

ВЛИЯНИЕ ДИФФУЗИИ АКТИВНЫХ АТОМОВ НА ФОРМУ СПЕКТРА РЕЗОНАНСА КОГЕРЕНТНОГО ПЛЕНЕНИЯ НАСЕЛЕННОСТЕЙ

Е. К. Рожков^{a}, К. А. Баранцев^b, Г. В. Волошин^b, А. Н. Литвинов^{b**}*

*^a Санкт-Петербургский национальный исследовательский Академический университет им. Ж. И. Алферова
Российской академии наук
194021, Санкт-Петербург, Россия*

*^b Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
195521, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 12 апреля 2025 г.,
после переработки 15 октября 2025 г.
Принята к публикации 17 октября 2025 г.

Приведены вывод и численное решение системы уравнений диффузии для компонент матрицы плотности Λ -атома, взаимодействующего с бихроматическим лазерным излучением при наличии буферного газа. В ходе вывода проведено расщепление цепочки Боголюбова и определен вид интеграла столкновений, в котором учитывались частые упругие столкновения и более медленные спин-обменные взаимодействия. Определены поправки первого и второго порядков малости к одночастичной матрице плотности, приводящие к отклонению распределения активных атомов по импульсам от равновесного (максвелловского). Проведено усреднение квантовых кинетических уравнений по импульсам активного атома и выполнен переход к представлению вращающейся волны. В выражениях для потоков компонент матрицы плотности присутствуют слагаемые, обусловленные пространственной неоднородностью системы, и слагаемые, возникающие из-за эффекта светоиндуцированного дрейфа. Исходя из численного решения системы для случаев одномерного и двумерного движения атомов установлено, что граничные эффекты оказывают существенное влияние на характеристики резонанса когерентного пленения населенностей и их роль возрастает при уменьшении размеров газовой ячейки. Определено, что существует область значений радиусов гауссова пучка, при которых параметр качества резонанса когерентного пленения населенностей (отношения амплитуды резонанса к его ширине) перестает зависеть от диаметра луча накачки. Показано, что для ячеек малых размеров существует концентрация буферных атомов, при которой параметр качества резонанса достигает максимального значения.

DOI: 10.7868/S3034641X25120012

1. ВВЕДЕНИЕ

Явление когерентного пленения населенностей (КПН) [1–4] и родственный с ним эффект электромагнитно-индуцированной прозрачности [5,6] представляют собой возникновение квантового суперпозиционного состояния, переходя в которое, система перестает взаимодействовать с возбуждающим излучением. Это приводит к тому, что в

спектре поглощения появляется окно прозрачности. Отличительной особенностью явления КПН является то, что ширина окна прозрачности может быть на несколько порядков уже, чем естественная ширина оптического перехода. Это позволяет использовать данное явление в широком спектре приложений, таких как квантовая магнитометрия, спектроскопия сверхвысокого разрешения, квантовая информатика. Особую роль здесь занимают малогабаритные квантовые стандарты частоты на основе явления КПН.

Для того чтобы наблюдать явление КПН, щелочные атомы обычно помещают в стеклянную ячейку (кювету). Однако при столкновении со стенками ячейки щелочные атомы деполяризуются, что

* E-mail: rozhkov.ek2002@mail.ru

** E-mail: andrey.litvinov@mail.ru

приводит к уширению линии КПН-резонанса. Для снижения вклада от влияния стенок и тем самым уменьшения деполяризации атомов используются два основных способа. Первый — это нанесение на стенки парафинового покрытия, что существенно (на 4 порядка) снижает вероятность деполяризации [7]. Второй вариант — это введение в ячейку буферного газа с концентрацией на 6–8 порядков больше, чем концентрация щелочных атомов. Преобладающее большинство экспериментальных исследований по эффекту КПН как раз относится к ячейкам с буферным газом [8–16]. При таких концентрациях имеет место диффузия щелочных атомов в буферном газе. Подавляющее большинство работ по теоретическому рассмотрению формирования резонанса КПН в буферном газе обычно ограничивается пренебрежением влияния стенок [17–20], или же учет влияния стенок сводится к аддитивной добавке в скорость релаксации, что, вообще говоря, не вполне корректно [21, 22]. В немногочисленных работах по исследованию ячеек с покрытием был разработан ряд подходов, позволяющих описывать влияние стенок ячейки. Как показано в работах [21–24], наличие стенок при определенных условиях может приводить к ряду нетривиальных физических эффектов. Несмотря на схожесть двух данных задач имеется и существенное различие. Так, в задачах о ячейках с покрытием речь идет о свободном пролете атомов, в то время как в ячейках с буферным газом мы имеем дело со значительно более медленным процессом — диффузией активных атомов. Поэтому в двух рассматриваемых случаях вклад столкновений со стенками в формирование КПН-резонанса может существенно различаться.

К настоящему времени обширного исследования, посвященного решению задачи о формировании КПН-резонанса активными атомами с учетом их диффузионного движения, нам найти не удалось. Существует работа [25], в которой последовательно выводится уравнение диффузии для двухуровневой системы. Также имеются работы по исследованию двойного радиооптического резонанса [26, 27]. Так, например, в [27] показано, что релаксация на стенке может приводить не только к уширению линии двойного радиооптического резонанса, но и наоборот, к ее сужению. Это нетривиальный результат, который говорит о том, что релаксация не может быть учтена простой аддитивной добавкой к скоростям соответствующих распадов. В работе [28] проведено последовательное теоретическое рассмотрение влияния процесса диффузии рабочих

атомов на формирование сигнала двойного радиооптического резонанса. В работе [29] есть попытки описать процессы диффузии в условиях резонанса электромагнитно-индуцированной прозрачности на качественном уровне без полноценного вывода уравнения диффузии. Авторам в рамках простой модели удалось продемонстрировать такие связанные с движением эффекты, как доплеровское уширение спектра поглощения, сужение Дике и т.п. Среди немногочисленных работ, посвященных исследованию влияния диффузионного движения активных атомов на формирование КПН-резонанса, можно выделить новую работу [30], в которой анализировались формы наблюдаемых сигналов поглощения и флуоресценции для случая активных атомов, находящихся в состоянии КПН-резонанса. Однако в данной работе не был проведен последовательный вывод системы диффузионных уравнений из уравнения Линдблада для матрицы плотности, поэтому в ней не может быть учтен эффект светоиндуцированного дрейфа (СИД), а также эффект втягивания активных атомов в область с большей интенсивностью лазерного излучения.

Резюмируя, можно сказать, что строгого вывода уравнений диффузии для атомов, находящихся в состоянии КПН, на сегодняшний день нет. Целью настоящей работы является восполнение этого пробела и проведение последовательного вывода системы диффузионных уравнений для Λ -атомов, находящихся во внешнем бихроматическом поле с учетом их движения и взаимодействия с буферными атомами. В ходе вывода используется математический аппарат, изложенный в работе [25]. Здесь важно отметить, что сейчас основной объект исследования представляют ячейки малых размеров (1–5 мм). В таких ячейках учет процессов диффузии и влияния граничных эффектов на форму резонанса КПН особенно актуален.

В настоящей работе выводится система диффузионных уравнений для щелочных атомов, находящихся во внешнем бихроматическом лазерном поле в условиях эффекта КПН. При этом рассматривается случай, когда лазерное поле существенным образом изменяет распределение частиц по внутренним состояниям. Также учитываются движение щелочных атомов и их упругие столкновения с атомами буферного газа. Решается трехмерная задача о формировании резонанса КПН в цилиндрической геометрии с аксиальной симметрией для произвольного диаметра лазерного луча при учете процессов диффузии щелочных атомов.

2. ВЫВОД КВАНТОВОГО КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Объектом исследования является газовая ячейка с парами щелочных металлов и буферным газом, взаимодействующая с бихроматическим лазерным излучением. Мы будем рассматривать концентрации буферных атомов, на несколько порядков превышающие концентрацию активных, поэтому принимается, что в ячейке на один активный атом приходится N буферных, где $N \gg 1$. Будем полагать, что буферные атомы бесструктурны, а для описания внутренних степеней свободы активных атомов используем модельное приближение на основе Λ -схемы: возбужденное электронное состояние представлено одним вырожденным уровнем p -состояния, а основное состояние — двумя подуровнями s -состояния (рис. 1).

Переход между основным и возбужденным состояниями разрешен, а между подуровнями s -терма запрещен в дипольном приближении и находится в СВЧ-диапазоне. Данная система взаимодействует с бихроматическим электрическим полем, имеющим вид плоской волны:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_1(\mathbf{r})e^{-i(\nu_1 t - \mathbf{k}_1 \mathbf{r})} + \mathbf{E}_2(\mathbf{r})e^{-i(\nu_2 t - \mathbf{k}_2 \mathbf{r})} + \text{c.c.},$$

где $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ — комплексные амплитуды полей, $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ — волновые векторы этих полей. Частоты полей ν_1 и ν_2 настроены на переходы $|1\rangle - |3\rangle$ и $|2\rangle - |3\rangle$ соответственно (см. рис. 1).

