$$l_c = \frac{\int_0^\infty \langle \mathbf{u}(x,y,z;t)\cdot\mathbf{u}(x+l,y,z;t)\rangle dl}{\langle u^2(x,y,z;t)\rangle}, \qquad (8)$$

причем

$$\tau_c \sim \frac{L}{U_L}, \qquad (9)$$

$$l_c \sim L. \qquad (10)$$

В области $z \ll L$ как τ_c, так и l_c пространственно однородны, т. е. не зависят от расстояния до стенки. Дело в том, что поскольку координата z входит в формулы (3)–(6) в виде префактора, она определяет только амплитуду автокорреляционной функции поля скорости, но не масштабы времени и расстояния, на которых эта функция затухает.

Как видно из (3)–(6), поскольку $u_z \ll u_x, u_y, U_x$ в области $z \ll L$, движение центра масс полимера в направлении вдоль стенки происходит быстрее, чем в направлении нормали к ней. Между тем, время переноса полимера через масштаб корреляции поля скорости в направлении вдоль стенки (каким оно

было бы в отсутствие флуктуаций поля скорости во времени) оценивается как $l_c/U_x(z)$. То есть в силу (3), (9) и (10) в области $z \ll L$ это время намного превосходит эйлерово время τ_c, а значит, оценка (9) работает и для лагранжева времени корреляции флуктуаций.

Из сказанного следует, что смещение полимера за время корреляции испытываемых им флуктуаций течения много меньше характерного масштаба L, задающего толщину подслоя и характерную длину корреляции поля скорости в направлении вдоль стенки. Относительная малость изменения координаты полимера за лагранжево время корреляции течения в вязком подслое означает, что при статистическом описании транспорта центра масс полимера в этой области на достаточно больших временах турбулентные флуктуации в первом из пары уравнений (1) могут быть смоделированы как гауссов белый шум.

Далее, из формул (3)–(6) для компонент поля скорости жидкости и оценки (10) для характерного масштаба пространственной неоднородности течения следует, что лагранжево время корреляции испытываемого полимером градиента флуктуационной компоненты течения также дается величиной τ_c (см. (9)). Если при этом за время τ_c изменение длины полимера (за счет гидродинамического растяжения, теплового шума и упругой релаксации, см. второе из уравнений (1)) относительно мало в сравнении с характерными флуктуациями длины, то предположение о короткой коррелированности хаотической компоненты течения оправдано также и для описания растяжения полимера, а не только его адвекции. В дальнейшем будем предполагать указанное условие выполненным. Условие самосогласованности анализа требует, чтобы предсказываемые в рамках такого предположения характерные времена, связанные с кинетикой растяжения, были действительно велики в сравнении с оценкой (9) для времени корреляции градиента поля скорости, что, как будет показано в разд. 6, действительно выполняется.

С учетом сделанных предположений коэффициенты интересующего нас кинетического уравнения для совместной функции плотности вероятности координаты и вектора растяжения полимера будут определяться профилем среднего течения $U_x(z)$ и двухточечным тензором турбулентной диффузии

$$D_{ij}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) = \int\limits_0^\infty dt \langle u_i(\mathbf{r}_1,t) u_j(\mathbf{r}_2,0)\rangle. \qquad (11)$$

Для вязкого подслоя турбулентности несжимаемой жидкости

$$U_x(z) = \Sigma z, \qquad (12)$$

где Σ — скорость (рейт) сдвигового течения в окрестности стенки, а тензор (11) имеет следующую форму (см. [39]):

$$D_{\zeta\sigma}(\mathbf{r_1},\mathbf{r_2}) = H_1(\rho)\delta_{\zeta\sigma}A(z_1)A(z_2) + \\ + H_2(\rho)\rho_\zeta\rho_\sigma A(z_1)A(z_2), \qquad (13)$$

$$D_{z\sigma}(\mathbf{r_1},\mathbf{r_2}) = -H_1'(\rho)\frac{\rho_\sigma}{\rho}B(z_1)A(z_2) - \\ -[\rho H_2'(\rho) + 3H_2(\rho)]\rho_\sigma B(z_1)A(z_2), \qquad (14)$$

$$D_{\zeta z}(\mathbf{r_1},\mathbf{r_2}) = H_1'(\rho)\frac{\rho_\zeta}{\rho}A(z_1)B(z_2) + \\ +[\rho H_2'(\rho) + 3H_2(\rho)]\rho_\zeta A(z_1)B(z_2), \qquad (15)$$

$$D_{zz}(\mathbf{r_1},\mathbf{r_2}) = -\left[\frac{H_1'(\rho)}{\rho} + H_1''(\rho)\right]B(z_1)B(z_2) - \\ -[6H_2(\rho) + 6\rho H_2'(\rho) + \rho^2 H_2''(\rho)]B(z_1)B(z_2). \qquad (16)$$

Здесь $\rho_\zeta = r_{1\zeta} - r_{2\zeta}$ ($\zeta = x, y$), $A(z)$ и $B(z)$ — некоторые гладкие функции, такие что $dB/dz = A$ в силу условия несжимаемости, и $A(z) = z$, $B(z) = z^2/2$ при $z \ll L$. Помимо несжимаемости жидкости, приведенные выражения подразумевают однородность и изотропность корреляционных функций скорости жидкости в плоскостях, параллельных стенке. Дополнительное обсуждение тензора турбулентной диффузии содержится в Приложении А.

4. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Приняв модельное предположение о дельта-коррелированности поля скорости жидкости, возможно провести вывод кинетического уравнения для функции распределения $W(\mathbf{r},\mathbf{R};t)$, которое представляет собой уравнение Фоккера–Планка (см., например, [40]), соответствующее уравнениям стохастической динамики (1). Основной технической сложностью процедуры вывода является присутствие в уравнениях (1) сразу трех шумовых членов, а также статистическая неоднородность и неизотропность течения в вязком подслое.

