

ДВА МЕХАНИЗМА ДИНАМО В УРАВНЕНИИ КАЗАНЦЕВА

И. В. Макарова^а, Е. В. Юшков^{а,б*}, Д. Д. Соколов^{а,с}

^а Физический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, кафедра математики
119991, Москва, Россия

^б Институт космических исследований Российской академии наук
117997, Москва, Россия

^с Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн Российской академии наук
108840, Москва, Россия

Поступила в редакцию 15 сентября 2025 г.,
после переработки 5 октября 2025 г.
Принята к публикации 6 октября 2025 г.

Проведено сравнение двух механизмов магнитного динамо, описывающих генерацию магнитной энергии в турбулентных проводящих средах. Оба типа генерации — и мелкомасштабное, и α^2 -динамо — исследуются в рамках единой модели Вайнштейна–Кичатинова, основанной на уравнении Казанцева. Эта модель описывает поведение корреляционного тензора магнитного поля в несжимаемом, дельта-коррелированном во времени, локально однородном и изотропном потоке проводящей жидкости или плазмы. Для мелкомасштабной генерации критическим является магнитное число Рейнольдса, а для α^2 -генерации — наличие зеркальной асимметрии. Анализируется граница в параметрическом пространстве, разделяющая области доминирования генерации обоих типов. Классификация магнитного динамо осуществляется исходя из зависимости скорости генерации от магнитной диффузии, параметра α , а также соответствующей спектральной картины растущего магнитного поля. Полученные результаты могут быть полезны астрофизикам, планетологам, специалистам по магнитной гидродинамике, а также по течениям в плазме и в металлических расплавах.

DOI: 10.7868/S3034641X25120089

1. ВВЕДЕНИЕ

Явление динамо — процесс самовозбуждения магнитного поля в движущейся проводящей среде — рассматривается как традиционное объяснение природы магнетизма многих небесных тел, включая Землю и Солнце [1–3]. Тем не менее некоторые базовые свойства этого процесса еще требуют прояснения. В частности, остается не вполне ясным соотношение между мелкомасштабным и крупномасштабным динамо.

Дело в том, что самовозбуждение магнитного поля в конвективном или турбулентном потоке (а такие течения, как правило, и интересны для приложений) можно понимать как рост магнитного поля, усредненного по ансамблю реализаций, а можно рассматривать как рост средней магнитной энергии

или, обобщая, корреляционного тензора магнитного поля. В первом случае самовозбуждение носит название динамо среднего поля, или крупномасштабного динамо. Во втором случае, когда магнитная энергия экспоненциально нарастает, а среднее магнитное поле не растет, говорят о мелкомасштабном, или турбулентном динамо.

В интересных для астрофизики случаях динамо среднего поля основано на совместном действии зеркально-асимметричной турбулентности, или конвекции, и дифференциального вращения ($\alpha\omega$ -динамо). В частности, этот процесс был предложен Паркером в 1955 г. для объяснения природы цикла солнечной активности [4] и, с разнообразными дополнениями и модификациями, остается одной из составляющих современных представлений о природе солнечного магнетизма. Само уравнение для эволюции среднего магнитного поля в процессе $\alpha\omega$ -генерации было выведено в 1966 г. Штеенбеком, Краузе и Рэдлером [5]. При этом даже простейший анализ этого уравнения показывает возможность

* E-mail: yushkov.msu@mail.ru

роста среднего магнитного поля за счет одной только зеркальной асимметрии потока без учета дифференциального вращения — в этом случае принято говорить о крупномасштабном α^2 -динамо.

Однако нарушение зеркальной симметрии потока (ненулевая спиральность) не является определяющим для генерации средней магнитной энергии. Модель для описания ее эволюции в зеркально-симметричном потоке, предложенная Казанцевым в 1967 г., и по сей день остается основой для изучения турбулентного (мелкомасштабного) динамо [6]. Первоначально Казанцев вывел свое уравнение в самом простом случае, а затем его результаты обобщались в различных направлениях [7]. Так, было показано, что механизм турбулентного динамо может работать и в зеркально-асимметричном потоке с ненулевой спиральностью. Соответствующее расширение уравнения Казанцева было впервые сформулировано Вайнштейном и Китчатиновым в 1986 г. [8]. Для краткости далее мы будем говорить об уравнении Казанцева в тех случаях, когда не нужно подчеркивать роль зеркальной асимметрии; в противном случае будем конкретизировать.

