

# О ХАОТИЧЕСКИХ РЕЖИМАХ ПОВЕДЕНИЯ ПРОВОДИМОСТИ В ПРИБЛИЖЕНИИ СИЛЬНОЙ СВЯЗИ

А. Я. Мальцев\*

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук  
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 10 октября 2025 г.,  
после переработки 10 октября 2025 г.  
Принята к публикации 26 октября 2025 г.

Исследована вероятность обнаружения наиболее нетривиальных режимов поведения проводимости в металлах, электронный спектр которых описывается приближением сильной связи. Рассмотренные режимы связаны с появлением на поверхности Ферми электронных траекторий очень сложной формы и отвечают нетривиальному («скейлинговому») поведению тензора проводимости в сильных магнитных полях. Геометрия таких траекторий, а также отвечающие им режимы поведения проводимости хорошо изучены с теоретической точки зрения, вместе с тем они пока не были обнаружены экспериментально. Результаты нашей работы позволяют, в частности, оценить вероятность их появления, а также указать условия их возможного обнаружения для широкого класса проводников.

**Ключевые слова:** сложные поверхности Ферми, гальваномагнитные явления

DOI: 10.7868/S3034641X26010066

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе мы исследуем вероятность появления особых «хаотических» режимов поведения проводимости в сильных магнитных полях в проводниках с электронным спектром, задаваемым приближением сильной связи. Более точно, мы рассматриваем проводимость в особо чистых (монокристаллических) образцах при низких температурах ( $T \leq 1$  К), помещенных в сильное магнитное поле ( $B \geq 1$  Тл). Эта ситуация отвечает большой длине свободного пробега электронов, обеспечивающей выполнение условия  $\omega_B \tau \gg 1$ , где  $\omega_B = eB/m^*c$  — циклотронная частота, а  $\tau$  — время свободного пробега электрона в кристалле.

Как хорошо известно (см., например, [1–4]), квазиклассическая динамика электрона во внешних электрическом и магнитном полях задается системой

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_{\text{gr}}(\mathbf{p}) \equiv \nabla \epsilon(\mathbf{p}) \quad (1)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}_{\text{gr}}(\mathbf{p}) \times \mathbf{B}] \equiv e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\nabla \epsilon(\mathbf{p}) \times \mathbf{B}]. \quad (2)$$

В системе (1), (2) величина  $\mathbf{r}$  представляет координату электрона в кристалле, в то время как  $\mathbf{p}$  является квазиимпульсом электрона.

Величина  $\mathbf{p}$  определена с точностью до векторов обратной решетки  $L^*$ , базис которой задается векторами

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= 2\pi\hbar \frac{\mathbf{l}_2 \times \mathbf{l}_3}{\mathbf{l}_1 \cdot [\mathbf{l}_2 \times \mathbf{l}_3]}, \\ \mathbf{a}_2 &= 2\pi\hbar \frac{\mathbf{l}_3 \times \mathbf{l}_1}{\mathbf{l}_1 \cdot [\mathbf{l}_2 \times \mathbf{l}_3]}, \\ \mathbf{a}_3 &= 2\pi\hbar \frac{\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2}{\mathbf{l}_1 \cdot [\mathbf{l}_2 \times \mathbf{l}_3]}, \end{aligned} \quad (3)$$

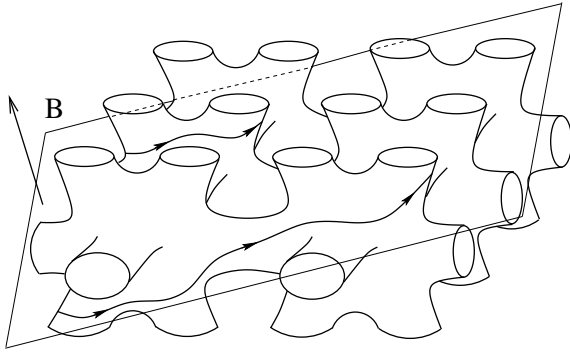
где  $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3$  — векторы базиса кристаллографической решетки  $L$ .

Другими словами, можно сказать, что квазиимпульс  $\mathbf{p}$  является точкой трехмерного тора  $\mathbb{T}^3$ , задаваемого факторизацией полного пространства  $\mathbb{R}^3$  по векторам решетки  $L^*$ :

$$\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3 / L^*.$$

Зависимость энергии электрона  $\epsilon(\mathbf{p})$  от его квазиимпульса (дисперсионное соотношение) также может рассматриваться либо как функция на торе  $\mathbb{T}^3$ , либо как 3-периодическая функция в  $\mathbb{R}^3$  с периодами (3).

\* E-mail: maltsev@itp.ac.ru

Рис. 1. Траектории системы (4) в  $\mathbf{p}$ -пространстве

Как следует из (1), (2), электронные траектории в  $\mathbf{r}$ -пространстве полностью определяются решениями подсистемы (2) (и начальными условиями), т. е. траекториями электронов в  $\mathbf{p}$ -пространстве.

В рассматриваемой нами ситуации величина  $\mathbf{E}$  в системе (2) предполагается бесконечно малой. В то же время условие  $\omega_{BT} \gg 1$  предполагает довольно большую величину магнитного поля. Как следствие этого, основную роль в описании транспортных явлений в пределе  $\omega_{BT} \gg 1$  играет, в действительности, система

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}_{gr}(\mathbf{p}) \times \mathbf{B}] \equiv \frac{e}{c} [\nabla \epsilon(\mathbf{p}) \times \mathbf{B}]. \quad (4)$$

Траектории системы (4) в полном  $\mathbf{p}$ -пространстве задаются пересечениями плоскостей, ортогональных  $\mathbf{B}$ , и 3-периодических поверхностей  $\epsilon(\mathbf{p}) = \text{const}$  (рис. 4).

Как мы уже сказали, электронные траектории  $\mathbf{r}(\mathbf{t})$  в координатном пространстве полностью определяются соответствующими решениями  $\mathbf{p}(\mathbf{t})$  системы (2). При переходе к системе (4) можно видеть также, что проекции траекторий  $\mathbf{r}(\mathbf{t})$  на плоскость, ортогональную  $\mathbf{B}$ , подобны траекториям  $\mathbf{p}(\mathbf{t})$ , повернутым на  $90^\circ$ .

Как можно видеть (рис. 4), траектории системы (4) могут быть как замкнутыми, так и незамкнутыми (открытыми) в  $\mathbf{p}$ -пространстве. Форма траекторий (4) зависит при этом как от формы поверхности  $\epsilon(\mathbf{p}) = \text{const}$ , так и от направления магнитного поля.

Как было впервые показано в школе И. М. Лифшица [5–8], условие  $\omega_{BT} \gg 1$  отвечает ситуации, когда поведение проводимости (и других транспортных явлений) в металле определяется главным образом формой траекторий системы (4) и, в частности, наличием или отсутствием ее открытых траекторий на поверхности Ферми.

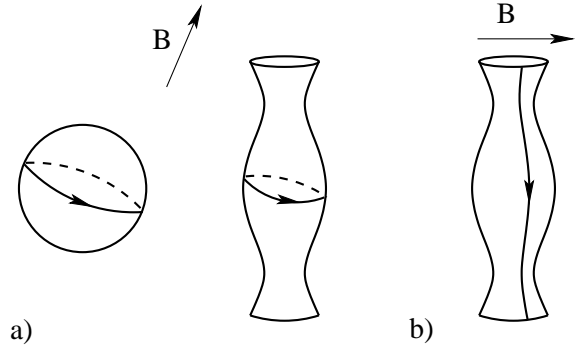


Рис. 2. Замкнутые (а) и открытые периодические (б) траектории системы (4) на поверхности Ферми

Вклад замкнутых и открытых периодических траекторий (рис. 2) в тензор проводимости в пределе  $\omega_{BT} \rightarrow \infty$  может быть соответственно представлен следующими асимптотическими формулами [5]:

$$\Delta \sigma_{closed}^{kl} \simeq \frac{ne^2\tau}{m^*} \begin{pmatrix} (\omega_{BT})^{-2} & (\omega_{BT})^{-1} & (\omega_{BT})^{-1} \\ (\omega_{BT})^{-1} & (\omega_{BT})^{-2} & (\omega_{BT})^{-1} \\ (\omega_{BT})^{-1} & (\omega_{BT})^{-1} & * \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$\Delta \sigma_{periodic}^{kl} \simeq \frac{ne^2\tau}{m^*} \begin{pmatrix} (\omega_{BT})^{-2} & (\omega_{BT})^{-1} & (\omega_{BT})^{-1} \\ (\omega_{BT})^{-1} & * & * \\ (\omega_{BT})^{-1} & * & * \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Формулы (5) и (6) описывают асимптотическое поведение тензора  $\sigma^{kl}(\mathbf{B})$  в пределе  $\omega_{BT} \rightarrow \infty$ . Здесь предполагается, что каждый матричный элемент в (5), (6) определен, в действительности, с точностью до постоянного множителя, а символ «\*» обозначает некоторую безразмерную константу порядка 1.