Детали вычислений приведены в Приложении В. Результирующее уравнение имеет вид

$$\frac{\partial W(\mathbf{r},\mathbf{R};t)}{\partial t} = \left[-\frac{\partial}{\partial r_j}D^{(1)}_{r_j}(\mathbf{r}) - \frac{\partial}{\partial R_j}D^{(1)}_{R_j}(\mathbf{r}) + \right. \\ + \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j}D^{(2)}_{r_i r_j}(\mathbf{r}) + \frac{\partial^2}{\partial R_i \partial R_j}D^{(2)}_{R_i R_j}(\mathbf{r}) + \\ \left. + 2\frac{\partial^2}{\partial r_i \partial R_j}D^{(2)}_{r_i R_j}(\mathbf{r})\right] W(\mathbf{r},\mathbf{R};t). \qquad (17)$$

Пространственно-неоднородные коэффициенты дрейфа и диффузии $D^{(1)}_{r_j}(\mathbf{r})$, $D^{(1)}_{R_j}(\mathbf{r})$, $D^{(2)}_{r_i r_j}(\mathbf{r})$, $D^{(2)}_{R_i R_j}(\mathbf{r})$, $D^{(2)}_{r_i R_j}(\mathbf{r})$ даются формулами (43).

Проинтегрировав обе части уравнения (17) по всему набору координат, легко увидеть, что

$$\partial_t \int W(\mathbf{r},\mathbf{R};t) d^3r d^3R = 0,$$

т. е. нормировка функции распределения сохраняется в ходе ее эволюции во времени. Заметим также, что если проинтегрировать уравнение (17) по переменным R_x, R_y, R_z, то оно переходит в уравнение турбулентной диффузии–адвекции пассивного скаляра (см., например, [41]):

$$\partial_t \theta(\mathbf{r};t) = \nabla[D^{(2)}_{r_i r_j}(\mathbf{r})\nabla\theta(\mathbf{r};t)] - U_x(z)\nabla_{r_x}\theta(\mathbf{r};t), \quad (18)$$

где $\theta(\mathbf{r};t) = \int d^3R W(\mathbf{r},\mathbf{R};t)$ — функция плотности распределения координаты полимера, $D^{(2)}_{r_i r_j}(\mathbf{r})$ — коэффициенты турбулентной диффузии.

Приведем также уравнение для частично редуцированной функции плотности вероятности

$$w(z,\mathbf{R};t) = \int W(\mathbf{r},\mathbf{R};t) dr_x dr_y, \quad (19)$$

несущей информацию о распределении расстояния полимера до стенки и его растяжении. Проинтегрировав обе части уравнения (17) по r_x и r_y, получаем

$$\frac{\partial w(z,\mathbf{R};t)}{\partial t} = \Bigg[-\frac{\partial}{\partial r_z} D^{(1)}_{r_z}(\mathbf{r}) - \frac{\partial}{\partial R_j} D^{(1)}_{R_j}(\mathbf{r}) + \\ + \frac{\partial^2}{\partial r_z^2} D^{(2)}_{r_z r_z}(\mathbf{r}) + \frac{\partial^2}{\partial R_i \partial R_j} D^{(2)}_{R_i R_j}(\mathbf{r}) + \\ + 2\frac{\partial^2}{\partial r_z \partial R_j} D^{(2)}_{r_z R_j}(\mathbf{r})\Bigg] w(z,\mathbf{R};t). \quad (20)$$

Выписать замкнутое уравнение для редуцированной функции распределения $w(z,\mathbf{R};t)$ оказалось возможным благодаря независимости компонент тензора турбулентной диффузии и его производных от координат r_x, r_y в плоскости стенки.

5. КЛЮЧЕВЫЕ БЕЗРАЗМЕРНЫЕ ПАРАМЕТРЫ

Рассмотрим следующие из уравнения (17) соотношения для статистических моментов растяжения полимера в статистически-стационарном режиме. Умножив кинетическое уравнение на R_z^2 и проинтегрировав по компонентам вектора растяжения $\mathbf{R}$, а также по пространственным координатам r_x и r_y, с учетом (43) получим

$$(\mu z^4 + \kappa)\partial_z^2 \langle R_z^2\rangle - 4\mu z^3 \partial_z \langle R_z^2\rangle + 20\mu z^2 \langle R_z^2\rangle + \\ + \beta z^4 \langle R_\perp^2\rangle + \frac{2}{3}\gamma_0 R_0^2 - 2\langle \gamma(R) R_z^2\rangle = 0, \quad (21)$$

где

$$\langle R_z^2(z)\rangle = \theta_0^{-1} \int W(\mathbf{r},\mathbf{R};t) R_z^2 d^3R dr_x dr_y$$

— среднее значение квадрата z-компоненты вектора $\mathbf{R}$ на расстоянии z от стенки (θ_0 — плотность вероятности равномерного распределения координаты центра масс полимера в статистически-стационарном состоянии). Через $R_0^2 = 3\eta/\gamma_0$ мы обозначили средний квадрат расстояния между концами полимера в отсутствие гидродинамического растяжения, а $\gamma_0 = \gamma(0)$ — коэффициент упругости в пределе малых растяжений. Кроме того, нами были введены обозначения

$$\mu = -\frac{1}{2}H_{12} - \frac{3}{2}H_{20}, \quad \beta = \frac{2}{3}H_{14} + 10H_{22}. \quad (22)$$

Заметим, что по порядку величины

$$H_{10} \sim \mu L^2, \quad H_{20} \sim \mu, \quad \beta \sim \frac{\mu}{L^2}, \\ \mu \sim \frac{u_L}{L^3}, \quad \Sigma \sim \frac{U_L}{L}, \quad U_L \sim u_L. \quad (23)$$

Далее, умножим кинетическое уравнение (17) на $R_\perp^2 = R_x^2 + R_y^2$ и так же проинтегрируем по R_x, R_y, R_z, r_x и r_y, в результате чего получим

$$(\mu z^4 + \kappa)\partial_z^2 \langle R_\perp^2\rangle + 8\mu z^3 \partial_z \langle R_\perp^2\rangle + \\ + (26\mu + 8H_{20}) z^2 \langle R_\perp^2\rangle + 4H_{10}\langle R_z^2\rangle + \\ + 2\Sigma\langle R_x R_z\rangle + \frac{4}{3}\gamma_0 R_0^2 - 2\langle \gamma(R) R_\perp^2\rangle = 0. \quad (24)$$

Наконец, проинтегрируем уравнение (17) аналогичным образом, предварительно умножив его на $R_x R_z$:

$$(\mu z^4 + \kappa)\partial_z^2 \langle R_x R_z\rangle + 2\mu z^3 \partial_z \langle R_x R_z\rangle + \\ + 13\mu z^2 \langle R_x R_z\rangle + \Sigma\langle R_z^2\rangle - 2\langle \gamma(R) R_x R_z\rangle = 0. \quad (25)$$

В связи с зависимостью коэффициентов уравнений (21), (24) и (25) от z, статистика растяжения полимера неоднородна в пространстве. Сравнение различных слагаемых полученных уравнений показывает, что особенности статистики растяжения в ее взаимосвязи с турбулентным транспортом центра масс полимера контролируются главным образом четырьмя безразмерными параметрами: числами Вайсенберга $\mathrm{Wi}^m_\parallel$, $\mathrm{Wi}^f_\parallel$, $\mathrm{Wi}^f_\perp$ и параметром адиабатичности E, см. ниже.

