ЖЭТФ/JETP, 2026, том 169, вып. 2, стр. 147–165 © 2026

О ЧАСТОТНО-МОДОВОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ УЛЬТРАКОРОТКИХ ГИГАВАТТНЫХ СВЧ-ИМПУЛЬСОВ ПРИ ЦИКЛОТРОННОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СО ВСТРЕЧНЫМ РЕЛЯТИВИСТСКИМ ЭЛЕКТРОННЫМ ПУЧКОМ

И. В. Пегель**, *Е. М. Тотьменинов*, *В. Ю. Конев*, *О. О. Мутылин

Институт сильноточной электроники Сибирского отделения Российской академии наук
634055, Томск, Россия

Поступила в редакцию 17 октября 2025 г.,
после переработки 2 декабря 2025 г.
Принята к публикации 2 декабря 2025 г.

Представлено полностью электромагнитное PiC-моделирование, демонстрирующее трансформацию гигаваттных СВЧ-импульсов длительностью 1 нс трехсантиметрового диапазона длин волн, взаимодействующих со встречным электронным пучком в условиях циклотронного резонанса, из низших осесимметричных мод круглого волновода в высшие осесимметричные моды с умножением частоты колебаний вплоть до пятикратного. Пиковая мощность трансформированных импульсов сопоставима с пиковой мощностью исходного импульса. Оценено влияние фазового синхронизма и электронно-волновой связи на конкуренцию вторичных волн. В численной модели на основе PiC-метода и уравнений возбуждения волноводных мод отслежена динамика импульсов первичной и вторичной волн в режиме с удвоением частоты. Определено влияние объемного заряда электронного пучка. Частотно-модовая трансформация объяснена конкуренцией диссипативного солитона вторичной волны с солитоном самоиндуцированной прозрачности первичной волны.

Ключевые слова: релятивистский электронный пучок, ультракороткий СВЧ-импульс, циклотронный резонанс, умножение частоты, конкуренция мод, солитон, объемный заряд, численное моделирование

DOI: 10.7868/S3034641X26020022

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] мы сообщали о наблюдавшемся в численном эксперименте частотно-модовом преобразовании ультракороткого гигаваттного СВЧ-импульса при взаимодействии со встречным трубчатым релятивистским электронным пучком в условиях циклотронного резонанса. Было получено удвоение частоты колебаний при переизлучении импульса низшей осесимметричной моды электрического типа TM_{01} трехсантиметрового диапазона длин волн длительностью 1 нс в моду TM_{02}, имеющую резонанс на второй гармонике гирочастоты. Для исходных СВЧ-импульсов большей длительности с субнаносекундным фронтом была показана возможность формирования интенсивного ультракороткого фронтального всплеска колебаний с удвоенной частотой.

Прежде чем переходить к практическим разработкам конвертеров мощных СВЧ-импульсов на основе этого эффекта, целесообразно оценить возможные пределы преобразования частоты. В настоящей работе мы демонстрируем (как и в [1], в осесимметричном полностью электромагнитном численном эксперименте) частотно-модовое преобразование СВЧ-импульсов на циклотронных гармониках выше второй: с трех-, четырех- и пятикратным увеличением частоты. Заметим, что генерация излучения на высоких циклотронных гармониках успешно применяется в гиротронах [2–4], при этом обычно используется работа на модах с большими азимутальными индексами.

* E-mail: igorpegel@gmail.com

Далее мы затрагиваем вопрос о конкуренции мод при частотно-модовой трансформации, исходя из факторов фазового синхронизма и связи полей волн различных мод с током циклотронного осциллятора на различных гармониках.

Для построения физической модели частотно-модовой трансформации желательно знать взаимодействие электронного пучка отдельно с каждой из волновых мод, а также с полем объемного заряда пучка. Поскольку в полностью электромагнитном численном эксперименте такое разделение сложно осуществить, был разработан специализированный вычислительный код, в котором электронный пучок описывается PiC-методом, поля волноводных мод (которых может быть несколько) — уравнениями возбуждения, а кулоновское поле объемного заряда находится из решения уравнения Пуассона. Здесь мы представляем первые результаты моделирования с помощью этого кода (пока лишь для режима удвоения частоты в двух- и трехволновой постановках). Эти результаты, подкрепленные аналогией из квантовой электроники, позволяют дать характеристику процессу, результатом которого является частотно-модовая трансформация.

2. ЧАСТОТНО-МОДОВАЯ ТРАНСФОРМАЦИЯ С ТРЕХ-, ЧЕТЫРЕХ-, ПЯТИКРАТНЫМ УМНОЖЕНИЕМ ЧАСТОТЫ: ОСЕСИММЕТРИЧНЫЙ ПОЛНОСТЬЮ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЙ ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Постановка вычислительного эксперимента такая же, как в работе [1]. В гладкий круглый волновод подается трубчатый электронный пучок с нулевой начальной поперечной скоростью частиц, а навстречу ему запускается ультракороткий СВЧ-импульс. Если эффективное удвоение частоты было получено для исходного импульса волны электрического типа TM_{01}, то умножение частоты в 3, 4 и 5 раз удалось обнаружить для исходной волны магнитного типа TE_{01}.

Кинетическая энергия электронов при инжекции, как и в [1], задавалась равной 290 кэВ. Длительность фронта импульса тока составляла 0.5–1 нс. Величины тока, при которых достигалась наилучшая трансформация, в разных случаях составляли от 400 до 800 А и указаны ниже. Величина транспортирующего магнитного поля соответствовала циклотронному резонансу невозмущенного пучка на первой циклотронной гармонике электронов со встречной волной TE_{01}. Частота колебаний в исходном СВЧ-импульсе составляла в разных случаях от 13 до 15.4 ГГц. Импульс брался колоколообразной формы и имел пиковую мощность (усредненную по периоду колебания) от 0.7 до 1.2 ГВт при длительности на половинном уровне мощности 1–1.5 нс.

Для поглощения электромагнитной волны на левом крае волновода размещался резистивный поглотитель, через кольцевую щель в котором инжектировался электронный пучок. Регистрировался поток мощности электромагнитного поля в различных поперечных сечениях волновода, в том числе перед поглотителем.

Расчеты выполнялись в осесимметричной версии электромагнитного PiC-кода KARAT [5]. Длина волновода в различных расчетах составляла 100–200 см. Использовались пространственные сетки с числами разбиений по радиусу $N_r = 70$–250 и по продольной координате $N_z = 2000$–6000, тем большими, чем больше был коэффициент преобразования частоты.

Результаты расчетов, в которых было получено трех-, четырех-, пятикратное умножение частоты с наибольшими эффективностями K_p (отношение пиковой мощности частотно-трансформированного импульса к пиковой мощности исходного импульса), представлены на рис. 1*c*–*h*. Здесь же (рис. 1*a*,*b*) воспроизведен случай удвоения частоты, подобный исследованному в [1]. Во всех случаях мы не прибегали к обрыванию тока электронного пучка (в работе [1] такой прием использовался, чтобы пространственно разделить импульсы мод TM_{01} и TM_{02} при их пробеге по пустой части волновода за счет разницы в групповых скоростях).

Удвоение частоты было получено при преобразовании волны электрического типа TM_{01} с пиковой мощностью 1.0 ГВт в волну электрического типа TM_{02}. Была достигнута эффективность $K_p = 0.25$ при величине транспортирующего магнитного поля $H_0 = 10.7$ кЭ и токе пучка $I = 550$ А.

Утроение частоты колебаний (13 → 39 ГГц) наблюдалось при трансформации волны магнитного типа TE_{01} (1.2 ГВт) в волну электрического типа TM_{04} при $H_0 = 10$ кЭ и $I = 450$ А, при этом эффективность составляла величину $K_p = 0.85$.

Четырехкратное умножение частоты (14.2 → 56.8 ГГц) с эффективностью $K_p = 0.9$ наблюдалось при трансформации волны магнитного типа TE_{01} (≈ 0.9 ГВт) в волну магнитного типа TE_{05} при $H_0 = 11.1$ кЭ, $I = 650$ А.

Умножение частоты в пять раз (15.4 → 77 ГГц) с эффективностью $K_p \approx 0.4$ было получено при

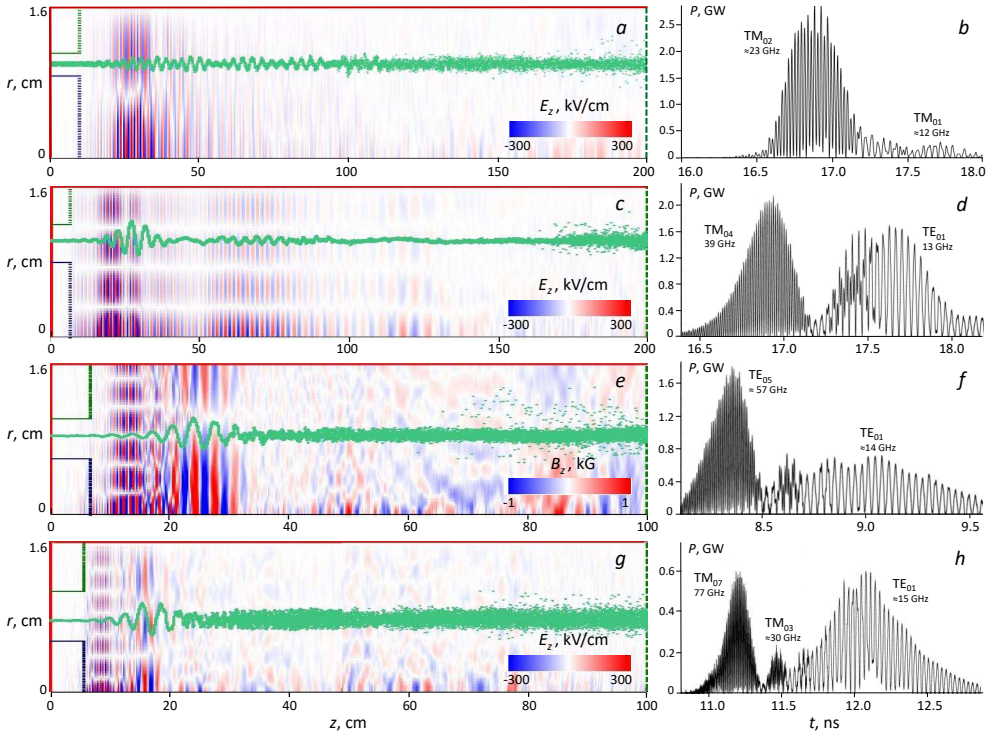

Рис. 1. Слева — электронный пучок и волновое поле (компонента E_z в случае трансформации в волну типа ТМ и B_z при трансформации в волну типа ТЕ), справа — поток мощности электромагнитного поля (без усреднения по периоду колебания) перед волновым поглотителем в зависимости от времени. Изображены случаи двукратного (*a*, *b*), трехкратного (*c*, *d*), четырехкратного (*e*, *f*) и пятикратного (*g*, *h*) преобразований частоты

преобразовании волны магнитного типа TE_{01} (≈ 0.7 ГВт) в волну электрического типа TM_{07} при $H_0 = 12.4$ кЭ, $I = 740$ А.