В формулах (5), (6) направление оси  $z$  совпадает с направлением магнитного поля. Кроме того, в формуле (6) направление оси  $x$  совпадает со средним направлением периодических траекторий в  $\mathbf{p}$ -пространстве. Легко видеть, что формулы (5) и (6) отличает, прежде всего, сильная анизотропия проводимости в плоскости, ортогональной  $\mathbf{B}$ , во втором случае.

Величины  $n$  и  $m^*$  имеют смысл концентрации носителей заряда и эффективной массы электрона в кристалле и также определены по порядку величины. Можно отметить, что величина  $\omega_B = eB/m^*c$  здесь также имеет несколько условный смысл, и условие  $\omega_{BT} \gg 1$  может быть сформулировано как условие того, что электрон успевает пройти достаточно большое расстояние (заметно большее размеров зоны Бриллюэна) вдоль траекторий системы

(4) между двумя актами рассеяния. С учетом сделанных замечаний формулы (5), (6) хорошо описывают поведение тензора  $\sigma^{kl}(B)$  в представленных ситуациях.

Периодические траектории представляют наиболее простые открытые траектории системы (4). Вместе с тем они не являются единственным типом открытых траекторий (4) [6–8]. Надо сразу отметить что более сложные открытые траектории системы (4) могут возникать лишь на поверхностях Ферми достаточной сложности (рис. 4).

Задача полной классификации открытых траекторий системы (4) для произвольных законов дисперсии  $\epsilon(\mathbf{p})$  была поставлена Новиковым в работе [9]. Исследование этой проблемы в его топологической школе [10–17] позволило получить целый ряд нетривиальных топологических результатов, дающих основу для полной классификации различных типов открытых траекторий (4), полученной к настоящему времени.

В некотором смысле «главным» типом открытых траекторий системы (4) являются устойчивые открытые траектории, т. е. траектории, устойчивые по отношению к малым вариациям дисперсионного соотношения  $\epsilon(\mathbf{p})$ , а также направления  $\mathbf{B}$ . В настоящей работе такие траектории не будут предметом самостоятельного исследования. Вместе с тем нам понадобятся связанные с ними структуры для рассмотрения более сложных траекторий (4). Приведем краткое описание общих свойств таких траекторий.

Устойчивые открытые траектории системы (4) обладают прежде всего замечательными геометрическими свойствами. А именно, каждая устойчивая открытая траектория (4) [10, 11, 13] лежит в прямой полосе конечной ширины (в каждой из плоскостей, ортогональных  $\mathbf{B}$ ), проходя ее насквозь (рис. 3). Отметим, что устойчивые открытые траектории (4) в общем случае не являются периодическими.

Вторым важным свойством устойчивых открытых траекторий системы (4) является то, что их среднее направление в  $\mathbf{p}$ -пространстве (во всех плоскостях, ортогональных  $\mathbf{B}$ ) всегда задается пересечением плоскости, ортогональной  $\mathbf{B}$ , и некоторой фиксированной целочисленной (порожденной двумя векторами обратной решетки) плоскости  $\Gamma$ , неизменной при малых вариациях направления  $\mathbf{B}$  и уровня энергии  $\epsilon$ . Данное свойство может быть обнаружено экспериментально и явилось основанием для введения в работе [18] «топологических чисел», наблюдаемых в проводимости нормальных металлов.

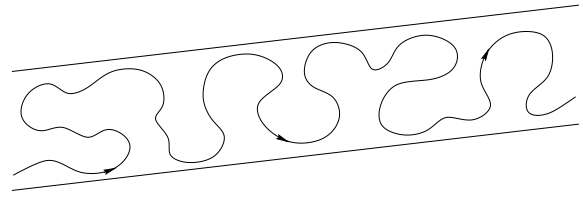


Рис. 3. Вид устойчивой открытой траектории системы (4) в плоскости, ортогональной  $\mathbf{B}$ , (схематично)

В общем случае каждое дисперсионное соотношение  $\epsilon(\mathbf{p})$  характеризуется своим собственным набором областей  $V_\alpha$  в пространстве параметров  $\mathbf{B}$  и  $\epsilon$ , отвечающих появлению устойчивых открытых траекторий, связанных с некоторыми целочисленными плоскостями  $\Gamma_\alpha$  в указанном выше смысле.

Множество областей  $V_\alpha$  для фиксированного дисперсионного соотношения  $\epsilon(\mathbf{p})$  допускает довольно удобное описание. Это связано с тем, что появление устойчивых открытых траекторий на некотором уровне  $\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon_0$  при фиксированном направлении  $\mathbf{B}$  допускает появление лишь устойчивых открытых траекторий того же самого направления также на всех остальных уровнях  $\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon$ .

Поэтому естественно вместо параметров  $(\mathbf{B}, \epsilon)$  ограничиться параметром

$$\mathbf{n} = \mathbf{B}/B \in \mathbb{S}^2,$$

т. е. лишь направлением магнитного поля.

В действительности, имеет место более сильное утверждение [17]. А именно, появление открытых траекторий при заданном направлении  $\mathbf{B}$  всегда происходит в некотором замкнутом интервале энергий

$$\epsilon \in [\epsilon_1(\mathbf{B}), \epsilon_2(\mathbf{B})],$$

который может стягиваться в точку

$$\epsilon_0(\mathbf{B}) = \epsilon_1(\mathbf{B}) = \epsilon_2(\mathbf{B})$$

(траектории при  $\epsilon \notin [\epsilon_1(\mathbf{B}), \epsilon_2(\mathbf{B})]$  при этом являются замкнутыми).

Вместо областей  $V_\alpha$  достаточно при этом указать области  $W_\alpha \subset \mathbb{S}^2$ , отвечающие появлению устойчивых открытых траекторий (4) (хотя бы на одном уровне  $\epsilon$ ) и задать функции  $\epsilon_1(\mathbf{n})$  и  $\epsilon_2(\mathbf{n})$ , а также плоскость  $\Gamma_\alpha$  в каждой из этих областей (рис. 4).

Мы будем называть здесь области  $W_\alpha \subset \mathbb{S}^2$  зонами устойчивости, а их расположение на сфере — угловой диаграммой дисперсионного закона  $\epsilon(\mathbf{p})$ .

Как было показано в работе [17], зоны устойчивости  $W_\alpha$  представляют области с кусочно-гладкой

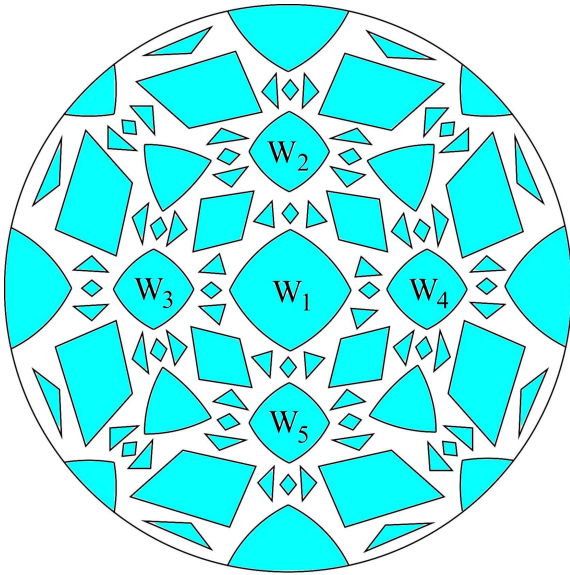


Рис. 4. Угловая диаграмма фиксированного дисперсионного соотношения  $\epsilon(\mathbf{p})$  (схематично)

границей, а их объединение всюду плотное на сфере  $\mathbb{S}^2$ . Более того, для соотношений  $\epsilon(\mathbf{p})$ , удовлетворяющих «физическому» условию

$$\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon(-\mathbf{p}),$$

объединение всех  $W_\alpha$  образует множество полной меры на  $\mathbb{S}^2$ .

Функции  $\epsilon_1(\mathbf{n})$  и  $\epsilon_2(\mathbf{n})$  являются непрерывными, если рассматривать их на множестве направлений  $\mathbf{V}$ , не приводящих к появлению периодических открытых траекторий системы (4). В частности, они непрерывны на множестве направлений  $\mathbf{V}$  максимальной иррациональности, так что их можно продолжить до непрерывных функций  $\tilde{\epsilon}_1(\mathbf{n})$ ,  $\tilde{\epsilon}_2(\mathbf{n})$ , определенных всюду на единичной сфере  $\mathbb{S}^2$ . При специальных направлениях  $\mathbf{V}$ , отвечающих появлению периодических открытых траекторий (4), функции  $\epsilon_1(\mathbf{n})$ ,  $\epsilon_2(\mathbf{n})$  имеют скачки, при этом всегда [17]

$$\epsilon_1(\mathbf{n}) \leq \tilde{\epsilon}_1(\mathbf{n}) \leq \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{n}) \leq \epsilon_2(\mathbf{n}).$$

Интересно, что все угловые диаграммы (для произвольных  $\epsilon(\mathbf{p})$ ) могут быть разделены на два типа, а именно, диаграммы, содержащие лишь одну зону устойчивости (покрывающую всю сферу  $\mathbb{S}^2$ ) и диаграммы, содержащие бесконечное число зон  $W_\alpha$  [17]. Диаграммы первого типа возникают для некоторых специфических (в основном квазиодномерных) классов проводников, и мы не будем рассматривать

их здесь. Для большинства проводников отвечающие им диаграммы содержат бесконечное число зон устойчивости  $W_\alpha$ . В частности, это относится к рассматриваемым здесь модельным дисперсионным соотношениям  $\epsilon(\mathbf{p})$ .

