

НЕЛОКАЛЬНОСТЬ ТУРБУЛЕНТНОСТИ НА ПРИМЕРЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК КРОСС-КОРРЕЛЯЦИОННОЙ РЕФЛЕКТОМЕТРИИ ФЛУКТУАЦИЙ ПЛОТНОСТИ ПЛАЗМЫ В ТОКАМАКАХ

А. Б. Кукушкин ^{a,b*}, А. А. Куличенко ^{a**}

^a Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»
123182, Москва, Россия

^b Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
115409, Москва, Россия

Поступила в редакцию 20 сентября 2025 г.,
после переработки 25 октября 2025 г.
Принята к публикации 26 октября 2025 г.

В развитие подхода, описанного в работе [L. F. Richardson, Proc. Roy. Soc. **110**, 709 (1926)], представлена характеристика нелокальности турбулентности, описываемой законом Ричардсона (Richardson t^3 -law) для парных корреляций в жидкостях и газах, на примере спектральных и пространственных характеристик кросс-корреляционной рефлектометрии флуктуаций плотности плазмы в токамаках. Предложена модификация алгоритма интерпретации спектров кросс-корреляционной рефлектометрии плазмы токамака электромагнитными волнами, состоящей в решении обратной задачи нахождения параметров сортов флуктуаций плотности плазмы, на которых происходит рассеяние зондирующей электромагнитной волны. На примере данных токамака KSTAR показано, что введение дополнительного сорта быстро движущихся флуктуаций плотности плазмы, подсказанное экспериментальными спектрами для рассеянного излучения, позволяет улучшить согласие теории и эксперимента не только для спектров рассеяния, но и для спектральной зависимости модуля комплексной кросс-корреляционной функции (ККФ). Показано существенное отличие степенной пространственной зависимости ККФ флуктуаций плотности плазмы, найденной из экспериментальных данных на токамаке T-10 для корреляций поперек сильного магнитного поля, от экспоненциальной (диффузионной, броуновской) модели ККФ, часто используемой в кросс-корреляционной рефлектометрии. Связь далеких крыльев спектра рассеяния и спектра ККФ со степенными крыльями парной корреляционной функции и степенным распределением типа Леви у функции распределения по длине свободного пробега флуктуаций плотности в плазме позволяет предложить связь квазикогерентных колебаний (quasi coherent mode, QCM), наблюдаемых в токамаках, с так называемым широкополосным участком в спектре рассеяния и спектре ККФ.

DOI: 10.7868/S3034641X25120135

1. ВВЕДЕНИЕ

Нелокальность (недиффузионность) гидродинамической турбулентности газов и жидкостей была впервые найдена Ричардсоном [1]: его эмпирический закон (Richardson t^3 -law) для среднего квадрата взаимного удаления пары частиц в жидкой или газооб-

разной среде, $r^2 \sim t^3$, существенно отличается от такового для обычной, броуновской диффузии, $r^2 \sim t$. Ключевым шагом в развитии теории нелокальности различных процессов в физике и других науках на основе концепции полетов Леви [2] и прогулок Леви, обобщающих полеты Леви на случай учета конечной скорости переносчиков (см. обзор [3]), стала идея Шлезингера и коллег [4] о возможности описания нелокальности турбулентности с помощью линейного интегродифференциального уравнения с ядром, медленно убывающим с увеличением расстояния.

* E-mail: kukushkin_ab@nrcki.ru

** E-mail: kulichenko_aa@nrcki.ru

В [5, 6] был предложен подход, близкий по духу к рассматриваемому в [4]. За основу был взят формализм типа уравнения Бибермана – Холстейна для переноса возбуждения фотонами в газах и плазме [7], обобщенного на учет конечности скорости переносчиков возбуждения. Такого рода формализм уже использовался в [8] для описания нестационарного переноса тепла в замагниченной плазме электронными бернштейновскими волнами как обобщение формализма интегрального по пространственным переменным уравнения стационарного переноса тепла такими волнами в [9]. В [5, 6] было показано, что флуктуации плотности плазмы, наблюдаемые в токамаке Т-10 с помощью кросс-корреляционной рефлектометрии электромагнитных (ЭМ) волн [10, 11], могут иметь турбулентное происхождение: показатель степени в распределении Леви для вероятности длины свободного пробега флуктуаций плотности поперек сильного магнитного поля (т. е. по малому радиусу тороидального плазменного шнура) в токамаке Т-10, найденный путем решения обратной задачи из спектральной и радиальной зависимостей измеренной кросс-корреляционной функции (ККФ), оказался близок к его аналогу, соответствующему эмпирическому закону Ричардсона.

В [5, 6] при интерпретации экспериментальных данных с токамака Т-10 была развита модель, использующая кинетическую теорию для нелокального переноса одного типа флуктуаций плотности плазмы. Этого оказалось достаточно для интерпретации экспериментальных данных, представленных в [11]. Дальнейшее рассмотрение существующих данных с этой установки и других токамаков показало, что необходимо обобщение алгоритма интерпретации экспериментов на случай нескольких типов флуктуаций плотности плазмы, перенос которых имеет свойства нелокальной турбулентности. Этому посвящены разд. 2–4 настоящей статьи. Другим важным аспектом кросс-корреляционной рефлектометрии является демонстрация существенно отличия степенной пространственной зависимости ККФ флуктуаций плотности плазмы, найденной из экспериментальных данных на токамаке Т-10 для корреляций поперек сильного магнитного поля, от экспоненциальной (диффузионной, броуновской) модели ККФ, часто используемой в кросс-корреляционной рефлектометрии. С этим вопросом тесно связана и интерпретация квазикогерентных колебаний (QCM), впервые обнаруженных в токамаке Т-10 и наблюдаемых в разных токамаках, с так называемым широкополосным участком в спектре рассеяния и спектре ККФ. Этому посвящен разд. 5.