Во всех случаях можно видеть, что вторичный импульс с умноженной частотой обгоняет оставшуюся часть порождающего импульса.

Расчеты показывают, что область параметров (транспортирующее магнитное поле, ток пучка, его радиус), в которой наблюдается частотно-модовая трансформация, тем уже, чем больше коэффициент преобразования частоты. Если в случае удвоения частоты удается добиться того, что остающаяся после трансформации часть порождающего импульса мала, то при умножении частоты в три и пять раз столь эффективное затухание колебаний на исходной частоте не достигается (несколько лучше картина при четырехкратном умножении частоты). Кроме того, имеет место возбуждение небольших по амплитуде вторичных импульсов на других конкурирующих модах и частотах, распространяющихся как в положительном, так и в отрицательном направлениях. Например, в режиме пятикратного умножения частоты возникает импульс моды TM_{03} на частоте около 30 ГГц (рис. 1*h*).

Отметим важное для дальнейшего изложения обстоятельство. Частотно-модовая трансформация на второй и четвертой циклотронных гармониках наиболее эффективна, когда радиус невозмущенного электронного пучка расположен вблизи нуля поперечного электрического поля вторичной волновой моды. Для трансформации в третью и пятую гармоники требуется некоторое смещение.

3. О ТРЕХМЕРНЫХ ПОЛНОСТЬЮ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ РАСЧЕТАХ

Чтобы оценить, в какой мере эффективность частотно-модовой трансформации сохраняется при переходе к трехмерному случаю, результаты осесимметричного моделирования (за исключением случая пятикратного умножения частоты), проверялись с использованием декартовой (xyz) версии кода KARAT и кода Microwave CST Studio. Эти расчеты проводились на более грубых пространственных сетках, чем осесимметричные. Так, в декартовой версии кода KARAT использовались сетки с числом разбиений в пределах $100 \times 100 \times 1000$ при длине

волновода до одного метра. Число макрочастиц не превышало одного миллиона.

Коэффициент эффективности трансформации, получаемый в трехмерных расчетах, меньше, чем в осесимметричном случае: для режима с удвоением частоты — примерно на 30%, для третьей и четвертой гармоник — уже вдвое. Азимутально-несимметричные моды, хотя и возбуждались, по амплитуде не преобладали над симметричными. Диокотронная неустойчивость в электронном пучке при токе вблизи 0.5 кА и длине волновода до одного метра не достигала уровня филаментации.

Серийные трехмерные расчеты не проводились — не только из-за требовательности к вычислительным ресурсам (с ростом коэффициента преобразования частоты необходимо было уменьшать шаг пространственной сетки), но и по причине того, что надежного ответа на вопрос, насколько интенсивно в реальных условиях будет происходить возбуждение несимметричных волн, от таких расчетов едва ли следует ожидать. Действительно, в идеальном случае, если электродинамическая система и запускаемая в нее исходная волна осесимметричны, развитие азимутальной неустойчивости произойдет, только если имеется соответствующая «затравка» и важно, насколько она велика.

В расчете азимутальная неоднородность вносится конечностью числа макрочастиц и особенностями их позиционирования при старте, а также возникает вследствие аппроксимации границ расчетной области дискретной пространственной сеткой. В эксперименте же при использовании взрывоэмиссионного катода для генерации сильноточного электронного пучка имеется возмущающий фактор в виде неоднородности и нестационарности плотности тока, обусловленной неоднородностью катодной плазмы, прерывистым (эктонным) характером взрывной эмиссии [6], а также колебаниями объемного заряда в скрещенных полях в прикатодной области коаксиального диода с магнитной изоляцией [7].

Трудно соотнести априори весомость этих факторов, имеющих разное происхождение. Поэтому в рассматриваемой задаче не следует возлагать избыточных надежд на трехмерное численное моделирование как альтернативу эксперименту.

4. КОНКУРЕНЦИЯ ВТОРИЧНЫХ МОД: УСЛОВИЕ СИНХРОНИЗМА

Обсудим физические факторы, диктующие возбуждение той или иной вторичной волновой моды в результате трансформации. Предварительно напомним более подробно картину электронно-волнового взаимодействия при трансформации СВЧ-импульса с удвоением частоты при преобразовании мод $TM_{01} \to TM_{02}$ [1].

На фронте набегающего встречного СВЧ-импульса в электронном пучке происходит раскачка циклотронных колебаний электронов, кинетическая энергия которых в результате возрастает почти трехкратно; при этом в продольном направлении частицы испытывают глубокое торможение. Фронт СВЧ-импульса поглощается, происходит компрессия импульса. Дальнейшее развитие процесса может быть разным в зависимости от параметров системы: радиуса и тока пучка, магнитного поля.

Если эти параметры находятся вне зоны частотно-модовой трансформации, то затем в результате обратных процессов (переход кинетической энергии осциллирующих электронов в энергию электромагнитной волны, восстановление продольной скорости частиц) формируется солитон самоиндуцированной прозрачности с исходной модой и частотой колебаний. В пределах этого солитона, распространяющегося по электронному пучку, и в «предвестнике» перед ним имеется встречная к пучку волна высокочастотного тока, фазовая скорость которой близка к фазовой скорости волны TM_{01}. Фазовая расстройка между этими двумя волнами такова, что знак погонной мощности энергообмена между электронами и волной (который идет в основном через радиальную компоненту поля) разный на фронте импульса (раскачка колебаний электронов) и на его спаде (передача энергии колебаний обратно в волну).

Если же параметры системы попадают в зону частотно-модовой трансформации (весьма узкую), то на фронте волнового импульса картина примерно сохраняется, однако ближе в вершине импульса в электронном пучке (и в волне высокочастотного тока) развивается продольная стратификация. В стратах, имеющих вид пульсирующих по радиусу электронных колец, теперь и сосредоточен энергообмен. Появляется и нарастает волна TM_{02}, которая, конкурируя с исходной волной TM_{01}, забирает энергию электронных осцилляций.

Для ответа на вопрос, импульс какой моды и на какой частоте возникнет в результате частотно-модовой трансформации, воспользуемся сначала приближением заданного высокочастотного тока, пренебрегая возможным влиянием сил объемного заряда пучка.

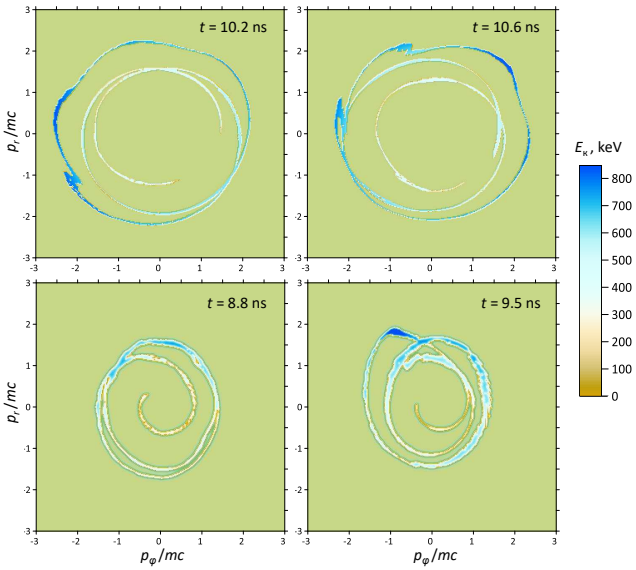

Рис. 2. Фазовые портреты электронов в зоне трансформации волнового импульса в различные моменты времени для случаев двукратного (вверху) и трехкратного (внизу) умножения частоты. По осям отложены нормированные поперечные компоненты импульса в цилиндрической системе координат, цветовая градация отображает кинетическую энергию частиц

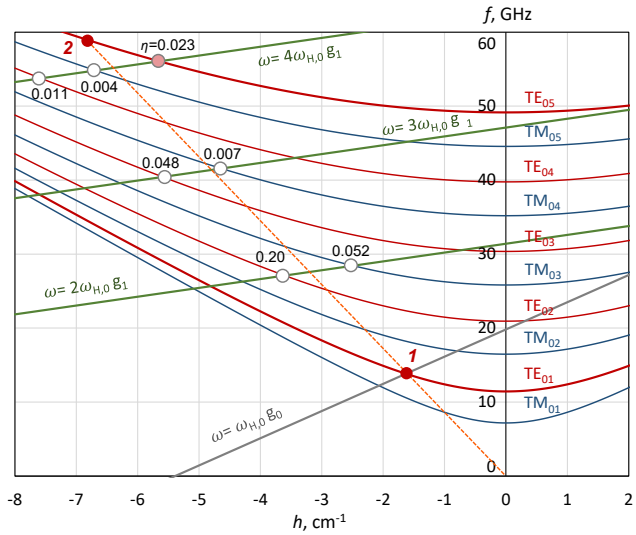

Рис. 3. Дисперсионная диаграмма для первых десяти симметричных волн круглого волновода и четырех циклотронных гармоник, иллюстрирующая случай четырехкратного умножения частоты при трансформации $TE_{01} \to TE_{05}$. Точка *1* соответствуют раскачке циклотронных колебаний в поле порождающей волны, точка *2* — возбуждению вторичной волны, пустые точки — синхронизму для других волн-конкурентов. О величинах η см. текст

Пусть в идеализированном случае под действием падающей волны в пучке сформирована циклотронная волна, представленная непрерывной последовательностью электронных осцилляторов, имеющих продольную скорость v_z. Каждый циклотронный осциллятор составлен электронами, компактно сгруппированными по фазе циклотронного вращения. На рис. 2 изображены фазовые портреты электронов, находящихся в области трансформации импульса, построенные на основе данных полностью электромагнитного численного эксперимента с удвоением и утроением частоты. Эти картины свидетельствуют о том, что в пучке действительно развивается фазовая группировка по циклотронному типу.

Поскольку пучок в исходном состоянии представлет собой тонкостенную трубку, в результате возбуждения циклотронной волны его поверхность приобретает «гофрировку» с амплитудой, равной циклотронному радиусу r_c. А поскольку возбуждение циклотронных колебаний электронов происходит под действием поля первичной электромагнитной волны, то и гофрировка, пульсируя при каждом фиксированном z, бежит со скоростью, близкой к фазовой скорости этой волны, и такую же фазовую скорость будут иметь волны высокочастотного тока на каждой из циклотронных гармоник.