Как можно видеть, устойчивые открытые траектории системы (4) возникают почти для всех (или всех) направлений  $\mathbf{V}$  для любого дисперсионного соотношения  $\epsilon(\mathbf{p})$ . Вместе с тем периодические и устойчивые открытые траектории не исчерпывают всех типов открытых траекторий системы (4) [12, 15, 16]. Траектории других типов имеют гораздо более сложное поведение, и мы будем называть их хаотическими.

Первый пример хаотической траектории системы (4) был построен Царевым [12]. Траектории типа траекторий Царева имеют асимптотическое направление в плоскостях, ортогональных  $\mathbf{V}$ , но не могут быть заключены ни в какой прямой полосе конечной ширины. Вклад таких траекторий в тензор проводимости лишь немногим отличается от вклада (6), в частности, он также отвечает сильной анизотропии проводимости в плоскости, ортогональной  $\mathbf{V}$ . Траектории типа траекторий Царева представляют один из основных типов хаотических траекторий (4) (по классификации) и описывают хаотические траектории, возникающие при «частично» иррациональных направлениях  $\mathbf{V}$  (плоскость, ортогональная  $\mathbf{V}$ , содержит вектор обратной решетки).

Хаотические траектории более сложного типа (траектории Дынникова) были открыты в работах [15, 16]. Траектории этого типа могут возникать лишь для направлений  $\mathbf{V}$  максимальной иррациональности и имеют очень сложную геометрию, блуждая «всюду» в плоскости, ортогональной  $\mathbf{V}$  (рис. 5).

Вклад хаотических траекторий Дынникова в тензор проводимости является наиболее нетривиальным [19, 20]. Одной из особенностей этого вклада является обращение в нуль всех компонент  $\Delta\sigma_{chaotic}^{kl}(B)$  (включая проводимость вдоль направления  $\mathbf{V}$ ) в пределе  $\omega_B\tau \rightarrow \infty$ :

$$\Delta\sigma_{chaotic}^{kl}(B) = \frac{ne^2\tau}{m^*} \begin{pmatrix} o(1) & o(1) & o(1) \\ o(1) & o(1) & o(1) \\ o(1) & o(1) & o(1) \end{pmatrix}.$$

Другой особенностью этого вклада является появление дробных степеней  $\omega_B\tau$  в зависимости компонент  $\Delta\sigma_{chaotic}^{kl}(B)$  от величины  $B$ . Такое поведение компонент  $\Delta\sigma_{chaotic}^{kl}(B)$  отражает скейлинговое поведение траекторий Дынникова в плоскости,

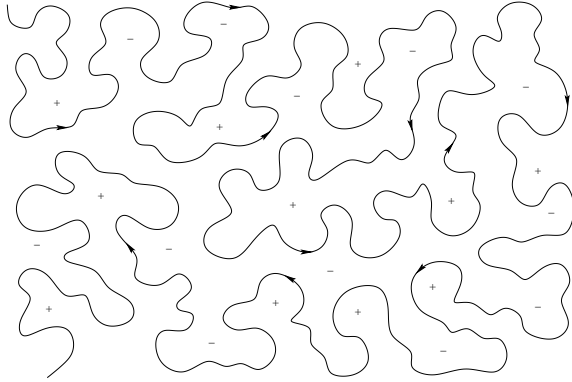


Рис. 5. Вид хаотической траектории Дынникова (схематично)

ортогональной  $\mathbf{B}$ , обладающее, как правило, анизотропными свойствами. При подходящем выборе осей  $x$  и  $y$  можно при этом записать для компонент  $\Delta\sigma_{chaotic}^{kl}(B)$ :

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_{chaotic}^{xx}(B) &\simeq \frac{ne^2\tau}{m^*} (\omega_B\tau)^{2\nu_1-2}, \\ \Delta\sigma_{chaotic}^{yy}(B) &\simeq \frac{ne^2\tau}{m^*} (\omega_B\tau)^{2\nu_2-2}, \\ \Delta\sigma_{chaotic}^{zz}(B) &\simeq \frac{ne^2\tau}{m^*} (\omega_B\tau)^{2\nu_3-2},\end{aligned}\quad (7)$$

где  $0 < \nu_1, \nu_2, \nu_3 < 1$  представляют собой главные скейлинговые индексы траектории.

Надо сказать, что в общем случае вклад (7) должен быть просуммирован с вкладом (5), вносимым замкнутыми траекториями на поверхности Ферми. Как следствие этого, проводимость  $\sigma^{zz}(B)$  подавляется лишь частично, оставаясь конечной при  $B \rightarrow \infty$ . В плоскости, ортогональной  $\mathbf{B}$ , скейлинговый вклад (7) в проводимость при этом остается главным.

Все хаотические траектории системы (4) являются неустойчивыми и, в частности, могут возникать лишь на единственном уровне  $\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon_0(\mathbf{n})$  при заданном направлении  $\mathbf{B}$  [13]. Соответствующие направления  $\mathbf{B}$  лежат в дополнении  $\mathcal{M}$  к объединению зон  $W_\alpha$  (вместе с границами) на единичной сфере (рис. 6)

$$\mathbf{n} \in \mathcal{M} = \mathbb{S}^2 \setminus \bigcup_{\alpha} \overline{W_\alpha}.$$

Множество  $\mathcal{M}$  представляет собой сложное множество фрактального типа на  $\mathbb{S}^2$ . Согласно гипотезе Новикова, его фрактальная размерность строго меньше двух. В целом, как свойства множества  $\mathcal{M}$  так и свойства хаотических траекторий являются

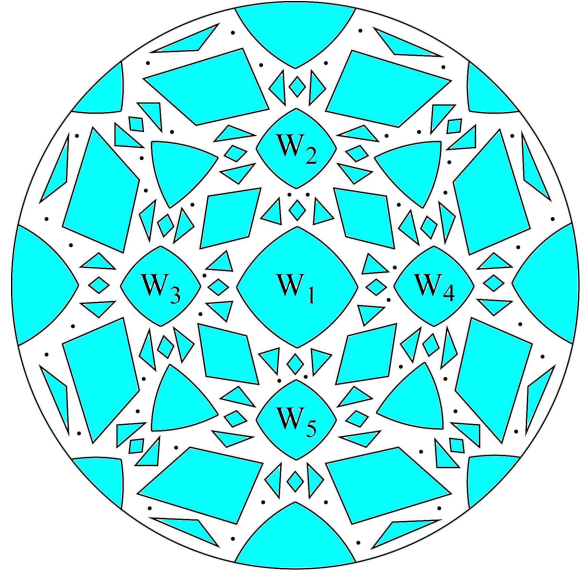


Рис. 6. Хаотические направления  $\mathbf{B}$  на угловой диаграмме (схематично)

предметом интенсивного исследования и в настоящее время, проявляя свои все более интересные особенности [21–36].

Как можно видеть, поиск хаотических траекторий системы (4) является довольно сложной задачей и требует, во всяком случае, специального подбора направления  $\mathbf{B}$ . Вместе с тем такие траектории обязательно возникают для дисперсионных соотношений  $\epsilon(\mathbf{p})$ , отвечающих угловым диаграммам с бесконечным числом зон устойчивости  $W_\alpha$  [17]. Экспериментальное наблюдение соответствующих вкладов (7), однако, существенно ограничивается тем, что их могут вносить лишь траектории, лежащие на поверхности Ферми  $\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon_F$ .

Целью данной работы является оценка вероятности наблюдения «хаотических» режимов (7) в реальных проводниках, основанная на численных исследованиях угловых диаграмм реальных дисперсионных соотношений. В качестве модельных дисперсионных соотношений мы используем соотношения, возникающие в приближении сильной связи в кристаллах кубической симметрии. Результаты численных исследований позволяют при этом не только дать оценку вероятности обнаружения «хаотических» режимов, но и указать параметры проводников, в которых их обнаружение наиболее вероятно.

## 2. УГЛОВЫЕ ДИАГРАММЫ ПОВЕРХНОСТЕЙ ФЕРМИ И ХАОТИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ

Как мы уже сказали, поведение тензора  $\sigma^{kl}(B)$  определяется лишь траекториями (4), лежащими на поверхности Ферми проводника  $S_F$ :

$$\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon_F.$$

Появление устойчивых открытых траекторий на поверхности  $S_F$  при заданном направлении  $\mathbf{B}$  определяется двумя условиями:

$$\mathbf{n} \in W_\alpha, \quad \tilde{\epsilon}_1(\mathbf{n}) \leq \epsilon_F \leq \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{n}).$$

Аналогично, появление хаотических траекторий на поверхности Ферми требует дополнительного условия

$$\epsilon_0(\mathbf{n}) = \epsilon_F$$

для соответствующего направления  $\mathbf{B}$ .