2. СВЯЗЬ СПЕКТРА РАССЕЯНИЯ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПО СКОРОСТЯМ РАССЕИВАТЕЛЕЙ

Как показано в [5, 6], спектрально-угловое распределение мощности излучения, рассеянного заряженными частицами нескольких сортов с классическим радиусом r_0 из точки $\mathbf{r}$ в точку $\mathbf{r}_1$ в момент времени t , в пренебрежении запаздыванием рассеиваемых диагностических ЭМ-волн имеет общий вид

$$\frac{dW(\omega, \hat{\mathbf{n}}, \mathbf{r}_1, t)}{d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}} d\omega} = \sum_m \tilde{A}_m \int d\mathbf{v} h_m(\mathbf{v}) \frac{dW_m(\omega, \hat{\mathbf{n}}, \mathbf{r}_1, t, \mathbf{v})}{d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}} d\omega}, \quad (1)$$

где $\omega = \omega_s - \omega_i$ — изменение частоты при рассеянии, которое представляет собой разность частот рассеянной ω_s и падающей ω_i волн; $\hat{\mathbf{n}}$ — единичный вектор в направлении распространения рассеянной волны; $h_m(\mathbf{v})$ — функция распределения (ФР) по скоростям m -го сорта рассеивателей; $\tilde{A}_m$ — относительный вклад числа частиц каждого сорта. Для каждого сорта частиц-рассеивателей задаются искомые параметры: средняя скорость, ширина гауссова распределения по скоростям, число рассеивателей.

Спектр излучения, рассеянного частицей m -го сорта, движущейся со скоростью $\mathbf{v}$, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dW_m(\omega, \hat{\mathbf{n}}, \mathbf{v}, \mathbf{r}_1, t)}{d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}} d\omega} &= \\ &= \frac{c r_0^2}{\pi (4\pi)^3} [\hat{\mathbf{n}}, [\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{E}_0]]^2 |Q_{eff, m}(\mathbf{K}, i\omega, \mathbf{v})|^2 \times \\ &\times \left| \int_0^{+\infty} dt e^{-i(\omega - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{K})t)} T_m(|\mathbf{v}|t, \mathbf{v}) \right|. \quad (2) \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{E}_0$ — амплитуда электрического поля падающей волны, $\mathbf{K} = \mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i$ — волновой вектор рассеяния, который равен разности волновых векторов рассеянной $\mathbf{k}_s$ и падающей $\mathbf{k}_i$ волны, c — скорость света, r_0 — характерный радиус сечения рассеяния волны одной флуктуацией (для неколлективного рассеяния света отдельными электронами r_0 является классическим радиусом электрона), $Q_{eff, m}(\mathbf{K}, i\omega, \mathbf{v})$ — фурье-лаплас-образ эффективно-го источника флуктуаций m -го сорта (см. (36) и (41) в [5]), $T_m(\rho, \mathbf{v})$ — функция распределения по длинам свободного пробега (ФРСП) как функция расстояния ρ , на которое перемещается флуктуация плотности в режиме свободного пробега, и скорости $\mathbf{v}$

этой флуктуации плотности (рассеивателя). Частицы данного сорта могут двигаться как в сторону точки наблюдения, так и в обратном направлении. При этом число частиц для каждого такого направления движения может различаться, что приводит, в частности, к несимметричности спектра рассеяния (см., например, рис. 12-а в [12] с данными экспериментов на токамаке KSTAR). Поэтому для описания рефлектометрии под относительным количеством частиц будем понимать их число для конкретного направления движения.

Формирование детектируемых сигналов при зондировании плазмы ЭМ-волнами в диапазоне частот электронного циклотронного излучения, что характерно для кросс-корреляционной рефлектометрии плазмы, происходит в результате рассеяния не на отдельных заряженных частицах, а на флуктуациях плотности рассеивающей среды макроскопического масштаба. В этом случае параметр r_0 играет роль характерного размера рассеивателя, определяющего сечение рассеяния ЭМ-волны флуктуацией плотности конкретного типа, соответствующего определенному закону дисперсии для волн плотности в изучаемой среде. Для рассматриваемой нами задачи кросс-корреляционной диагностики движения флуктуаций плотности плазмы знание указанного сечения рассеяния не является обязательным в силу самой методики кросс-корреляционного анализа, ключевая функция которого практически не зависит от этого сечения из-за должной нормировки парной корреляционной функции. Напротив, величиной, от которой существенно зависят кросс-корреляционные характеристики, является ФРСП рассеивателей зондирующего излучения.

В этой работе мы рассмотрим задачу кросс-корреляционной рефлектометрии для ФРСП широкого класса, применимого к задачам нелокального переноса (см. монографию [2] и обзор [3]) и имеющего модельный степенной вид [5]:

$$T_m(\rho, \mathbf{v}) = \frac{1}{(1 + \kappa_m(\mathbf{v})\rho)^\gamma}, \quad 0 < \gamma < 2, \quad (3)$$

где $\kappa_m(\mathbf{v})$ — обратная характерная длина свободного пробега m -го сорта переносчиков (функция скорости). В случае почти покоящихся («тепловых») рассеивателей, которым отвечает центральная часть спектра рассеяния, ФРСП имеет вид

$$T_c(\rho) = \exp(-\kappa_c \rho). \quad (4)$$

Тогда получим спектральное распределение в виде, где величины $\tilde{A}_m$ являются статистическими весами рассеивателей определенного типа:

$$\begin{aligned} \frac{dW(\omega, \hat{\mathbf{n}}, \mathbf{r}_1, t)}{d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}} d\omega} &= \frac{c r_0^2}{\pi(4\pi)^3} [\hat{\mathbf{n}}, [\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{E}_0]]^2 \times \\ &\times \sum_m \tilde{A}_m \int d\mathbf{v} h_m(\mathbf{v}) |Q_{eff,m}(\mathbf{K}, i\omega, \mathbf{v})|^2 \times \\ &\times \left| \int_0^{+\infty} dt e^{-i(\omega - (\mathbf{v}, \mathbf{K}))t} T_m(|\mathbf{v}|t, \mathbf{v}) \right|. \end{aligned} \quad (5)$$