Вполне разумно предположить, что крупномасштабное и мелкомасштабное динамо — это два различных физических процесса. Однако вопрос, как связаны уравнения Казанцева и Штеенбека–Краузе–Рэдлера, заранее не очевиден. Конечно, если растет среднее магнитное поле, то растет и средняя магнитная энергия. Однако заранее нет полной уверенности, что при этом скорость роста магнитной энергии будет вдвое больше скорости роста магнитного поля. Дело в том, что при развитии неустойчивостей в случайных средах может возникнуть так называемое явление перемежаемости [9], из-за которого редкие удачные реализации случайного потока могут определять скорость роста высоких моментов (скажем, второго) и не сказываться на росте низших моментов (скажем, первого).

Возможность того, что скорость роста магнитной энергии, полученная с помощью уравнения Казанцева, характеризует редкие реализации случайного потока, а типичные реализации растут несколько медленнее, и их скорость роста характеризуется так называемым показателем Ляпунова [10], кажется нам любопытной и заслуживающей внимания. Однако возникает вопрос, не является ли рост среднего магнитного поля, полученный из уравнения Штеенбека–Краузе–Рэдлера, тоже эффектом перемежаемости. Поскольку это уравнение лежит в основе многих моделей динамо в конкретных небесных телах, эта возможность была бы неприятна.

Итак, здесь мы хотели бы выяснить соотношение между уравнениями Казанцева и Штеенбека–Краузе–Рэдлера. Мы надеемся, что наше исследование подтвердит тот факт, что если основным драйвером динамо действительно является зеркальная асимметрия, то уравнение Казанцева сводится к уравнению Штеенбека–Краузе–Рэдлера, и лишь при малой роли зеркальной асимметрии специфические эффекты уравнения Казанцева оказываются доминирующими.

2. СИСТЕМА ТУРБУЛЕНТНОГО ДИНАМО

Как уже было сказано, в 1967 г. Казанцев вывел уравнение для корреляционной функции магнитного поля $M(r, t)$, усреднив уравнение магнитной индукции по изотропному и однородному, зеркально-симметричному, случайному, дельта-коррелированному во времени полю скорости $\mathbf{v}$. В 1986 г. Вайнштейн и Китчатинов обобщили его результат, убрав предположение о зеркальной симметрии, и получили систему уравнений для симметричной $M(r, t)$ и антисимметричной $K(r, t)$ частей корреляционной функции, связанной с корреляционным тензором магнитного поля соотношениями [11]

$$\begin{aligned} \langle B_i(\mathbf{r}_1, t) B_j(\mathbf{r}_2, t) \rangle = \\ = (M + \partial_r M r / 2) \delta_{ij} - \partial_r M r_i r_j / 2r + K \varepsilon_{ijk} r_k, \end{aligned} \quad (1)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, ε_{ijk} — символ Леви-Чивиты, ∂_r — производная по единственной пространственной переменной $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$, а корреляционные функции M_0 и K_0 при $r = 0$ связаны с магнитной энергией E_b и токовой спиральностью H_b :

$$E_b = \langle \mathbf{B}^2 \rangle = 3M_0(t),$$

$$H_b = \langle \text{rot} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \rangle = 6K_0(t).$$

В линейном приближении, т. е. при отсутствии обратного влияния растущего магнитного поля на поле скорости, динамика корреляционных функций $M(r, t)$ и $K(r, t)$ определяется видом аналогичных корреляционных функций поля скорости, $F(r)$ и $G(r)$, фиксированных во времени и также связанных с кинетической энергией E_v и спиральностью α_0 :

$$E_v = \langle \mathbf{v}^2 \rangle = 3F_0,$$

$$\alpha_0 = -\frac{\tau}{3} \langle \text{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \rangle = -2\tau G_0,$$

где τ — корреляционное время поля скорости. В этих переменных уравнение Вайнштейна–Кичатинова имеет компактный вид двух дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\partial_t M = 2r^{-4} \partial_r (r^4 \eta(r) \partial_r M) + 2r^{-4} M \partial_r (r^4 \partial_r \eta(r)) + 4\alpha(r) K, \quad (2)$$

$$\partial_t K = -r^{-4} \partial_r (r^4 \partial_r (\alpha(r) M)) + 2r^{-4} \partial_r (r^4 \partial_r (\eta(r) K)), \quad (3)$$

где вспомогательные функции $\eta(r)$ и $\alpha(r)$ связаны с корреляционными функциями выражениями

$$\begin{aligned} \eta(r) &= \text{Rm}^{-1} + \tau(F_0 - F(r)), \\ \alpha(r) &= -2\tau(G_0 - G(r)). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь Rm — магнитное число Рейнольдса. Уравнения (2), (3), как и классическое уравнение магнитной индукции, приведены к безразмерному виду с помощью характерного пространственного масштаба L и характерной скорости V , так что для удобства в дальнейшем мы предположим, что кинетическая энергия равна единице, т. е. $F_0 = 1/3$, а безразмерное корреляционное время $\tau = 3$. Предположение об одинаковом корреляционном времени для всех пространственных масштабов является очевидной идеализацией, однако опыт использования уравнения Казанцева и сравнения с данными прямого численного моделирования подтверждает жизнеспособность модели [12].