Перейдем к выводу квантового кинетического уравнения, который основан на формализме матрицы плотности. В работе не учитывается наличие корреляций между активными атомами, поскольку концентрация буферного газа на несколько порядков превышает концентрацию активных атомов. Таким образом, среднее расстояние между активными атомами много больше радиуса взаимодействия и можно принять, что матрица плотности, описывающая систему, зависит только от координат одного активного и N буферных атомов:

$$\rho_{\alpha\beta}^{(N)} = \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_N, t).$$

Переменные $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$ описывают положение активного атома, а $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}'_i$ относятся к i -му буферному атому, индексы α, β нумеруют электронные состояния активного атома в базисе энергетических состояний (см. рис. 1). Для рассматриваемой матрицы плотности будем использовать следующую нормировку:

$$\text{Tr} \int \hat{\rho}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) d^3 r d^3 r_1 \dots d^3 r_N = 1. \quad (1)$$

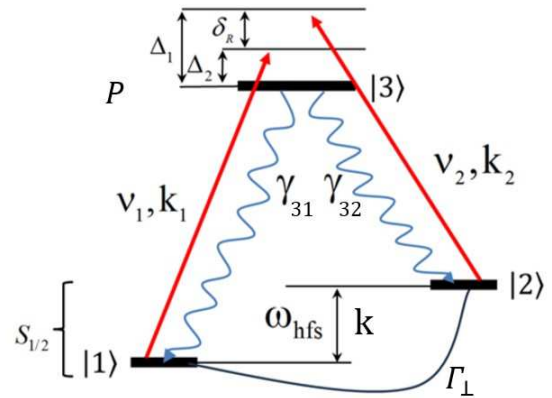


Рис. 1. Энергетическая схема уровней Λ -атома

Временная эволюция многочастичной матрицы плотности в дипольном приближении подчиняется следующему уравнению Линдблада:

$$i\hbar \frac{\partial \rho_{\alpha\beta}^{(N)}}{\partial t} = [\hat{T}_0 - \hat{\mathbf{d}}\mathbf{E} + \hat{V} + \hat{H}_0, \hat{\rho}^{(N)}]_{\alpha\beta} + (\hat{R}\hat{\rho}^{(N)})_{\alpha\beta}, \quad (2)$$

где $\hat{T}_0$ — оператор кинетической энергии активного и буферных атомов, $\hat{\mathbf{d}}$ — оператор дипольного момента активных атомов, $\hat{H}_0$ — оператор энергии, связанной с наличием у активных атомов внутренних степеней свободы, $\hat{R}$ — оператор, описывающий спонтанный распад возбужденного состояния активных атомов, $\hat{V}$ — оператор потенциальной энергии взаимодействия активных и буферных атомов, который можно представить в виде

$$\hat{V} = \sum_i \hat{V}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i).$$

Поскольку количество атомов в системе $N \sim 10^{22}$, оперировать матрицей плотности, зависящей от такого количества переменных, не представляется возможным. Поэтому уравнение Линдблада усредняется по координатам буферных атомов и вводятся одностичная и двухстичная матрицы плотности:

$$\begin{aligned} f_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) &= Q \int \rho_{\alpha\beta}^{(N)} d^3 r_1 \dots d^3 r_N, \\ G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}_i, \mathbf{r}'_i, t) &= \\ &= Q^2 \int \rho_{\alpha\beta}^{(N)} d^3 r_1 \dots d^3 r_{i-1} d^3 r_{i+1} \dots d^3 r_N, \end{aligned} \quad (3)$$

где Q — объем газовой ячейки. Отметим, что ввиду используемой нормировки многочастичной матрицы плотности (1), введенные в (3) матрицы плотности безразмерны. При усреднении многочастичной матрицы плотности по переменным буферных

атомов штрихованные и нештрихованные координаты, по которым проводится интегрирование, приравниваются: $\mathbf{r}_k \equiv \mathbf{r}'_k$. Интегрируя (2) по координатам всех буферных атомов кроме i -го, мы получим уравнение Линдблада в координатном представлении для двухчастичной матрицы плотности. Особенность данного уравнения заключается в том, что в него входит трехчастичная матрица плотности $\hat{\rho}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}_i, \mathbf{r}'_i, \mathbf{r}_j, \mathbf{r}'_j, t)$, для нахождения которой необходимо решать отдельное уравнение. Таким образом, одно уравнение для функции, зависящей от $2N + 2$ переменных, сводится к системе из N уравнений для функций меньшего количества переменных. Данная система представляет собой цепочку уравнений Боголюбова, и в ряде случаев ее удается значительно упростить, оборвав на некотором шаге. Для этого проведем оценки, которые позволят пренебречь тройными столкновениями, а также столкновениями, в которых участвует большее количество атомов, и тем самым оставить только два уравнения в цепочке Боголюбова.

В данной задаче мы принимаем, что радиус упругого взаимодействия активного и буферного атомов сравним с радиусом r_a активных атомов, в роли которых выступает ^{87}Rb . В таком случае слагаемое с трехчастичной матрицей плотности можно оценить [31] как $nVr_a^3/\hbar \sim 10^3 \text{ с}^{-1}$, где V — характерная энергия упругого взаимодействия активного и буферного атомов, n — концентрация буферных атомов. При комнатной температуре и концентрациях буферных атомов $n \sim 10^{17}\text{--}10^{19} \text{ см}^{-3}$ данное слагаемое оказывается много меньшим всех остальных членов в уравнении для двухчастичной матрицы плотности и им можно пренебречь, оставив из всей цепочки Боголюбова только два уравнения. Однако при увеличении концентрации буферного газа до значения $n \sim 10^{20} \text{ см}^{-3}$ вклад слагаемого с трехчастичной матрицей плотности оказывается сравнимым с вкладом от члена, описывающего взаимодействие системы с внешним полем и ограничиваться приближением бинарных столкновений не представляется возможным.

Двухчастичную матрицу плотности будем искать в следующем виде [25]:

$$\hat{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}_i, \mathbf{r}'_i, t) = \hat{f}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \hat{F}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}'_i, t) + \hat{g}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}_i, \mathbf{r}'_i, t),$$

где первое слагаемое описывает невзаимодействующие атомы, а $\hat{g}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}_i, \mathbf{r}'_i, t)$ — малая добавка, учитывающая наличие корреляций между активным и i -м буферным атомом, $\hat{F}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}'_i, t)$ — матрица плотности i -го буферного атома, которую можно принять

равной единичному оператору, поскольку буферные атомы принимаются бесструктурными и равномерно распределенными по объему системы. Из уравнения для двухчастичной матрицы плотности корреляционная функция выражалась через одночастичную матрицу плотности активного атома и выполнялась подстановка двухчастичной матрицы плотности в уравнение Линдблада, усредненное по координатам всех буферных атомов. В результате была получена системы квантовых кинетических уравнений для компонент матрицы плотности $f_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t)$ трехуровневой Λ -системы [31, 32]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{11}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t)}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \nabla_{\mathbf{R}} f_{11}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) - \gamma_{31} f_{33}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) + \\ + i\Omega_1^* f_{13}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) - i\Omega_1' f_{31}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) = \\ = -\nu_{11}[f_{11}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) - f'_{11}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t)] - \\ - \Gamma_{||}[f_{11}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) - f'_{22}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t)], \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{22}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t)}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \nabla_{\mathbf{R}} f_{22}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) - \gamma_{32} f_{33}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) - \\ - i\Omega_2' f_{32}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) + i\Omega_2^* f_{23}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) = \\ = -\nu_{22}[f_{22}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) - f'_{22}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t)] - \\ - \Gamma_{||}[f_{22}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) - f'_{11}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t)], \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{33}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t)}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \nabla_{\mathbf{R}} f_{33}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) + i\Omega_1^* f_{13}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) + \\ + i\Omega_1' f_{31}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) - i\Omega_2^* f_{23}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) + \\ + i\Omega_2' f_{32}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) + (\gamma_{31} + \gamma_{32}) f_{33}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) = \\ = -\nu_{33}[f_{33}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) - f'_{33}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t)], \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{12}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t)}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \nabla_{\mathbf{R}} f_{12}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) + i\omega_{12} f_{12}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) - \\ - i\Omega_1' f_{32}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) + i\Omega_2^* f_{13}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) = \\ = -\nu_{12}[f_{12}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) - f'_{12}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t)] \Gamma_{\perp} f_{12}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{13}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t)}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \nabla_{\mathbf{R}} f_{13}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) + \left[\frac{\gamma_{31}}{2} + i\omega_{13} \right] \times \\ \times f_{13}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) - i\Omega_1' [f_{33}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) - f_{11}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t)] + \\ + i\Omega_2' f_{12}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) = -\nu_{13} f_{13}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{23}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t)}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \nabla_{\mathbf{R}} f_{23}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) + \left[\frac{\gamma_{32}}{2} + i\omega_{23} \right] \times \\ \times f_{23}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) - i\Omega_2' [f_{33}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) - f_{22}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t)] + \\ + i\Omega_1' f_{21}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) = -\nu_{23} f_{23}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t), \end{aligned} \quad (9)$$

где для матрицы плотности был выполнен переход к смешанному представлению Вигнера:

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{r} + \mathbf{r}'}{2}, \quad \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{r} - \mathbf{r}',$$

$$f(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int f(\mathbf{R}, \boldsymbol{\kappa}, t) e^{-\frac{i}{\hbar} \boldsymbol{\kappa} \mathbf{p}} d^3 \boldsymbol{\kappa},$$

$\Gamma_{||}$ и $\Gamma_{\perp}$ — скорости продольной и поперечной релаксаций, обусловленных спин-обменными взаимодействиями, $\omega_{\alpha\beta}$ — частота перехода $|\alpha\rangle \leftrightarrow |\beta\rangle$,

$$\Omega'_1 = \Omega_1(e^{-i(\nu_1 t - \mathbf{k}_1 \mathbf{r})} + \text{c.c.}),$$

$$\Omega'_2 = \Omega_2(e^{-i(\nu_2 t - \mathbf{k}_2 \mathbf{r})} + \text{c.c.}),$$

где Ω_1, Ω_2 — частоты Раби внешних полей, γ_{31}, γ_{32} — скорости спонтанных распадов состояния $|3\rangle$ в состояния $|1\rangle$ и $|2\rangle$, m — масса активного атома, $\nu_{\alpha\alpha}$ — частота упругих столкновений для атома в состоянии $|\alpha\rangle$, ν_{12} — частота столкновений, при которых сохраняется низкочастотная когерентность, ν_{13} и ν_{23} — частоты столкновений, при которых разрушаются оптические когерентности $f_{13}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t)$ и $f_{23}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t)$ соответственно, $f'_{\alpha\beta}$ — член прихода, описывающий долю активных атомов попадающих в скоростную группу с импульсом $\mathbf{p}$ в результате столкновений.