Положим характерную длину свободного пробега переносчиков всех сортов κ_m^{-1} достаточно большой, т.е. $\kappa_m \rho \ll 1$, что соответствует задачам нелокального (недиффузионного) переноса. Исследуем случай, когда вектор рассеяния направлен перпендикулярно скорости гидродинамического движения плазмы. Этот случай соответствует геометрии многих диагностических экспериментов в плазме токамаков, в которых рефлектометрическое зондирование плазмы ЭМ-волнами ведется поперек сильного магнитного поля и поперек магнитогидродинамического движения плазмы. Тогда в (5) справедливо распределение по проекциям скоростей параллельно вектору $\mathbf{K}$. Будем интересоваться этим распределением в прямом и обратном направлениях движения переносчиков относительно точки наблюдения: $(\mathbf{v}, \mathbf{K}) = \pm |\mathbf{v}| |\mathbf{K}|$. При этом в основной части спектра (не очень далеких крыльях, ср. рис. 2 в [5]) можно положить $T_m \approx 1$, тогда подынтегральное выражение примет вид

$$\int_0^{+\infty} dt e^{-i(\omega - (\mathbf{v}, \mathbf{K}))t} T_m(|\mathbf{v}|t, \mathbf{v}) \approx \frac{\pi}{K} \delta\left(|\mathbf{v}| - \frac{\omega}{K}\right). \quad (6)$$

С учетом этого рассмотрим интеграл по скоростям рассеивателей:

$$\begin{aligned} &\int d\mathbf{v} h_m(\mathbf{v}) |Q_{eff,m}(\mathbf{K}, i\omega, \mathbf{v})|^2 \times \\ &\times \left| \int_0^{+\infty} dt e^{-i(\omega - (\mathbf{v}, \mathbf{K}))t} T_m(|\mathbf{v}|t, \mathbf{v}) \right| = \\ &= |Q_{eff,m}(\mathbf{K}, i\omega, \mathbf{v})|^2 \frac{\pi}{K} h_m\left(\frac{\omega}{K}\right). \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом, получим выражение для спектра рассеяния в виде

$$\begin{aligned} \frac{dW(\omega)}{d\omega} &\equiv \frac{dW(\omega, \hat{\mathbf{n}}, \mathbf{r}_1, t)}{d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}} d\omega} = \frac{c r_0^2}{(4\pi)^3 K} [\hat{\mathbf{n}}, [\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{E}_0]]^2 \times \\ &\times \sum_m \tilde{A}_m h_m\left(\frac{\omega}{K}\right) |Q_{eff,m}\left(\mathbf{K}, i\omega, \frac{\omega}{K}\right)|^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Переопределим относительный вклад рассеивателей разных сортов, считая зависимость эффек-

тивного источника от частоты несущественной, т. е. предполагаем, что

$$\left| Q_{eff,m} \left(\mathbf{K}, i\omega, \frac{\omega}{K} \right) \right|^2 \approx |Q_{eff,m}(\mathbf{K})|^2.$$

Получим

$$A_m = \tilde{A}_m |Q_{eff,m}(\mathbf{K})|^2 \frac{c r_0^2}{(4\pi)^3} [\hat{\mathbf{n}}, [\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{E}_0]]^2.$$

Тогда имеем простую связь спектра рассеяния по частотам и ФР по скорости рассеивателей диагностического излучения в виде

$$\frac{dW(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{K} \sum_m A_m h_m \left(\frac{\omega}{K} \right). \quad (9)$$

3. АНАЛИЗ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ДЛЯ СПЕКТРА РАССЕЯНИЯ НА ФЛУКТУАЦИЯХ ПЛОТНОСТИ В ПЛАЗМЕ ТОКАМАКА

Обратимся теперь к экспериментальному спектру рассеяния диагностирующего излучения в плазме токамака KSTAR (рис. 12-а в [12]). Частота диагностирующего излучения согласно рис. 10 из [12] 79.0–84.4 ГГц. Тогда средняя частота составляет 81.7 ГГц. Соответствующий волновой вектор рассеяния для среды с показателем преломления n рассчитывается по формуле $K = 2\pi/\lambda = 2\pi f n/c$ и составляет для вакуума $K = 17.1 \text{ см}^{-1}$. Здесь полагаем, что процесс рассеяния ЭМ-волны происходит в области, где плазменными эффектами замедления зондирующей ЭМ-волны можно пренебречь. Практически учет таких эффектов ведет к некоторой перенормировке получаемых ниже значений характерных скоростей флуктуаций и для интересующей нас точности решения обратной задачи это не является критичным.

Зная волновой вектор рассеяния и частоту f_{max} локального максимума в спектре, можно определить характерную среднюю скорость движения рассеивателей, отвечающую данному максимуму:

$$\bar{v} = \frac{2\pi f_{max}}{K}. \quad (10)$$

Для корректного анализа спектра необходимо ввести три группы рассеивателей с разными значениями модуля средней скорости, что с учетом движения рассеивателей в двух группах по и против направления наблюдения дает пять подгрупп. Все эти

группы будем представлять в виде гауссовых распределений с различными средними скоростями и различными ширинами этих распределений:

$$h(v, \bar{v}_i, \alpha_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha_i}|\bar{v}_i|} \exp \left(-\frac{(v - \bar{v}_i)^2}{2(\alpha_i \bar{v}_i)^2} \right). \quad (11)$$

Первая группа состоит из рассеивателей, дающих пики на частотах вблизи $f = \mp 75 \text{ кГц}$. Для этих рассеивателей имеем совпадающие параметры α_1 и совпадающие по модулю средние скорости $\bar{v}_1 = 0.28 \text{ км/с}$ и $-\bar{v}_1$. Вторая группа состоит из рассеивателей, дающих пики на частотах вблизи $f = \mp 140 \text{ кГц}$. Для этой группы имеем средние скорости $\bar{v}_2 = 0.51 \text{ км/с}$ и $-\bar{v}_2$, а также совпадающие значения α_2 . Третья группа состоит из рассеивателей, дающих пик на частотах вблизи нулевой частоты. Для них имеем нулевую среднюю скорость и характерную ширину v_T , что соответствует замене $\alpha_3 \bar{v}_3$ на v_T в (11).