В рамках нашей работы в качестве корреляционной функции поля скорости мы выбираем

$$F(r) = \exp(-r^2)/3, \quad (5)$$

и, соответственно,

$$\eta(r) = \text{Rm}^{-1} + 1 - \exp(-r^2). \quad (6)$$

Аналогичные гауссовы функции часто используются как в численных, так и в аналитических исследованиях уравнения Казанцева [13–15]. Соответствующая выражениям (5), (6) спектральная плотность энергии равна

$$\mathcal{E}_v(k) = k^4 \exp(-k^2/4)/12\sqrt{\pi}.$$

Отталкиваясь от плотности энергии, мы выбираем спектральную плотность спиральности в виде

$$\mathcal{H}_v(k) = -\delta k \mathcal{E}_v(k),$$

где $\delta \in [0, 1]$. Такой выбор обусловлен как теоретической оценкой Моффата,

$$|\mathcal{H}_v(k)| \leq |k \mathcal{E}_v(k)|,$$

так и наблюдениями, например, спиральности в солнечном ветре [16]. Выбранная плотность спиральности определяет «антисимметричную» корреляционную функцию

$$G(r) = \int_0^\infty -\frac{\delta k^5 \exp(-k^2/4) [\sin(kr) - kr \cos(kr)]}{24\sqrt{\pi} k^3 r^3} dk, \quad (7)$$

для которой

$$\alpha_0 = \frac{16\delta}{3\sqrt{\pi}} \in [0, 3].$$

Решив систему уравнений Вайнштейна–Кичатинова с этими функциями, мы можем найти динамику корреляционной функции $M(r, t)$, по которой, в свою очередь, можем рассчитать поведение спектральной плотности растущей магнитной энергии:

$$\mathcal{E}_b(k, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty M(r, t) kr (\sin(kr) - kr \cos(kr)) dr, \quad (8)$$

где

$$\int_0^\infty \mathcal{E}_b(k, t) dk = E_b(t) = 3M_0.$$

При получении скорости роста и формы спектра магнитной энергии их можно сравнить с аналитическим решением уравнения Штеенбека–Краузе–Рэдлера.

3. УРАВНЕНИЕ СРЕДНЕГО ПОЛЯ

Эволюция среднего поля в однородном и изотропном (но зеркально-асимметричном) течении с нулевой средней скоростью потока описывается усредненным уравнением магнитной индукции:

$$\partial_t \mathbf{B} = \alpha_0 \text{rot} \mathbf{B} + \beta_0 \Delta \mathbf{B}, \quad (9)$$

в котором

$$\beta_0 = \text{Rm}^{-1} + 1.$$

Детали его вывода можно найти, например, в [17, 18]. Конечно, в вывод можно внести разнообразные усложнения, однако это сделает уравнение более громоздкими, без изменения ключевой идеи.

Отметим, что оба подхода сформулированы в специфических терминах, так что судить о том, насколько одно из них следует из другого без специально развитых методов, затруднительно. Нам кажется, что, по крайней мере на данной стадии исследования, можно избежать такого экстенсивного развития теории, сравнив только скорости роста и масштабы генерируемой энергии, полученные из обоих

уравнений. Именно так мы поступаем в рамках данной работы.

Что касается уравнения (9), в рассматриваемом приближении оно может быть решено с помощью преобразования Фурье [19], и его решение может быть записано как

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, t) = \exp(-\beta_0 k^2 t) \times \\ \times \left(\text{ch}(\alpha_0 k t) \hat{\mathbf{B}}_0 + i \text{sh}(\alpha_0 k t) [\mathbf{k}/k, \hat{\mathbf{B}}_0] \right). \quad (10)$$

В силу бездивергентности спектральная плотность магнитной энергии, пропорциональная $\hat{\mathbf{B}}(k) \hat{\mathbf{B}}^*(k)$, в данном случае ведет себя как

$$\mathcal{E}_b(k, t) = \text{ch}(2\alpha_0 k t) \exp(-2\beta_0 k^2 t) \mathcal{E}_{b0}(k) + \\ + \text{sh}(2\alpha_0 k t) \exp(-2\beta_0 k^2 t) k \mathcal{H}_{b0}(k), \quad (11)$$

где $\mathcal{E}_{b0}$ и $\mathcal{H}_{b0}$ — спектральная плотность и спиральность в начальный момент времени. Решение уравнения (11) на больших временах определяет экспоненциальный рост магнитного поля, максимальный на масштабе $k_\alpha = \alpha_0/2\beta_0$ и пропорциональный α_0^2 , что, кстати, и обуславливает название α^2 -динамо. В свою очередь, плотность магнитной энергии на масштабе k_α растет со скоростью $\gamma_\alpha = \alpha_0^2/2\beta_0$ — этот факт используется в дальнейшем для выделения области работы крупномасштабной α^2 -генерации.