Таким образом, в интеграле столкновений учтены два процесса, протекающих на разных временных масштабах: столкновения, в результате которых изменяется только импульс активного атома, но не его внутреннее состояние, и существенно более медленные спин-обменные взаимодействия, приводящие как к перемешиванию населенностей между основными состояниями, так и к изменению импульса активного атома. В общем случае рассматриваемый член прихода можно представить как

$$f'_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) = \int A(\mathbf{p}, \mathbf{p}') f_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, \mathbf{p}', t) d^3 p',$$

где вид ядра интеграла столкновений $A(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ зависит от характера взаимодействия активных и буферных атомов. Для рассматриваемой системы мы будем использовать модель сильных столкновений, согласно которой каждое столкновение активного атома с буферным приводит к установлению равновесного (максвелловского) распределения активных атомов по скорости. Поэтому ядро интеграла столкновений не зависит от начального импульса $\mathbf{p}'$, и член прихода имеет вид

$$f'_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) = M(p) \int f_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, \mathbf{p}', t) d^3 p',$$

где $M(p)$ — распределение Максвелла, нормированное на единицу. При этом принимается, что оптические когерентности разрушаются в каждом столкновении активного атома с буферным и член прихода для них равен нулю.

В результате от уравнения Линдблада был выполнен переход к системе квантовых кинетических уравнений для компонент одночастичной матрицы плотности трехуровневой Λ -системы.

3. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ

В данном разделе мы перейдем к непосредственному выводу уравнения диффузии. Суть диффузионного приближения заключается в том, что минимальным пространственным масштабом (кроме области взаимодействия активного атома с буферным) принимается длина свободного пробега активных атомов между двумя последовательными столкновениями с буферными атомами. Таким образом, все слагаемые в квантовых кинетических уравнениях оказываются много меньшими членов с частотами столкновений $\nu_{\alpha\beta}$. В таком случае распределение активных атомов по скоростям близко к максвелловскому, а взаимодействие активных атомов с внешним лазерным полем является малым возмущением по отношению к столкновительным процессам. Однако, несмотря на малость слагаемых, содержащих частоты Раби, по сравнению с интегралом столкновений, внешнее излучение все еще сильно изменяет распределение активных атомов по внутренним состояниям. Поэтому в дальнейшем компоненты одночастичной матрицы плотности раскладываются в ряд по малому параметру и осуществляется поиск последовательных поправок: $f_{\alpha\beta} = f_{\alpha\beta}^{(0)} + f_{\alpha\beta}^{(1)} + \dots$, где $f_{\alpha\beta}^{(j)}$ — элемент одночастичной матрицы плотности в j -ом приближении. Частоту столкновений для атома в состоянии $|\alpha\rangle$ можно оценить по формуле из газокинетической теории:

$$\nu_{\alpha\alpha} = n\sigma_{\alpha\alpha}v_T \sim 10^8 - 10^9 \text{ с}^{-1},$$

где v_T — средняя тепловая скорость активных атомов, $\sigma_{\alpha\alpha}$ — сечение взаимодействия активных атомов в состоянии $|\alpha\rangle$ с буферным. Поскольку в поставленной задаче взаимодействия принимаются короткодействующими, сечение можно оценить как $\sigma_{\alpha\alpha} \sim \pi r_a^2$. Частоты разрушения оптических когерентностей и столкновений, при которых сохраняется низкочастотная когерентность в модели сильных столкновений, вещественны и могут быть найдены по формуле $\nu_{\alpha\beta} = (\nu_{\alpha\alpha} + \nu_{\beta\beta})/2$ [31]. Вывод диффузионных уравнений будем проводить для стационарного случая. Тогда диагональные компоненты матрицы плотности не зависят от времени, а временная зависимость недиагональных компонент определяется внешними переменными полями.

Начнем с поиска компонент матрицы плотности в нулевом приближении. Для этого рассмотрим квантовые кинетические уравнения (8), (9), в которых присутствуют временные производные от слагаемых осциллирующих на оптических частотах $\nu_1, \nu_2 \sim 10^{15}-10^{17} \text{ с}^{-1}$ много больших частот столкновений $\nu_{\alpha\beta} \sim 10^8-10^9 \text{ с}^{-1}$. Чтобы использовать диффузионное приближение, необходимо исключить данные слагаемые из кинетических уравнений. Для этого в уравнениях (8), (9) выполним переход к приближению вращающейся волны:

$$\begin{aligned} f_{13}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) &= f_{13}(\mathbf{R}, \mathbf{p}) e^{-i(\nu_1 t - \mathbf{k}_1 \mathbf{R})}, \\ f_{23}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) &= f_{23}(\mathbf{R}, \mathbf{p}) e^{-i(\nu_2 t - \mathbf{k}_2 \mathbf{R})}, \\ f_{12}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) &= f_{12}(\mathbf{R}, \mathbf{p}) e^{-i[(\nu_1 - \nu_2)t - \mathbf{k} \mathbf{R}]}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$. В таком случае уравнения (8), (9) примут вид

$$\left(\frac{\gamma_{31}}{2} + \nu_{13} + i \left[\Delta_1 - \frac{\mathbf{k}_1 \mathbf{p}}{m} \right] \right) f_{13}(\mathbf{R}, \mathbf{p}) = -i\Omega_1 [f_{11}(\mathbf{R}, \mathbf{p}) - f_{33}(\mathbf{R}, \mathbf{p})] - i\Omega_2 f_{12}(\mathbf{R}, \mathbf{p}), \quad (11)$$

$$\left(\frac{\gamma_{32}}{2} + \nu_{23} + i \left[\Delta_2 - \frac{\mathbf{k}_2 \mathbf{p}}{m} \right] \right) f_{23}(\mathbf{R}, \mathbf{p}) = -i\Omega_2 [f_{22}(\mathbf{R}, \mathbf{p}) - f_{33}(\mathbf{R}, \mathbf{p})] - i\Omega_1 f_{21}(\mathbf{R}, \mathbf{p}), \quad (12)$$

где $\Delta_1 = \omega_{13} - \nu_1$, $\Delta_2 = \omega_{23} - \nu_2$ — однофотонные отстройки. В выражениях (8), (9) мы приняли равными нулю пространственные производные от медленных амплитуд матрицы плотности в сравнении с производными от быстро осциллирующих экспоненциальных множителей. В оптическом диапазоне слагаемые $\mathbf{k}_1 \mathbf{p}/m$, $\mathbf{k}_2 \mathbf{p}/m \sim 10^9 \text{ с}^{-1}$, т.е. сравнимы с частотой столкновений между активным и буферными атомами. Тогда уравнения для компонент матрицы плотности в нулевом приближении, $f_{13}^{(0)}(\mathbf{R}, \mathbf{p})$, $f_{23}^{(0)}(\mathbf{R}, \mathbf{p})$, имеют вид

$$\left(\frac{\gamma_{31}}{2} + \nu_{13} + i \left[\Delta_1 - \frac{\mathbf{k}_1 \mathbf{p}}{m} \right] \right) f_{13}^{(0)}(\mathbf{R}, \mathbf{p}) = 0, \quad (13)$$

$$\left(\frac{\gamma_{32}}{2} + \nu_{23} + i \left[\Delta_2 - \frac{\mathbf{k}_2 \mathbf{p}}{m} \right] \right) f_{23}^{(0)}(\mathbf{R}, \mathbf{p}) = 0. \quad (14)$$

Таким образом, $f_{13}^{(0)}(\mathbf{R}, \mathbf{p}) = 0$, $f_{23}^{(0)}(\mathbf{R}, \mathbf{p}) = 0$ и в нулевом приближении система не взаимодействует с внешними полями. Как будет показано ниже, влияние лазерного излучения на диагональные компоненты матрицы плотности имеет второй порядок малости. Теперь перейдем к рассмотрению квантовых кинетических уравнений для населенностей и низкочастотной когерентности в стационарном случае. В нулевом приближении уравнения (4), (5) имеют вид

$$\begin{aligned} 0 &= f_{11}^{(0)}(\mathbf{R}, \mathbf{p}) - M(p) \int f_{11}^{(0)}(\mathbf{R}, \mathbf{p}') d^3 p, \\ 0 &= f_{22}^{(0)}(\mathbf{R}, \mathbf{p}) - M(p) \int f_{22}^{(0)}(\mathbf{R}, \mathbf{p}') d^3 p. \end{aligned}$$

Их решением являются следующие функции:

$$\begin{aligned} f_{11}^{(0)}(\mathbf{R}, \mathbf{p}) &= M(p) \rho_{11}(\mathbf{R}), \\ f_{22}^{(0)}(\mathbf{R}, \mathbf{p}) &= M(p) \rho_{22}(\mathbf{R}), \end{aligned} \quad (15)$$

где $\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{R})$ — некоторая функция координаты. Таким образом, в нулевом приближении зависимость населенностей основных состояний от импульса изотропна и описывается распределением Максвелла. При этом из-за наличия спонтанного распада возбужденного состояния в основные со скоростями γ_{31} , γ_{32} и поперечной релаксации низкочастотной когерентности $\Gamma_{\perp}$ соответствующие компоненты матрицы плотности в нулевом приближении равны нулю:

$$f_{33}^{(0)}(\mathbf{R}, \mathbf{p}) = 0, \quad f_{12}^{(0)}(\mathbf{R}, \mathbf{p}) = 0. \quad (16)$$

Это закономерно, поскольку в нулевом приближении система не взаимодействует с внешними полями, а значит, отсутствуют факторы, приводящие к возбуждению активного атома и наведению низкочастотной когерентности между основными состояниями.