Отметим, что ширины указанных распределений по скоростям флуктуаций плотности не обязаны совпадать, поскольку они могут формироваться разными механизмами уширения этих распределений: для флуктуаций с разной средней скоростью уширение может зависеть от этой скорости, поэтому при решении обратной задачи уместно дать соответствующую свободу этим параметрам. Как уже было указано выше, кросс-корреляционная рефлектометрия не позволяет найти закон дисперсии детектируемых волн в виде движения флуктуаций плотности плазмы, но зато она позволяет оценить обсуждаемые параметры и параметры функции распределения этих волн по длине их свободного пробега.

Учитывая полученную формулу для связи спектра рассеяния и распределений по скоростям движения рассеивателей и используя $\omega = 2\pi f$, получаем обратную задачу для поиска параметров A_m , α_1 , α_2 и v_T в виде подгонки экспериментального спектра рассеяния к функции следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{K}{2\pi} \frac{dW(f)}{df} = & A_T h_T \left(\frac{2\pi f}{K}, v_T \right) + \\ & + A_{1+} h \left(\frac{2\pi f}{K}, \frac{2\pi f_1}{K}, \alpha_1 \right) + A_{1-} h \left(\frac{2\pi f}{K}, -\frac{2\pi f_1}{K}, \alpha_1 \right) + \\ & + A_{2+} h \left(\frac{2\pi f}{K}, \frac{2\pi f_2}{K}, \alpha_2 \right) + A_{2-} h \left(\frac{2\pi f}{K}, -\frac{2\pi f_2}{K}, \alpha_2 \right), \end{aligned} \quad (12)$$

где индексы «+» и «-» соответствуют рассеивателям, движущимся в противоположные стороны относительно точки наблюдения: плюс — на наблюдателя и минус — от него.

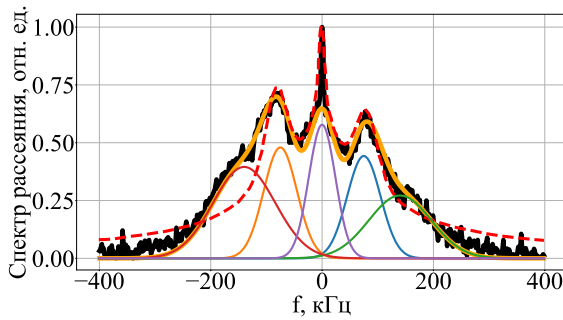


Рис. 1. Сравнение результатов решения обратной задачи с экспериментальным спектром рассеяния (черная кривая) (рис. 12-а в [12]): теоретический спектр рассеяния по новому алгоритму (оранжевая кривая) и старому алгоритму [5, 6] (красная штриховая кривая). Тонкие сплошные кривые показывают вклад в спектр каждого сорта переносчиков

На рис. 1 представлен результат решения обратной задачи для спектра рассеяния по новому, модифицированному алгоритму в сравнении с алгоритмом до модификации. Показано сравнение оптимальных теоретических спектров с экспериментальными данными [12], относительно которых проводилась оптимизация модельного теоретического спектра. Ниже представлены значения параметров, дающие наилучшее приближение теоретического спектра рассеяния к экспериментальному на токамаке KSTAR [12] (здесь относительные вклады разных сортов рассеивателей нормированы на максимальное значение экспериментального спектра): $A_{1+} = 0.19$, $A_{1-} = 0.2$, $A_{2+} = 0.21$, $A_{2-} = 0.21$, $A_T = 0.19$, $\alpha_1 = 0.4$, $v_1 = 0.28$ км/с, $\alpha_2 = 0.4$, $v_2 = 0.51$ км/с, $v_T = 0.088$ км/с. Результаты решения обратной задачи показывают, что введение дополнительного второго сорта частиц, движущихся с отличной от нуля средней массовой скоростью и дающих сильно или умеренно различимые боковые пики в спектре рассеянного излучения, приводит к существенному повышению точности приближения экспериментальных результатов теоретическими для спектра рассеяния.

4. АНАЛИЗ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ДЛЯ СПЕКТРА КРОСС-КОРРЕЛЯЦИЙ ФЛУКТУАЦИЙ ПЛОТНОСТИ В ПЛАЗМЕ ТОКАМАКА

Имея значения относительных вкладов рассеивателей в спектр рассеяния, а также характерные уширения для их распределений по скоростям, по

спектру ККФ можно отыскивать остальные параметры рассеивателей: характерные длины свободного пробега $1/\kappa_{m,0}$ для каждого сорта рассеивателей, а также параметр нелокальности γ в ФРСП, который будем считать единым для всех сортов, кроме почти стоящих рассеивателей. В общем случае ККФ задается формулой (20) в [5], описывающей корреляцию векторов электрического поля, рассеянного из разных точек диагностируемой среды. Такая дефиниция предполагает достаточную степень локализации области, из которой в детектор поступает рассеянное излучение. Согласно доминирующей концепции кросс-корреляционной рефлектометрии плазмы токамака областью локализации процесса рассеяния является область вблизи точки отражения зондирующей ЭМ-волны от области высокой плотности плазмы (для зондирования ЭМ-волной в диапазоне электронных циклотронных волн с обыкновенной поляризацией волны точкой отражения является область равенства частоты зондирующего излучения электронной плазменной частоте). В [5] было получено выражение для спектра ККФ в виде

$$C(\omega, \mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_1) = e^{i(\mathbf{K}, \mathbf{r})} \times \frac{\sum_m A_m \langle T_m(|v|\Delta t, |v|) e^{i(\omega - Kv)\Delta t} |g_m(\mathbf{r}_2, K, \omega, v)| \rangle}{\sum_m A_m \sqrt{\langle |g_m(\mathbf{r}_1, K, \omega, v)| \rangle \langle |g_m(\mathbf{r}_2, K, \omega, v)| \rangle}}, \quad (13)$$

где угловые скобки означают усреднение по скоростям рассеивателей в системе покоя плазмы (т. е. относительно магнитогидродинамического движения со средней массовой скоростью, которая для недалеко расположенных точек плазмы считается равной),

$$g_m(\mathbf{r}_1, K, \omega, v) = \frac{1}{4\pi} Q_{eff,m}(\mathbf{K}, i\omega, \mathbf{v}) \times \int_0^{+\infty} dt e^{-i(\omega - Kv)t} T_m(|\mathbf{v}|t, |\mathbf{v}|), \quad (14)$$