Для направлений  $\mathbf{B}$ , таких что

$$\mathbf{n} \in W_\alpha, \quad \epsilon_F \notin [\tilde{\epsilon}_1(\mathbf{n}), \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{n})]$$

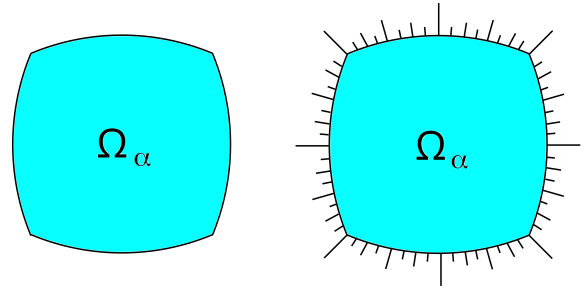
либо

$$\mathbf{n} \in \mathcal{M}, \quad \epsilon_F \neq \epsilon_0(\mathbf{n}),$$

поверхность Ферми будет содержать лишь замкнутые траектории (4) либо неустойчивые периодические траектории (для специальных направлений  $\mathbf{B}$  не максимальной иррациональности).

Естественно рассмотреть теперь угловые диаграммы, указывающие тип открытых траекторий (4) (либо их отсутствие) на поверхности Ферми. Такие угловые диаграммы могут, в частности, содержать новые зоны устойчивости  $\Omega_\alpha$ , отвечающие появлению устойчивых открытых траекторий на поверхности Ферми, а также (наиболее интересные нам) направления  $\mathbf{B}$ , отвечающие появлению хаотических траекторий на  $S_F$ . Кроме того, новые угловые диаграммы будут содержать области (на  $\mathbb{S}^2$ ), отвечающие наличию лишь замкнутых траекторий на  $S_F$ , а также линии направлений  $\mathbf{B}$ , отвечающие появлению неустойчивых периодических траекторий на  $S_F$ .

Линии направлений  $\mathbf{B}$ , отвечающие появлению неустойчивых периодических траекторий на  $S_F$ , в частности, всюду плотно примыкают к границам зон устойчивости  $\Omega_\alpha$  (рис. 7), что, в свою очередь, приводит к довольно сложному поведению проводимости вблизи границ  $\Omega_\alpha$  [37]. В нашем рассмотрении, однако, картина линий таких направлений  $\mathbf{B}$  не будет играть никакой роли, так что мы не будем их



**Рис. 7.** Зона устойчивости  $\Omega_\alpha$  и примыкающие к ней линии направлений  $\mathbf{B}$ , отвечающие появлению неустойчивых периодических траекторий на  $S_F$  (схематично)

рассматривать. Появление хаотических траекторий на поверхности Ферми при этом однозначно связано со структурой «точных математических» зон  $\Omega_\alpha$  на угловой диаграмме [38, 39], которую мы и будем рассматривать.

Каждая зона устойчивости  $\Omega_\alpha$ , очевидно, является подобластью некоторой зоны  $W_\alpha$ , такой что  $\forall \mathbf{n} \in \Omega_\alpha$  выполняется условие

$$\tilde{\epsilon}_1(\mathbf{n}) \leq \epsilon_F \leq \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{n})$$

(если это множество не пусто).

В целом, диаграмма поверхности Ферми является «поддиаграммой» полной угловой диаграммы и «выхватывает» из нее то, что относится к уровню  $\epsilon_F$ . Изменяя значения  $\epsilon_F$  в интервале  $[\epsilon_{\min}, \epsilon_{\max}]$ , где

$$\epsilon_{\min} \leq \epsilon(\mathbf{p}) \leq \epsilon_{\max},$$

мы получаем множество угловых диаграмм для поверхностей Ферми, зависящих от параметра  $\epsilon_F$ .

В случае общего положения угловые диаграммы поверхности Ферми очень просты при значениях  $\epsilon_F$ , близких к  $\epsilon_{\min}$  или  $\epsilon_{\max}$ . А именно, поскольку поверхности Ферми являются в этом случае (маленькими) сферами, они не содержат открытых траекторий (4), и вся угловая диаграмма является областью присутствия лишь замкнутых траекторий на  $S_F$ . Нам здесь будут интересны лишь достаточно сложные угловые диаграммы, отвечающие достаточно сложным поверхностям Ферми (рис. 4). Нетрудно видеть, что значения  $\epsilon_F$  должны быть в этом случае несколько удалены от границ интервала  $[\epsilon_{\min}, \epsilon_{\max}]$ .

В нашем понимании угловая диаграмма поверхности Ферми будет считаться достаточно сложной, если она содержит непустое множество зон устойчивости  $\Omega_\alpha$ . Легко видеть, что энергия Ферми должна при этом удовлетворять условию

$$\epsilon_1^A < \epsilon_F < \epsilon_2^A,$$



где

$$\epsilon_1^A = \min \tilde{\epsilon}_1(\mathbf{n}), \quad \epsilon_2^A = \max \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{n}).$$

Наиболее интересными для нас, однако, будут угловые диаграммы, содержащие не только зоны  $\Omega_\alpha$ , но и направления  $\mathbf{B}$ , отвечающие появлению хаотических траекторий на поверхности Ферми. Как оказывается [38, 39], для дисперсионных соотношений общего положения (с бесконечным числом зон  $W_\alpha$ ) такие диаграммы возникают в еще более узком интервале

$$\epsilon_F \in [\epsilon_1^B, \epsilon_2^B],$$

где

$$\begin{aligned} \epsilon_1^B &= \min \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{n}), \quad \epsilon_2^B = \max \tilde{\epsilon}_1(\mathbf{n}), \\ \epsilon_1^A &< \epsilon_1^B < \epsilon_2^B < \epsilon_2^A. \end{aligned} \quad (8)$$

Более того, все достаточно сложные угловые диаграммы поверхностей Ферми могут быть разделены на два класса.

1) Диаграммы типа А:

$$\epsilon_F \in (\epsilon_1^A, \epsilon_1^B) \cup (\epsilon_2^B, \epsilon_2^A)$$

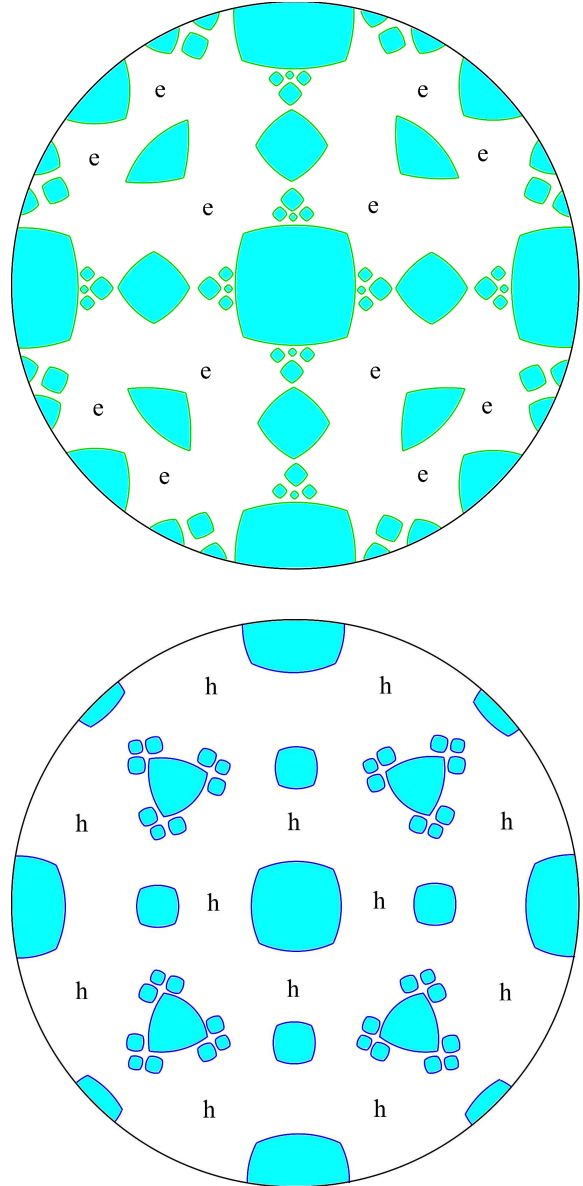
содержат конечное число зон устойчивости  $\Omega_\alpha$  и не содержат направлений  $\mathbf{B}$ , отвечающих появлению хаотических траекторий на поверхности Ферми. Для всех направлений  $\mathbf{B}$  (максимальной иррациональности), отвечающих наличию лишь замкнутых траекторий на поверхности Ферми, холловская проводимость  $\sigma^{xy}(\mathbf{B})$  имеет один и тот же тип при  $B \rightarrow \infty$  (электронный при  $\epsilon_F \in (\epsilon_1^A, \epsilon_1^B)$  и дырочный при  $\epsilon_F \in (\epsilon_2^B, \epsilon_2^A)$ ) (рис. 8). Диаграммы типа А естественно называть диаграммами типа А<sub>−</sub> при  $\epsilon_F \in (\epsilon_1^A, \epsilon_1^B)$  и диаграммами типа А<sub>+</sub> при  $\epsilon_F \in (\epsilon_2^B, \epsilon_2^A)$ .