Чтобы сформированная таким образом волна высокочастотного тока на некоторой циклотронной гармонике могла эффективно возбудить вторичную электромагнитную волну некоторой моды, необходимо в первую очередь равенство их фазовых скоростей (условие синхронизма). На рис. 3 для примера изображена волновая диаграмма, соответствующая четырехкратному умножению частоты (случай на рис. 1*e*,*f*), включающая дисперсионные кривые для первых десяти симметричных мод круглого волновода и линии циклотронных волн для первых четырех гармоник. Использовано обозначение $g = 1/[\gamma(1-\beta_z/\beta_{ph})]$, где β_{ph} — нормированная на c фазовая скорость волны, $\omega_{H,0} = eH_0/mc$ — циклотронная частота без учета релятивистского фактора. При этом величина g_0 определена для величин γ, β_z электронов в невозмущенном пучке (что соответствует резонансной раскачке циклотронных колебаний под действием поля порождающей волны), а величина g_1 соответствует пучку с максимальной амплитудой поперечных осцилляций (кинетическая энергия ≈ 500 кэВ, $\beta_z \approx 0.25$), резонансно отдающим энергию вторичной волне. Штриховой линией изображена прямая постоянной фазовой скорости, равной фазовой скорости порождающей волны. Точки пересечения этой прямой с дисперсионными кривыми различных мод соответствуют синхронизму меж-

ду циклотронными и электромагнитными волнами.

Видно, что число мод, близких к синхронизму, достаточно велико; однако возбуждается только одна из них, TE_{05}. Поэтому, чтобы определить победителя среди мод-конкурентов, следует учитывать второй физический фактор: величину связи между электрическим полем волновой моды и током циклотронных осцилляторов. При одинаковых условиях синхронизма преимущество получит та мода, у которой эта связь больше.

5. КОНКУРЕНЦИЯ ВТОРИЧНЫХ МОД: СВЯЗЬ ПОЛЯ С ТОКОМ ЦИКЛОТРОННОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Темп нарастания той или иной волноводной моды, возбуждаемой заданными циклотронными осцилляторами на той или иной гармонике, можно в сравнении оценить (предполагая, что условие фазового синхронизма точно выполнено) величиной отношения работы тока осциллятора в поле волны к погонной энергии электромагнитного поля в бегущей волне:

$$\eta = \frac{1}{W'} \max_{\psi_0} \oint \mathbf{E}(\mathbf{r},\mathbf{t})\mathbf{dl}. \qquad (1)$$

Здесь $\mathbf{E}$ — поперечная компонента электрического поля волновой моды, W' — погонная (по z) энергия электромагнитного поля (обе величины — для волны единичной амплитуды), интеграл берется по циклотронной окружности за один оборот заряженной частицы, имеющей единичный заряд; отыскивается максимум при варьировании разности фаз ψ_0 между колебаниями волны и осциллятора. Выражение для погонной энергии имеет известный вид:

$$W' = \frac{\kappa^2 k^2}{8\pi} \int\limits_{S_\perp} |\Psi|^2 dS, \qquad (2)$$

здесь κ и k — поперечное и полное волновые числа, Ψ — мембранная функция, определяющая поперечную зависимость продольного электрического поля (для ТМ-волн) или магнитного поля (для ТЕ-волн), в рассматриваемом осесимметричном случае — функция Бесселя $J_0(\kappa r)$; интеграл берется по поперечному сечению волновода.

Прежде чем приводить результаты численных расчетов величины η, оценим отдельно контурный интеграл в выражении (1). Такая оценка уже позволяет сделать определенные выводы. При этом для простоты пренебрежем кривизной и перейдем от

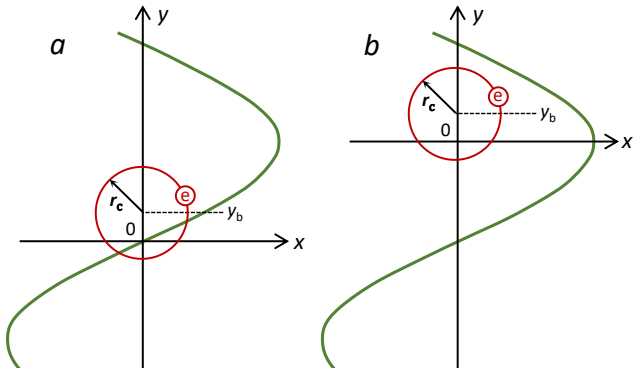

Рис. 4. Два случая расположения циклотронной орбиты относительно пространственной вариации поля волноводной моды: *a* — в окрестности нуля поля, *b* — в окрестности максимума поля

цилиндрической конфигурации к планарной, в которой зависимость полей от поперечной координаты синусоидальная. Пренебрежение ангармонизмом функции Бесселя оправдано, если циклотронный радиус мал в масштабе поперечной неоднородности поля волны, что мы и предполагаем.

Рассмотрим бегущие вдоль z и имеющие вариацию по y волны TM_{0n} (электрическое поле направлено вдоль y) и TE_{0n} (вдоль x). Для каждой из волн рассмотрим два случая (рис. 4): с расположением центра циклотронной орбиты вблизи нуля пространственной вариации поля (a) и вблизи максимума поля (b).

Будем рассматривать осциллятор с зарядом e, совершающим равномерное циклотронное вращение, при котором

$$y = y_b + r_c \sin\theta_H, \quad \dot{y} = \omega_H r_c \cos\theta_H,$$
$$x = r_c \cos\theta_H, \quad \dot{x} = -\omega_H r_c \sin\theta_H,$$

где $\theta_H = \omega_H t + \theta_0$ — циклотронная фаза, y_b — смещение центра орбиты относительно пространственного нуля поля (в случае a) или его максимума (в случае b), r_c — циклотронный радиус, ω_H — циклотронная частота.

Для волны TM_{0n} в случае a электрическое поле

$$E_y = E_0 \sin(\kappa y)\cos\theta,$$

где κ — поперечное волновое число, $\theta = (\omega t - hz)$ — фаза волны, ω — ее частота колебаний, h — продольное волновое число. Тогда для мощности работы поля над частицей имеем

$$P = e\dot{y}E_y = A\mathfrak{R}\cos\theta_H \sin(Y + \mathfrak{R}\sin\theta_H)\cos\theta,$$

где введены безразмерные величины для смещения центра орбиты $Y = \kappa y_b$ и циклотронного радиуса

$\mathfrak{R} = \kappa r_c$ (считаем, что $Y \ll 1$, $\mathfrak{R} \ll 1$) и обозначено $A = e\omega_H E_0/\kappa$.

Разложим величину $\sin(Y + \mathfrak{R}\sin\theta_H)$ в ряд Тейлора как $\sin(x) = x - x^3/3! + x^5/5! + ...$ Число членов разложения определяется тем, гармонику с каким максимальным номером мы хотим в результате увидеть. Можно убедиться, что при учете лишь линейного члена возникают первая и вторая гармоники (подобно тому, как получилось в работе [1] для осесимметричной конфигурации при линейной аппроксимации функции Бесселя J_1 вблизи ее первого нуля), при учете кубического члена добавляются третья и четвертая гармоники, а при добавлении члена пятой степени, которым мы и ограничимся, появляются гармоники пятая и шестая.

Опуская промежуточные преобразования, приведем конечное выражение для мощности работы, получающееся после удержания для каждой из гармоник только слагаемого старшего порядка малости по величинам Y, $\mathfrak{R}$ и произведениям их степеней:

$$P = A\mathfrak{R}\cos\theta\{Y\cos\theta_H + (\mathfrak{R}/2)\sin 2\theta_H + (Y\mathfrak{R}^2/8)\cos 3\theta_H - (\mathfrak{R}^3/48)\sin 4\theta_H - (Y\mathfrak{R}^4/384)\cos 5\theta_H + O(\mathfrak{R}^5)\}. \quad (3)$$

В случае b для той же волны TM_{0n} имеем

$$E_y = E_0\cos(\kappa y)\cos\theta,$$

$$P = e\dot{y}E_y = A\mathfrak{R}\cos\theta_H\cos(Y + \mathfrak{R}\sin\theta_H)\cos\theta.$$

Представляя в последнем выражении второй косинус как $\cos x \approx 1 - x^2/2! + x^4/4!$, получим

$$P = A\mathfrak{R}\cos\theta\times \times\{\cos\theta_H - (Y\mathfrak{R}/2)\sin 2\theta_H + (\mathfrak{R}^2/8)\cos 3\theta_H + (Y\mathfrak{R}^3/48)\sin 4\theta_H + (\mathfrak{R}^4/384)\cos 5\theta_H\}. \quad (4)$$

Выражения (3), (4) содержат произведения вида $\cos\theta\cos(m\theta_H)$ или $\cos\theta\sin(m\theta_H)$ с различными коэффициентами, здесь m — номера циклотронных гармоник от 1 до 5. Каждое из таких произведений представляется, в свою очередь, как $\{\cos(\theta + m\theta_H) + \cos(\theta - m\theta_H)\}/2$ или $\{\sin(\theta + m\theta_H) + \sin(\theta - m\theta_H)\}/2$.

Постоянному во времени аргументу какого-либо из стоящих в правой части косинуса или синуса будет соответствовать резонанс. Условие резонансов на m-й гармонике имеет вид $\omega - hv_z = \pm m\omega_H$ или иначе

$$\omega(1 - \beta_z/\beta_{ph}) = \pm m\omega_H, \quad (5)$$

где $\beta_z = v_z/c$ — нормированная на скорость света в вакууме продольная скорость электронов, $\beta_{ph} = \omega/hc$ — нормированная фазовая скорость волны. Левая часть соотношения (5) всегда положительна, поскольку для волн в гладком волноводе при любом направлении распространения положительна величина $1 - \beta_z/\beta_{ph}$. В силу равенства положительна и правая часть. Знак величины ω_H определяется направлением однородного магнитного поля. Понимая под ω_H величину по модулю и оставляя подходящий знак в правой части, будем записывать условие резонанса в виде

$$\omega(1 - \beta_z/\beta_{ph}) = m\omega_H.$$

Итак, мощность работы, усредненная за период колебаний при резонансе на m-й гармонике, будет зависеть от величины коэффициента, стоящего при соответствующем синусе или косинусе в скобках в выражении (3) или (4).

Рассуждения для волны TE_{0n} аналогичны, но с той разницей, что электрическое поле в ней направлено по x, т. е. перпендикулярно направлению вариации поля. В случае a имеем

$$E_x = E_0\sin(\kappa y)\cos\theta,$$

$$P = e\dot{x}E_x = -A\mathfrak{R}\sin\theta_H\sin(Y + \mathfrak{R}\sin\theta_H)\cos\theta,$$

а в случае b

$$E_x = E_0\cos(\kappa y)\cos\theta,$$

$$P = e\dot{x}E_x = -A\mathfrak{R}\sin\theta_H\cos(Y + \mathfrak{R}\sin\theta_H)\cos\theta.$$

Опуская получающиеся выражения для мощности, подобные (3) и (4), отметим лишь, что в них коэффициенты при гармониках получаются по модулю такими же, как для волны TM_{0n} (в случаях a и b соответственно), но могут различаться видом функции, представляющей ту или иную гармонику (синус или косинус) и знаком перед ней, т. е. по существу, разностью фаз между колебаниями волны и осциллятора, при которой достигается тот или иной резонанс. Также для волны TE_{0n} появляется нерезонансное слагаемое, осциллирующее с частотой ω и при усреднении по периоду колебания дающее нуль.