Число Вайсенберга $\mathrm{Wi}_{\parallel}^{m}$ описывает соотношение скорости процесса гидродинамического растяжения полимера в среднем сдвиговом течении и темпа упругой релаксации в режиме относительно малых растяжений и определено как

$$\mathrm{Wi}_{\parallel}^{m} = \frac{\Sigma}{\gamma_0} \sim \frac{U_L}{L\gamma_0}. \tag{26}$$

Далее, числа Вайсенберга $\mathrm{Wi}_{\parallel}^{f}$ и $\mathrm{Wi}_{\perp}^{f}$ характеризуют соотношение между темпом упругой релаксации и скоростью процесса гидродинамического растяжения полимера за счет флуктуационной компоненты поля скорости в направлениях вдоль и поперек стенки соответственно. Эти параметры заданы как

$$\mathrm{Wi}_{\parallel}^{f} = \frac{H_{10}}{\gamma_0} \sim \frac{u_L}{L\gamma_0}, \quad \mathrm{Wi}_{\perp}^{f} = \frac{\mu z^2}{\gamma_0} \sim \frac{u_L z^2}{L^3\gamma_0}. \tag{27}$$

Как правило, U_L и u_L имеют один порядок величины, поэтому $\mathrm{Wi}_{\parallel}^{m} \sim \mathrm{Wi}_{\parallel}^{f} \gg \mathrm{Wi}_{\perp}^{f}$ внутри вязкого подслоя. При достаточно больших значениях чисел $\mathrm{Wi}_{\parallel}^{m}$, $\mathrm{Wi}_{\parallel}^{f}$ и $\mathrm{Wi}_{\perp}^{f}$ размер полимера по всем трем измерениям существенно превышает равновесное значение R_0, а сам полимер при этом сильно вытянут вдоль среднего течения. Напротив, малость приведенных параметров свидетельствует о том, что влияние течения на размер и ориентацию полимера является незначительным; расстояние между его концами при этом близко к невозмущенному значению R_0.

Степень адиабатичности E определена как отношение времени $z^2/(\mu z^4 + \kappa)$, требуемого полимеру, находящемуся на расстоянии z от стенки, чтобы «почувствовать» неоднородность флуктуаций градиента поля скорости, к времени упругой релаксации γ_0^{-1} в пределе малых растяжений, т. е.

$$E = \frac{\gamma_0 z^2}{\mu z^4 + \kappa}. \tag{28}$$

Высокая степень адиабатичности соответствует ситуации, когда статистика растяжения полимера на заданном расстоянии от стенки диктуется локальной интенсивностью турбулентных флуктуаций. Напротив, при малых значениях параметра адиабатичности статистика растяжения не успевает подстраиваться под пространственно-неоднородную интенсивность турбулентности.

6. СИЛЬНО РАСТЯНУТЫЙ ПОЛИМЕР В РЕЖИМЕ ЛОКАЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ

Уравнения (21), (24) и (25) не являются замкнутыми относительно $\langle R_z^2\rangle$, $\langle R_\perp^2\rangle$ и $\langle R_x R_z\rangle$. Добавление уравнений для статистических моментов $\langle\gamma(R)R_z^2\rangle$, $\langle\gamma(R)R_\perp^2\rangle$ и $\langle\gamma(R)R_x R_z\rangle$ не решает проблему замыкания, так как в эти уравнения помимо уже фигурирующих войдут и другие моменты. Связана данная сложность с неоднородностью коэффициентов кинетического уравнения (17).

Далее нас будет интересовать предел $\mathrm{Wi}_{\parallel}^{m}, \mathrm{Wi}_{\parallel}^{f}, \mathrm{Wi}_{\perp}^{f} \gg 1$, когда полимер сильно растянут вдоль направления регулярной компоненты течения, так что $\langle R_z^2\rangle \ll \langle R_x R_z\rangle \ll \langle R_x^2\rangle, \langle R_\perp^2\rangle$, причем $\langle R_x^2\rangle$ и $\langle R_\perp^2\rangle$ порядка квадрата длины полимера в полностью растянутом состоянии, для которой мы будем использовать обозначение $R_m \ll L$, и практически не зависят от координаты z. Дополнительно предположим выполненным условие $E \gg 1$, гарантирующее малость характерного времени, на котором происходит динамика растяжения полимера, в сравнении с характерным временем его трансляционного движения в нормальном по отношению к стенке направлении.

С учетом сказанного уравнения (21), (24) и (25) могут быть упрощены до следующего вида:

$$\beta z^4\langle R_\perp^2\rangle - 2\langle\gamma(R)R_z^2\rangle = 0, \tag{29}$$

$$2\Sigma\langle R_x R_z\rangle - 2\langle\gamma(R)R_\perp^2\rangle = 0, \tag{30}$$

$$\Sigma\langle R_z^2\rangle - 2\langle\gamma(R)R_x R_z\rangle = 0. \tag{31}$$

Существование области внутри вязкого подслоя, в пределах которой имеется возможность пренебречь выброшенными членами исходных уравнений, оправдывается сделанными предположениями и подтверждается результатами последующих вычислений. В частности, заметим, что уравнения (29)–(31) в отличие от (21)–(24) не содержат дифференцирования по координате z, поскольку в рассматриваемом пределе статистика растяжения полимера имеет локально-равновесный характер, подстраиваясь под локальную интенсивность флуктуаций градиента поля скорости.