Конечно, формула (11) не описывает поведения магнитной энергии с нулевым средним магнитным полем, так как выведена собственно из уравнения среднего поля (9). Поэтому результаты, полученные из (8) и (11) в процессе решения системы Вайнштейна–Кичатинова, на поле множества параметров α_0 и Rm , вообще говоря, различаются, а скорости роста совпадают (с точностью до деления на 2, которое необходимо при сравнении роста магнитного поля и его квадрата) лишь в некотором пределе, что позволяет выделить область параметрического пространства, где доминирует динамо среднего поля.

4. ДЕТАЛИ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

В отличие от уравнения среднего поля, система Вайнштейна–Кичатинова даже в однородном и изотропном потоке не является системой с постоянными коэффициентами, поэтому нам приходится решать ее численно.

В исходном виде у системы неоднородные граничные условия. Так, корреляционная функция $M(r, t)$ в нуле выходит не на нуль, а на M_0 . Для устранения этого препятствия мы традиционно [20]

переписали систему уравнений (2), (3), сделав замену переменных

$$M(r, t) = r^{-2} \eta^{-1/2} \phi(r, t), \\ K(r, t) = r^{-4} \partial_r (r^4 \partial_r (r^{-2} \theta(r, t))), \quad (12)$$

позволяющую, во-первых, избавиться от производных первого порядка по r , а во-вторых, и в нуле, и на бесконечности ставить нулевые граничные условия для функции как $\phi(r, t)$, так и $\theta(r, t)$. Соответствующая система имеет вид

$$\partial_t \phi = 2\eta \partial_{rr} \phi + (\partial_{rr} \eta - 4r^{-2} \eta + 4r^{-1} \partial_r \eta + \\ + 2^{-1} \eta^{-1} (\partial_r \eta)^2) \phi + 4\alpha \eta^{1/2} (\partial_{rr} \theta - 2r^{-2} \theta), \quad (13)$$

$$\partial_t \theta = -\alpha \eta^{-1/2} \phi + 2\eta (\partial_{rr} \theta - 2r^{-2} \theta). \quad (14)$$

Система (13), (14) решалась методом конечных разностей по неявной схеме на неравномерно заданной логарифмической сетке. Неравномерная по r сетка определялась через равномерную по $x \in (0, 1)$ сетку через связь $r = 10^2 \lg(1 - x)^{-1}$, количество узлов $N = 10^4$. Как показали численные эксперименты, выбор начальных условий для системы ни на что принципиально не влиял, так как при любых начальных данных экспоненциально нарастала все равно собственная функция. Для красоты, однако, чтобы остаточные начальные распределения не фигурировали в графиках спектральной плотности (см. ниже рис. 2), начальные данные для итоговых рисунков выбирались в качестве нормированной собственной функции. Длина временного шага для представленных результатов выбиралась равной 0.01, общее время моделирования 25. Система сводилась к векторному виду с блочной матрицей для функций ϕ и θ , путем обращения которой для каждого временного шага находилась функция $\phi(r, t)$ (а после обратной замены переменных рассчитывалась корреляционная функция $M(r, t)$). Так как в рамках данной работы мы ограничивались только линейным приближением, при котором корреляционные функции поля скорости являлись фиксированными, решение системы Вайнштейна–Кичатинова оказывалось экспоненциально растущим со временем: $M \propto \exp(\gamma t)$. Это так называемый линейный режим генерации. По временному росту корреляционной функции $M_0(t)$ (через линейную аппроксимацию последней четверти временной эволюции $\ln(M_0(t))$) вычислялся показатель экспоненциального роста γ на карте модельных параметров (α_0, Rm) . Найденная скорость γ сравнивалась со скоростью α^2 -механизма, γ_α , найденной из уравнения Штеенбека–Краузе–Рэдлера. Области, в ко-

торых они совпадали, рассматривались как области работы механизма α^2 -генерации, а там, где они отличались, — как области работы турбулентного динамо.