Теперь перейдем к поиску компонент матрицы плотности в первом и втором приближениях. Для этого вернемся к рассмотрению квантовых кинетических уравнений для оптических когерентностей, ограничиваясь слагаемыми первого порядка малости. В уравнение (11) подставим оптическую когерентность в первом приближении, $f_{13}^{(1)}(\mathbf{R}, \mathbf{p})$, а остальные компоненты матрицы плотности — в нулевом. Тогда высокочастотная когерентность в первом приближении будет иметь вид

$$\begin{aligned} f_{13}^{(1)}(\mathbf{R}, \mathbf{p}) &= \frac{-i\Omega_1}{\frac{\gamma_{31}}{2} + \nu_{13} + i \left[\Delta_1 - \frac{\mathbf{k}_1 \mathbf{p}}{m} \right]} f_{11}^{(0)}(\mathbf{R}, \mathbf{p}) = \\ &= \frac{-i\Omega_1}{\nu_{13}} w_1(\Delta_1, \mathbf{p}) \rho_{11}(\mathbf{R}), \end{aligned} \quad (17)$$

где была введена подынтегральная функция для интеграла фойгтовского типа:

$$w_1(\Delta_1, \mathbf{p}) = \frac{M(p) \nu_{13}}{\frac{\gamma_{31}}{2} + \nu_{13} + i \left(\Delta_1 - \frac{\mathbf{k}_1 \mathbf{p}}{m} \right)}.$$

Аналогично можно получить

$$f_{23}^{(1)}(\mathbf{R}, \mathbf{p}) = \frac{-i\Omega_2}{\nu_{23}} w_2(\Delta_2, \mathbf{p}) \rho_{22}(\mathbf{R}), \quad (18)$$

где

$$w_2(\Delta_2, \mathbf{p}) = \frac{M(p)\nu_{23}}{\frac{\gamma_{32}}{2} + \nu_{23} + i\left(\Delta_2 - \frac{\mathbf{k}_2\mathbf{p}}{m}\right)}.$$

Возникновение в выражениях для оптических когерентностей функций $w_1(\Delta_1, \mathbf{p})$, $w_2(\Delta_2, \mathbf{p})$ обусловлено наличием в системе трех типов уширений: однородного столкновительного и естественного уширений и неоднородного доплеровского. Теперь рассмотрим уравнение для населенности $f_{11}(\mathbf{R}, \mathbf{p})$ основного состояния, которое в первом приближении имеет вид

$$\frac{\mathbf{p}/m}{\nu_{11}} \nabla_{\mathbf{R}} f_{11}^{(0)}(\mathbf{R}, \mathbf{p}) = -f_{11}^{(1)}(\mathbf{R}, \mathbf{p}) + M(p) \int f_{11}^{(1)}(\mathbf{R}, \mathbf{p}') d^3 p', \quad (19)$$

где было учтено, что слагаемое

$$\frac{\Gamma_{||}}{\nu_{11}} [f_{11}(\mathbf{R}, \mathbf{p}) - f_{22}(\mathbf{R}, \mathbf{p})]$$

имеет второй порядок малости. Решение уравнения (19) будем искать в виде

$$f_{11}^{(1)}(\mathbf{R}, \mathbf{p}) = \frac{1}{\nu_{11}} \psi(\mathbf{p}) \nabla_{\mathbf{R}} \rho_{11}(\mathbf{R}), \quad (20)$$

где $\psi(\mathbf{p})$ — некоторая векторная функция импульса. При подстановке выражений (20), (15) в уравнение (19) можно получить интегральное уравнение для неизвестной функции $\psi(\mathbf{p})$:

$$\frac{\mathbf{p}}{m} M(p) = -\psi(\mathbf{p}) + M(p) \int \psi(\mathbf{p}') d^3 p', \quad (21)$$

решением которого является следующая нечетная функция импульса:

$$\psi(\mathbf{p}) = -\frac{\mathbf{p}}{m} M(p). \quad (22)$$

Таким образом, в первом порядке распределение населенностей основных состояний по импульсам анизотропно и имеет вид

$$f_{11}^{(1)}(\mathbf{R}, \mathbf{p}) = -\frac{\mathbf{p}/m}{\nu_{11}} M(p) \nabla_{\mathbf{R}} \rho_{11}(\mathbf{R}), \quad (23)$$

$$f_{22}^{(1)}(\mathbf{R}, \mathbf{p}) = -\frac{\mathbf{p}/m}{\nu_{22}} M(p) \nabla_{\mathbf{R}} \rho_{22}(\mathbf{R}).$$

Для нахождения первого приближения остальных компонент матрицы плотности рассмотрим кинетические уравнения (6), (7) в первом порядке малости:

$$0 = -f_{33}^{(1)}(\mathbf{R}, \mathbf{p}) + M(p) \int f_{33}^{(1)}(\mathbf{R}, \mathbf{p}') d^3 p',$$

$$0 = -f_{12}^{(1)}(\mathbf{R}, \mathbf{p}) + M(p) \int f_{12}^{(1)}(\mathbf{R}, \mathbf{p}') d^3 p'.$$

Решая их, можно получить выражения для первого приближения населенности возбужденного состояния и низкочастотной когерентности:

$$f_{33}^{(1)}(\mathbf{R}, \mathbf{p}) = M(p) \rho_{33}(\mathbf{R}), \quad (24)$$

$$f_{12}^{(1)}(\mathbf{R}, \mathbf{p}) = M(p) \rho_{12}(\mathbf{R}).$$

Выражения (24) и (15) похожи: в первом приближении зависимость населенности возбужденного состояния и низкочастотной когерентности от скорости изотропна и описывается распределением Максвелла. Однако функции $\rho_{33}(\mathbf{R})$, $\rho_{12}(\mathbf{R})$ в отличие от $\rho_{11}(\mathbf{R})$, $\rho_{22}(\mathbf{R})$ имеют не нулевой, а первый порядок малости.

Таким образом, были получены выражения для компонент матрицы плотности в нулевом и первом приближениях. Теперь займемся поиском поправок к компонентам матрицы плотности следующего порядка малости. Для этого запишем квантовое кинетическое уравнение (11) во втором порядке малости и с учетом выражений (23), (24) получим второе приближение для высокочастотной когерентности:

$$f_{13}^{(2)}(\mathbf{R}, \mathbf{p}) = \frac{i\Omega_1}{\nu_{13}} \frac{\mathbf{p}/m}{\nu_{11}} w_1(\Delta_1, \mathbf{p}) \nabla_{\mathbf{R}} \rho_{11}(\mathbf{R}) - \frac{i\Omega_2}{\nu_{13}} w_1(\Delta_1, \mathbf{p}) \rho_{12}(\mathbf{R}) + \frac{i\Omega_1}{\nu_{13}} w_1(\Delta_1, \mathbf{p}) \rho_{33}(\mathbf{R}). \quad (25)$$

Аналогично из кинетического уравнения (12) можно получить поправку к другой оптической когерентности:

$$f_{23}^{(2)}(\mathbf{R}, \mathbf{p}) = \frac{i\Omega_2}{\nu_{23}} \frac{\mathbf{p}/m}{\nu_{22}} w_2(\Delta_2, \mathbf{p}) \nabla_{\mathbf{R}} \rho_{22}(\mathbf{R}) - \frac{i\Omega_1}{\nu_{23}} w_2(\Delta_2, \mathbf{p}) \rho_{21}(\mathbf{R}) + \frac{i\Omega_2}{\nu_{23}} w_1(\Delta_2, \mathbf{p}) \rho_{33}(\mathbf{R}). \quad (26)$$