1) Диаграммы типа В:

$$\epsilon_F \in [\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$$

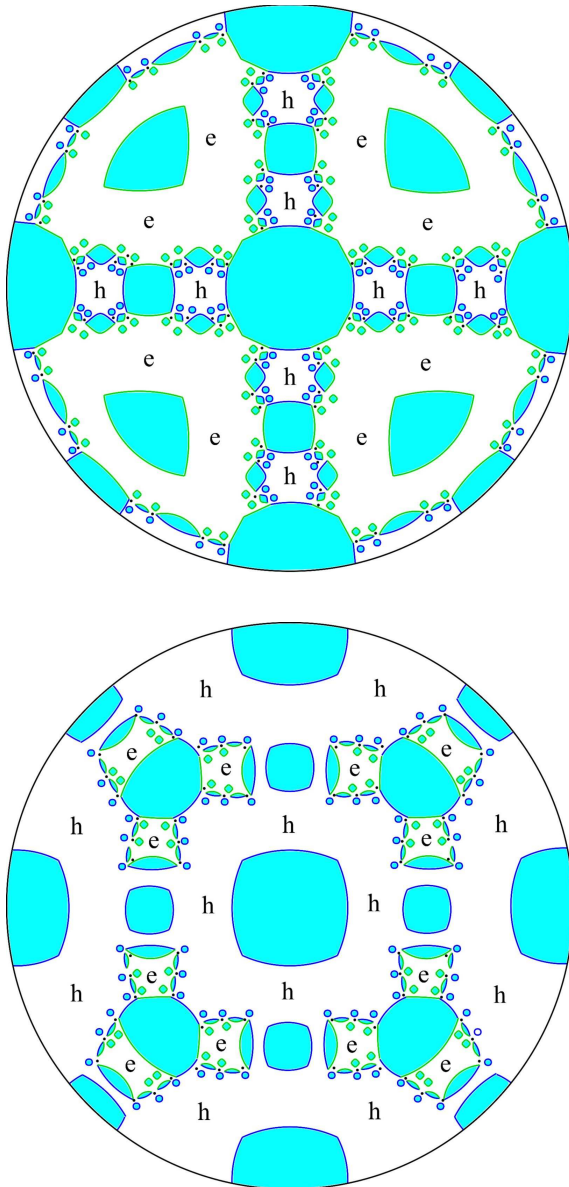
содержат бесконечное число зон устойчивости  $\Omega_\alpha$ , а также направления  $\mathbf{B}$ , отвечающие появлению хаотических траекторий на поверхности Ферми. Среди областей на  $S^2$ , отвечающих наличию лишь замкнутых траекторий на поверхности Ферми, есть области как электронной так и дырочной холловской проводимости (кроме значений  $\epsilon_F = \epsilon_1^B$  и  $\epsilon_F = \epsilon_2^B$ ) (рис. 9).

Как можно видеть, поверхностям Ферми, отвечающим диаграммам типа В, нельзя определенно приписать электронный или дырочный тип (это свойство зависит здесь от направления  $\mathbf{B}$ ). При изменении  $\epsilon_F$  в интервале  $[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$  форма диаграммы типа В меняется очень быстро, обеспечивая переход от диаграммы типа А<sub>−</sub> к диаграмме типа А<sub>+</sub> (рис. 9).



**Рис. 8.** Диаграммы типа А при  $\epsilon_F \in (\epsilon_1^A, \epsilon_1^B)$  и  $\epsilon_F \in (\epsilon_2^B, \epsilon_2^A)$  (схематично). Буквами «e» и «h» отмечены типы холловской проводимости для направлений  $\mathbf{B}$ , отвечающих наличию лишь замкнутых траекторий на поверхности Ферми

Диаграммы типа В интересны с очень многих точек зрения и, в частности, они связаны с наблюдением хаотических режимов поведения проводимости в пределе  $\omega_B \tau \rightarrow \infty$ . Вместе с тем, такие диаграммы пока не были обнаружены экспериментально. С нашей точки зрения, это может быть обусловлено малой шириной интервала  $[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$  для реальных дисперсионных соотношений. Исследование положения интервала  $[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$  для дисперсионных соотношений



**Рис. 9.** Диаграммы типа В ( $\epsilon_F \in [\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$ ) (схематично). Буквами «е» и «h» отмечены типы холловской проводимости для направлений  $\mathbf{V}$ , отвечающих наличию лишь замкнутых траекторий на поверхности Ферми

различного вида может при этом дать весьма важную информацию для поиска таких диаграмм и описанных выше режимов поведения проводимости.

Настоящая работа посвящена исследованию вероятности появления хаотических режимов поведения проводимости в приближении сильной связи [1–3, 8] для кристаллов кубической симметрии. Более точно, мы рассмотрим здесь приближение сильной связи для простой, объемно-центрированной и гранецентрированной кубических решеток.

Приближение сильной связи для простой кубической решетки [1, 2] дает в главном порядке следующее выражение для дисперсионного соотношения:

$$\epsilon(\mathbf{p}) = \cos \frac{p_x l}{\hbar} + \cos \frac{p_y l}{\hbar} + \cos \frac{p_z l}{\hbar}.$$

(Поскольку мы интересуемся здесь лишь отношением ширины интервала  $[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$  к величине интервала  $[\epsilon_{\max}, \epsilon_{\min}]$ , мы опустили постоянный член в приведенном выражении, а также отнормировали коэффициент при главном оставшемся члене на 1.)

Приведенный выше дисперсионный закон является законом необщего положения и отвечает ситуации  $\epsilon_1^B = \epsilon_2^B$ . Это относится, в действительности, ко всем дисперсионным соотношениям, содержащим лишь нечетные гармоники  $k_1 + k_2 + k_3 = 2m + 1$  в разложении Фурье. Причиной является то, что сдвиг

$$p_x \rightarrow p_x + \frac{\pi \hbar}{l}, \quad p_y \rightarrow p_y + \frac{\pi \hbar}{l}, \quad p_z \rightarrow p_z + \frac{\pi \hbar}{l}$$

отвечает в этом случае замене

$$\epsilon(\mathbf{p}) \rightarrow -\epsilon(\mathbf{p}),$$

что, в свою очередь, влечет соотношение

$$\epsilon_1(\mathbf{n}) = -\epsilon_2(\mathbf{n})$$

для любого направления  $\mathbf{V}$ . Как следствие, здесь возникает также соотношение  $\epsilon_0(\mathbf{n}) = 0$  для всех «хаотических» направлений. Можно видеть, таким образом, что в приближении сильной связи для простой кубической решетки ширина интервала  $[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$  в главном порядке обращается в нуль, что отвечает нулевой вероятности попадания  $\epsilon_F$  в этот интервал.

Угловая диаграмма для поверхности Ферми  $\epsilon_F = 0$  совпадает в этом случае с полной угловой диаграммой (для всего дисперсионного соотношения) и является наиболее сложной (результаты ее численного исследования представлены, например, в [15, 40, 41]).

Все сказанное выше относится также к кубической объемно-центрированной решетке, где приближение сильной связи [1] приводит в главном порядке к соотношению

$$\epsilon(\mathbf{p}) = \cos \frac{p_x l}{\hbar} \cos \frac{p_y l}{\hbar} \cos \frac{p_z l}{\hbar}.$$

Можно видеть, таким образом, что как для простой, так и для объемно-центрированной кубических решеток ненулевая длина интервала  $[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$  обусловлена высшими поправками и является очень малой. Интервал  $[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$  расположен при этом



вблизи нулевого значения энергии (в центре зоны проводимости). Наблюдение хаотических режимов в таких проводниках, вероятно, может быть возможным при искусственном смещении энергии Ферми (например при приложении внешнего давления) к нужному значению.

Ниже мы представляем оценку ширины интервала  $[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$  для дисперсионного соотношения

$$\epsilon(\mathbf{p}) = \cos \frac{p_x l}{\hbar} \cos \frac{p_y l}{\hbar} + \cos \frac{p_y l}{\hbar} \cos \frac{p_z l}{\hbar} + \cos \frac{p_x l}{\hbar} \cos \frac{p_z l}{\hbar}, \quad (9)$$

являющегося приближением сильной связи [1, 3] для кристаллов с гранецентрированной кубической ячейкой.

Как нетрудно видеть, в данном случае мы имеем

$$\epsilon_{\min} = -1, \quad \epsilon_{\max} = 3.$$

Соотношение (9) отвечает ненулевой ширине интервала  $[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$ . Вместе с тем функция (9) не является морсовской на уровне  $\epsilon(\mathbf{p}) = -1$ , так что пересечение значения  $-1$  сразу приводит к появлению поверхностей

$$\epsilon(\mathbf{p}) = -1 + \delta,$$

простирающихся во всех направлениях в  $\mathbf{p}$ -пространстве. Эта ситуация сохраняется вплоть до значения  $\epsilon_F = 0$ , при  $\epsilon_F > 0$  поверхности Ферми представляют сферы в  $\mathbf{p}$ -пространстве, не связанные между собой. Открытые траектории системы (4) возникают здесь во всем интервале  $(-1, 0)$ , так что мы имеем

$$\epsilon_1^A = -1, \quad \epsilon_2^A = 0.$$

Полная угловая диаграмма дисперсионного соотношения (9) содержит бесконечное число зон устойчивости  $W_\alpha$ , ее довольно сложный вид (полученный в результате серьезных численных исследований) представлен в работе [40].