Также нельзя не упомянуть еще пару технических моментов, которые возникают при сравнении масштабов работы динамо-механизмов. Для этого мы используем корреляционные функции, с помощью которых вычисляются спектральные плотности магнитной энергии и спиральности, нормированные на максимальное значение энергии. Для спектрального анализа корреляционная функция, посчитанная на неравномерной сетке, интерполируется на равномерную с 10^5 узлами, а сами интегралы Фурье вычисляются классическим методом Симпсона [21]. Спектры строятся для машинного момента времени 25, величины α_0 и β_0 выбираются в соответствии с формулами (7) и (9). Так же, как, например, в работе [14], при больших волновых числах вычисление спектров приводит к существенному шуму. По этой причине на спектральных графиках (см. рис. 2) мы отсекаем этот хвостовой шум (резкий обрыв плотности энергии с правого конца), оставляя только достоверную часть спектров. После этого мы сравниваем рассчитанную плотность энергии и теоретическую, полученную по формуле (11), что и позволяет проанализировать масштабы генерации.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ СРАВНЕНИЯ

Основной результат работы может быть представлен в виде контурной карты, см. левую цветную панель на рис. 1. На карте изображено распределение отношения скоростей роста двух механизмов динамо, γ/γ_α , полученных из уравнений Вайнштейна–Кичатинова и Штеенбека–Краузе–Рэдлера соответственно, в зависимости от модельных параметров (Rm, α_0). При этом ниже границы генерации турбулентного динамо (на малых Rm) четко видна область доминирования α^2 -динамо, выделенная синим цветом. В этой области скорость генерации энергии в точности соответствует теоретической оценке $\gamma = \gamma_\alpha$, полученной из модели среднего поля. Другими словами, в этой области растут и магнитная энергия, и среднее поле. Явно это видно и на срезе карты — вертикальная красная штриховая линия, проходящая через синюю область. Для этого среза зависимость скорости генерации от спиральности представлена на правой верхней панели рис. 1. Совпадение черной штриховой линии, соответствующей

ющей численным расчетам, и круглых маркеров, соответствующих теоретической оценке, демонстрирует скорость генерации энергии, пропорциональную α^2 , т. е. работу α^2 -механизма.

При увеличении числа Рейнольдса Rm и его переходе через пороговое значение включается механизм турбулентного динамо. Это пороговое значение для выбранной модели приблизительно равно $Rm \approx 20$. При сравнении этой оценки с результатом, полученным в [13], где порог оказывается в три раза выше, нужно иметь в виду, что в этой работе используется иное приведение к безразмерному виду, при котором корреляционное время выбирается равным не единице, а тройке. На нижней правой панели рис. 1 показано, как скорость генерации растет с увеличением Rm . Эта зависимость соответствует срезу контурной карты, отмеченному горизонтальной красной штриховой линией. Резкое изменение скорости роста соответствует порогу, ниже которого работает α^2 -механизм, а выше — механизм турбулентного динамо. В рамках данной работы мы ограничиваемся значением $Rm = 100$, так как с дальнейшим увеличением числа Рейнольдса скорость генерации просто выходит на насыщение (в данном случае на $\gamma = 6.7$), что является известным классическим результатом. Заметим также, что оценка скорости α^2 -генерации и уровень насыщения турбулентного динамо $\gamma = 6.7$ показывают, что при больших Rm всегда будет доминировать турбулентное динамо вне зависимости от $\alpha_0 \in [0, 3]$, см. цветную диаграмму на рис. 1.

На основании рис. 1 мы констатируем, что эволюция вторых моментов, определяемая системой Вайнштейна–Кичатинова, действительно включает в себя эволюцию первого момента, определяемую α^2 -механизмом. В самом деле, в тех случаях, когда динамо среднего поля работает лучше мелкомасштабного динамо, оно и определяет рост не только первого, но и второго момента. Этот результат, хотя и является ожидаемым, но, в силу явления перемежаемости, не является заранее очевидным. Поскольку мы не видим следов перемежаемости в росте первого момента, мы заключаем, что он не определяется эффектами перемежаемости. Это тоже ожидаемый, но заранее не очевидный результат.