$r = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$, $\Delta t = r/|\mathbf{v} + \mathbf{v}_{pl}|$, $\mathbf{v}_{pl}$ — скорость гидродинамического (т. е. среднего массового) движения плазмы относительно детектора. Будем полагать зависимость эффективного источника от его аргументов несущественной по сравнению со спектральной зависимостью фурье-образа ФРСП. Зависимость коэффициента поглощения от скорости движения рассеивателей излучения m -го сорта будем задавать в виде, соответствующем резкой зависимости длины свободного пробега от отклонения скорости флуктуаций плотности от определенного значения, соответствующего закону дисперсии данного типа волн плотности плазмы:

$$\kappa_m(v) \equiv \kappa_{0,m} \exp\left\{\left(\frac{(v - \bar{v}_m)^2}{(\beta_m \bar{v}_m)^2}\right)\right\}. \tag{15}$$

Формулу для спектра ККФ можно представить в виде

$$C(\omega, \mathbf{r}) = e^{i(\mathbf{K}, \mathbf{r})} \frac{\sum_m A_m \left\langle T_m(r, |v|) \exp[i(\omega - Kv)\Delta t] \left| \int_0^{+\infty} dt e^{-i(\omega - Kv)t} T_m(|\mathbf{v}|t, |\mathbf{v}|) \right| \right\rangle}{\sum_m A_m \left\langle \left| \int_0^{+\infty} dt e^{-i(\omega - Kv)t} T_m(|\mathbf{v}|t, |\mathbf{v}|) \right| \right\rangle}. \tag{16}$$

Проанализируем экспериментальные данные для модуля ККФ, показанные на рис. 12-d в [12], и найдем значения указанных параметров $\kappa_{0,m}$, β_m и γ путем решения обратной задачи по экспериментальным данным на указанном рисунке. Ниже представлены найденные значения параметров для боковых компонент, которые играют основную роль в данном спектре: $\gamma = 0.55$, $\kappa_{0,1} = 0.1 \text{ см}^{-1}$, $\kappa_{0,2} = 100 \text{ см}^{-1}$, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 3$.

На рис. 2 и 3 представлены результаты решения обратной задачи для спектра модуля ККФ (кросс-модуля) и спектра фазы ККФ (кросс-фазы) по модифицированному алгоритму в сравнении с результатами по алгоритму без модификации. На этих рисунках показаны экспериментальные данные [12], относительно которых проводилась оптимизация результатов расчетов. Соответствующее значение координатной переменной составляет $r = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = 2 \text{ см}$.

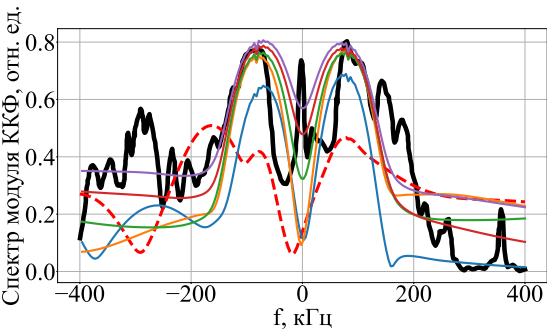


Рис. 2. Сравнение результатов решения обратной задачи с экспериментальным спектром модуля ККФ рассеяния (черная кривая) (рис. 12-d в [12]): теоретический спектр модуля ККФ рассеяния по новому алгоритму для $v_{pl} = 2 \text{ км/с}$ (синяя кривая), $v_{pl} = 4 \text{ км/с}$ (оранжевая кривая), $v_{pl} = 6 \text{ км/с}$ (зеленая кривая), $v_{pl} = 8 \text{ км/с}$ (красная сплошная кривая), $v_{pl} = 10 \text{ км/с}$ (фиолетовая кривая) и старому алгоритму [5, 6] для $v_{pl} = 6 \text{ км/с}$ (красная штриховая кривая)

Таблица. Максимальное среднеквадратичное отклонение теоретического спектра модуля ККФ от экспериментального (рис. 12-d в [12]) в зависимости от скорости гидродинамического движения плазмы

v_{pl} , км/с	Среднеквадратичное отклонение, %
2	24
4	20
6	19
8	17
10	17
12	18
14	20
16	21
18	23
20	23

Результаты расчетов показывают, что введение дополнительного, второго сорта частиц, движущихся с отличной от нуля средней массовой скоростью относительно гидродинамического движения плазмы и дающих сильно или умеренно различные пики в спектре рассеянного излучения, приводит к существенному повышению точности приближения экспериментальных результатов теоретическими также и для спектра модуля ККФ. Для иллюстрации чувствительности результатов расчета ККФ к вариации искомого параметра в таблице представлены результаты расчета среднеквадратичного отклонения теоретического спектра от экспериментального для разных значений скорости гидродинамического движения плазмы. Расчет отклонения спектров проведен в диапазоне частот $\pm 300 \text{ кГц}$ относительно частоты зондирования, поскольку спектр рассеянного излучения отличен от шумовых флуктуаций именно в этом диапазоне.

Переходя к расчетам фазы ККФ, отметим, что во многих работах, посвященных анализу экспери-

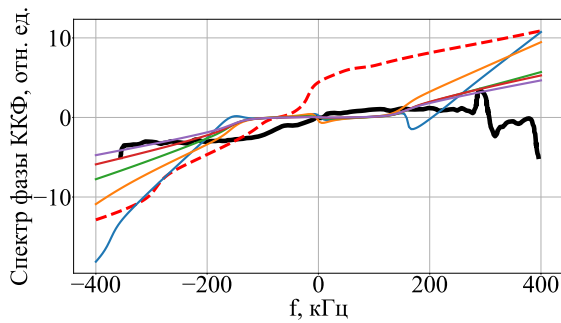


Рис. 3. Сравнение результатов решения обратной задачи с экспериментальным спектром фазы ККФ рассеяния (черная кривая) (рис. 12-g в [12]): теоретический спектр фазы ККФ рассеяния по новому алгоритму для $v_{pl} = 2$ км/с (синяя кривая), $v_{pl} = 4$ км/с (оранжевая кривая), $v_{pl} = 6$ км/с (зеленая кривая), $v_{pl} = 8$ км/с (красная сплошная кривая), $v_{pl} = 10$ км/с (фиолетовая кривая) и старому алгоритму [5, 6] для $v_{pl} = 6$ км/с (красная штриховая кривая)