Для определения населенности возбужденного состояния во втором порядке подставим выражения для высокочастотных когерентностей (17), (18), (25), (26) в уравнение (6) и разделим обе части равенства на частоту столкновений ν_{33} :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\mathbf{p}/m}{\nu_{33}} \nabla_{\mathbf{R}} f_{33}(\mathbf{R}, \mathbf{p}) + \frac{\gamma_{31} + \gamma_{32}}{\nu_{33}} f_{33}(\mathbf{R}, \mathbf{p}) - \frac{2|\Omega_1|^2 \text{Re } w_1(\Delta_1, \mathbf{p})}{\nu_{13}\nu_{33}} \rho_{11}(\mathbf{R}) - \frac{2|\Omega_2|^2 \text{Re } w_2(\Delta_2, \mathbf{p})}{\nu_{23}\nu_{33}} \rho_{22}(\mathbf{R}) + \\
 & + \frac{2|\Omega_1|^2 \text{Re } w_1(\Delta_1, \mathbf{p})}{\nu_{11}\nu_{13}\nu_{33}} \frac{\mathbf{p}}{m} \nabla_{\mathbf{R}} \rho_{11}(\mathbf{R}) + \frac{2|\Omega_2|^2 \text{Re } w_2(\Delta_2, \mathbf{p})}{\nu_{22}\nu_{23}\nu_{33}} \frac{\mathbf{p}}{m} \nabla_{\mathbf{R}} \rho_{22}(\mathbf{R}) + \\
 & + \frac{2|\Omega_1|^2 \text{Re } w_1(\Delta_1, \mathbf{p})}{\nu_{13}\nu_{33}} \rho_{33}(\mathbf{R}) + \frac{2|\Omega_2|^2 \text{Re } w_2(\Delta_2, \mathbf{p})}{\nu_{23}\nu_{33}} \rho_{33}(\mathbf{R}) - \\
 & - \frac{2}{\nu_{33}} \left[\Omega_1^* \Omega_2 \left(\frac{w_1(\Delta_1, \mathbf{v})}{\nu_{13}} + \frac{w_2^*(\Delta_2, \mathbf{p})}{\nu_{23}} \right) \rho_{12}(\mathbf{R}) + \Omega_1 \Omega_2^* \left(\frac{w_1^*(\Delta_1, \mathbf{p})}{\nu_{13}} + \frac{w_2(\Delta_2, \mathbf{p})}{\nu_{23}} \right) \rho_{21}(\mathbf{R}) \right] = \\
 & = -f_{33}(\mathbf{R}, \mathbf{p}) + M(p) \int f_{33}(\mathbf{R}, \mathbf{p}') d^3 p'. \quad (27)
 \end{aligned}$$

Особенностью уравнения (27) является наличие первых пространственных производных от населенностей основных состояний. Как будет показано ниже, данные слагаемые отвечают за эффект СИД [33], который в дальнейшем приведет к возникновению дополнительного вклада в выражения для потоков компонент матрицы плотности. Слагаемые в первой строке левой части уравнения (27) имеют второй порядок малости, а все остальные — третий. Поэтому для поиска поправок второго порядка к населенности возбужденного состояния проинтегрируем выражение (27) по импульсам, удерживая только слагаемые из первой строки. В результате можно получить выражение, связывающее функцию $\rho_{33}(\mathbf{R})$ с аналогичными функциями $\rho_{11}(\mathbf{R})$, $\rho_{22}(\mathbf{R})$ для основных состояний:

$$\begin{aligned}
 \rho_{33}(\mathbf{R}) = & \frac{2|\Omega_1|^2 \text{Re } W_1(\Delta_1)}{\nu_{13}(\gamma_{31} + \gamma_{32})} \rho_{11}(\mathbf{R}) + \\
 & + \frac{2|\Omega_2|^2 \text{Re } W_2(\Delta_2)}{\nu_{23}(\gamma_{31} + \gamma_{32})} \rho_{22}(\mathbf{R}), \quad (28)
 \end{aligned}$$

где были введены функции Фаддеевой

$$\begin{aligned}
 W_1(\Delta_1) &= \int w_1(\Delta_1, \mathbf{p}) d^3 p, \\
 W_2(\Delta_2) &= \int w_2(\Delta_2, \mathbf{p}) d^3 p.
 \end{aligned}$$

Как упоминалось ранее, из-за наличия в системе двух типов уширения при усреднении кинетических уравнений по импульсам мы будем получать интегралы фойгтовского типа. Поэтому вторую поправку к населенности возбужденного состояния будем искать в виде

$$\begin{aligned}
 f_{33}^{(2)}(\mathbf{R}, \mathbf{p}) = & \frac{\mathbf{p}/m}{\nu_{33}} \psi(\mathbf{p}) \nabla_{\mathbf{R}} \rho_{33}(\mathbf{R}) + \\
 & + \frac{2}{\nu_{33}\nu_{13}} |\Omega_1|^2 \phi_1(\mathbf{p}) \rho_{11}(\mathbf{R}) + \frac{2}{\nu_{33}\nu_{23}} |\Omega_2|^2 \phi_2(\mathbf{p}) \rho_{22}(\mathbf{R}), \quad (29)
 \end{aligned}$$

где $\phi_1(\mathbf{p})$, $\phi_2(\mathbf{p})$ — некоторые скалярные функции импульса, а векторная функция $\psi(\mathbf{p})$ задается выражением (22). Подставляя в правую часть уравнения (27) выражения (24), а в левую — (29), получим два интегральных уравнения для неизвестных функций $\phi_1(\mathbf{p})$, $\phi_2(\mathbf{p})$:

$$\begin{aligned}
 \phi_1(\mathbf{p}) &= \text{Re } w_1(\Delta_1, \mathbf{p}) - M(p) \text{Re } W_1(\Delta_1) + \\
 & + M(p) \int \phi_1(\mathbf{p}') d^3 p', \\
 \phi_2(\mathbf{p}) &= \text{Re } w_2(\Delta_2, \mathbf{p}) - M(p) \text{Re } W_2(\Delta_2) + \\
 & + M(p) \int \phi_2(\mathbf{p}') d^3 p'. \quad (30)
 \end{aligned}$$

Заметим, что усреднение равенств (30) по импульсам приводит к тождеству вне зависимости от значений интегралов $\int \phi_1(\mathbf{p}') d^3 p'$, $\int \phi_2(\mathbf{p}') d^3 p'$. Поэтому имеется бесконечное множество решений интегральных уравнений (30), из которого мы выберем решение, соответствующее нормировке (1). Для этого мы примем следующие интегралы равными нулю:

$$\int \phi_1(\mathbf{p}') d^3 p' = 0, \quad \int \phi_2(\mathbf{p}') d^3 p' = 0.$$

Таким образом, второе приближение для населенности возбужденного состояния будет иметь вид

$$\begin{aligned}
 f_{33}^{(2)}(\mathbf{R}, \mathbf{p}) = & -\frac{\mathbf{p}/m}{\nu_{33}} M(p) \nabla_{\mathbf{R}} \rho_{33}(\mathbf{R}) - \\
 & - \frac{2|\Omega_1|^2}{\nu_{33}\nu_{13}} [M(p) \text{Re } W_1(\Delta_1) - \text{Re } w_1(\Delta_1, \mathbf{p})] \rho_{11}(\mathbf{R}) - \\
 & - \frac{2|\Omega_2|^2}{\nu_{33}\nu_{23}} [M(p) \text{Re } W_2(\Delta_2) - \text{Re } w_2(\Delta_2, \mathbf{p})] \rho_{22}(\mathbf{R}). \quad (31)
 \end{aligned}$$

Проводя аналогичные выкладки с уравнениями (4), (5), можно получить поправки второго порядка малости к населенностям основных состояний. В результате ряд теории возмущений для диагональных компонент матрицы плотности до второго порядка малости имеет следующий вид:

$$f_{11}(\mathbf{R}, \mathbf{p}) = M(p)\rho_{11}(\mathbf{R}) - \frac{\mathbf{p}/m}{\nu_{11}}M(p)\nabla_{\mathbf{R}}\rho_{11}(\mathbf{R}) + \frac{2|\Omega_1|^2}{\nu_{11}\nu_{13}}[M(p)\text{Re}W_1(\Delta_1) - \text{Re}w_1(\Delta_1, \mathbf{p})]\rho_{11}(\mathbf{R}), \quad (32)$$

$$f_{22}(\mathbf{R}, \mathbf{p}) = M(p)\rho_{22}(\mathbf{R}) - \frac{\mathbf{p}/m}{\nu_{22}}M(p)\nabla_{\mathbf{R}}\rho_{22}(\mathbf{R}) + \frac{2|\Omega_2|^2}{\nu_{22}\nu_{23}}[M(p)\text{Re}W_2(\Delta_2) - \text{Re}w_2(\Delta_2, \mathbf{p})]\rho_{22}(\mathbf{R}), \quad (33)$$

$$f_{33}(\mathbf{R}, \mathbf{p}) = M(p)\rho_{33}(\mathbf{R}) - \frac{\mathbf{p}/m}{\nu_{33}}M(p)\nabla_{\mathbf{R}}\rho_{33}(\mathbf{R}) - \frac{2|\Omega_1|^2}{\nu_{33}\nu_{13}}[M(p)\text{Re}W_1(\Delta_1) - \text{Re}w_1(\Delta_1, \mathbf{p})]\rho_{11}(\mathbf{R}) - \frac{2|\Omega_2|^2}{\nu_{33}\nu_{23}}[M(p)\text{Re}W_2(\Delta_2) - \text{Re}w_2(\Delta_2, \mathbf{p})]\rho_{22}(\mathbf{R}). \quad (34)$$

Таким образом, влияние внешних лазерных полей на населенности энергетических уровней активного атома проявляется только во втором порядке малости. Во втором приближении зависимость диагональных компонент матрицы плотности от импульса описывается функциями вида (30), что является поправкой на провал Беннета, возникающий из-за селективности воздействия поля на активные атомы по скоростям [31]. Теперь, чтобы получить вторую поправку к низкочастотной когерентности в уравнении (7), перейдем к приближению вращающейся волны (10) и подставим в него выражения для оптических когерентностей (17), (18), (25) и (26):