Неожиданным оказывается другой результат. В левой верхней части рис. 1 мы ожидаем доминирование крупномасштабной генерации, так как при малых α , масштаб генерации, обратно пропорциональный k_α , можно сделать сколь угодно большим. В правой нижней области рис. 1 мы ожидаем доминирование мелкомасштабной генерации в силу то-

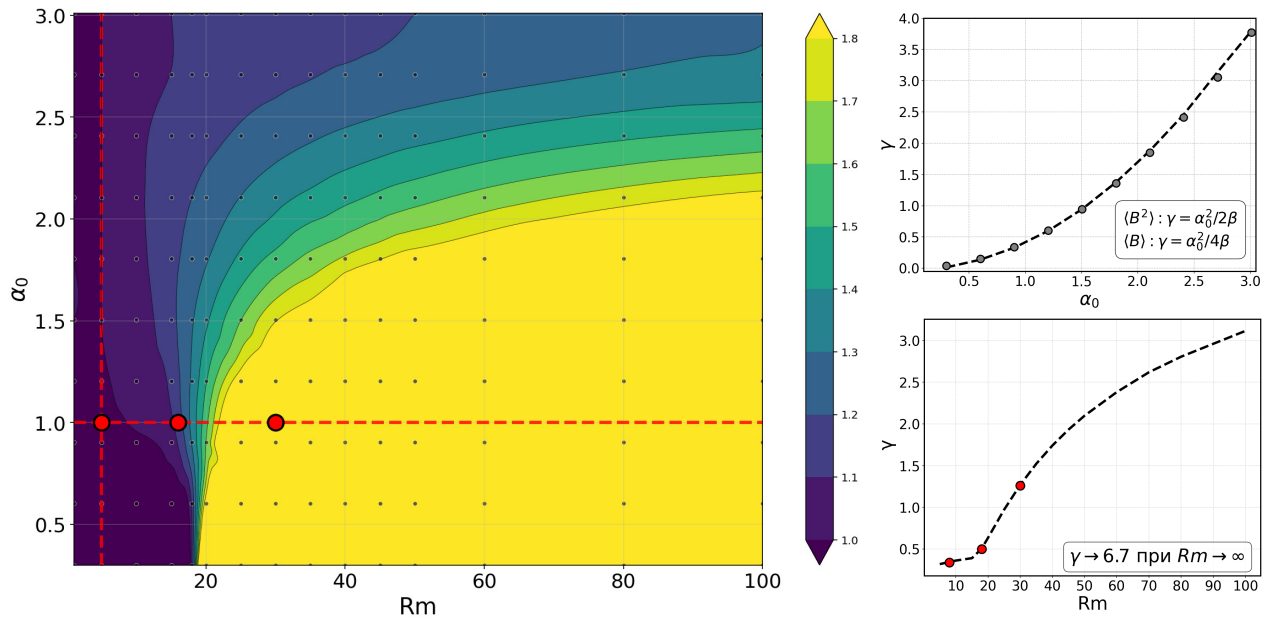


Рис. 1. Контурная карта зависимости отношения скоростей генерации магнитной энергии γ/γ_α от параметров гидродинамической спиральности α_0 и магнитного числа Рейнольдса Rm . Вертикальная и горизонтальная штриховые линии соответствуют отдельным одномерным срезам зависимостей от α_0 и Rm , представленным справа. Для параметров, отмеченных красными точками, построены спектры плотности магнитной энергии, представленные на рис. 2, слева направо соответственно

го, что масштаб генерации турбулентного динамо пропорционален $Rm^{-3/4}$ [12]. Однако в реальности спектральные распределения энергии оказываются более сложными.

Рассмотрим три набора параметров, отмеченных красными точками на контурной карте рис. 1: левая точка соответствует области доминирования α^2 -динамо, правая точка — области доминирования турбулентного динамо, а средняя точка — промежуточному случаю. На рис. 2 представлены спектральные плотности магнитной энергии, рассчитанные для этих наборов параметров (черные линии), а также спектральные плотности энергии, вычисленные для α^2 -генерации по уравнению среднего поля (11), красные штриховые линии. На правой панели рисунка отчетливо демонстрируется широкий пик, сформированный механизмом турбулентного динамо, α^2 -динамо в этом случае также работает, но так как его скорость генерации сравнительно меньше, пик, отмеченный красной линией и расположенный на больших масштабах, становится все ниже и ниже с течением времени. Промежуточная панель показывает случай с близкими скоростями роста магнитной энергии, в котором пики сливаются, образуя широкую единую область генерации. В этом случае разделить, где заканчивается один механизм и на-

чинается другой, можно только по наличию среднего магнитного поля. В рамках данного исследования мы знаем, где какой механизм работает, так как сравниваем решение системы Вайнштейна – Кичатинова с аналитическим решением, получаемым из модели среднего поля. В общем случае выделить из корреляционного тензора область с нулевым средним полем и область с растущим полем представляется нам непростой задачей, если вообще возможной. В любом случае исследование техники выделения из корреляционного тензора ненулевого среднего поля — это вопрос, далеко выходящий за рамки текущей постановки задачи. Пока мы лишь утверждаем, что среднее поле в корреляционном тензоре есть. Левая панель рис. 2 демонстрирует работу исключительно α^2 -механизма. По скорости роста, масштабу генерации и спектральному распределению главный пик соответствует теории среднего поля. Однако помимо крупномасштабного пика на графике присутствует и мелкомасштабный пик (плюс крупномасштабный турбулентный хвост). Таким образом, красный пик соответствует α^2 -генерации, которая тянет за собой черный пик, соответствующий мелкомасштабному динамо.