Положив величину $A/2$ равной единице, сведем в таблицу взятые по модулю весовые коэффициенты (смысл которых есть усредненная мощность работы поля за период колебания) для резонансов на различных циклотронных гармониках для волн обоих типов.

Заметим, во-первых, что все приведенные в таблице величины пропорциональны $\mathfrak{R}^m$ с коэффициентом, быстро уменьшающимся с номером гармоники. В этих величинах сомножитель $\mathfrak{R}$ соответствует плотности тока, создаваемого осциллятором

Таблица. Модули коэффициентов при резонансных слагаемых, определяющих мощность работы поля волн TM_{0n} и TE_{0n} для первых пяти циклотронных гармоник при двух вариантах расположения циклотронной орбиты

Вариант	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5
a	$Y\mathfrak{R}$	$\frac{\mathfrak{R}^2}{2}$	$\frac{Y\mathfrak{R}^3}{8}$	$\frac{\mathfrak{R}^4}{48}$	$\frac{Y\mathfrak{R}^5}{384}$
b	$\mathfrak{R}$	$\frac{Y\mathfrak{R}^2}{2}$	$\frac{\mathfrak{R}^3}{8}$	$\frac{Y\mathfrak{R}^4}{48}$	$\frac{\mathfrak{R}^5}{384}$

(последняя пропорциональна скорости частицы, а при заданной циклотронной частоте — циклотронному радиусу), а остаток, пропорциональный $\mathfrak{R}^{m-1}$, характеризует связь между осциллятором и полем волны. Так, для первой гармоники связь не зависит от циклотронного радиуса, а для второй ему пропорциональна.

Во-вторых, видно, что при расположении циклотронной орбиты вблизи нуля поля мощность работы и связь для четных гармоник циклотронной частоты не зависят от величины сдвига Y, а для нечетных гармоник они пропорциональны этому сдвигу. Если же центр орбиты расположен вблизи максимума поля, картина обратная: для нечетных гармоник названные величины не зависят от величины Y, а для четных — пропорциональны ей.

Это второе обстоятельство согласуется с результатами численного эксперимента, показывающими, что частотно-модовая трансформация на нечетных циклотронных гармониках происходит хуже, чем на четных. Действительно, при четных m достаточно пропустить инжектируемый электронный пучок через радиальный нуль поля вторичной волны, и тогда вторичный импульс, опережая затухающий первичный импульс и распространяясь навстречу мало возмущенному электронному пучку, будет «выключаться» из взаимодействия с ним (о важности этого обстоятельства см. ниже разд. 8). Для нечетных m такая возможность отсутствует: требуется проводить пучок либо через максимум поля, либо со сдвигом относительно нуля поля, но не через нуль. Поэтому вторичный импульс продолжает взаимодействовать с пучком, покуда последний не будет оборван.

Вернемся теперь к численному расчету величин η для мод круглого волновода с бесселевым распределением полей. На рис. 5–7 приведены результаты расчета этой величины как функции циклотронного радиуса r_c и среднего радиуса электронного пучка R_b для нескольких волновых мод, возбуждение которых наблюдалось в полностью электромагнитных численных экспериментах. Рисунок 5 относится к двум модам, возбуждение которых наблюдалось в случае с удвоением частоты, а рис. 6 — к модам, наиболее эффективно возбуждавшимся в случаях умножения частоты в три, четыре и пять раз. Величины η для двух низших волн электрического и магнитного типа, использованных в качестве первичных волн, представлены на рис. 7.

Во всех случаях для полноты картины максимальные величины r_c и R_b взяты равными радиусу волновода R_w (который составлял 1.6 см). Высветленными треугольниками на рис. 5–7 показаны области, где $R_b + r_c > R_w$ и циклотронная орбита выходит за радиус волновода. Наклонная пунктирная линия отделяет область $R_b < r_c$, где циклотронная окружность охватывает ось волновода (следуя терминологии гиротронов, назовем ее областью больших орбит) от области малых орбит, где $R_b > r_c$ и ось волновода находится вне циклотронной окружности. Кривые возле вертикальных осей изображают радиальную зависимость поперечной компоненты электрического поля волновой моды в виде соответствующей функции Бесселя $J_1(\kappa r)$. Жирными точками отмечены пары величин r_c и R_b, при которых в численных экспериментах наблюдалась наиболее эффективная частотно-модовая трансформация, при этом величина r_c определялась по наибольшему размаху циклотронного колебания в момент зарождения вторичного волнового импульса.

Вертикальные штриховые линии на рис. 5, 6 обозначают ту предельную величину циклотронного радиуса, которая в принципе могла быть получена в каждом конкретном случае. Исходя из величины магнитного поля H_0 и той максимальной кинетической энергии $\epsilon_{k,max}$, которую электрон набирает при раскачке циклотронного колебания, оценим эту величину следующим образом:

$$r_{c,lim} \approx \frac{c\beta_\perp}{\omega_H} = \frac{mc^2}{eH}\sqrt{\gamma_{max}^2 - 1}, \qquad (6)$$

где $\gamma_{max} = 1 + \epsilon_{k,max}/mc^2$ — релятивистский фактор. Здесь допущено, что вся кинетическая энергия электрона сосредоточена в его орбитальном движении (что оправдано, поскольку в момент наибольшей раскачки поперечных колебаний продольное движение электронов заторможено).

Как видно на рис. 5, 6, «рабочие точки» для вторичных волн во всех случаях лежат на периферии близлежащих максимумов величины η. Попадание в сами максимумы затруднено из-за нескольких факторов.

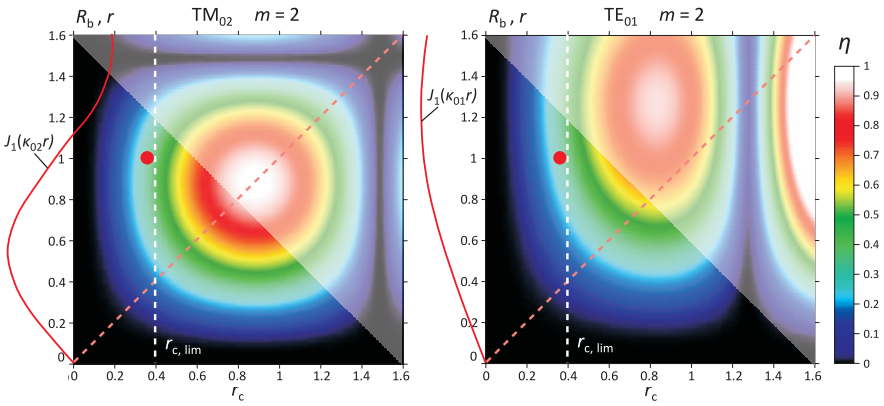

Рис. 5. Параметры эффективности возбуждения для двух конкурирующих мод в режиме удвоения частоты. Кривые около вертикальных осей соответствуют функции Бесселя, определяющей радиальную зависимость поперечного электрического поля волновой моды

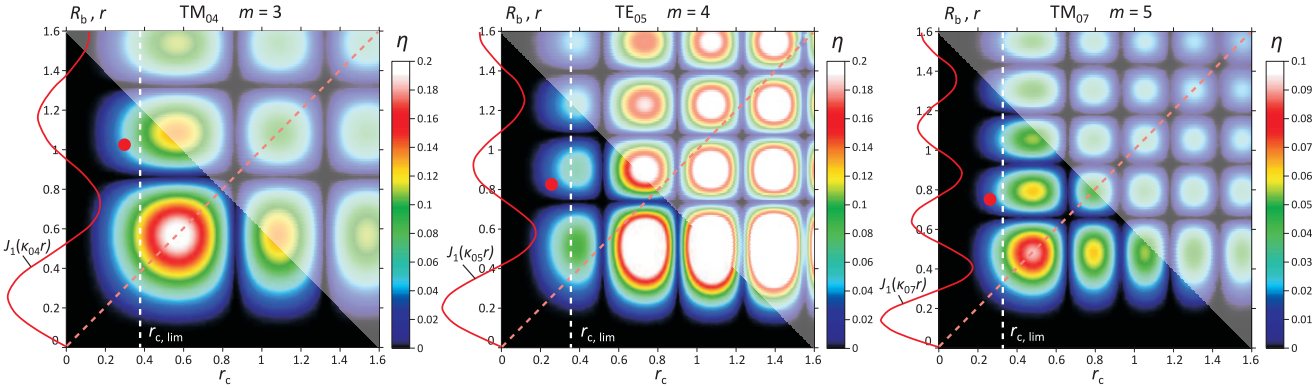

Рис. 6. Параметры эффективности возбуждения для вторичных мод, преобладающих в режимах с умножением частоты в 3, 4, 5 раз

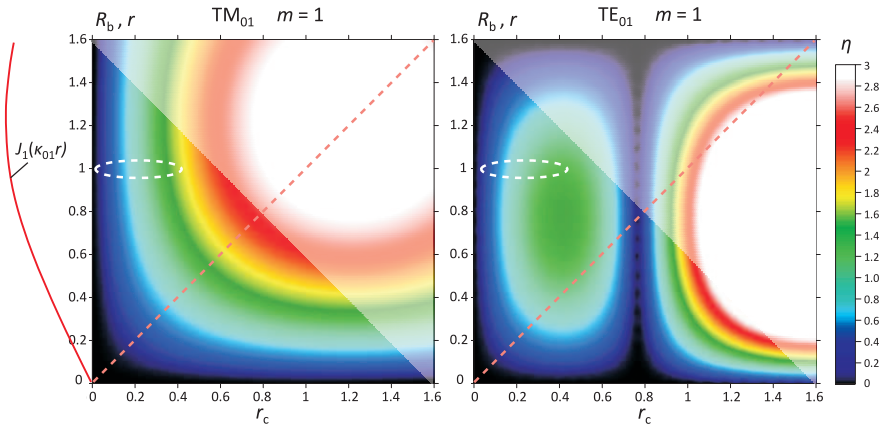

Рис. 7. Параметры эффективности возбуждения для первичных волн: TM_{01} и TE_{01}. Штриховыми овалами примерно обозначены области изменения r_c при раскачке колебаний

С одной стороны, величины циклотронного радиуса не могут превышать предельную (6). С другой стороны, в областях, где $R_b + r_c > R_w$, частицы пучка осаждаются на стенку волновода.

Наконец, для волн типа TE наиболее интенсивные максимумы лежат в области больших циклотронных орбит или на ее границе. При этом затруднена сама транспортировка сильноточного электронного пучка.

При малых отношениях R_b/R_w нарастает влияние объемного заряда электронного пучка. Сравним ток пучка, лежащий в диапазоне 0.4–0.8 кА, с предельным током транспортировки

$$I_{lim} = 0.5 I_0 (\Gamma^{2/3} - 1)^{3/2} / \ln(R_w/R_b),$$

где $I_0 = mc^3/e \approx 17$ кА, $\Gamma = 1 + eU/mc^2$, U — ускоряющее напряжение. В рассматриваемых случаях $U = 290$ кВ, $\Gamma = 1.57$, $R_b = 1.6$ см. При радиусе пучка $R_b = 1$ см получаем $I_{lim} = 3.75$ кА, а при $R_b = 0.5$ см имеем $I_{lim} = 1.5$ кА. Следует принять во внимание, что при развитии группировки в пучке появляются локальные всплески тока, усиливающееся влияние объемного заряда в которых приводит к отражению частиц по типу виртуального катода (подробнее об этом в разд. 7).