Согласно (8), для определения интервала  $[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$  нам необходимо знать значения  $\tilde{\epsilon}_1(\mathbf{n})$  и  $\tilde{\epsilon}_2(\mathbf{n})$  всюду на единичной сфере  $\mathbb{S}^2$ . Их вычисление, однако, требует весьма серьезных численных исследований, и мы воспользуемся здесь некоторым приемом, позволяющим дать оценку, близкую к точной, для положения интервала  $[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$  (а возможно, и совпадающую с ней) для приведенного дисперсионного соотношения.

Для многих дисперсионных соотношений значения  $\min \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{n})$  и  $\max \tilde{\epsilon}_1(\mathbf{n})$  можно вычислять не по

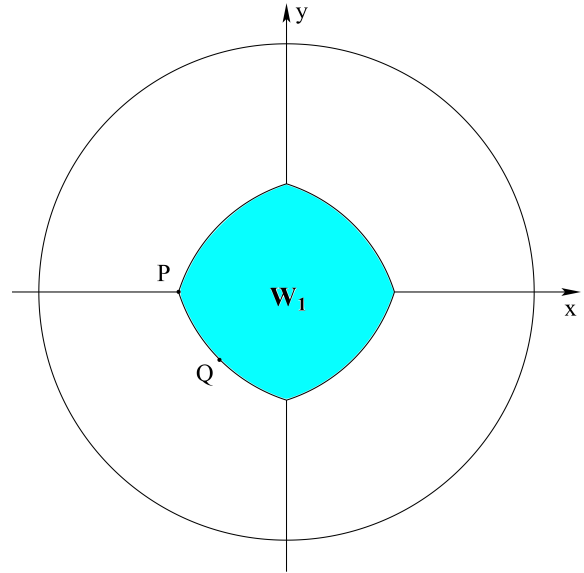


Рис. 10. Зона  $W_1$  на угловой диаграмме дисперсионного соотношения (9)

всей сфере  $\mathbb{S}^2$ , а лишь по границам зон  $W_\alpha$ . Отметим сразу, что везде на границах  $W_\alpha$  имеет место соотношение

$$\tilde{\epsilon}_1(\mathbf{n}) = \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{n}) \equiv \tilde{\epsilon}_0(\mathbf{n}),$$

так что мы имеем соотношение

$$\epsilon_1^B < \epsilon_2^B$$

для любой непостоянной функции  $\tilde{\epsilon}_0(\mathbf{n})$  на  $\partial W_\alpha$ .

При этом, если для какой-то из зон  $W_\alpha$  имеет место соотношение

$$\min_{W_\alpha} \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{n}) < \min_{\partial W_\alpha} \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{n}) = \min_{\partial W_\alpha} \tilde{\epsilon}_1(\mathbf{n})$$

либо

$$\max_{W_\alpha} \tilde{\epsilon}_1(\mathbf{n}) > \max_{\partial W_\alpha} \tilde{\epsilon}_1(\mathbf{n}) = \max_{\partial W_\alpha} \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{n}),$$

это должно приводить к появлению неодносвязных зон  $\Omega_\alpha$  при некоторых значениях  $\epsilon_F$ . Такая ситуация возможна для достаточно сложных (специально построенных) дисперсионных соотношений  $\epsilon(\mathbf{p})$  [41], однако крайне маловероятна для реальных дисперсионных законов в кристаллах.

Величина

$$\max_{\partial W_\alpha} \tilde{\epsilon}_1(\mathbf{n}) - \min_{\partial W_\alpha} \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{n}) = \max_{\partial W_\alpha} \tilde{\epsilon}_0(\mathbf{n}) - \min_{\partial W_\alpha} \tilde{\epsilon}_0(\mathbf{n}) \quad (10)$$

определяется вариацией функции  $\tilde{\epsilon}_0(\mathbf{n})$  на границе  $W_\alpha$  и в общем случае больше для крупных зон  $W_\alpha$ .

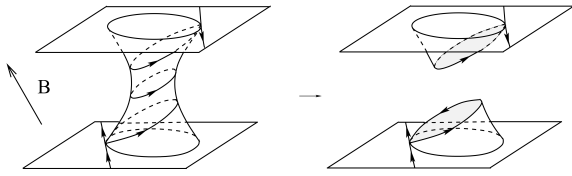


Рис. 11. Процедура редукции поверхности Ферми (схематично)

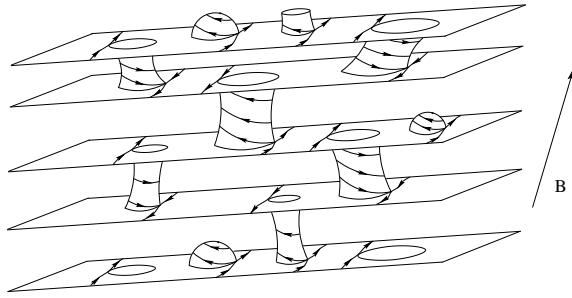


Рис. 12. Разрезание поверхности Ферми на носители устойчивых открытых траекторий цилиндрами  $C_i$  при направлении  $\mathbf{B}$ , лежащем в одной из зон устойчивости  $\Omega_\alpha$  (схематично)

Вычисление величины (10) для таких зон дает при этом хорошую (а нередко и точную) оценку для величины интервала  $[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$ .

Здесь мы проведем вычисление значений  $\tilde{\epsilon}_0(\mathbf{n})$  в наиболее удаленных точках границы зоны устойчивости  $W_1$ , наследующей симметрию дисперсионного соотношения (9) и являющейся наиболее крупной из зон  $W_\alpha$ . Отметим здесь также, что существование таких зон устойчивости для дисперсионных соотношений, обладающих поворотной симметрией, было доказано в работе [17] и является довольно общим фактом. Зона, которую мы будем рассматривать, содержит точку  $(0, 0, 1) \in \mathbb{S}^2$  и является «квадратной» по форме (рис. 10).

Мы используем здесь значения  $\tilde{\epsilon}_0(\mathbf{n})$  в наиболее симметричных точках границы  $W_1$  ( $P$  и  $Q$ ), где их вычисление несколько упрощается. Как мы уже сказали, для интервала  $[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$  мы будем использовать оценку  $[\tilde{\epsilon}_0(P), \tilde{\epsilon}_0(Q)]$ . Особенности поведения функций  $\tilde{\epsilon}_1(\mathbf{n})$  и  $\tilde{\epsilon}_2(\mathbf{n})$  позволяют при этом ожидать, что такая оценка является довольно хорошей для дисперсионных соотношений, обладающих высокой симметрией (а для многих соотношений точной).

Для исследования траекторий системы (4) используется метод редукции поверхности Ферми [17]. А именно, при каждом направлении  $\mathbf{B}$  мы удаляем цилиндры замкнутых траекторий  $\{C_i\}$  из поверх-

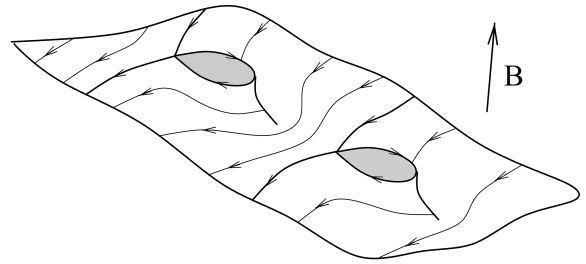


Рис. 13. Вид носителя устойчивых открытых траекторий системы (4) в  $p$ -пространстве (схематично)

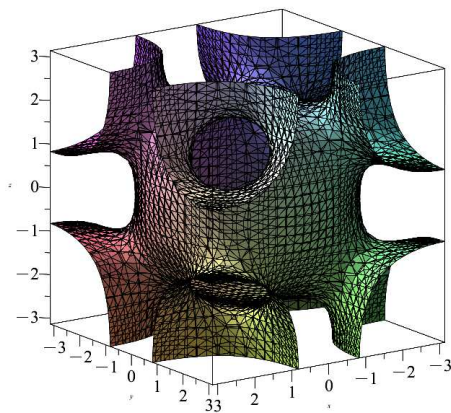


Рис. 14. Поверхность Ферми  $\cos x \cos y + \cos y \cos z + \cos x \cos z = -0.35$

ности Ферми с последующей заклейкой образовавшихся отверстий плоскими дисками, ортогональными  $\mathbf{B}$  (рис. 11). Новая «редуцированная» поверхность Ферми содержит лишь открытые траектории системы (4), и ее исследование позволяет определить как тип открытых траекторий так и другие их характеристики.

Систему (4) удобно при этом рассматривать в торе  $\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/L^*$ . Множество цилиндров  $\{C_i\}$  становится при этом конечным, а поверхность Ферми (так же как и редуцированная поверхность Ферми) представляет собой компактную двумерную поверхность, вложенную в  $\mathbb{T}^3$ .