Итак, несмотря на докритическое значение параметров, механизм турбулентного динамо работает за

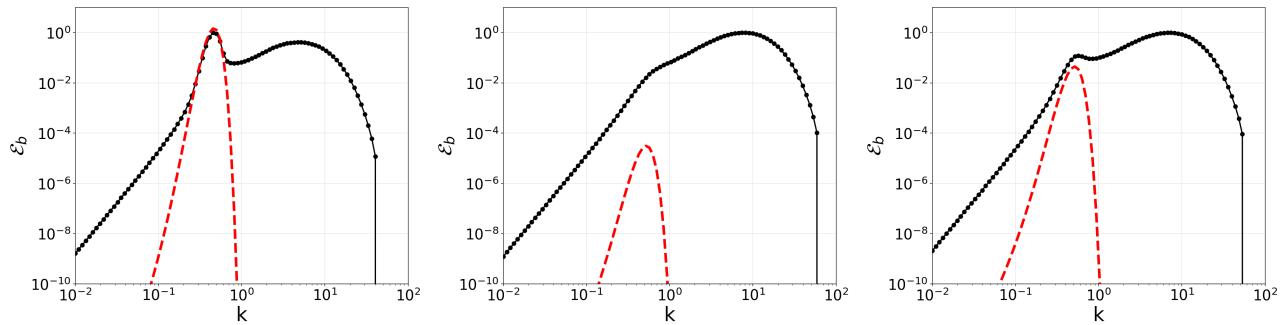


Рис. 2. Спектральные плотности нормированной магнитной энергии для трех областей модельных параметров: доминирования α^2 -динамо (левая панель), доминирования турбулентного динамо (правая панель) и переходной области (средняя панель). Черные точки соответствуют данным, рассчитанным по модели Вайнштейна–Кичатинова, красные кривые — спектральной плотности для α^2 -динамо в рамках модели среднего поля

счет α^2 -генерации и активно генерирует энергию на малых (и больших) масштабах. Таким образом, мы получаем, что при наличии гидродинамической спиральности магнитная энергия на малых масштабах генерируется независимо от того, является ли значение Rm сверх- или докритическим. И разделить оба этих механизма возможно только по наличию или отсутствию среднего магнитного поля.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках численного решения системы Вайнштейна–Кичатинова в работе были рассмотрены два механизма генерации: турбулентное динамо и α^2 -генерация. Сравнение решения с результатами для модели среднего поля показало, что система Вайнштейна–Кичатинова для вторых моментов включает в себя α^2 -генерацию как частный случай. Другими словами, модель Казанцева описывает поведение магнитной энергии как для случая с нулевым, так и для случая с ненулевым средним магнитным полем.

При малых магнитных числах Рейнольдса динамика корреляционного тензора демонстрирует совпадение и по скорости генерации, и по масштабу, и по форме спектральной плотности с уравнением среднего поля. По расчетным данным четко прослеживается как пропорциональность скорости генерации α^2 при увеличении спиральности, так и увеличение скорости генерации с выходом на насыщение при увеличении Rm . Еще раз подчеркнем, что этот результат являлся интуитивно ожидаемым, но требовал доказательства. Мы отдаем себе отчет в том, что проведенное численное доказательство не является окончательным в математическом смысле и

не исчерпывает всех возможных постановок вопроса, в частности, мы не рассматривали случай $\alpha\omega$ -динамо. Однако нам кажется, что на данном этапе изучения механизма динамо проведенное исследование снимает накопившиеся вопросы о соотношении двух динамо-механизмов.

Сравнивая скорости роста, вычисленные в рамках идеи Казанцева и уравнения среднего поля, мы обнаружили их совпадение в ожидаемой области параметрического пространства. Из этого, конечно, не следует, что мелкомасштабное динамо не вносит каких-то важных, но второстепенных деталей в поведение магнитного поля в этой области параметрического пространства. Более того, нет оснований настаивать на этом и при сравнении результатов теории с наблюдениями.