Вернемся к рис. 3, иллюстрирующему случай трансформации с четырехкратным умножением частоты. Рядом с точками пересечения дисперсионных кривых волновых мод с прямыми циклотронных гармоник — теми из них, которые не слишком удалены от синхронизма и соответствуют, таким образом, модам-претендентам на возбуждение, указаны величины η, рассчитанные для условий, взятых из численного эксперимента. Видно, что фактически возбуждающаяся на четвертой гармонике циклотронной частоты на частоте 56.8 ГГц мода TE_{05}, имеющая величину η=0.023, выигрывает у мод TE_{04} (η=0.011) и TM_{05} (η=0.004), хотя последняя и ближе к синхронизму. На третьей гармонике близка к синхронизму мода TM_{04}, однако она не возбуждается из-за малости величины η=0.007. На второй гармонике линия фазовой скорости проходит примерно равноудаленно между модами TE_{02} (η=0.2) и TM_{03} (η=0.052), возбуждения которых на фоне моды TE_{05} также не заметны.

6. ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ НА ОСНОВЕ PiC-МЕТОДА И УРАВНЕНИЙ ВОЗБУЖДЕНИЯ ВОЛНОВОДНЫХ МОД

В качестве дополнительного инструмента для моделирования и анализа процесса частотно-модовой трансформации была разработана осесимметричная нестационарная численная модель, описывающая в цилиндрической системе координат взаимодействие электронного пучка, направляемого магнитным полем конечной величины, со встречными электромагнитными волнами нескольких мод в однородном цилиндрическом волноводе.

Разработанная модель представляет собой усложненный вариант одномерной модели черенковской лампы обратной волны (ЛОВ) [8]. Электронный пучок описывается методом макрочастиц (PiC-метод), волновые поля — уравнениями возбуждения волноводных мод, поле объемного заряда отыскивается из решения уравнения Пуассона. Усложнение, помимо увеличения числа мод, заключается в использовании двумерной, а не одномерной пространственной сетки для полей, плотностей тока и заряда, а также в том, что релятивистское уравнение движения макрочастиц трехмерное, а не одномерное.

Каждая волноводная мода представлена неоднородной плоской волной

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathrm{Re}[A(z,t)\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_\perp)e^{i(\omega t - hz)}],$$
$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathrm{Re}[A(z,t)\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}_\perp)e^{i(\omega t - hz)}],$$

здесь A — комплексная амплитуда волны, ω — частота колебаний, h — продольное волновое число, $\hat{\mathbf{E}}$ и $\hat{\mathbf{H}}$ — мембранные функции, зависящие в осесимметричном случае только от r. Уравнение возбуждения для каждой моды имеет вид [9]

$$\frac{1}{v_{gr}}\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{1}{N} e^{-ihz} \int\limits_{S_\perp} \mathbf{j}_\omega \hat{\mathbf{E}}^* dS,$$

где v_{gr} — групповая скорость, N — норма волны, $\mathbf{j}_\omega$ — гармоника высокочастотного тока, интеграл берется по поперечному сечению волновода (в предшествующей модели с тонкостенным трубчатым пучком интеграл снимался и вводилась величина сопротивления связи, как, например в [10]).

Следует иметь в виду, что при описании волнового поля через уравнение возбуждения возникают ограничения, существенные в случае коротких волновых импульсов. Во-первых, амплитуда волны предполагается медленно изменяющейся функцией времени и координат: $|\dot{A}| \ll \omega|A|$, $|A'| \ll h|A|$. Поэтому при моделировании импульсов с числом колебаний порядка 10 или менее (как в нашем случае) уравнение возбуждения работает на пределе применимости. Во-вторых, рассматриваются волны с фиксированной поперечной структурой: неоднородные

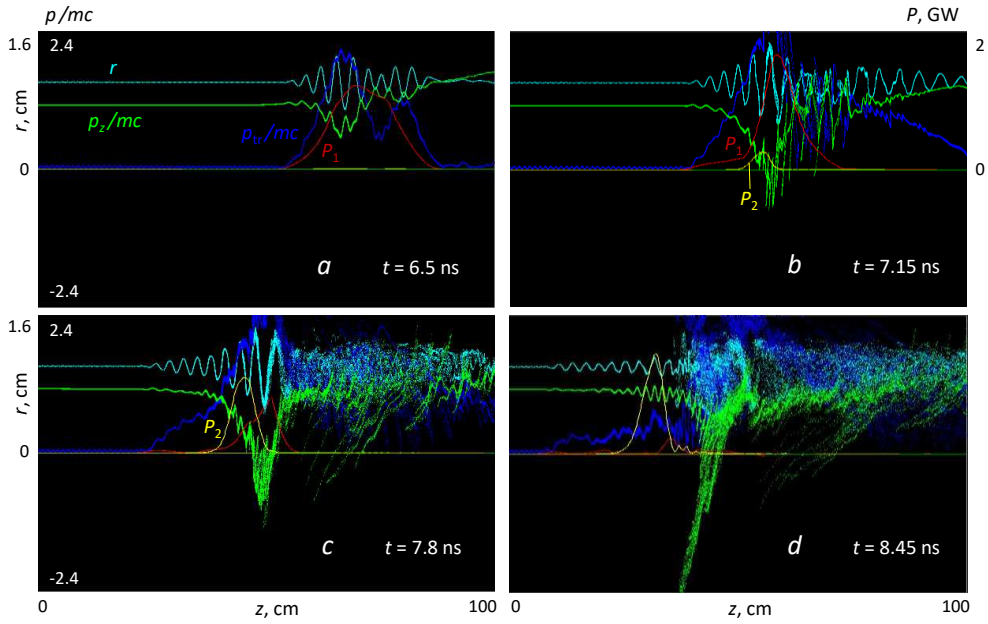

Рис. 8. Расчет трансформации СВЧ-импульса с удвоением частоты колебаний в двухволновой постановке, иллюстрирующий компрессию и затухание порождающего импульса волны TM_{01}, зарождение и формирование вторичного импульса волны TM_{02}. Изображены в разные моменты времени (*a*,*b*,*c*,*d*) радиальная координата частиц r, их нормированные продольный (p_z) и поперечный (p_{tr}) импульсы, потоки мощности волн TM_{01} (P_1) и TM_{02} (P_2). Частота колебаний в падающем импульсе 11.84 ГГц, транспортирующее магнитное поле 10.7 кЭ

плоские волны, что не дает возможности для описания волн с наклонными фронтами (типа отдельных бриллюэновских), появления которых при циклотронном возбуждении единичными электронными сгустками нельзя исключать.

Что касается описания поля объемного заряда, то в осесимметричной конфигурации с однородным по z волноводом уравнение Пуассона эффективно решается с помощью преобразования Фурье по продольной координате.

Приведем первые результаты моделирования с помощью разработанной модели, пока в двух- и трехволновой постановках для режима с удвоением частоты. Расчеты выполнялись при числе разбиений пространственной сетки $N_r = 40$, $N_z = 1024$ и числе макрочастиц около 50 тысяч.

Рисунок 8 иллюстрирует расчет в двухволновой постановке (исходная волна TM_{01}, вторичная волна TM_{02}) для условий, соответствующих максимальному коэффициенту трансформации в полностью электромагнитном численном эксперименте [1]. Пиковая мощность импульса TM_{02} в максимуме, расположенном при $H = 10.7$ кЭ и $I = 550$ А, составляет около 1.2 ГВт — немного меньше, чем в полностью электромагнитном расчете.

При дополнительном введении в расчет моды TM_{01} картина процесса в целом сохраняется, однако происходит прирост пиковой мощности волны TM_{02} до уровня 1.8 ГВт. На рис. 9 приведены полученные в трехволновой постановке зависимости пиковой мощности импульсов мод TM_{01}, TM_{02} и TE_{01} от тока электронного пучка, магнитного поля и радиуса пучка. Несмотря на количественное отличие, характер зависимостей сходен с наблюдаемым в полностью электромагнитном численном эксперименте.

Подробный «портрет» электронно-волновой системы в один из моментов времени на стадии усиления вторичного импульса моды TM_{02}, полученный в расчете в трехволновом варианте, представлен на рис. 10.

В расчетах (как в двухволновом, так и в трехволновом варианте) видно, что в процессе трансформации $TM_{01} \to TM_{02}$ электронно-волновая система последовательно проходит следующие стадии: движение первичного импульса волны TM_{01} в невозмущенном виде до встречи с электронным пучком; компрессия этого импульса (на фоне которой происходит зарождение вторичного импульса волны TM_{02}), затухание первичного импульса с усилением вторичного и последующий переход к распространению сформировавшегося вторичного импульса в стационарном виде.

На рис. 11 показано, как в процессе трансформации изменяются скорости движения максимумов по-

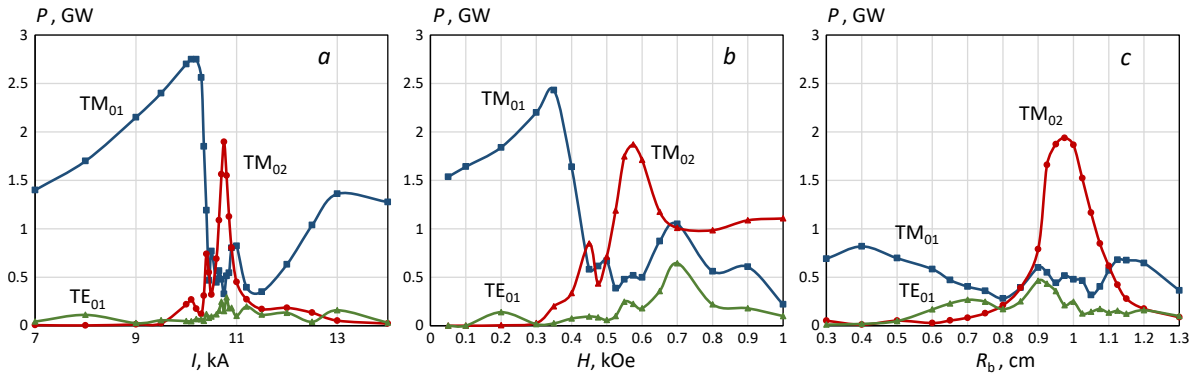

Рис. 9. Рассчитанные в трехволновом варианте зависимости пиковых мощностей импульсов мод TM_{01}, TM_{02} и TE_{01}: *a* — от тока электронного пучка (в магнитном поле $H = 10.7$ кЭ), *b* — от магнитного поля (при токе $I = 550$ А), *c* — от радиуса инжектируемого электронного пучка при $H = 10.7$ кЭ, $I = 550$ А