Предположим степенной характер зависимости статистических моментов $\langle R_x^2\rangle$ и $\langle\gamma(R)\rangle$ от координаты z:

$$\langle R_z^2\rangle \propto z^a, \quad \langle\gamma(R)\rangle \propto z^b,$$

где a и b — некоторые числа. Тогда при условии нормального скейлинга

$$\begin{gathered}\langle R_x R_z\rangle \propto z^{a/2}, \quad \langle\gamma(R)R_z^2\rangle \propto z^{b+a}, \\ \langle\gamma(R)R_x R_z\rangle \propto z^{b+a/2}.\end{gathered} \tag{32}$$

Уравнения (30), (31) с учетом предполагаемой слабой зависимости $\langle R_\perp^2\rangle$ от z согласованно дают $a/2 = b$, причем из уравнения (29) следует, что

$a = 8/3$. Принимая во внимание (23), в итоге находим из (29)–(32) следующие параметрические зависимости:

$$\langle R_z^2 \rangle \sim \left(\frac{u_L}{U_L}\right)^{2/3} \frac{z^{8/3}}{L^{8/3}} R_m^2, \tag{33}$$

$$\langle R_x R_z \rangle \sim \left(\frac{u_L}{U_L}\right)^{1/3} \frac{z^{4/3}}{L^{4/3}} R_m^2, \tag{34}$$

$$\langle \gamma(R) \rangle \sim \frac{u_L^{1/3} U_L^{2/3} z^{4/3}}{L^{7/3}}, \tag{35}$$

$$\langle \gamma(R) R_z^2 \rangle \sim \frac{u_L z^4}{L^5} R_m^2, \tag{36}$$

$$\langle \gamma(R) R_x R_z \rangle \sim \frac{u_L^{2/3} U_L^{1/3} z^{8/3}}{L^{11/3}} R_m^2. \tag{37}$$

Одним из предположений, лежащих в основе вывода кинетического уравнения (17) и следующих из него результатов, была дельта-коррелированность поля скорости, подразумевающая, что время корреляции турбулентных флуктуаций много меньше масштабов времени, на которых протекает трансляционная и внутренняя динамика полимера. Как было пояснено в разд. 2, короткая коррелированность гидродинамических флуктуаций является заведомо оправданным приближением при описании переноса центра масс полимера в вязком подслое. Таким образом, остается потребовать выполнение условия $\tau_c \ll \langle \gamma \rangle^{-1}$. Как следует из уравнений (9) и (35), это эквивалентно условию $z \ll L$ и, таким образом, гарантированно справедливо, если выполнены предпосылки, лежащие в основе вывода уравнения (35). Словом, если числа Вайсенберга $\mathrm{Wi}_\parallel^m$, $\mathrm{Wi}_\parallel^f$, $\mathrm{Wi}_\perp^f$ и параметр адиабатичности E достаточно велики, то флуктуации поля скорости жидкости могут считаться коротко-коррелированными во времени при описании не только трансляционного движения полимера, но и динамики его растяжения.

7. ВЫВОДЫ

Получено кинетическое уравнение (17) для функции плотности вероятности $W(\mathbf{r}, \mathbf{R}; t)$ координаты $\mathbf{r}$ и вектора растяжения $\mathbf{R}$ конечнорастяжимого полимера с нелинейным коэффициентом упругости $\gamma(R)$ произвольного вида в вязком пристенном подслое турбулентного течения несжимаемой жидкости. Коэффициенты уравнения являются функциями компонент вектора растяжения, R_x, R_y и R_z, и расстояния до стенки z. Соответствующие выражения заданы формулами (43) в Приложении В. Ключевыми безразмерными параметрами, от значений которых зависят особенности статистики растяжения полимера в вязком подслое, являются числа Вайсенберга $\mathrm{Wi}_\parallel^m$, $\mathrm{Wi}_\parallel^f$, $\mathrm{Wi}_\perp^f$ и степень адиабатичности E (см. определения (26)–(28)). На основе кинетического уравнения получены оценки для некоторых связанных с вектором растяжения средних величин в локально-равновесном режиме при условии сильного растяжения (см. (33)–(37)). Вывод кинетического уравнения опирался на модельное предположение о малости времени корреляции турбулентных флуктуаций τ_c в сравнении с характерными масштабами времени процессов турбулентной диффузии и растяжения полимера, что оказывается справедливым в рассмотренном пределе больших значений указанных выше контрольных параметров.

Отметим, что полученный для $\langle \gamma(R) \rangle$ и $\langle R_x R_z \gamma(R) \rangle$ скейлинг совпадает с найденными в работе [35] другим методом результатами для аналогичных величин в случае пристенной области эластической турбулентности. Это согласие имеет место, несмотря на тот факт, что для эластической турбулентности поле скорости жидкости не может считаться всюду независимым от концентрации и растяжений полимерной примеси, поскольку сама возможность возникновения хаотического режима течения полимерного раствора в условиях низкого числа Рейнольдса связана с влиянием полимеров на переносящую и растягивающую их жидкость. Это замечание, однако, относится к достаточно далеким от стенок частям течения. На достаточно же малых расстояниях от границ, в силу подавленности флуктуаций скорости при приближении к стенкам, вызванные течением характерные гидродинамические растяжения полимеров оказываются относительно малыми в сравнении с имеющими место в основной части системы, а вследствие того малы (в сравнении с вязким вкладом в тензор напряжений) и соответствующие эластические напряжения, ответственные за обратное влияние полимерной примеси на движение жидкости. Данное обстоятельство кратко обсуждалось в разд. 1. В итоге, в пристенной области эластической турбулентности предположение о пассивности полимеров по отношению к течению оказывается оправданным, что вместе с фактом схожести структуры полей скорости в вязком подслое гидродинамической турбулентности и пристенной области эластической турбулентности (см. [42, 43]) и объясняет согласие формул (35) и (37) с аналогичными результатами, представленными в работе [35].

Финансирование. Работа была поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (проект FFWR-2024-0017).

ПРИЛОЖЕНИЕ А. ТЕНЗОР ТУРБУЛЕНТНОЙ ДИФФУЗИИ

Тензор турбулентной диффузии определен формулой (11) и для турбулентного течения несжимаемой жидкости в вязком подслое имеет вид, заданный выражениями (13)–(16). При $\rho \to 0$ имеем

$$D_{zz}(\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}) = -\left[2H_{12} + 6H_{20} + \left(\frac{2}{3}H_{14} + 10H_{22}\right)\rho^2 + O(\rho^4)\right] B(z_1)B(z_2),$$

$$D_{z\sigma}(\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}) = -\rho_\sigma \left[H_{12} + 3H_{20} + \left(\frac{1}{6}H_{14} + \frac{5}{2}H_{22}\right)\rho^2 + O(\rho^4)\right] B(z_1)A(z_2),$$

$$D_{\xi z}(\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}) = \rho_\xi \left[H_{12} + 3H_{20} + \left(\frac{1}{6}H_{14} + \frac{5}{2}H_{22}\right)\rho^2 + O(\rho^4)\right] A(z_1)B(z_2),$$

$$D_{\xi\sigma}(\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}) = \left[\delta_{\xi\sigma}H_{10} + \frac{1}{2}\delta_{\xi\sigma}H_{12}\rho^2 + H_{20}\rho_\xi\rho_\sigma + O(\rho^4)\right] A(z_1)A(z_2),$$