Гораздо менее ожидаемым оказался, по нашему мнению, второй результат, означающий, что в случае ненулевой спиральности у турбулентного динамо размывается понятие порога генерации, играющее важную роль при исследовании мелкомасштабного динамо. Это связано, во-первых, с тем, что α^2 -динамо в неограниченном пространстве является беспороговым. Во-вторых, важно, что генерируемая за счет динамо среднего поля крупномасштабная энергия поддерживает генерацию энергии и на малых масштабах. Другими словами, скорость генерации определяется α^2 -динамо, а магнитная энергия (правда, без среднего магнитного поля) присутствует на малых масштабах, вплоть до диссипативных. Таким образом, почти всегда спектральная плотность энергии представляет собой не узкий пик, отвечающий крупномасштабному полю, а широкую область, состоящую из двух частей: в крупномасштабной области всегда работает α^2 -механизм, генерирующий периодическую структуру среднего маг-

нитного поля, а в мелкомасштабной области — механизм турбулентного динамо, перерабатывая это магнитное поле в магнитную энергию в филаментах с нулевой средней амплитудой.

Под конец еще раз заметим, что разделения спектральных областей, в которых присутствует или отсутствует среднее магнитное поле, в рамках работы оказалось возможным за счет сравнения плотности генерируемой энергии с решением уравнения среднего поля. Можно ли в общем случае из спектральной плотности энергии (или корреляционного тензора) выделить область, в которой среднее поле не равно нулю — серьезный вопрос, на который у нас нет ответа. Он без сомнения является важным и интересным, осложняемый к тому же неоднородностью и анизотропией большинства прикладных задач, а также сложностью разделения в таких задачах среднего по пространству, по реализациям и по времени. Таким образом, утверждая в работе, что среднее крупномасштабное поле описывается моделью Казанцева, задачу его выделения мы предназначаем для будущих исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Rüdiger, L. L. Kitchatinov, and R. Hollerbach, *Magnetic Processes in Astrophysics: Theory, Simulations, Experiments*, Wiley-VCH Verlag GmbH, Weinheim (2013).
2. Д. Д. Соколов, Р. А. Степанов, П. Г. Фрик, УФН **184**, 313 (2014) [D. Sokoloff, P. Frick, and R. Stepanov, Phys.-Uspekhi **57**, 292 (2014)].
3. Ya. B. Zeldovich, A. A. Ruzmaikin, and D. D. Sokoloff, *Magnetic Fields in Astrophysics*, Gordon and Breach Science Pub., New York (1983).
4. E. N. Parker, Astrophys. J. **122**, 293 (1955).
5. M. Steenbeck, F. Krause, and K. H. Rädler, Z. Naturforsch. A **21**, 369 (1966).
6. А. П. Казанцев, ЖЭТФ **53**, 1806 (1967) [A. P. Kazantsev, Sov. Phys. JETP **26** 1031 (1968)].
7. D. Holdenried-Chernoff, D. A. King, and B. A. Buffett, J. Phys. A **56**, 455701 (2023).
8. S. I. Vainshtein and L. L. Kichatinov, J. Fluid Mech. **168**, 73 (1986).
9. Я. Б. Зельдович, С. А. Молчанов, А. А. Рузмайкин, Д. Д. Соколов, УФН **152**, 3 (1987).
10. А. С. Ильин, А. В. Копьев, В. А. Сирота, К. П. Зыбин, УФН **195**, 794 (2025).
11. G. K. Batchelor, *The Theory of Homogeneous Turbulence*, Cambridge Univ. Press (1953).
12. I. Abushzada, E. Yushkov, P. Frick, and D. Sokoloff, Phys. Rev. E **112**, 015104 (2025).
13. В. Г. Новиков, А. А. Рузмайкин, Д. Д. Соколов, ЖЭТФ **85**, 909 (1983) [V. G. Novikov, A. A. Ruzmaikin, and D. D. Sokolov, Sov. Phys. JETP **58**, 527 (1983)].
14. E. Yushkov, A. Lukin, D. Sokoloff, and P. Frick, Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. **113**, 184 (2019).
15. О. В. Артамонова, Д. Д. Соколов, Вестник МГУ **27**, 8 (1986).
16. A. Brandenburg, K. Subramanian, A. Balogh, and M. L. Goldstein, Astrophys. J. **734**, 9 (2011).
17. С. А. Молчанов, А. А. Рузмайкин, Д. Д. Соколов, УФН **145**, 593 (1985).
18. R. R. Allahverdiyev, E. V. Yushkov, and D. D. Sokoloff, Geomagn. Aeron. **63**, 882 (2023).
19. E. V. Yushkov, Magnetohydrodynamics **50**, 373 (2014).
20. E. V. Yushkov and A. S. Lukin, Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. **111**, 138 (2017).
21. Н. Н. Калиткин, *Численные методы*, Наука, Москва (1978).