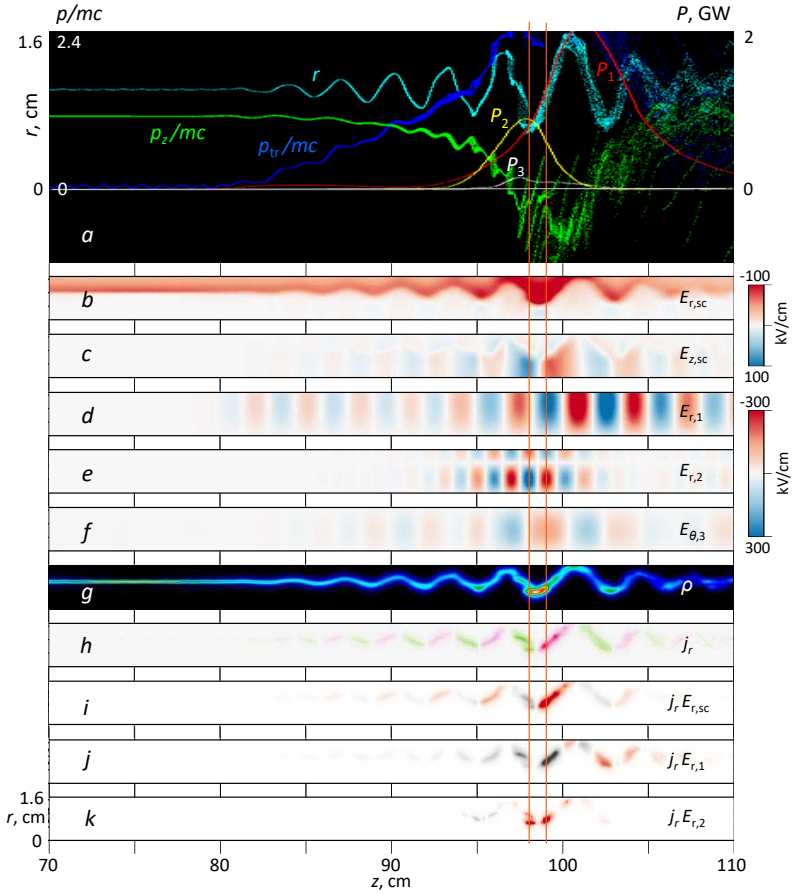

Рис. 10. Стадия усиления вторичного импульса, расчет в трехволновой постановке: *a* — конфигурационный и фазовые портреты электронного пучка, импульсы потока мощности волновых мод (мощность волны TE_{01} обозначена P_3); *b*, *c* — радиальная и продольная компоненты поля объемного заряда; *d*, *e*, *f*, — поперечные компоненты электрического поля волн TM_{01}, TM_{02} и TE_{01}; *g* — объемная плотность заряда пучка; *h* — радиальная компонента плотности тока; *i*, *j*, *k* — плотности мощности работы радиальных компонент поля объемного заряда и полей волн TM_{01}, TM_{02}. Вертикальными линиями отмечено положение двух «работающих» в данный момент времени электронных сгустков

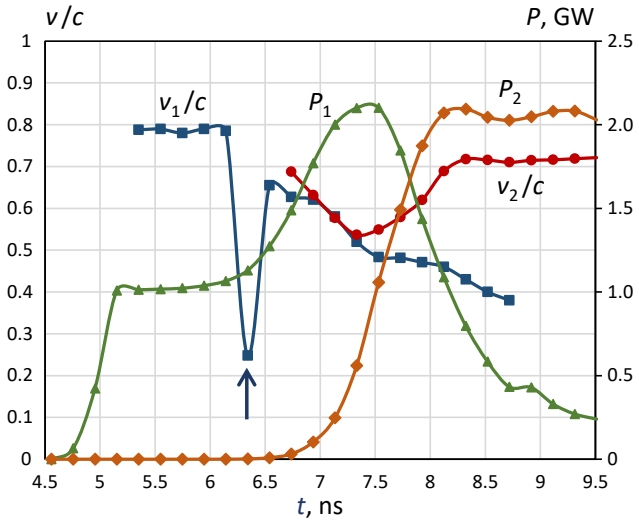

Рис. 11. Изменение во времени скоростей движения импульсов порождающей и вторичной волн (v_1, v_2) и их пиковых мощностей (P_1, P_2) в процессе трансформации

рождающего импульса TM_{01} и вторичного импульса TM_{02} и их пиковые мощности. До встречи с электронным пучком первичный импульс TM_{01}, имеющий вид трапеции с фронтом и спадом по 0.5 нс и длительностью плоской части 1.0 нс, двигается в пустом волноводе в неизменном виде с групповой скоростью $0.79\,c$. Провал скорости в момент времени 6.35 нс, отмеченный стрелкой, есть следствие деформации импульса (поглощения его передней части) в начале компрессии. В момент времени ≈ 6.5 нс вблизи максимума формирующегося колоколообразного импульса моды TM_{01} зарождается вторичный импульс TM_{02}. Вскоре он сдвигается к фронту импульса моды TM_{01}. В течение интервала времени около 0.6 нс оба импульса двигаются с близкой скоростью, которая снижается от $0.65\,c$ до $0.5\,c$ по мере того, как завершается компрессия первичного импульса и усиливается вторичный. Затем в момент времени 7.4 нс первичный импульс начинает затухать, а его скорость в течение примерно одной наносекунды уменьшается до $\approx 0.4\,c$. Мощность импульса TM_{02} к моменту времени ≈ 8.0 нс прирастает еще примерно вдвое, его скорость восстанавливается до величины групповой скорости в пустом волноводе ($0.72\,c$), и он отрывается от нерегулярно осциллирующих остатков импульса TM_{02}. Затем амплитуда, форма и скорость бегущего импульса TM_{02} стабилизируются.

В наблюдаемой картине существенно, что все то время, пока происходит усиление вторичного импульса, перед его фронтом находится электронный пучок с раскачанными циклотронными колебаниями частиц, амплитуда которых (циклотронный радиус) почти линейно спадает с удалением от фронта (рис. 10*a*). Эта зона с «градиентом» циклотронного радиуса, порожденная поглотившейся передней частью исходного импульса TM_{01}, пространственно совпадает с оставшимся от этой части слабым «предвестником».

Также характерно (рис. 10*j*,*k*), что передача энергии в моду TM_{02} происходит вблизи максимума поперечного импульса электронов при посредстве всего лишь двух-трех электронных сгустков, состоящих из частиц, сильно заторможенных (и даже изменивших знак скорости) в продольном направлении. Такая картина согласуется с получаемой в полностью электромагнитном расчете [1].

7. ВЛИЯНИЕ ОБЪЕМНОГО ЗАРЯДА

В разработанной численной модели поле объемного заряда рассчитывается отдельно от волновых полей. На рис. 10*b*,*c* видно, что переменные составляющие радиальной и продольной компонент этого поля в месте нахождения пучка соизмеримы и имеют величину до 100 кВ/см, что меньше радиальных полей порождающей и вторичной волн (до 300 кВ/см).

Простейший способ оценить, насколько существенно влияние объемного заряда, заключается в том, чтобы искусственно ввести в правой части уравнения Пуассона при плотности заряда коэффициент k_{sc} и его варьировать. Здесь заметим следующее. Кулоновское поле еще до появления высокочастотных колебаний вызывает «провисание» потенциала транспортируемого пучка относительно стенки канала транспортировки и соответствующее уменьшение кинетической энергии электронов ϵ_k относительно энергии при инжекции $\epsilon_{k,0}$. Это, в свою очередь, сдвигает циклотронную частоту и величину резонансного магнитного поля. Чтобы увидеть влияние объемного заряда на высокочастотный процесс «в чистом виде», этот эффект следует исключить. Поэтому далее при варьировании коэффициента ϵ_k величина энергии $\epsilon_{k,0}$ подбиралась в каждом случае такой, чтобы в канале транспортировки вдали от его краев у электронов имелась кинетическая энергия $\epsilon_k = 258$ кэВ.

На рис. 12 приведены полученные в двухволновом расчете зависимости выходных мощностей импульсов TM_{01} на исходной частоте и TM_{02} на удвоенной частоте от коэффициента объемного заряда k_{sc} (варьируемого в пределах от 0 до 2) при

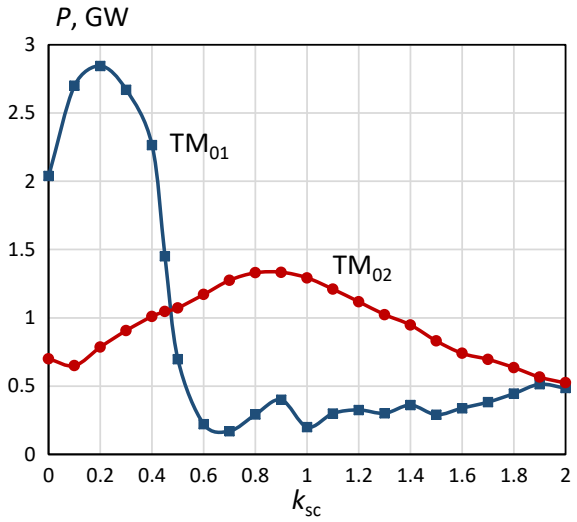

Рис. 12. Выходные пиковые мощности импульсов мод TM_{01} и TM_{02} в зависимости от коэффициента объемного заряда ($H = 10.7$ кЭ, $I = 550$ А)

$H = 10.7$ кЭ и $I = 550$ А. Мощность волны TM_{02} имеет широкий, но вполне выраженный максимум. Что касается колебаний на исходной частоте, то они подавлены везде, кроме области слабого объемного заряда ($k_{sc} < 0.5$), где компрессия первичного импульса преобладает над трансформацией.

Существование максимума частотно-модовой трансформации по величине k_{sc} есть, по-видимому, проявление общей закономерности существования оптимума по объемному заряду в СВЧ-приборах с инерционной группировкой электронов (см., например, [8] для случая релятивистской ЛОВ). Заметим, что в рассматриваемой задаче развитие радиальной группировки в пучке сопровождается и продольной группировкой частиц.

Влияние кулоновских сил также проявляется в интенсивном выбросе частиц из компактируемых сгустков в положительном и отрицательном направлениях (рис. 10a), что приводит, в частности, к появлению обратного тока электронов (см., например, рис. 8d). Этот эффект, являющийся следствием образования локальных «виртуальных катодов» в пиках плотности заряда, также характерен для кинематической группировки в сильноточных электронных пучках и СВЧ-приборов с такой группировкой [8].

В рассматриваемой задаче следует ожидать и другого специфического для циклотронного механизма проявления влияния сил объемного заряда на электронно-волновое взаимодействие. Это возникновение ангармонизма у циклотронных осцилляторов. По мере раскачки циклотронных колебаний электронный пучок приобретает, как уже сказано, конфигурацию гофрированной трубы с глубиной гофрировки, равной циклотронному радиусу. При этом возникает вариация в «провисании» потенциала между пучком и стенкой волновода в продольном направлении. Для электронов на максимальном радиусе она минимальна и наоборот. Это влечет за собой соответствующее изменение кинетической энергии частиц вдоль циклотронной орбиты: у электронов, приблизившихся в стенке волновода, она больше, у отдалившихся от нее — меньше. Изменение релятивистского фактора частиц влечет за собой изменение величины ω_H вдоль циклотронной орбиты.