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbf{p}/m}{\nu_{12}}\nabla_{\mathbf{R}}f_{12}(\mathbf{R}, \mathbf{p}) + \frac{\Gamma_{\perp} + i(\delta_R + \mathbf{k}\mathbf{p}/m)}{\nu_{12}}f_{12}(\mathbf{R}, \mathbf{p}) + \frac{\Omega_1\Omega_2^*}{\nu_{12}}\left[\frac{w_1(\Delta_1, \mathbf{p})}{\nu_{13}}\rho_{11}(\mathbf{R}) + \frac{w_2^*(\Delta_2, \mathbf{p})}{\nu_{23}}\rho_{22}(\mathbf{R})\right] - \\ & - \frac{\Omega_1\Omega_2^*}{\nu_{12}}\left[\frac{w_1(\Delta_1, \mathbf{p})}{\nu_{13}} + \frac{w_2(\Delta_2, \mathbf{p})}{\nu_{23}}\right]\rho_{33}(\mathbf{R}) - \frac{\Omega_1\Omega_2^*}{\nu_{12}}\left[\frac{w_1(\Delta_1, \mathbf{p})}{\nu_{11}\nu_{13}}\frac{\mathbf{p}}{m}\nabla_{\mathbf{R}}\rho_{11}(\mathbf{R}) + \frac{w_2^*(\Delta_2, \mathbf{p})}{\nu_{22}\nu_{23}}\frac{\mathbf{p}}{m}\nabla_{\mathbf{R}}\rho_{22}(\mathbf{R})\right] + \\ & + \frac{1}{\nu_{12}}\left[\frac{|\Omega_1|^2}{\nu_{23}}w_2^*(\Delta_2, \mathbf{p}) + \frac{|\Omega_2|^2}{\nu_{13}}w_1(\Delta_1, \mathbf{p})\right]\rho_{12}(\mathbf{R}) = -f_{12}(\mathbf{R}, \mathbf{p}) + M(p)\int f_{12}(\mathbf{R}, \mathbf{p}')d^3p', \end{aligned} \quad (35)$$

где δ_R — двухфотонная отстройка. В левой части уравнения (35) слагаемые на первой строке имеют второй порядок малости, а все остальные — третий. Тогда, интегрируя данное уравнение по импульсам с точностью до второго порядка, можно выразить функцию $\rho_{12}(\mathbf{R})$ через усредненные по импульсам населенности основных состояний $\rho_{11}(\mathbf{R})$, $\rho_{22}(\mathbf{R})$:

$$\rho_{12}(\mathbf{R}) = -\frac{\Omega_1\Omega_2^*}{\nu_{13}(\Gamma_{\perp} + i\delta_R)}W_1(\Delta_1)\rho_{11}(\mathbf{R}) - \frac{\Omega_1\Omega_2^*}{\nu_{23}(\Gamma_{\perp} + i\delta_R)}W_2^*(\Delta_2)\rho_{22}(\mathbf{R}). \quad (36)$$

Поэтому вторая поправка к низкочастотной когерентности будет искажаться в следующем виде:

$$f_{12}^{(2)}(\mathbf{R}, \mathbf{p}) = -\frac{\mathbf{p}/m}{\nu_{12}}M(p)(\nabla_{\mathbf{R}} + i\mathbf{k})\rho_{12}(\mathbf{R}) + \frac{\Omega_1\Omega_2^*}{\nu_{12}\nu_{13}}\chi_1(\mathbf{p})\rho_{11}(\mathbf{R}) + \frac{\Omega_1\Omega_2^*}{\nu_{12}\nu_{23}}\chi_2(\mathbf{p})\rho_{22}(\mathbf{R}), \quad (37)$$

где $\chi_1(\mathbf{p})$, $\chi_2(\mathbf{p})$ — скалярные функции импульса. Тогда, опуская слагаемые третьего порядка малости, из уравнения (35) с учетом (37) получим выражения для функций $\chi_1(\mathbf{p})$, $\chi_2(\mathbf{p})$:

$$\begin{aligned} \chi_1(\mathbf{p}) &= W_1(\Delta_1)M(p) - w_1(\Delta_1, \mathbf{p}) + M(p)\int \chi_1(\mathbf{p}')d^3p', \\ \chi_2(\mathbf{p}) &= W_2^*(\Delta_2)M(p) - w_2^*(\Delta_2, \mathbf{p}) + M(p)\int \chi_2(\mathbf{p}')d^3p', \end{aligned} \quad (38)$$

где, как и для поправок к населенности возбужденного состояния, возникают произвольные постоянные, $\int \chi_1(\mathbf{p}')d^3p'$, $\int \chi_2(\mathbf{p}')d^3p'$, которые в силу используемой нормировки (1) матрицы плотности можно принять равными нулю. В таком случае ряд теории возмущений до второго порядка малости для низкочастотной когерентности имеет вид

$$\begin{aligned} f_{12}(\mathbf{R}, \mathbf{p}) &= 0 + M(p)\rho_{12}(\mathbf{R}) - \\ & - \frac{\mathbf{p}/m}{\nu_{12}}M(p)(\nabla_{\mathbf{R}} + i\mathbf{k})\rho_{12}(\mathbf{R}) + \\ & + \frac{\Omega_1\Omega_2^*}{\nu_{12}\nu_{13}}[W_1(\Delta_1)M(p) - w_1(\Delta_1, \mathbf{p})]\rho_{11}(\mathbf{R}) + \\ & + \frac{\Omega_1\Omega_2^*}{\nu_{12}\nu_{23}}[W_2^*(\Delta_2)M(p) - w_2^*(\Delta_2, \mathbf{p})]\rho_{22}(\mathbf{R}). \end{aligned} \quad (39)$$

Таким образом, нами было получено разложение в ряд компонент матрицы плотности до второго порядка малости. В первом ненулевом приближении зависимость компонент матрицы плотности от импульса изотропна и описывается распределением

Максвелла, а в следующих порядках теории возмущений возникает анизотропия в распределении по импульсам из-за пространственной неоднородности системы и взаимодействия активных атомов с внешними полями. Далее компоненты матрицы плотности в виде рядов (32), (33), (34), (39) подставлялись в соответствующие кинетические уравнения и вы-

полнялось их усреднение по скоростям. В результате от системы квантовых кинетических уравнений был выполнен переход к системе уравнений диффузионного типа, описывающей движение трехуровневого Λ -атома, взаимодействующего с бихроматическим лазерным излучением и буферным газом с концентрацией $10^{17} \text{ см}^{-3} \leq n \leq 10^{19} \text{ см}^{-3}$.

$$-D_{11}\nabla_{\mathbf{R}}^2\rho_{11}(\mathbf{R}) - \frac{4|\Omega_1|^2}{\nu_{13}}\frac{\text{Re}\mathbf{G}_1(\Delta_1)}{\nu_{11}}\nabla_{\mathbf{R}}\rho_{11}(\mathbf{R}) + \Gamma_{||}[\rho_{11}(\mathbf{R}) - \rho_{22}(\mathbf{R})] - \gamma_{31}\rho_{33}(\mathbf{R}) + \frac{2|\Omega_1|^2}{\nu_{13}}\text{Re}W_1(\Delta_1)[\rho_{11}(\mathbf{R}) - \rho_{33}(\mathbf{R})] + \frac{1}{\nu_{13}}[\Omega_1^*\Omega_2W_1(\Delta_1)\rho_{12}(\mathbf{R}) + \Omega_1\Omega_2^*W_1^*(\Delta_1)\rho_{21}(\mathbf{R})] = 0, \quad (40)$$

$$-D_{22}\nabla_{\mathbf{R}}^2\rho_{22}(\mathbf{R}) - \frac{4|\Omega_2|^2}{\nu_{23}}\frac{\text{Re}\mathbf{G}_2(\Delta_2)}{\nu_{22}}\nabla_{\mathbf{R}}\rho_{22}(\mathbf{R}) + \Gamma_{||}[\rho_{22}(\mathbf{R}) - \rho_{11}(\mathbf{R})] - \gamma_{32}\rho_{33}(\mathbf{R}) + \frac{2|\Omega_2|^2}{\nu_{23}}\text{Re}W_2(\Delta_2)[\rho_{22}(\mathbf{R}) - \rho_{33}(\mathbf{R})] + \frac{1}{\nu_{23}}[\Omega_2^*\Omega_1W_2(\Delta_2)\rho_{21}(\mathbf{R}) + \Omega_2\Omega_1^*W_2^*(\Delta_2)\rho_{12}(\mathbf{R})] = 0, \quad (41)$$