где H_{12} и H_{20} — коэффициенты разложения функций H_1 и H_2 по степеням ρ:

$$H_1(\rho) = H_{10} + \frac{H_{12}\rho^2}{2} + \frac{H_{14}\rho^4}{24} + O(\rho^6),$$

$$H_2(\rho) = H_{20} + \frac{H_{22}\rho^2}{2} + \frac{H_{24}\rho^4}{24} + O(\rho^6).$$

Члены с нечетными степенями отсутствуют в силу изотропии свойств течения в параллельных стенке плоскостях. При $\rho = 0$ двухточечные выражения переходят в коэффициенты турбулентной диффузии:

$$D_{xy}(\mathbf{r}) = D_{yx}(\mathbf{r}) = D_{xz}(\mathbf{r}) = D_{zx}(\mathbf{r}) = D_{yz}(\mathbf{r}) = D_{zy}(\mathbf{r}) = 0,$$

$$D_{xx}(\mathbf{r}) = D_{yy}(\mathbf{r}) = H_{10}A^2(z),$$

$$D_{zz}(\mathbf{r}) = -2(H_{12} + 3H_{20})B^2(z).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В. ВЫВОД КОЭФФИЦИЕНТОВ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ (20)

В принятой нами модели состояние полимера описывается вектором $\mathbf{X} = (r_x, r_y, r_z, R_x, R_y, R_z)$. С учетом предположения об относительной малости времени корреляций турбулентных флуктуаций из уравнений стохастической динамики (1) может быть получено уравнение Фоккера–Планка для эволюции во времени функции плотности распределения $W(\mathbf{X}; t)$ значений компонент вектора $\mathbf{X}$. Общая структура уравнения Фоккера–Планка для функции плотности распределения значений переменных, динамика которых подвержена воздействию стохастических факторов в форме гауссовых коротко-коррелированных шумов, описана, к примеру, в [40]. А именно, соответствующее уравнение имеет вид

$$\frac{\partial W(\mathbf{X}; t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial X_{j_1}}[D^{(1)}_{j_1}(\mathbf{X})W(\mathbf{X}; t)] + + \frac{\partial^2}{\partial X_{j_1}\partial X_{j_2}}[D^{(2)}_{j_1 j_2}(\mathbf{X})W(\mathbf{X}; t)], \tag{38}$$

где $D^{(1)}_{j_1}$ и $D^{(2)}_{j_1 j_2}$ — коэффициенты дрейфа и диффузии, которые в общем случае даются формулами

$$D^{(1)}_{j_1}(\mathbf{X}, t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{M^{(1)}_{j_1}(\mathbf{X}, t, \tau)}{\tau}, \tag{39}$$

$$D^{(2)}_{j_1 j_2}(\mathbf{X}, t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{M^{(2)}_{j_1 j_2}(\mathbf{X}, t, \tau)}{2\tau}, \tag{40}$$

и введено обозначение

$$M^{(\nu)}_{j_1\ldots j_\nu}(\mathbf{X},t,\tau) = \langle (X_{j_1}(t+\tau) - X_{j_1}(t))\ldots(X_{j_\nu}(t+\tau) - X_{j_\nu}(t))\rangle|_{\mathbf{X}(t)=\mathbf{X}}. \tag{41}$$

Усреднение в последней формуле проводится по статистике теплового шума и турбулентных флуктуаций. Под $\mathbf{X}(t)$ здесь подразумевается решение уравнений стохастической динамики в момент времени t при заданной реализации стохастических факторов.

Таким образом, задача вывода кинетического уравнения сводится к вычислению коэффициентов дрейфа и диффузии согласно формулам (39)–(41). Приняв $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}$ и $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}$, запишем

$$v_i(\mathbf{r}(t_1),t_1) = v_i(\mathbf{r},t_1) + \int\limits_t^{t_1} dt_2 v_j(\mathbf{r}(t_2),t_2)\nabla_j v_i(\mathbf{r},t_1) + o(t_1-t),$$

$$R_i(t_1) = R_i - (t_1-t)\gamma(R)R_i + \int\limits_t^{t_1} dt_2 R_j(t_2)\nabla_j v_i(\mathbf{r}(t_2),t_2) + o(t_1-t),$$

$$r_i(t_1) = r_i + \int\limits_t^{t_1} dt_2 v_i(\mathbf{r}(t_2),t_2) + o(t_1-t).$$

Тогда для линейных статистических моментов приращений компонент вектора $\mathbf{X}(t)$ за малый интервал времени τ получаем

$$M^{(1)}_{r_j}(\mathbf{r},t,\tau) = \langle r_j(t+\tau) - r_j(t)\rangle|_{\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}} = \int\limits_t^{t+\tau} dt_1 \langle v_j(\mathbf{r}(t_1),t_1)\rangle|_{\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}} =$$

$$= \int\limits_t^{t+\tau} dt_1 \langle v_j(\mathbf{r}(t),t_1)\rangle|_{\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}} + \nabla \int\limits_t^{t+\tau}\int\limits_t^{t_1} dt_1 dt_2 \langle \mathbf{v}(\mathbf{r}(t_2),t_2) v_j(\mathbf{r}(t),t_1)\rangle|_{\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}} =$$

$$= \Sigma z \tau \delta_{jx} + \nabla \int\limits_t^{t+\tau}\int\limits_t^{t_1} dt_1 dt_2 \langle \mathbf{v}(\mathbf{r},t_2) v_j(\mathbf{r},t_1)\rangle$$