Оценим возникающий ангармонизм в потенциальном приближении по электрическому полю. Разность потенциалов между точками максимума и минимума «гофрировки» пучка есть

$$\Delta\phi = \int\limits_{r_{min}}^{r_{max}} E_r dr = \frac{2I}{c\beta_z} \ln \frac{r_{max}}{r_{min}}, \qquad (7)$$

здесь r_{max}–$r_{min} = 2r_c$. Соответствующее изменение релятивистского фактора есть

$$\Delta\gamma = \frac{e}{mc^2}\Delta\phi = \frac{2}{\beta_z}\frac{I}{I_0} \ln \frac{r_{max}}{r_{min}}. \qquad (8)$$

Рассмотрим предельный случай, когда пучок почти касается стенки волновода ($r_{max} = R_w$), а циклотронный радиус равен максимально возможному (6). Тогда

$$\Delta\gamma = \frac{2}{\beta_z}\frac{I}{I_0} \ln \left(1 - \frac{2mc^2}{eHR_w}\sqrt{\gamma_{max}^2 - 1}\right) = \\ = \frac{I[\text{кА}]}{8.5\beta_z} \ln \left(1 - \frac{3.4}{H[\text{кЭ}]R_w[\text{см}]}\sqrt{\gamma_{max}^2 - 1}\right). \qquad (9)$$

Взяв из условий численного эксперимента $\beta_z = 0.1$, $I = 0.5$ кА, $H = 10$ кЭ, $R_w = 1.6$ см, $\gamma_{max} = 2.5$, получаем $\Delta\gamma \approx 0.4$ и относительное изменение кинетической энергии $\Delta\gamma/(\gamma_{max} - 1) \approx 0.26$ (близкие величины наблюдаются и в самих численных экспериментах). При этом относительный размах изменения циклотронной частоты вдоль орбиты составляет величину ≈ 0.3. При уменьшении радиуса электронного пучка эффект будет еще более значительным.

Ангармонизм циклотронного осциллятора изменяет спектр его колебаний. Вопрос, в какой мере это облегчает возбуждение высокочастотных волн при трансформации, требует дальнейшего исследования.

8. О МЕХАНИЗМЕ ЧАСТОТНО-МОДОВОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ

Приведенные в разд. 4, 5 оценки объясняют, почему при трансформации СВЧ-импульса побеждает та или иная среди мод-конкурентов. Однако остается открытым вопрос: почему частотно-модовая трансформация в принципе возможна в условиях, когда вторичная волна по связи намного проигрывает порождающей?

Действительно, из приведенных выше данных следует, что для исходной моды (TM_{01} или TE_{01}) величина η во всех случаях больше, чем для вторичной, причем ситуация усугубляется с увеличением номера циклотронной гармоники. Например, в случае с удвоением частоты для исходной моды TM_{01} в рабочей точке имеем $\eta \approx 2$, а для вторичной моды TM_{02} имеем $\eta \approx 0.55$. Поэтому, казалось бы, результатом электронно-волнового взаимодействия всегда должно быть формирование солитона самоиндуцированной прозрачности на исходной моде и с исходной частотой, но не частотно-модовая трансформация.

Подойти к разрешению этого противоречия помогает интерпретация процесса в терминах квантовой электроники. «Лазерная» аналогия помогает описать образование солитонов самоиндуцированной прозрачности при взаимодействии коротких СВЧ-импульсов с потоками электронов в условиях циклотронного резонанса [11–13]; в этом случае достаточно рассмотреть циклотронный осциллятор как двухуровневую систему. При формировании такого солитона сначала происходит однофотонная накачка невозбужденного циклотронного осциллятора налетающим резонансным фотоном до энергетического уровня $\hbar\omega$ (при этом квант поглощается), а следующий налетающий фотон индуцирует излучение еще одного фотона при переходе с этого уровня на нулевой. В результате на выходе число квантов сохраняется, а импульс излучения за счет перераспределения энергии от переднего фронта укорачивается и возрастает по амплитуде: происходит компрессия.

В рассматриваемом нами случае частотно-модовой трансформации на m-й циклотронной гармонике следует рассматривать уже систему из m уровней с многофотонной накачкой верхнего уровня $m\hbar\omega$ и последующим высвечиванием фотона с соответствующей энергией при переходе с m-го уровня на нулевой (неэквидистантностью уровней, связанной с уменьшением циклотронной частоты с ростом кинетической энергии осциллятора, в первом приближении пренебрежем). При такой интерпретации важно следующее.

Во-первых, многофотонная накачка верхнего уровня должна происходить быстрее, чем обратное высвечивание промежуточных уровней. Одной только интенсивности поля накачки (которая в рассматриваемой задаче обеспечивается высокой мощностью первичной волны) для этого, по-видимому, недостаточно. Действительно, расчеты показывают, что при одной и той же мощности первичного импульса может наблюдаться как формирование солитона самоиндуцированной прозрачности (компрессия импульса), так и частотно-модовая трансформация. Вторым условием эффективной накачки видится ее резонансный характер. Действительно, полоса магнитных полей, где достигается трансформация, существенно уже окружающего диапазона полей, где происходит компрессия импульса.

Если ступенчатая накачка произошла, условием для появления импульса излучения на кратной частоте (излучения фотона с энергией $m\hbar\omega$) является опустошение накачанного m-го уровня путем излучательного перехода сразу на нулевой уровень энергии, минуя промежуточные. Очевидно, что такой переход должен происходить быстрее, чем конкурирующий ступенчатый процесс обратного высвечивания квантов с энергией $\hbar\omega$. А поскольку квантов с энергий $m\hbar\omega$, способных стать индуцирующими, исходно не имеется, речь может идти только о спонтанном излучении. Условия для эффективности, коллективного характера такого излучения в рассматриваемой задаче имеются, поскольку возбужденные в результате накачки осцилляторы согласованы по фазе.

Быстрый прямой излучательный переход с m-го на нулевой уровень возможен в гипотетической ситуации, когда нулевой уровень пуст и, следовательно, при любой отличной от нуля населенности m-го уровня имеется инверсия. Можно предположить, что такой случай и реализуется в рассматриваемой задаче — во всяком случае, при трансформации на четных циклотронных гармониках. Напомним, что она наиболее эффективна, когда невозмущенный электронный пучок проводится через один из радиальных нулей поперечного электрического поля вторичной волны.

Усиливающийся вторичный волновой импульс, локализованный на переднем фронте сжатого первичного импульса, а затем его обгоняющий, встречает на своем пути электронный пучок с уменьшающимся размахом циклотронных колебаний (до

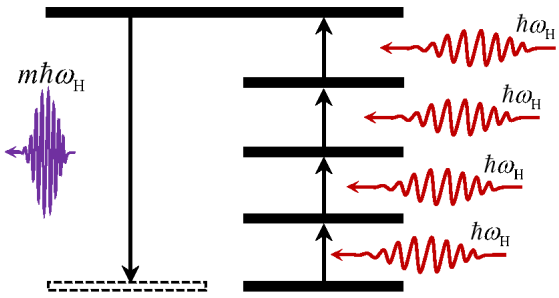

Рис. 13. Упрощенная схема процесса с многофотонной накачкой энергетического уровня, соответствующего m-й гармонике циклотронной частоты и высвечиванием фотона с кратной частотой при переходе на «диссипативно разрушающийся» уровень нулевой энергии (обозначен штриховым контуром)

этого возбужденных поглотившимся при компрессии фронтом первичного импульса). Поэтому по мере продвижения вторичного импульса его связь с возбуждающим током постепенно уменьшается, в то время как сам импульс усиливается. Сочетание этих двух факторов приводит к ситуации, когда во вторичном импульсе поле, действующее на осцилляторы, сохраняется постоянным и условия энергообмена воспроизводятся автомодельным образом. При этом энергия, отбираемая полем вторичной волны от волны высокочастотного тока (и восполняемая работой поля порождающего импульса, покуда последний не затух), постоянно выводится из области взаимодействия с пучком.

Этот механизм диссипации энергии из порождающего импульса (связь поля которого с осцилляторами в пучке мало зависит от амплитуды циклотронных колебаний) существует независимо от излучательного механизма самовоспроизведения солитона самоиндуцированной прозрачности, постоянно его опережает (поскольку локализован на фронте импульса) и поэтому находится вне конкуренции с ним. Это и объясняет возможность для импульса вторичной моды усиливаться, хотя она и уступает первичной моде по связи с циклотронными осцилляторами пучка.

В терминах квантовой электроники механизм частотно-модовой трансформации можно интерпретировать как коллективное спонтанное излучение с движущегося края области возбуждения в активной среде в область, где отсутствуют частицы, способные реагировать на излучение — что формально и означает переход на свободный от частиц уровень (см. рис. 13).

В пользу того, что генерация вторичного импульса не носит вынужденного характера, говорит и следующее наблюдение, сделанное в расчетах с эффективным удвоением частоты в многоволновой модели. Если исключить поле вторичной волновой моды из уравнений движения электронов (продолжая решать уравнение возбуждения для этой моды), то картина трансформации не претерпевает больших изменений, а ее эффективность даже увеличивается. Таким образом, обратное воздействие поля вторичной волны на ансамбль излучающих осцилляторов не играет принципиальной роли, и оно скорее негативно.

В описанной картине имеется сходство с процессом генерации ультракоротких СВЧ-импульсов в режиме пространственного накопления энергии, который реализуется (см., например, [14–16]) в протяженной электронно-волновой системе типа черенковской релятивистской ЛОВ со связью между пучком и синхронной (–1)-й гармоникой волны, уменьшающейся по определенному закону по ходу распространения импульса вдоль замедляющей системы. В последнем случае за счет непрерывного перевода энергии, отбираемой от электронного пучка полем синхронной гармоники в основную пространственную гармонику волны, происходит формирование в основной гармонике бегущего импульса неизменной формы с линейно нарастающей мощностью, а в синхронной гармонике подобного же импульса, но постоянной амплитуды, в сущности, диссипативного солитона. При этом следствием активного характера «диссипации» энергии является фазировка высокочастотного тока повсюду точно в максимуме тормозящей фазы поля (чисто вещественная и отрицательная высокочастотная проводимость электронного пучка), что и обеспечивает возможность формально неограниченного накопления энергии в бегущем волновом импульсе.

В случае частотно-модовой трансформации, как это видно в расчетах, высокочастотный ток в усиливающемся вторичном импульсе действительно близок по фазе к середине тормозящей фазы поля волны. Однако отличие заключается в том, что профиль пучково-волновой связи привязан не к амплитуде гофрировки замедляющей системы, а к профилю амплитуды циклотронных колебаний, возбужденных поглотившимся при компрессии фронтом первичного СВЧ-импульса. Кроме того, убывает и сам высокочастотный ток. При этом протяженности отрезка взаимодействия в том и другом случаях сопоставимы: около двух десятков длин волн.