$$-D_{33}\nabla_{\mathbf{R}}^2\rho_{33}(\mathbf{R}) + \frac{2|\Omega_1|^2}{\nu_{13}}\left[\frac{1}{\nu_{11}} + \frac{1}{\nu_{33}}\right]\text{Re}\mathbf{G}_1(\Delta_1)\nabla_{\mathbf{R}}\rho_{11}(\mathbf{R}) + \frac{2|\Omega_2|^2}{\nu_{23}}\left[\frac{1}{\nu_{22}} + \frac{1}{\nu_{33}}\right]\text{Re}\mathbf{G}_2(\Delta_2)\nabla_{\mathbf{R}}\rho_{22}(\mathbf{R}) - \frac{2|\Omega_1|^2}{\nu_{13}}\text{Re}W_1(\Delta_1)[\rho_{11}(\mathbf{R}) - \rho_{33}(\mathbf{R})] - \frac{2|\Omega_2|^2}{\nu_{23}}\text{Re}W_2(\Delta_2)[\rho_{22}(\mathbf{R}) - \rho_{33}(\mathbf{R})] + [\gamma_{31} + \gamma_{32}]\rho_{33}(\mathbf{R}) - \Omega_1^*\Omega_2\left[\frac{W_1(\Delta_1)}{\nu_{13}} + \frac{W_2^*(\Delta_2)}{\nu_{23}}\right]\rho_{12}(\mathbf{R}) - \Omega_1\Omega_2^*\left[\frac{W_1^*(\Delta_1)}{\nu_{13}} + \frac{W_2(\Delta_2)}{\nu_{23}}\right]\rho_{21}(\mathbf{R}) = 0, \quad (42)$$

$$-D_{12}[\nabla_{\mathbf{R}}^2 + 2iD_{12}\mathbf{k}\nabla_{\mathbf{R}} - k^2]\rho_{12}(\mathbf{R}) + i\frac{\Omega_1\Omega_2^*}{\nu_{13}}\mathbf{k}[\mathbf{G}_1(\Delta_1)\rho_{11}(\mathbf{R}) + \mathbf{G}_2^*(\Delta_2)\rho_{22}(\mathbf{R})] - \frac{\Omega_1\Omega_2^*}{\nu_{13}}\left[\frac{1}{\nu_{12}} + \frac{1}{\nu_{11}}\right]\mathbf{G}_1(\Delta_1)\nabla_{\mathbf{R}}\rho_{11}(\mathbf{R}) - \frac{\Omega_1\Omega_2^*}{\nu_{23}}\left[\frac{1}{\nu_{12}} + \frac{1}{\nu_{22}}\right]\mathbf{G}_2^*(\Delta_2)\nabla_{\mathbf{R}}\rho_{22}(\mathbf{R}) + \frac{\Omega_1\Omega_2^*}{\nu_{13}}W_1(\Delta_1)\rho_{11}(\mathbf{R}) + \frac{\Omega_1\Omega_2^*}{\nu_{23}}W_2^*(\Delta_2)\rho_{22}(\mathbf{R}) - \Omega_1\Omega_2^*\left[\frac{W_1(\Delta_1)}{\nu_{13}} + \frac{W_2^*(\Delta_2)}{\nu_{23}}\right]\rho_{33}(\mathbf{R}) + \left[|\Omega_2|^2\frac{W_1(\Delta_1)}{\nu_{13}} + |\Omega_1|^2\frac{W_2^*(\Delta_2)}{\nu_{23}} + \Gamma_{\perp} + i\delta_R\right]\rho_{12}(\mathbf{R}) = 0, \quad (43)$$

где были введены векторные функции, зависящие от однофотонных отстройек,

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_1(\Delta_1) &= \int \frac{\mathbf{p}}{m} w_1(\Delta_1, \mathbf{p}) d^3p, \\ \mathbf{G}_2(\Delta_2) &= \int \frac{\mathbf{p}}{m} w_2(\Delta_2, \mathbf{p}) d^3p, \end{aligned} \quad (44)$$

и коэффициенты диффузии для населенностей и низкочастотной когерентности

$$D_{\alpha\beta} = \frac{1}{\nu_{\alpha\beta}} \int \frac{p^2}{m^2} M(p) d^3p. \quad (45)$$

Получить диффузионные уравнения для оптических когерентностей не представляется возможным, поскольку они разрушаются в каждом столкновении и, следовательно, нет их диффузионного переноса. Заметим, что в уравнениях для населенностей

(40)–(42) наряду со слагаемыми с второй пространственной производной, описывающими диффузионный перенос компонент матрицы плотности, присутствуют слагаемые с первой производной. Эти члены определяют поток населенностей, обусловленный эффектом СИД: в результате селективного по скорости взаимодействия лазерных полей с активными атомами на зависимости населенностей от скорости возникает узкий провал Беннета, что приводит к появлению противонаправленных потоков возбужденных и невозбужденных активных атомов.

Сечение взаимодействия возбужденного активного атома с буферным больше, чем у активного атома в основном состоянии, поэтому в среднем возбужденные атомы движутся медленнее невозбужденных [33]. Таким образом, взаимодействие ак-

тивных атомов с излучением приводит к возникновению в полном потоке дополнительной составляющей, зависящей от частот Раби. В отличие от обычного диффузионного потока, имеющего первый порядок малости, светоиндуцированная составляющая полного потока является величиной второго порядка малости. Определим полный поток компоненты матрицы плотности $\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{R})$ следующим образом:

$$\mathbf{J}_{\alpha\beta}(\mathbf{R}) = \int \frac{\mathbf{p}}{m} f_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, \mathbf{p}) d^3p.$$

Тогда, исходя из равенств (32)–(34), полные потоки населенностей имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{11} &= -D_{11} \nabla_{\mathbf{R}} \rho_{11}(\mathbf{R}) - \frac{4|\Omega_1|^2}{\nu_{13}} \frac{\text{Re} \mathbf{G}_1(\Delta_1)}{\nu_{11}} \rho_{11}(\mathbf{R}), \\ \mathbf{J}_{22} &= -D_{22} \nabla_{\mathbf{R}} \rho_{22}(\mathbf{R}) - \frac{4|\Omega_2|^2}{\nu_{23}} \frac{\text{Re} \mathbf{G}_2(\Delta_2)}{\nu_{22}} \rho_{22}(\mathbf{R}), \\ \mathbf{J}_{33} &= -D_{33} \nabla_{\mathbf{R}} \rho_{33}(\mathbf{R}) + \\ &+ \frac{2|\Omega_1|^2 \text{Re} \mathbf{G}_1(\Delta_1)}{\nu_{13}} \left[\frac{1}{\nu_{11}} + \frac{1}{\nu_{33}} \right] \rho_{11}(\mathbf{R}) + \\ &+ \frac{2|\Omega_2|^2 \text{Re} \mathbf{G}_2(\Delta_2)}{\nu_{23}} \left[\frac{1}{\nu_{22}} + \frac{1}{\nu_{33}} \right] \rho_{22}(\mathbf{R}). \end{aligned} \quad (46)$$

Таким образом, поток для каждой из диагональных компонент матрицы плотности содержит два вклада. Первый — диффузионный поток, удовлетворяющий закону Фика и пропорциональный соответствующему коэффициенту диффузии $D_{\alpha\alpha}$. Второй — светоиндуцированный поток, зависящий от интенсивностей $|\Omega_1|^2$, $|\Omega_2|^2$ внешних полей. Полный поток активных атомов представляется в виде суммы потоков для населенностей энергетических уровней:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \mathbf{J}_{11} + \mathbf{J}_{22} + \mathbf{J}_{33} = \\ &= -D_{11} \nabla_{\mathbf{R}} \rho_{11}(\mathbf{R}) - D_{22} \nabla_{\mathbf{R}} \rho_{22}(\mathbf{R}) - D_{33} \nabla_{\mathbf{R}} \rho_{33}(\mathbf{R}) + \\ &+ \frac{2|\Omega_1|^2 \text{Re} \mathbf{G}_1(\Delta_1)}{\nu_{13}} \left[\frac{1}{\nu_{33}} - \frac{1}{\nu_{11}} \right] \rho_{11}(\mathbf{R}) + \\ &+ \frac{2|\Omega_2|^2 \text{Re} \mathbf{G}_2(\Delta_2)}{\nu_{23}} \left[\frac{1}{\nu_{33}} - \frac{1}{\nu_{22}} \right] \rho_{22}(\mathbf{R}). \end{aligned} \quad (47)$$

Из выражения (47) видно, что при равенстве частот столкновений для атомов в основных и возбужденном состояниях, $\nu_{11} = \nu_{22} = \nu_{33}$, светоиндуцированная часть от общего потока равна нулю, а при равенстве нулю двухфотонных отстроек равен нулю светоиндуцированный поток каждой из населенностей в отдельности. Если одно из полей находится в резонансе с соответствующим переходом, $\Delta_1 = 0$, а частота второго поля сканируется, $\Delta_2 = \delta_R$, то при переходе системы в состояние КПН эффект

СИД пропадает. Светоиндуцированная часть потока оказывает влияние на распределение активных атомов по газовой ячейке только при достаточно больших ненулевых однофотонных отстройках, и, следовательно, влияние эффекта СИД на формировании КПН-резонанса проявляется только в крыльях линии.

В общем случае частоты Раби Ω_1 , Ω_2 зависят от координаты в плоскости, перпендикулярной направлению распространения луча. Для таких неоднородных пучков интенсивности $|\Omega_1|^2$, $|\Omega_2|^2$ являются функциями координаты, что приводит к втягиванию или выталкиванию активных атомов из области, занятой лазерным лучом [34]. Такой эффект втягивания–выталкивания атомов, как и эффект СИД, обусловлен различием радиусов активного атома в основном и возбужденном состояниях. Поскольку в рассматриваемой задаче времена распада γ_{31}^{-1} , γ_{32}^{-1} возбужденного состояния много меньше времени, которое требуется атому, чтобы покинуть область лазерного луча, в области, занимаемой лазерным полем, концентрация возбужденных атомов выше по сравнению с концентрацией в области без поля. Это обстоятельство приводит к возникновению диффузионного потока возбужденных атомов, направленного в область с меньшей интенсивностью поля, а активные атомы в основном состоянии диффундируют в противоположном направлении. Из-за увеличения радиуса атома при переходе в возбужденное состояние коэффициент диффузии для возбужденных атомов оказывается меньше, чем для атомов в основном состоянии. Таким образом, взаимодействие атомов с неоднородным лазерным полем приводит к возникновению потока активных атомов, направленного в область с большей интенсивностью излучения.