(была использована несжимаемость жидкости),

$$M^{(1)}_{R_j}(\mathbf{X},t,\tau) = \langle R_j(t+\tau) - R_j(t)\rangle|_{\mathbf{X}(t)=\mathbf{X}} = -\tau\gamma(R)R_j + \int\limits_t^{t+\tau} dt_1 \langle \mathbf{R}(t_1)\nabla v_j(\mathbf{r}(t_1),t_1)\rangle|_{\mathbf{X}(t)=\mathbf{X}} =$$

$$= -\tau\gamma(R)R_j + \mathbf{R}\nabla \int\limits_t^{t+\tau} dt_1 \langle v_j(\mathbf{r}(t_1),t_1)\rangle|_{\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}} + R_k \int\limits_t^{t+\tau}\int\limits_t^{t_1} dt_1 dt_2 \langle [\nabla_k v_i(\mathbf{r},t_2)][\nabla_i v_j(\mathbf{r},t_1)]\rangle =$$

$$= -\tau\gamma(R)R_j + \delta_{jx} R_z \Sigma\tau + \tau R_k \nabla_k \nabla \int\limits_t^{t+\tau}\int\limits_t^{t_1} dt_1 dt_2 \langle \mathbf{v}(\mathbf{r},t_2) v_j(\mathbf{r},t_1)\rangle +$$

$$R_k \nabla_i \int\limits_t^{t+\tau}\int\limits_t^{t_1} dt_1 dt_2 \langle [\nabla_k v_i(\mathbf{r},t_2)] v_j(\mathbf{r},t_1)\rangle.$$

Далее выразим статистические моменты второго порядка компонент вектора $\mathbf{X}(t)$ за малый интервал времени τ:

$$M^{(2)}_{r_ir_j}(\mathbf{r},t,\tau) = \langle (r_i(t+\tau)-r_i(t))(r_j(t+\tau)-r_j(t))\rangle|_{\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}} =$$
$$= \int\limits_t^{t+\tau}\int\limits_t^{t+\tau} dt_1dt_2\langle v_i(\mathbf{r}(t_1),t_1)v_j(\mathbf{r}(t_2),t_2)\rangle|_{\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}} + \int\limits_t^{t+\tau}\int\limits_t^{t+\tau} dt_1dt_2\langle \eta_i(t_1)\eta_j(t_2)\rangle|_{\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}} =$$
$$= \int\limits_t^{t+\tau}\int\limits_t^{t+\tau} dt_1dt_2\langle v_i(\mathbf{r},t_1)v_j(\mathbf{r},t_2)\rangle + 2\kappa\delta_{ij}\tau,$$

$$M^{(2)}_{r_iR_j}(\mathbf{X},t,\tau) = \langle (r_i(t+\tau)-r_i(t))(R_j(t+\tau)-R_j(t))\rangle|_{\mathbf{X}(t)=\mathbf{X}} = R_k\int\limits_t^{t+\tau}\int\limits_t^{t+\tau} dt_1dt_2\langle v_i(\mathbf{r},t_1)\nabla_k v_j(\mathbf{r},t_2)\rangle,$$

$$M^{(2)}_{R_iR_j}(\mathbf{X},t,\tau) = \langle (R_i(t+\tau)-R_i(t))(R_j(t+\tau)-R_j(t))\rangle|_{\mathbf{X}(t)=\mathbf{X}} =$$
$$= R_kR_l\int\limits_t^{t+\tau}\int\limits_t^{t+\tau} dt_1dt_2\langle [\nabla_k v_i(\mathbf{r},t_1)][\nabla_l v_j(\mathbf{r},t_2)]\rangle + 2\lambda\delta_{ij}.$$

С учетом определений (11)–(41) коэффициенты дрейфа и диффузии выражаются как

$$\begin{aligned}
&D^{(1)}_{r_j} = \Sigma z\delta_{jx} + \nabla_i D_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}),\\
&D^{(1)}_{R_j} = -\gamma(R)R_j + \delta_{jx}R_z\Sigma + R_k\nabla_k\nabla_i D_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}) + R_k\left[\nabla_{1k}\nabla_{2i}D_{ij}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\right]_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}},\\
&D^{(2)}_{r_ir_j} =_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}) + \kappa\delta_{ij},\\
&D^{(2)}_{R_iR_j} = \lambda\delta_{ij} + R_kR_l\left[\nabla_{1k}\nabla_{2l}D_{ij}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\right]_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}},\\
&D^{(2)}_{r_iR_j} = R_k\left[\nabla_{2k}D_{ij}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2))\right]_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}}.
\end{aligned} \tag{42}$$

Как следует из уравнений (13)–(16), ненулевые производные компонент тензора турбулентной диффузии имеют вид