ментальных данных (см., например, [10–12]), скорость гидродинамического движения плазмы часто находится по спектру фазы ККФ рассеяния. Однако такой подход является менее надежным, чем нахождение указанной скорости по спектру модуля ККФ из-за а) меньшей точности измерения фазы ККФ по сравнению с ее модулем и б) использования для этого формулы, которая верна только для монохроматического распределения по скоростям флуктуаций; такая формула легко получается из (13) в случае отсутствия усреднения по скоростям флуктуаций и в пренебрежении их скоростью по сравнению с гидродинамическим (т. е. средним массовым) движением плазмы в (14). Поэтому приведенные на рис. 3 результаты расчета кросс-фазы даны только для иллюстрации и не используются для решения обратной задачи.

5. СТЕПЕННОЙ ХАРАКТЕР ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАВИСИМОСТИ КРОСС-КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ФЛУКТУАЦИЙ ПЛОТНОСТИ ПЛАЗМЫ В ТОКАМАКЕ

После анализа спектральной зависимости ККФ флуктуаций плотности плазмы, диагностируемых с помощью зондирования плазмы ЭМ-волнами, перейдем к анализу пространственной зависимости ККФ. Напомним, что в общем случае такая ККФ задается формулой (20) в [5], а ее аналитическое описание в рамках развитой в [5] кинетической

теории нелокального переноса флуктуаций плотности дается приведенной выше формулой (16). Для практических задач изучения процессов переноса в магнитно-удерживаемой термоядерной плазме наибольший интерес представляют корреляции параметров плазмы поперек сильного магнитного поля в токамаках.

Для этого обратимся к результатам [11] измерения пространственной (а именно, по малому радиусу плазменного шнура) зависимости ККФ в токамаке Т-10 в двух различных диапазонах частот (см. рис. 4). Для интерпретации результатов измерения спектра рассеяния в токамаке Т-10 оказывается достаточным учесть вклад бегущих флуктуаций плотности только одного типа (см. рис. 1 в [5]): спектр имеет по паре ярко выраженных боковых пиков, которые являются достаточно симметричными относительно отстройки от частоты зондирующего излучения. В случае квазикогерентных колебаний [10] (QCM) плотности плазмы, которым отвечают частоты ~ 100 кГц, ККФ имеет в спектре как ярко выраженные пики, так и протяженные степенные крылья. В работе [11] была сделана попытка описать такие свойства спектра как результат действия двух типов турбулентных возмущений, каждый из которых описывается экспоненциальной зависимостью пространственных корреляций от координаты (см. подписи под рис. 5 и 6 в [11]). Однако этот результат получен просто как подгонка экспериментальных кривых для пространственной зависимости ККФ без попытки установить связь этих результатов с данными для спектра рассеяния и спектра ККФ на рис. 4 в [11]. Такая попытка была сделана только в [5], где впервые в практике интерпретации результатов кросс-корреляционной рефлектометрии в токамаках была решена обратная задача определения ключевых параметров ККФ как функции двух переменных — частоты и координаты. Впрочем, такая уникальность указанных результатов [5] вызвана в первую очередь особенностью измерений ККФ как функции этих двух переменных. Авторам не известны экспериментальные результаты для ККФ кросс-корреляционной рефлектометрии плазмы, которые содержали бы такой же полный набор данных для ККФ, как на рис. 4–6 в [11]. Последнее связано прежде всего с известной трудностью измерения (выделения) низкочастотных (порядка сотни килогерц) флуктуаций рассеянного излучения на фоне высокочастотного (порядка десятков гигагерц) зондирующего излучения. Хотя такая диагностика освоена и успешно применяется на разных токамаках, включая TEXTOR [13], ToreSupra [14, 15],

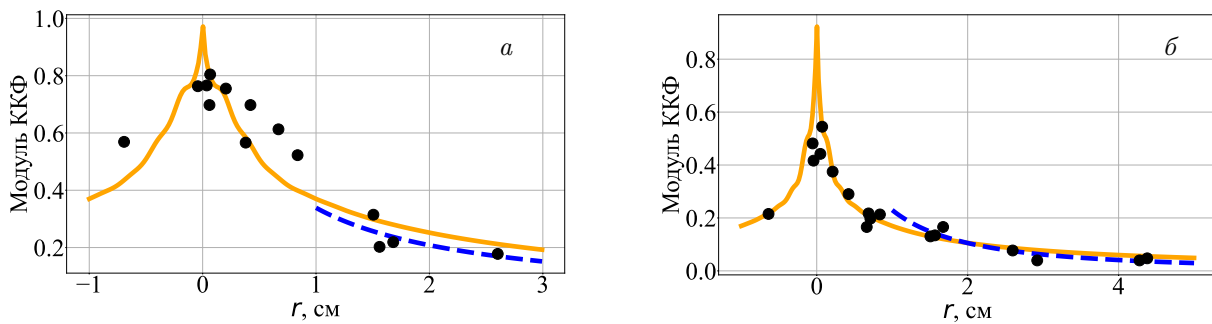


Рис. 4. Экспериментальные результаты для радиальной зависимости модуля когерентности (черные точки) для частоты (а) ± 110 кГц (рис. 5-а в [11]) и (б) ± 200 кГц (рис. 5-б в [11]) в сравнении со степенными функциями $1/(1 + 2.20|r|)^{0.93}$ (а) и $1/(1 + 1.35|r|)^{1.72}$ (б) (синие штриховые линии), а также с результатами решения обратной задачи, использующей теоретический результат (13) (желтые кривые)

JET [16], ASDEX-Upgrade [17, 18], KSTAR [12], HL-2A и J-TEXT [19], EAST [20], полного набора, аналогичного данным на рис. 4–6 в [11], пока, по нашим сведениям, так и не появилось.