Важнейшей характеристикой редуцированной поверхности Ферми является род  $g$  ее связных компонент. В частности, распад редуцированной поверхности Ферми на связные компоненты рода  $g = 1$  (двумерные торы  $\mathbb{T}^2$ ) отвечает наличию устойчивых открытых траекторий (4) (рис. 12), в то время как  $g \geq 3$  — появлению хаотических траекторий (исчезновение поверхности Ферми в процессе

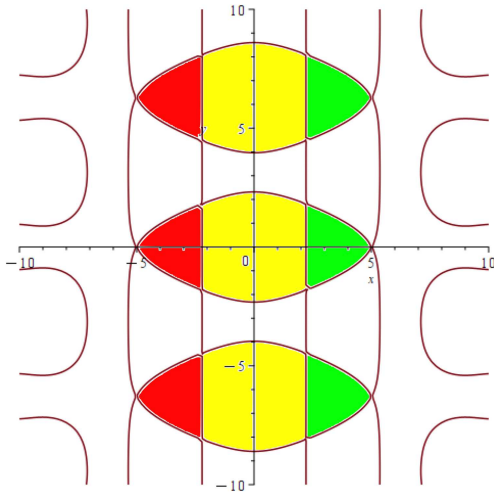


Рис. 15. Линии уровня (11) в плоскости, проходящей через начало координат, для  $\mathbf{n} = P$  и  $\epsilon_F = \tilde{\epsilon}_0(P) \simeq -0.359$

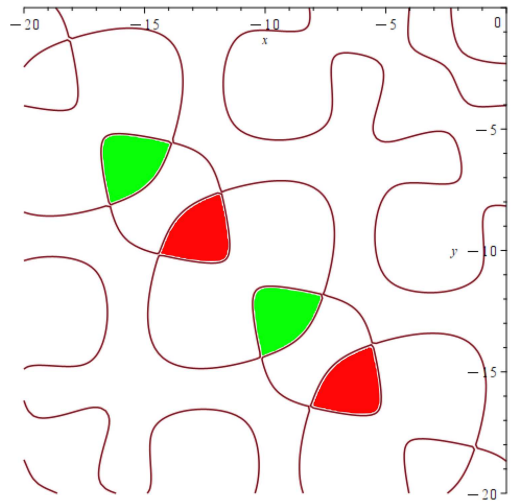
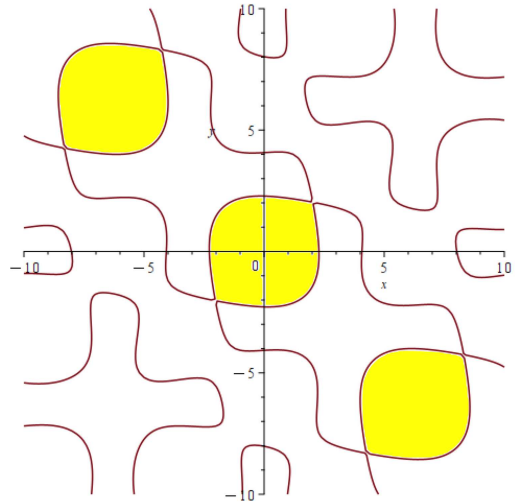


Рис. 17. Линии уровня (12) и (13) в плоскости, проходящей через начало координат, и в сдвинутой плоскости для  $\mathbf{n} = Q$  и  $\epsilon_F = \tilde{\epsilon}_0(Q) \simeq -0.3502$

Рис. 16. Линия уровня  $\cos x \cos y + (\cos x + \cos y) \times \cos(0.3x + 0.05y) = -0.359$

редукции означает наличие только замкнутых траекторий системы (4)).

Отметим здесь также, что носители устойчивых открытых траекторий (двумерные торы  $\mathbb{T}^2$ ) имеют в полном  $\mathbf{p}$ -пространстве вид периодически деформированных плоскостей, имеющих общее целочисленное (порожденное двумя векторами обратной решетки) двумерное направление (рис. 13). Общее количество таких торов в  $\mathbb{T}^3$  является четным для любой физической поверхности Ферми.

Изменение множества цилиндров  $\{C_i\}$  при вращениях направления  $\mathbf{V}$  можно называть изменением

топологической структуры (4) на поверхности Ферми. В частности, выход из зоны устойчивости  $\Omega_\alpha$  (в область наличия лишь замкнутых траекторий на  $S_F$ ) всегда определяется исчезновением одного из цилиндров  $C_i$  из множества  $\{C_i\}$  (и добавлением новых цилиндров).

Что касается границ зон устойчивости  $W_\alpha$  на угловой диаграмме всего дисперсионного соотношения  $\epsilon(\mathbf{p})$ , то они определяются исчезновением как минимум двух цилиндров  $C_i$  на поверхности  $\epsilon(\mathbf{p}) = \tilde{\epsilon}_0(\mathbf{n})$  (или даже большего числа при наличии дополнительных симметрий). Обращение в нуль высоты сразу двух (или большего числа) цилиндров  $C_i$  требует при этом специального подбора значе-

ния  $\tilde{\epsilon}_0(\mathbf{n})$  (кроме направления  $\mathbf{B}$ ), что и определяет функции  $\tilde{\epsilon}_1(\mathbf{n}) = \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{n}) = \tilde{\epsilon}_0(\mathbf{n})$  на границе  $W_\alpha$ .

Все поверхности Ферми в интересующем нас интервале  $(\epsilon_1^A, \epsilon_2^A)$  имеют род 4 (рис. 14). Это означает, в частности, что для любого  $\mathbf{n} \in W_\alpha$  и  $\epsilon_F \in [\tilde{\epsilon}_1(\mathbf{n}), \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{n})]$  поверхность Ферми  $\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon_F$  распадается на два (неэквивалентных) носителя открытых траекторий  $\{T_1^2, T_2^2\}$  и три (разрезающих ее) цилиндра замкнутых траекторий  $\{C_1, C_2, C_3\}$ . Как мы уже сказали, границы зон  $W_\alpha$  отвечают обращению в нуль высот хотя бы двух цилиндров из набора  $\{C_1, C_2, C_3\}$  на уровне  $\tilde{\epsilon}_1(\mathbf{n}) = \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{n}) = \tilde{\epsilon}_0(\mathbf{n})$ .

В точке  $P$  в силу дополнительной симметрии на уровне  $\tilde{\epsilon}_0(P)$  обращаются в нуль высоты всех трех цилиндров,  $C_1, C_2, C_3$ , разрезающих поверхность Ферми на носители открытых траекторий. Соответствующие цилиндры нулевой высоты (содержащие седловые особые точки) присутствуют, например, в плоскости, проходящей через начало координат (рис. 15). Соответствующие линии уровня  $\epsilon(\mathbf{p})$  в этой плоскости задаются уравнением

$$\cos x \cos y + (\cos x + \cos y) \cos 0.419x = -0.359, \quad (11)$$

что определяет как положение точки  $P$ , так и значение  $\tilde{\epsilon}_0(P) = -0.359$ .

Для сравнения на рис. 16 показаны линии уровня функции  $\epsilon(\mathbf{p})$  в одной из плоскостей направления  $\mathbf{n} \in W_\alpha$ , близкого к  $P$ , на том же уровне энергии. Можно видеть, что эта плоскость имеет несингулярные пересечения с цилиндрами  $C_1, C_2, C_3$ , что говорит об их конечных высотах внутри  $W_\alpha$ .

Что касается точки  $Q$ , то в ней также происходит обращение в нуль высот всех трех цилиндров,  $C_1, C_2, C_3$ , на уровне  $\epsilon(\mathbf{p}) = \tilde{\epsilon}_0(Q)$ . В этом случае, однако, цилиндры нулевой высоты присутствуют в разных (параллельных) плоскостях заданного направления. На рис. 17 приведена плоскость, проходящая через начало координат, содержащая цилиндры  $C_1$  (нулевой высоты), и параллельная ей плоскость, содержащая цилиндры  $C_2$  и  $C_3$  (также нулевой высоты). Соответствующие линии уровня  $\epsilon(\mathbf{p})$  в приведенных плоскостях задаются уравнениями

$$\cos x \cos y + (\cos x + \cos y) \cos 0.2233(x + y) = -0.3502, \quad (12)$$

$$\cos x \cos y + (\cos x + \cos y) \cos(0.2233(x + y) + 0.198) = -0.3502, \quad (13)$$

определяющими положение точки  $Q$  и значение  $\tilde{\epsilon}_0(Q) = -0.3502$ . Мы получаем, таким образом

$$\tilde{\epsilon}_0(Q) - \tilde{\epsilon}_0(P) \simeq 0.009,$$

что составляет примерно 0.25% от ширины зоны.

Как можно видеть, полученная оценка дает хотя и ненулевую, но довольно малую величину для ширины интервала  $[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$ , что говорит о действительно малой ее величине для многих реальных дисперсионных соотношений. В отличие от двух рассмотренных выше случаев, появления хаотических траекторий в приближении сильной связи для границентрированной решетки надо ожидать на расстоянии  $\simeq 0.16$  ширины зоны от минимальной энергии в зоне проводимости. Как и в предыдущих двух случаях, здесь, видимо, также легче добиться наблюдения соответствующих режимов проводимости, используя внешнее воздействие на образец, регулирующее положение уровня Ферми.