$$\begin{aligned}
&\nabla_{2z}D_{xx}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = \nabla_{1z}D_{xx}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = H_{10}A(z),\\
&\nabla_{2z}D_{yy}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = \nabla_{1z}D_{yy}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = H_{10}A(z),\\
&\nabla_{2y}D_{yz}(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = \nabla_{2y}D_{zy}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = (H_{12}+3H_{20})A(z)B(z),\\
&\nabla_{2x}D_{xz}(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = \nabla_{2x}D_{zx}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = (H_{12}+3H_{20})A(z)B(z),\\
&\nabla_{2y}D_{yz}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = \nabla_{2y}D_{zy}(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = -(H_{12}+3H_{20})A(z)B(z),\\
&\nabla_{2x}D_{xz}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = \nabla_{2x}D_{zx}(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = -(H_{12}+3H_{20})A(z)B(z),\\
&\nabla_{2z}D_{zz}(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = \nabla_{2z}D_{zz}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = -2(H_{12}+3H_{20})A(z)B(z),\\
&\nabla_{1x}\nabla_{2x}D_{xx}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = \nabla_{1x}\nabla_{2x}D_{xx}(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = -(H_{12}+2H_{20})A^2(z),\\
&\nabla_{1y}\nabla_{2y}D_{xx}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = \nabla_{1y}\nabla_{2y}D_{xx}(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = -H_{12}A^2(z),\\
&\nabla_{1x}\nabla_{2x}D_{yy}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = \nabla_{1x}\nabla_{2x}D_{yy}(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = -H_{12}A^2(z),\\
&\nabla_{1y}\nabla_{2y}D_{yy}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = \nabla_{1y}\nabla_{2y}D_{yy}(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = -(H_{12}+2H_{20})A^2(z),\\
&\nabla_{1z}\nabla_{2z}D_{xx}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = \nabla_{1z}\nabla_{2z}D_{xx}(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = H_{10},\\
&\nabla_{1z}\nabla_{2z}D_{yy}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = \nabla_{1z}\nabla_{2z}D_{yy}(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = H_{10},\\
&\nabla_{1z}\nabla_{2y}D_{zy}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = \nabla_{1z}\nabla_{2y}D_{yz}(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = (H_{12}+3H_{20})A^2(z),\\
&\nabla_{1y}\nabla_{2z}D_{zy}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = \nabla_{1y}\nabla_{2z}D_{yz}(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = -(H_{12}+3H_{20})B(z)\frac{dA(z)}{dz},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\nabla_{1z}\nabla_{2x}D_{zx}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = \nabla_{1z}\nabla_{2x}D_{xz}(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = (H_{12}+3H_{20})A^2(z),\\
&\nabla_{1x}\nabla_{2z}D_{zx}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = \nabla_{1x}\nabla_{2z}D_{xz}(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = -(H_{12}+3H_{20})B(z)\frac{dA(z)}{dz},\\
&\nabla_{1z}\nabla_{2y}D_{yz}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = \nabla_{1z}\nabla_{2y}D_{zy}(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = -(H_{12}+3H_{20})B(z)\frac{dA(z)}{dz},\\
&\nabla_{1y}\nabla_{2z}D_{yz}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = \nabla_{1y}\nabla_{2z}D_{zy}(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = (H_{12}+3H_{20})A^2(z),\\
&\nabla_{1z}\nabla_{2x}D_{xz}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = \nabla_{1z}\nabla_{2x}D_{zx}(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = -(H_{12}+3H_{20})B(z)\frac{dA(z)}{dz},\\
&\nabla_{1x}\nabla_{2z}D_{xz}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = \nabla_{1x}\nabla_{2z}D_{zx}(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = (H_{12}+3H_{20})A^2(z),\\
&\nabla_{1x}\nabla_{2x}D_{zz}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = \nabla_{1x}\nabla_{2x}D_{zz}(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = 2(\frac{2}{3}H_{14}+10H_{22})B^2(z),\\
&\nabla_{1y}\nabla_{2y}D_{zz}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = \nabla_{1y}\nabla_{2y}D_{zz}(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = 2(\frac{2}{3}H_{14}+10H_{22})B^2(z),\\
&\nabla_{1z}\nabla_{2z}D_{zz}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = \nabla_{1z}\nabla_{2z}D_{zz}(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = -2(H_{12}+3H_{20})A^2(z),\\
&\nabla_{1x}\nabla_{2y}D_{xy}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = \nabla_{1x}\nabla_{2y}D_{yx}(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = -H_{20}A^2(z),\\
&\nabla_{1y}\nabla_{2x}D_{xy}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = \nabla_{1y}\nabla_{2x}D_{yx}(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = -H_{20}A^2(z),\\
&\nabla_{1x}\nabla_{2y}D_{yx}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = \nabla_{1x}\nabla_{2y}D_{xy}(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = -H_{20}A^2(z),\\
&\nabla_{1y}\nabla_{2x}D_{yx}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = \nabla_{1y}\nabla_{2x}D_{xy}(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1)|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = -H_{20}A^2(z).
\end{aligned}
$$

Подстановка этих результатов в уравнения (42) приводит к окончательным формулам для коэффициентов кинетического уравнения (38):

$$
\begin{aligned}
&D^{(1)}_{r_z} = -4(H_{12}+3H_{20})A(z)B(z), \quad D^{(1)}_{r_x} = \Sigma z, \quad D^{(1)}_{r_y} = 0,\\
&D^{(2)}_{r_zr_z} = -2(H_{12}+3H_{20})B^2(z)+\kappa, \quad D^{(2)}_{r_xr_x} = H_{10}A^2(z)+\kappa, \quad D^{(2)}_{r_yr_y} = H_{10}A^2(z)+\kappa,\\
&D^{(1)}_{R_x} = -\gamma(R)R_x - R_z\Sigma - (H_{12}+3H_{20})R_x\frac{d(A(z)B(z))}{dz},\\
&D^{(1)}_{R_y} = -\gamma(R)R_y - (H_{12}+3H_{20})R_y\frac{d(A(z)B(z))}{dz}, \quad D^{(1)}_{R_z} = -\gamma(R)R_z - 6(H_{12}+3H_{20})R_z\frac{d(A(z)B(z))}{dz},\\
&D^{(2)}_{R_xR_y} = D^{(2)}_{R_yR_x} = -2H_{20}R_xR_yA^2(z),\\
&D^{(2)}_{R_xR_x} = \lambda - (H_{12}+2H_{20})R_x^2A^2(z) - H_{12}R_y^2A^2(z) + H_{10}R_z^2\left(\frac{dA(z)}{dz}\right)^2,\\
&D^{(2)}_{R_yR_y} = \lambda - (H_{12}+2H_{20})R_y^2A^2(z) - H_{12}R_x^2A^2(z) + H_{10}R_z^2\left(\frac{dA(z)}{dz}\right)^2,\\
&D^{(2)}_{R_zR_z} = \lambda + 2(\frac{2}{3}H_{14}+10H_{22})(R_x^2+R_y^2)B^2(z) - 2(H_{12}+3H_{20})R_z^2A^2(z),\\
&D^{(2)}_{R_xR_z} = D^{(2)}_{R_zR_x} = (H_{12}+3H_{20})R_xR_z\left(A^2(z) - \frac{dA(z)}{dz}B(z)\right),\\
&D^{(2)}_{R_yR_z} = D^{(2)}_{R_zR_y} = (H_{12}+3H_{20})R_yR_z\left(A^2(z) - \frac{dA(z)}{dz}B(z)\right),\\
&D^{(2)}_{r_zR_z} = -2R_z(H_{12}+3H_{20})A(z)B(z), \quad D^{(2)}_{r_zR_x} = R_x(H_{12}+3H_{20})A(z)B(z),\\
&D^{(2)}_{r_zR_y} = R_y(H_{12}+3H_{20})A(z)B(z), \; D^{(2)}_{r_xR_z} = -\frac{1}{2}(H_{12}+3H_{20})A(z)^3R_x, \; D^{(2)}_{r_yR_z} = -\frac{1}{2}(H_{12}+3H_{20})A(z)^3R_y,\\
&D^{(2)}_{r_xR_x} = H_{10}A(z)R_x, \quad D^{(2)}_{r_yR_y} = H_{10}A(z)R_y, \quad D^{(2)}_{r_xR_y} = D^{(2)}_{r_yR_x} = 0.
\end{aligned}
\tag{43}
$$

Напомним, что $A(z)$ и $B(z)$ — некоторые гладкие функции, такие что $dB/dz = A$ в силу условия несжимаемости, причем $A(z) = z$, $B(z) = z^2/2$ при $z \ll L$.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. B. Bird, R. C. Armstrong, O. Hassager, *Fluid Mechanics*, Vol. 1, *Dynamics of Polymeric Liquids*, Wiley-Interscience (1987).