Важно отметить, что с помощью кросс-корреляционной рефлектометрии можно найти ключевые параметры ФРСП флуктуаций плотности, не зная природы индивидуальных носителей возмущения плотности плазмы, поскольку ККФ, по смыслу ее введения (т.е. согласно ее дефиниции), лишь слабо зависит (или вообще не зависит) от сечения рассеяния ЭМ-излучения отдельными носителями возмущения среды. На рис. 4 показано сравнение результатов измерений [11] с двумя теоретическими результатами.

Во-первых, на рис. 4 показано решение обратной задачи определения оптимальных параметров ФРСП флуктуаций плотности, дающих наилучшую аппроксимацию экспериментальных данных модуля ККФ (кросс-модуля) для того набора остальных параметров обратной задачи (относительные вклады флуктуаций каждого сорта рассеивателей в результирующий спектр рассеяния, а также характерные ширины в распределениях по скоростям), для которых достигается наилучшее согласие теории со спектрами рассеяния и спектром модуля ККФ. Указанной теоретической кривой соответствует показатель степенной зависимости $\gamma = 0.55$ в формуле (3) (см. подробнее рис. 4 в [5]). Приближенное знание вида ФРСП, полученное методом кросс-корреляционной рефлектометрии из анализа экспериментальных данных для задачи стационарного переноса флуктуаций плотности, позволяет установить связь с эмпирическим законом t^3 Ричардсона для квадрата парных корреляций в жидкостях и

газах, соответствующего измерению функции Грина задачи нестационарного переноса. Обратимся к формулам (7.7) и (7.8) в [21], которые дают приближенный закон движения фронта волны возмущения от точечного мгновенного источника (что применимо и к задаче парных корреляций положения частиц в случае однородной изотропной турбулентности). Из них следует, что в режиме переноса, когда характерное время нахождения переносчика возмущения в движении мало по сравнению с временем жизни в состоянии покоя (т.е. можно пренебречь запаздыванием, обусловленным конечной скоростью переносчиков; это соответствует переносу в режиме полетов Леви в отличие от переноса в режиме прогулок Леви, см. обзор [3]), закон t^3 Ричардсона реализуется при значении $\gamma = 2/3$ согласно (7.8) в [21] (статус закона t^3 Ричардсона в свете недавнего численного моделирования парных корреляций [22] и возможного обобщения этого закона обсужден в [23]). Это и означает, что в [5] впервые показано, что перенос флуктуаций плотности плазмы поперек сильного магнитного поля в токамаке можно квалифицировать как турбулентность.

Во-вторых, на рис. 4 показана наилучшая аппроксимация «крыльев» пространственной зависимости ККФ в указанном диапазоне расстояний. Последняя зависимость имеет степенной характер вида $1/(1 + a|r|)^b$. Путем решения задачи оптимизации найдены параметры a и b : для частот вблизи ± 110 кГц имеем $a = 2.20 \text{ см}^{-1}$ и $b = 0.93$, а для частот вблизи ± 200 кГц получаем $a = 1.35 \text{ см}^{-1}$ и $b = 1.72$. Степенная зависимость ККФ радикально отличается от экспоненциальной (диффузионной, броуновской) модели ККФ, часто используемой в кросс-корреляционной рефлектометрии: см.

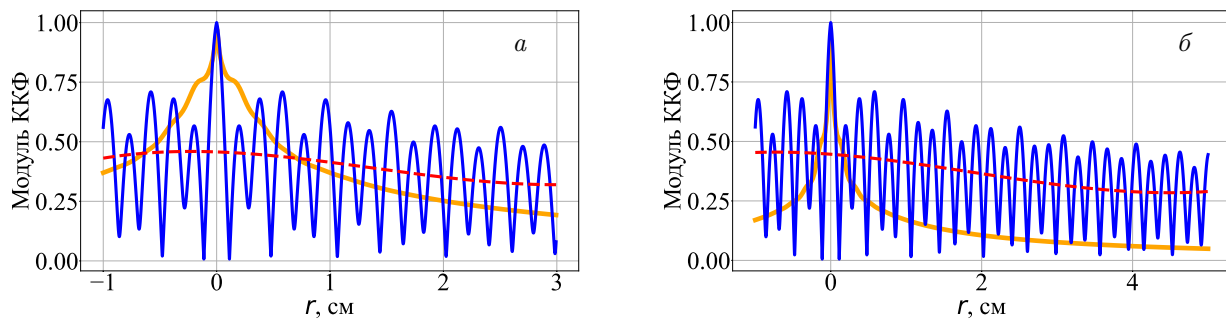


Рис. 5. Координатные зависимости модуля ККФ (13) для параметров, найденных в [5, 6], при наличии усреднения по скоростям (желтые кривые) и без учета усреднения по скоростям ($\alpha = 0$), для частот ± 110 кГц (а), ± 200 кГц (б). Добавлены кривые, полученные путем усреднения по осцилляциям (красные штриховые линии)

например, экспоненциальный вид парного коррелятора плотности плазмы (21) в [24], приводящий и к экспоненциальному виду координатной зависимости ККФ, а также упомянутый выше набор двух экспонент для рис. 5 и 6 в [11].

Данные результаты отличаются от показателя степени γ для ФРСП (3). Это связано с тем, что при наличии распределения по скоростям рассеивателей и соответствующем усреднении в (13) происходит размывание степенной зависимости ФРСП. На рис. 5 явным образом показана роль усреднения по скоростям в ФРСП.

На рис. 5 представлено сравнение результатов решения полной обратной задачи и расчета для тех же оптимальных значений параметров, найденных в [5, 6], кроме параметра уширения по скоростям α , т.е. без усреднения по скоростям (при $\alpha = 0$). Из представленного рисунка видна роль, которую играет эффект усреднения по скоростям радиального движения флуктуаций. На рис. 5 также приведены кривые, усредненные по осцилляциям, обусловленным интерференцией вкладов от рассеяния на флуктуациях, бегущих в противоположных направлениях: в (16) вклад одного сорта флуктуаций ККФ очевидным образом расщепляется на действительную и мнимую части.