Просматривающаяся общность двух задач позволяет надеяться на отыскание сходных аналитических решений, в том числе с привлечением методов анализа уравнений, использованными в работах [13, 17, 18]. Не исключено, что в перспективе могут быть найдены и солитоноподобные волновые решения, включающие объемный заряд, тем более, что теория уединенных волн объемного заряда в протяженных сильноточных электронных пучках хорошо развита [19, 20].

Приведенные выше рассуждения наилучшим образом подходят к трансформации на четных циклотронных гармониках. Случай нечетных гармоник, при котором пучково-волновая связь также уменьшается, но не до нуля, требует уточнения. Тем не менее есть основания утверждать, что частотно-модовая трансформация ультракоротких гигаваттных СВЧ-импульсов при циклотронном механизме взаимодействия возникает в результате конкуренции между диссипативным солитоном вторичной волны и солитоном самоиндуцированной прозрачности порождающей волны.

9. ВЫВОДЫ

В осесимметричном полностью электромагнитном численном эксперименте продемонстрирована частотно-модовой трансформация ультракоротких гигаваттных СВЧ-импульсов на гармониках циклотронной частоты вплоть до пятой.

Показано, что эффективность трансформации на четных гармониках циклотронной частоты выше, чем на нечетных, что объясняется более эффективным образованием канала диссипативного отвода энергии за счет наличия убывающей связи поля вторичного импульса с осцилляторами пучка при пропускании его на радиусе, соответствующем радиальному нулю поперечного поля вторичной моды. Этот эффект, как предполагается, и делает частотно-модовую трансформацию в принципе возможной.

В целом, частотно-модовую трансформацию СВЧ-импульса можно интерпретировать как результат конкуренции диссипативного солитона вторичной волны с солитоном самоиндуцированной прозрачности порождающей волны, а в терминах квантовой электроники — как результат когерентного спонтанного (коллективного) излучения с движущегося края области возбуждения в активной среде.

Сравнительная конкурентоспособность различных волноводных мод при частотно-модовой трансформации может быть удовлетворительно оценена из соображений их близости к синхронизму с порождающей волной с учетом величины связи поля моды с током циклотронного осциллятора.

Разработана специализированная многоволновая численная модель электронно-волнового взаимодействия на основе PiC-метода и уравнений возбуждения волноводных мод с отдельным учетом влияния объемного заряда. Первая апробация модели применительно к режиму удвоения частоты в двух- и трехволновой постановках показала удовлетворительное согласие с результатами полностью электромагнитного численного эксперимента. При этом, в частности, показано существенное влияние присутствия волны магнитного типа TE_{01} на эффективность трансформации $TM_{01} \to TM_{02}$.

Влияние поля объемного заряда на процесс трансформации существенно, несмотря на небольшой по сравнению с предельным ток электронного пучка. Оно проявляется, во-первых, в статическом сдвиге частоты циклотронного резонанса за счет уменьшения кинетической энергии электронов (из-за «провисания» потенциала), во-вторых, по причине высокочастотных колебаний последнего — в появлении ангармонизма у циклотронных осцилляторов. Как и в приборах черенковского типа, упругие кулоновские силы влияют на качество формируемых электронных сгустков, в некотором диапазоне величин объемного заряда улучшая качество группировки электронов. С другой стороны, эти силы приводят к выбросу частиц из компактируемых сгустков в положительном и отрицательном направлениях, появлению фона из разгруппированных частиц и развитию обратного электронного тока.

Что касается практической разработки частотно-модовых преобразователей гигаваттных СВЧ-импульсов на основе рассматриваемого явления, то ей следует предпослать эксперименты, включающие исследование факторов, способных вызвать нарушение аксиальной симметрии электронно-волнового процесса, в том числе за счет развития неустойчивостей в электронном пучке при его транспортировке на расстояние в десятки длин волн.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 24-29-00059.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов. Вклад авторов равноценен.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. M. Totmeninov, V. Yu. Konev, O. O. Mutylin, and I. V. Pegel, JETP Lett. **120**, 214 (2024) [Е. М. Тотьмининов, В. Ю. Конев, О. О. Мутылин, И. В. Пегель, Письма в ЖЭТФ **120**, 219 (2024)].

2. Yu. K. Kalynov, V. N. Manuilov, I. V. Osharin, A. V. Savilov, and A. Sh. Fiks, Radiophys. Quantum Electron. **63**, 321 (2020) [Ю. К. Калынов, В. Н. Мануилов, И. В. Ошарин, А. В. Савилов, А. Ш. Фикс, Изв. вузов. Радиофизика **63**, 357 (2020)].

3. I. V. Bandurkin, V. L. Bratman, A. V. Savilov, S. V. Samsonov, and A. B. Volkov, Phys. Plasmas **16**, 070701 (2009).

4. M. Yu. Glyavin, G. G. Denisov, I. V. Zheleznov, I. V. Zotova, A. M. Malkin, and A. S. Sergeev, Radiophys. Quantum Electron. **66**, 479 (2023) [М. Ю. Глявин, Г. Г. Денисов, И. В. Железнов, И. В. Зотова, А. М. Малкин, А. С. Сергеев, Изв. вузов. Радиофизика **66**, 527 (2023)].

5. V. P. Tarakanov, in: *Mathematical Modeling. Problems and Results*, Nauka, Moscow (2003), p. 456 [В. П. Тараканов, в кн.: *Математическое моделирование. Проблемы и результаты*, Наука, Москва (2003), с. 456].

6. G. A. Mesyats, *Explosive electron emission*, Fizmatlit, Moscow (2011) [Г. А. Месяц, *Взрывная электронная эмиссия*, Физматлит, Москва (2011)].

7. I. V. Pegel, Rus. Phys. J. **39**, 1186 (1996) [И. В. Пегель, Изв. вузов. Физика **39**, 31 (1996)].

8. I. V. Pegel, Rus. Phys. J. **39**, 1210 (1996) [И. В. Пегель, Изв. вузов. Физика **39**, 62 (1996)].

9. L. A. Weinstein, V. A. Solntsev, *Lectures on Microwave Electronics*, Sov. Radio, Moscow (1973) [Л. А. Вайнштейн, В. А. Солнцев, *Лекции по сверхвысокочастотной электронике*, Сов. радио, Москва (1973)].

10. N. S. Ginzburg, S. P. Kuznetsov, and T. N. Fedoseeva, Radiophys. Quantum Electron. **21**, 728 (1978) [Н С. Гинзбург, С. П. Кузнецов, Т. Н. Федосеева, Изв. вузов. Радиофизика **21**, 1037 (1978)].

11. N. S. Ginzburg, I. V. Zotova, A. S. Sergeev, E. R. Kocharovskaya, M. I. Yalandin, S. A. Shunailov, K. A. Sharypov, and N. M. Ryskin, Radiophys. Quantum Electron. **54**, 532 (2012) [Н. С. Гинзбург, И. В. Зотова, А. С. Сергеев, Е. Р. Кочаровская, М. И. Яландин, С. А. Шунайлов, К. А. Шарыпов, Н. М. Рыскин, Изв. вузов. Радиофизика **54**, 588 (2011)].

12. N. S. Ginzburg, I. V. Zotova, E. R. Kocharovskaya, A. S. Sergeev, I. V. Zheleznov, and V. Yu. Zaslavsky, Radiophys. Quantum Electron. **63**, 716 (2021) [Н. С. Гинзбург, И. В. Зотова, Е. Р. Кочаровская, А. С. Сергеев, И. В. Железнов, В. Ю. Заславский, Изв. вузов. Радиофизика **63**, 796 (2020)].

13. A. S. Sergeev, L. A. Yurovskiy, N. S. Ginzburg, I. V. Zotova, I. V. Zheleznov, R. M. Rozental, A. A. Rostuntsova, N. M. Ryskin, Chaos **32**, 053123 (2022).

14. A. A. Eltchaninov, S. D. Korovin, V. V. Rostov, I. V. Pegel, G. A. Mesyats, S. N. Rukin, V. G. Shpak, M. I. Yalandin, and N. S. Ginzburg, LPB **21**, 187 (2003).

15. A. A. El'chaninov, S. D. Korovin, V. V. Rostov, I. V. Pegel', G. A. Mesyats, M. I. Yalandin, and N. S. Ginzburg, JETP Lett. **77**, 266 (2003) [А. А. Ельчанинов, С. Д. Коровин, В. В. Ростов, И. В. Пегель, Г. А. Месяц, М. И. Яландин, Н. С. Гинзбург, Письма в ЖЭТФ **77**, 314 (2003)].

16. Е. М. Тотьмининов, В. Ю. Конев, А. И. Климов, И. В. Пегель, Письма в ЖЭТФ **115**, 479 (2022) [E. M. Totmeninov, V. Y. Konev, A. I. Klimov, I. V. Pegel, JETP Lett. **115**, 444 (2022)].

17. А. А. Ростунцова, Н. М. Рыскин, ЖЭТФ **154**, 691 (2018) [A. A. Rostuntsova and N. M. Ryskin, JETP **127**, 587 (2018)].

18. A. A. Rostuntsova, N. M. Ryskin, and N. S. Ginzburg, Phys. Plasmas **27**, 053108 (2020).

19. Н. М. Рыскин, Изв. вузов. ПНД **2**, 84 (1994) [N. M. Ryskin, Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics **2**, 84 (1994)].

20. Н. М. Рыскин, Д. И. Трубецков, *Нелинейные волны*, Ленанд, Москва (2021) [N. M. Ryskin, D. I. Trubetskov, *Nonlinear waves*, Lenand, Moscow (2021)].

On the Frequency-Mode Transformation of Ultrashort Gigawatt Microwave Pulses During Cyclotron Interaction With a Counter-Propagating Relativistic Electron Beam

I. V. Pegel, E. M. Totmeninov, V. Yu. Konev, O. O. Mutylin

Institute of High Current Electronics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences
634055, Tomsk, Russia

Abstract

A fully electromagnetic PiC-simulation is presented demonstrating the transformation of 1ns X-band gigawatt microwave pulses interacting with a counterpropagating electron beam under cyclotron resonance conditions from the lowest axisymmetric modes of a circular waveguide to the higher axisymmetric modes with a multiplication of the oscillation frequency up to fivefold. The peak power of the transformed pulses is comparable to that of the original pulse. The influence of phase matching and electron-wave coupling on the competition of secondary waves is estimated. In a numerical model based on the PiC-method and the waveguide modes excitation equations, dynamics of the primary and secondary waves in the frequency-doubling regime is tracked. The effect of the electron beam space charge is determined. The frequency-mode transformation is explained in terms of competition between the dissipative soliton of the secondary wave and the self-induced transparency soliton of the primary wave.

Keywords: relativistic electron beam, ultrashort microwave pulse, cyclotron resonance, frequency multiplication, mode competition, soliton, space charge, numerical simulation

Funding. The work was financially supported by the Russian Science Foundation (project 24-29-00059).

Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.

Author's contributions. The contribution of the authors is equivalent.