2. Y. Jun and V. Steinberg, Phys. Fluids **22**, 123101 (2010).

3. A. Groisman and V. Steinberg, Nature **405**, 53 (2000).

4. A. Groisman and V. Steinberg, Nature **410**, 905 (2001).

5. A. Groisman and V. Steinberg, New J. Phys. **6**, 29 (2004).

6. L. Pan, A. Morozov, C. Wagner, and P. E. Arratia, Phys. Rev. Lett. **110**, 174502 (2013).

7. T. Burghelea, E. Segre, and V. Steinberg, Phys. Rev. Lett. **96**, 214502 (2006).

8. T. Burghelea, E. Segre, and V. Steinberg, Phys. Fluids **19**, 053104 (2007).

9. E. Balkovsky, A. Fouxon, and V. Lebedev, Phys. Rev. Lett. **84**, 4765 (2000).

10. E. Balkovsky, A. Fouxon, and V. Lebedev, Phys. Rev. E **64**, 056301 (2001).

11. A. Fouxon and V. Lebedev, Phys. Fluids **15**, 2060 (2003).

12. S. Berti, A. Bistagnino, G. Boffetta, A. Celani, and S. Musacchio, Phys. Rev. E **77**, 055306(R) (2008).

13. S. Berti and G. Boffetta, Phys. Rev. E **82**, 036314 (2010).

14. Y. Jun and V. Steinberg, Phys. Rev. E **84**, 056325 (2011).

15. Y. Jun and V. Steinberg, Phys. Rev. Fluids **2**, 103301 (2017).

16. V. Steinberg, Annu. Rev. Fluid Mech. **53**, 27 (2021).

17. R. K. Singh, P. Perlekar, D. Mitra, and M. E. Rosti, Nat. Commun. **15**, 4070 (2024).

18. M. Khalid, V. Shankar, and G. Subramanian, Phys. Rev. Lett. **127**, 134502 (2021).

19. R. van Buel and H. Stark, Sci. Rep. **10**, 15704 (2020).

20. G. Yao, J. Zhao, H. Yang, M. A. Haruna, and D. Wen, Phys. Fluids **31**, 123106 (2019).

21. S. S. Datta, A. M. Ardekani, P. E. Arratia et al., Phys. Rev. Fluids **7**, 080701 (2022).

22. M. Lellep, M. Linkmann, and A. Morozov, Proc. Nat. Acad. Sci. **121**(9), e2318851121 (2024).

23. V. V. Denisenko, S. V. Fortova, V. V. Lebedev, and I. V. Kolokolov, Comput. Math. Math. Phys. **64**, 2141 (2024) [В. В. Денисенко, С. В. Фортова, В. В. Лебедев, И. В. Колоколов, Ж. вычислит. матем. и матем. физ. **64**, 1771 (2024)].

24. M. Chertkov, Phys. Rev. Lett. **84**, 4761 (2000).

25. M. Chertkov, I. Kolokolov, V. Lebedev, and K. Turitsyn, J. Fluid. Mech. **531**, 251 (2005).

26. M. M. Afonso and D. Vincenzi, J. Fluid Mech. **540**, 99 (2005).

27. J. R. Picardo, L. C. Emmanuel, and D. Vincenzi, J. Fluid Mech. **969**, A24 (2023).

28. A. Celani, S. Musacchio, and D. Vincenzi, J. Stat. Phys. **118**, 531 (2005).

29. A. Celani, A. Puliafito, and K. Turitsyn, Europhys. Lett. **70**, 464 (2005).

30. S. Gerashchenko, C. Chevallard, and V. Steinberg, Europhys. Lett. **71**, 221 (2005).

31. K. S. Turitsyn, JETP **105**, 655 (2007).

32. D. Vincenzi, S. Jin, E. Bodenschatz, and L. R. Collins, Phys. Rev. Lett. **98**, 024503 (2007).

33. D. Vincenzi, P. Perlekar, L. Biferale, and F. Toschi, Phys. Rev. E **92**, 053004 (2015).

34. A. Ahmad and D. Vincenzi, Phys. Rev. E **93**, 052605 (2016).

35. S. Belan, A. Chernykh, and V. Lebedev, J. Fluid Mech. **855**, 910 (2018).

36. L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Vol. 6, Elsevier (1987).

37. J. Piquet, *Turbulent Flows: Models and Physics*, Springer (2013).

38. A. Y. Grosberg, A. Khokhlov, *Statistical Physics of Macromolecules*, AIP Press, Woodbury, NY (1994).

39. V. V. Lebedev and K. S. Turitsyn, Phys. Rev. E **69**, 036301 (2004).

40. H. Risken, *Fokker–Planck Equation*, Springer, Berlin (1984).

41. A. Chernykh and V. Lebedev, JETP **113**, 352 (2011).

42. E. Burghelea, E. Segre, and V. Steinberg, Phys. Rev. Lett. **96**, 214502 (2006).

43. T. Burghelea, E. Segre, and V. Steinberg, Phys. Fluids **19**, 053104 (2007).

Kinetic Equation for a Polymer With Nonlinear Elasticity in a Viscous Near-Wall Sublayer of Turbulence

S. A. Belan

Landau Institute for Theoretical Physics, Russian Academy of Sciences
142432, Chernogolovka, Moscow region, Russia

National Research University Higher School of Economics, Faculty of Physics
101000, Moscow, Russia

Abstract

This paper presents derivation of a kinetic equation for the probability density function of the center-of-mass coordinate and the orientation vector of a finite-extensible polymer with nonlinear elasticity in a viscous near-wall sublayer of turbulent flow of incompressible fluid with shortly correlated in time fluctuations. Key dimensionless parameters determining various regimes of polymer behavior within the chosen model are described, and analytical expressions are presented for some statistical moments of the polymer stretching vector components and of the elasticity coefficient in the local equilibrium approximation under strong stretching conditions. It is shown that the model assumption of relatively short correlation time of velocity field fluctuations in the viscous sublayer is self-consistent in the limit considered in analysis.

Keywords: finite-extensible nonlinear elastic polymer model, viscous sublayer of turbulence, Fokker – Planck equation, Weisenberg number

Funding. The work was supported by Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project FFWR-2024-0017).

Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.

Author's contributions. The contribution of the authors is equivalent.