### 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведено исследование вероятности обнаружения хаотических электронных траекторий на поверхности Ферми и связанных с ними хаотических режимов поведения проводимости в сильных магнитных полях для дисперсионных соотношений, получаемых в приближении сильной связи для кристаллов кубической симметрии. В кристаллах с простой кубической или объемно-центрированной решеткой величина интервала энергий, отвечающих появлению хаотических траекторий, в главном приближении обращается в нуль. В кристаллах, обладающих границентрированной кубической решеткой (наиболее распространенных), величина этого интервала в главном приближении отлична от нуля, однако составляет доли процента от ширины зоны проводимости. Во всех случаях наблюдение хаотических режимов обладает малой вероятностью и видимо требует регулирования положения уровня Ферми с помощью внешнего воздействия. Положение интервала появления хаотических траекторий заметно различается для описанных случаев, а именно, он расположен в центре зоны проводимости в первых двух случаях и сильно смещен к ее нижнему краю в последнем.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Ч. Киттель, *Введение в физику твердого тела*, Наука, Москва (1978) [C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, New York, Wiley (1956)].
2. Дж. Займан, *Принципы теории твердого тела*, Мир, Москва (1974) [J. M. Ziman, *Principles of the*

- Theory of Solids*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1972)].
3. Н. Ашкрофт, Н. Мермин, *Физика твердого тела*, Мир, Москва (1979) [N. W. Ashcroft and N. D. Mermin, *Solid State Physics*, Saunders College Publishing (1976)].
  4. А. А. Абрикосов, *Основы теории металлов*, Наука, Москва (1987) [A. A. Abrikosov, *Fundamentals of the Theory of Metals*, Elsevier Science & Technology, Oxford, United Kingdom (1988)].
  5. И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, ЖЭТФ **31**, 63 (1956) [I. M. Lifshitz, M. Ya. Azbel, and M. I. Kaganov, Sov. Phys. JETP **4**, 41 (1957)].
  6. И. М. Лифшиц, В. Г. Песчанский, ЖЭТФ **35**, 1251 (1958) [I. M. Lifshitz and V. G. Peschansky, Sov. Phys. JETP **8**, 875 (1959)].
  7. И. М. Лифшиц, В. Г. Песчанский, ЖЭТФ **38**, 188 (1960) [I. M. Lifshitz and V. G. Peschansky, Sov. Phys. JETP **11**, 137 (1960)].
  8. И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, *Электронная теория металлов*, Наука, Москва (1971) [I. M. Lifshitz, M. Ya. Azbel, and M. I. Kaganov, *Electron Theory of Metals*, Consultants Bureau, Adam Hilger, New York (1973)].
  9. С. П. Новиков, УМН **37**, 3 (1982) [S. P. Novikov, Russian Math. Surv. **37**, 1 (1982)].
  10. А. В. Зорич, УМН **39**, 235 (1984) [A. V. Zorich, Russian Math. Surv. **39**, 287 (1984)].
  11. И. А. Дынников, УМН **47**, 161 (1992) [I. A. Dynnikov, Russian Math. Surv. **47**, 172 (1992)].
  12. С. П. Царев, Доклады на семинарах (1992–1993) [S. P. Tsarev, Seminar talks (1992–1993)].
  13. И. А. Дынников, Математические заметки **53**, 57 (1993) [I. A. Dynnikov, Math. Notes **53**, 494 (1993)].
  14. A. V. Zorich, Proc. «Geometric Study of Foliations», (Tokyo, November 1993), ed. by T. Mizutani et al., World Scientific, Singapore (1994), p. 479.
  15. I. A. Dynnikov, *Surfaces in 3-Torus: Geometry of Plane Sections*, Proc. of ECM2, BuDA (1996).
  16. I. A. Dynnikov, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 179, AMS, Providence, RI (1997), p. 45.
  17. И. А. Дынников, УМН **54**, 21 (1999) [I. A. Dynnikov, Russian Math. Surv. **54**, 21 (1999)].
  18. С. П. Новиков, А. Я. Мальцев, Письма в ЖЭТФ **63**, 809 (1996) [S. P. Novikov and A. Ya. Maltsev, JETP Lett. **63**, 855 (1996)].
  19. А. Я. Мальцев, ЖЭТФ **112**, 1710 (1997) [A. Ya. Maltsev, JETP **85**, 934 (1997)].
  20. А. Я. Мальцев, С. П. Новиков, Труды МИАН **302**, 296 (2018) [A. Ya. Maltsev and S. P. Novikov, Proc. of the Steklov Institute of Mathematics **302**, 279 (2018)].
  21. A. Zorich, *How Do the Leaves of Closed 1-Form Wind around a Surface*, «Pseudoperiodic Topology», ed. by V. I. Arnold, M. Kontsevich, A. Zorich, Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, vol. 197, AMS, Providence, RI (1999), p. 135.
  22. Р. Де Лео, УМН **55**, 181 (2000) [R. De Leo, Russian Math. Surveys **55**, 166 (2000)].
  23. Р. Де Лео, УМН **58**, 197 (2003) [R. De Leo, Russian Math. Surveys **58**, 1042 (2003)].
  24. R. De Leo, Phys. Lett. A **332**, 469 (2004).
  25. R. De Leo, Physica B **362** (1–4), 62 (2005).
  26. R. De Leo, Exp. Math. **15**, 109 (2006).
  27. Р. Де Лео, И. А. Дынников, УМН **62**, 151 (2007) [R. De Leo and I. A. Dynnikov, Russian Math. Surv. **62**, 990 (2007)].
  28. И. А. Дынников, Труды МИАН **263**, 72 (2008) [I. A. Dynnikov, Proc. of the Steklov Institute of Mathematics **263**, 65 (2008)].
  29. R. De Leo and I. A. Dynnikov, Geom. Dedicata **138**, 51 (2009).
  30. A. Skripchenko, Discrete Contin. Dyn. Sys. **32**, 643 (2012).
  31. A. Skripchenko, Ann. Glob. Anal. Geom. **43**, 253 (2013).
  32. I. Dynnikov and A. Skripchenko, *On Typical Leaves of a Measured Foliated 2-Complex of Thin Type, Topology, Geometry, Integrable Systems, and Mathematical Physics: Novikov's Seminar 2012–2014, Advances in the Mathematical Sciences*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 234, ed. by V. M. Buchstaber, B. A. Dubrovin, I. M. Krichever, AMS, Providence, RI (2014), p. 173, arXiv:1309.4884.
  33. I. Dynnikov and A. Skripchenko, *Symmetric Band Complexes of Thin Type and Chaotic Sections which Are Not Actually Chaotic*, Trans. Moscow Math. Soc. **76** 2, 287 (2015).
  34. A. Avila, P. Hubert, and A. Skripchenko, Invent. Math. **206**, 109 (2016).

35. A. Avila, P. Hubert, and A. Skripchenko, *Bull. Soc. Math. France* **144** (3), 539 (2016).
36. I. Dynnikov, P. Hubert, and A. Skripchenko, *International Mathematics Research Notices IMRN* 2022, 1-30 (Published online), arXiv:2011.15043.
37. А. Я. Мальцев, ЖЭТФ **151**, 944 (2017) [A. Ya. Maltsev, JETP **124**, 805 (2017)].
38. А. Я. Мальцев, ЖЭТФ **154**, 1183 (2018) [A. Ya. Maltsev, JETP **127**, 1087 (2018)].
39. А. Я. Мальцев, ЖЭТФ **156**, 140 (2019) [A. Ya. Maltsev, JETP **129**, 116 (2019)].
40. R. De Leo, *A Survey on Quasiperiodic Topology, Advanced Mathematical Methods in Biosciences & Applications*, Springer, ed. by F. Berezovskaya, B. Toni, (2018), arXiv:1711.01716
41. И. А. Дынников, А. Я. Мальцев, С. П. Новиков, УМН **77**, 109 (2022) [I. A. Dynnikov, A. Ya. Maltsev, and S. P. Novikov, *Russian Math. Surv.* **77**, 1061 (2022), arXiv:2306.11257].

## On Chaotic Regimes of Conductivity Behavior in the Tight-Binding Approximation

*A. Ya. Maltsev*

L. D. Landau Institute for Theoretical Physics  
of the Russian Academy of Sciences  
142432, Chernogolovka, Moscow region, Russia

### Abstract

We investigate the probability of detecting the most nontrivial conductivity behavior regimes in metals whose electron spectrum is described by the tight-binding approximation. These regimes are associated with the emergence of highly complex electron trajectories on the Fermi surface and correspond to a nontrivial (scaling) behavior of the conductivity tensor in strong magnetic fields. The geometry of such trajectories, as well as the corresponding conductivity regimes, have been well studied theoretically; however, they have not yet been observed experimentally. The results of our study allow us, in particular, to estimate the probability of their occurrence and to indicate the conditions for their possible detection for a wide class of conductors.

**Key words:** complex Fermi-surfaces, galvanomagnetic phenomena