Таким образом, медленное степенное убывание, имеющееся для пространственной зависимости ККФ, является следствием еще более медленного степенного убывания ФРСП, усреднение которой в общей формуле (13) для ККФ хотя и приводит к более быстрому уменьшению, но сохраняет существенное отличие от экспоненциального убывания. Уместно такое свойство ККФ связывать с нелокальностью кинетики наблюдаемых флуктуаций плотности плазмы и рассматривать так

называемый широкополосный участок в спектре рассеяния и спектре ККФ, обнаруженный в [11], не как отдельный тип турбулентности, а просто как далекие крылья квазикогерентных колебаний, наблюдаемых в различных токамаках.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В развитие подхода [1] представлена характеристика нелокальности турбулентности, описываемой законом t^3 Ричардсона для парных корреляций в жидкостях и газах, на примере спектральных и пространственных характеристик кросс-корреляционной рефлектометрии флуктуаций плотности плазмы в токамаках. Основным методическим выводом настоящей работы является то, что методы, развитые в теории переноса резонансного излучения в плазме и газах в спектральных линиях атомов и ионов, в случае их модификации применительно к другим задачам нелокального (недиффузионного) переноса оказываются плодотворными и позволяют решать другие сложные задачи нелокального переноса. Примером такого успешного развития методов атомной и молекулярной физики является кросс-корреляционная рефлектометрия флуктуаций плотности плазмы в плазме токамаков, использованная для оценки параметров нелокальности турбулентности как механизма процессов переноса поперек сильного магнитного поля.

Благодаря модификации расчетного алгоритма [5, 6] решения обратной задачи восстановления параметров сортов рассеивателей для кросс-корреляционной диагностики плазмы токамака диагностическим ЭМ-излучением удалось суще-

ственным образом улучшить результаты приближения экспериментальных данных с токамака KSTAR [12] теоретическими. Были найдены параметры флуктуаций-рассеивателей диагностического излучения и скорости гидродинамического движения плазмы и показано, что модификация алгоритма путем введения второго сорта флуктуаций с отличной от нуля средней массовой скоростью движения поперек сильного магнитного поля улучшает оптимизационные свойства общей теоретической модели [5,6].

Показано существенное отличие степенной пространственной зависимости ККФ флуктуаций плотности плазмы, найденной из экспериментальных данных на токамаке T-10 для корреляций поперек сильного магнитного поля, от экспоненциальной (диффузионной, броуновской) модели ККФ, часто используемой в кросс-корреляционной рефлектометрии. Связь далеких крыльев спектра рассеяния и спектра ККФ со степенными крыльями парной корреляционной функции и степенным распределением типа Леви у функции распределения по длине свободного пробега флуктуаций плотности в плазме позволяет предложить связь квазикогерентных колебаний (QCM), наблюдаемых в токамаках, с так называемым широкополосным участком в спектре рассеяния и спектре ККФ.

Благодарности. Работа выполнена с использованием оборудования центра коллективного пользования «Комплекс моделирования и обработки данных исследовательских установок мега-класса» НИЦ «Курчатовский институт», <http://ckp.nrcki.ru/>.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания НИЦ «Курчатовский институт».

ЛИТЕРАТУРА

1. L. F. Richardson, Proc. Roy. Soc. **110**, 709 (1926).
2. M. Shlesinger, G. M. Zaslavsky, and U. Frisch, *Levy Flights and Related Topics in Physics*, Springer, New York (1995).
3. V. Zaburdaev, S. Denisov, and J. Klafter, Rev. Mod. Phys. **87**, 483 (2015).
4. M. F. Shlesinger, B. J. West, and J. Klafter, Phys. Rev. Lett. **58**, 1100 (1987).
5. A. B. Kukushkin and A. A. Kulichenko, Symmetry **14**, 1265 (2022).
6. А. Б. Кукушкин, А. А. Куличенко, Вопросы атомной науки и техники, сер. Термоядерный синтез **45**(2), 105 (2022).
7. Л. М. Биберман, В. С. Воробьев, И. Т. Якубов, *Кинетика неравновесной низкотемпературной плазмы*, Наука, Москва (1982).
8. А. Б. Кукушкин, В. С. Лисица, Ю. А. Савельев, Письма в ЖЭТФ **46**, 356 (1987).
9. M. N. Rosenbluth and C. S. Liu, Phys. Fluids **19**, 815 (1976).
10. V. A. Vershkov, S. V. Soldatov, and V. V. Dreval, Rev. Sci. Instrum. **70**, 1700 (1999).
11. A. O. Urazbaev, V. A. Vershkov, S. V. Soldatov, and D. A. Shelukhin, Plasma Phys. Rep. **32**, 443 (2006).
12. W. Lee, J. Leem, D. J. Lee et al., Plasma Phys. Control. Fusion **60**, 115009 (2018).
13. A. Kramer-Flecken, V. V. Dreval, S. V. Soldatov et al., Nucl. Fusion **44**, 1143 (2004).
14. H. Arnichand, R. Sabot, S. Hacquin et al., Nucl. Fusion **54**, 123017 (2014).
15. J. Citrin, H. Arnichand, J. Bernardo et al., Plasma Phys. Control. Fusion **59**, 064010 (2017).
16. A. C. A. Figueiredo et al., Proc. 34th EPS Conf. Plasma Phys., Warsaw, ECA **31F**, 2.149 (2007).
17. J. Schirmer, G. D. Conway, E. Holzhauer et al., Plasma Phys. Control. Fusion **49**, 1019 (2007).
18. J. Kalis, G. Birkenmeier, P. Manz et al., Nucl. Fusion **64**, 016038 (2024).
19. W. L. Zhong, Z. B. Shi, Z. J. Yang et al., Phys. Plasmas **23**, 060702 (2016).
20. H. Qu, T. Zhang, X. Han et al., Rev. Sci. Instrum. **86**, 083503 (2015).
21. А. Б. Кукушкин, А. А. Куличенко, А. В. Соколов, ЖЭТФ **159**, 978 (2021).
22. J. I. Polanco, S. Arun, and A. Naso, Phys. Rev. Fluids **8**, 034602 (2023).
23. A. B. Kukushkin and A. A. Kulichenko, Foundations **3**, 602 (2023).
24. E. Gusakov, M. Irzak, and A. Popov, Plasma Phys. Control. Fusion **56**, 025009 (2014).