Полный диффузионный и светоиндуцированный потоки не равны нулю по отдельности, что приводит к нарушению локальной нормировки матрицы плотности на единицу: $\text{Tr} \hat{\rho}(\mathbf{R}) \neq 1$. Новое условие нормировки можно получить, сложив диффузионные уравнения (40)–(42) для населенностей. После приведения подобных членов мы получим стационарное уравнение непрерывности

$$\text{div} \mathbf{J}(\mathbf{R}) = 0. \quad (48)$$

Локальное условие нормировки матрицы плотности является частным случаем более общего условия (48), которое в данной задаче можно дополнительно упростить, приняв во внимание, что в экспериментах по наблюдению КПН-резонанса используется закрытая газовая ячейка. Поэтому в стационар-

ном случае равна нулю не дивергенция, а сам поток активных атомов:

$$\mathbf{J}(\mathbf{R}) = 0. \quad (49)$$

По этой же причине, несмотря на нарушение локальной нормировки, все еще выполняется глобальная нормировка (1) матрицы плотности, поскольку полное число активных атомов в закрытой газовой ячейке сохраняется. Поэтому в дальнейшем для численного решения диффузионных уравнений с учетом эффекта СИД должно использоваться не условие локальной нормировки матрицы плотности на единицу, а условие (49) равенства нулю полного потока диагональных компонент матрицы плотности.

Аналогичные выражения для дивергенции потока низкочастотной когерентности можно получить из уравнения (35):

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{J}_{12}(\mathbf{R})e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}}) = & -D_{12}e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}}\nabla_{\mathbf{R}}^2\rho_{12}(\mathbf{R}) - \\ & -2iD_{12}\mathbf{k}e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}}\nabla_{\mathbf{R}}\rho_{12}(\mathbf{R}) + D_{12}k^2e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}}\rho_{12}(\mathbf{R}) + \\ & + i\frac{\Omega_1\Omega_2^*}{\nu_{13}}\mathbf{k}e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}}[\mathbf{G}_1(\Delta_1)\rho_{11}(\mathbf{R}) + \mathbf{G}_2^*(\Delta_2)\rho_{22}(\mathbf{R})] - \\ & - \frac{\Omega_1\Omega_2^*}{\nu_{13}}\left[\frac{\mathbf{G}_1(\Delta_1)}{\nu_{12}} + \frac{\mathbf{G}_1(\Delta_1)}{\nu_{11}}\right]e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}}\nabla_{\mathbf{R}}\rho_{11}(\mathbf{R}) - \\ & - \frac{\Omega_1\Omega_2^*}{\nu_{23}}\left[\frac{\mathbf{G}_2^*(\Delta_2)}{\nu_{12}} + \frac{\mathbf{G}_2^*(\Delta_2)}{\nu_{22}}\right]e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}}\nabla_{\mathbf{R}}\rho_{22}(\mathbf{R}), \quad (50) \end{aligned}$$

где, как и для населенностей, присутствуют диффузионная компонента потока, обусловленная неоднородностью в пространственном распределении низкочастотной когерентности по объему газовой ячейки, и светоиндуцированная составляющая, зависящая от частот Раби, внешних полей и однофотонных отстройек. Для неоднородного лазерного луча активные атомы будут втягиваться в область с большей интенсивностью излучения.

Таким образом, в настоящем разделе была получена система уравнений (40)–(43), описывающая диффузионное движение активных Λ -атомов с учетом их взаимодействия с буферными атомами и двухчастотным лазерным излучением для стационарного случая. Установлено, что потоки компонент матрицы плотности содержат два вклада — диффузионный, описываемый законом Фика, и светоиндуцированный, который на порядок меньше диффузионного. Наличие светоиндуцированного потока приводит к нарушению локальной нормировки матрицы плотности, но для закрытой газовой ячейки сохраняет глобальную нормировку. Поэтому в дальнейшем мы будем решать систему (40)–(43) с удаленным уравнением для населенности одного из

энергетических уровней и дополнительным условием равенства нулю полного потока (49).

4. РЕШЕНИЕ ДИФФУЗИОННЫХ УРАВНЕНИЙ В ОДНОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

В настоящем разделе мы перейдем к численному решению системы (41)–(43), (49) для стационарного случая и одномерной оптически тонкой среды. Решение диффузионных уравнений с учетом эффектов СИД и втягивания атомов в область лазерного луча существенно усложняет задачу из-за нарушения локальной нормировки матрицы плотности, вследствие чего необходимо использовать нелокальные граничные условия (1). Кроме того, вклад от дивергенции светоиндуцированного потока,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{J}^{light}(\mathbf{R}) = & \frac{2|\Omega_1|^2\operatorname{Re}\mathbf{G}_1(\Delta_1)}{\nu_{13}}\left[\frac{1}{\nu_{33}} - \frac{1}{\nu_{11}}\right]\nabla_{\mathbf{R}}\rho_{11}(\mathbf{R}) + \\ & + \frac{2|\Omega_2|^2\operatorname{Re}\mathbf{G}_2(\Delta_2)}{\nu_{23}}\left[\frac{1}{\nu_{33}} - \frac{1}{\nu_{22}}\right]\nabla_{\mathbf{R}}\rho_{22}(\mathbf{R}), \end{aligned}$$

в уравнения диффузии является величиной второго порядка малости, что на порядок меньше вклада от диффузионного потока. Поэтому на данном этапе решения задачи мы ограничимся рассмотрением диффузионного потока активных атомов, а вклад эффектов СИД и втягивания активных атомов в область лазерного луча в формирование КПН-резонанса Λ -атомами требует отдельного изучения. Тогда в дальнейшем мы примем, что частоты столкновений, а следовательно, и коэффициенты диффузии (45) одинаковы в основных и возбужденном состояниях: $\nu_{11} = \nu_{22} = \nu_{33} = \nu$, $D_{11} = D_{22} = D_{33} = D$.

При решении системы будут использоваться граничные условия полного тушения, согласно которым на стенках разрушаются все когерентности, а населенности поровну распределяются между основными состояниями $|1\rangle$ и $|2\rangle$. Математически используемые граничные условия выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha\beta}|_{z=L} &= \rho_{\alpha\beta}|_{z=0} = 0, \quad \alpha \neq \beta, \\ \rho_{11}|_{z=L} &= \rho_{11}|_{z=0} = 0.5, \\ \rho_{22}|_{z=L} &= \rho_{22}|_{z=0} = 0.5, \\ \rho_{33}|_{z=L} &= \rho_{33}|_{z=0} = 0, \end{aligned}$$

где L — линейные размеры системы, z — координата, вдоль которой распространяется лазерное излучение. С учетом таких граничных условий система

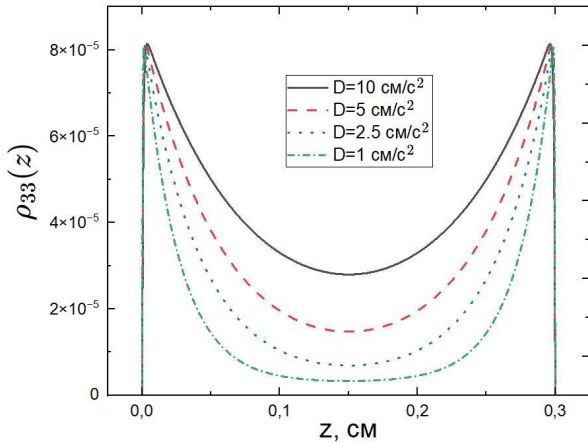


Рис. 2. Зависимости населенности возбужденного состояния от координаты для различных коэффициентов диффузии D . Параметры расчета: $L = 0.3$ см, $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = \delta_R = 0$, $\Omega_1 = \Omega_2 = 10^6$ с⁻¹, $\Gamma_{||} = 100$ с⁻¹, $\Gamma_{\perp} = 50$ с⁻¹, $\gamma_{31} = \gamma_{32} = 10^7$ с⁻¹, $\nu = 10^9$ с⁻¹

(41)–(43), (49) численно решалась методом прогонки, и строилось распределение населенностей энергетических уровней активного атома вдоль оси. Используемый метод основывается на следующей идее: компоненты матрицы плотности в некоторой точке линейно зависят только от ее ближайших соседей. Поэтому дифференциалы заменялись на конечные приращения, ось z разбивалась набором из M точек на равные промежутки и выполнялся поиск коэффициентов в данной зависимости, которые представляют собой матрицы 4×4 , поскольку уравнение для одной из населенностей удается исключить за счет условия локальной нормировки матрицы плотности: $\text{Tr } \hat{\rho}(\mathbf{R}) = 1$.

Для начала рассмотрим зависимость населенности возбужденного состояния в одномерной ячейке размером $L = 0.3$ см от координаты для коэффициентов диффузии $D = 10, 7.5, 5, 1$ см²/с в состоянии КПН (рис. 2). Из-за используемых граничных условий полного тушения населенность возбужденного состояния при столкновении активного атома со стенками на границе равна нулю, а низкочастотные когерентности разрушены. Таким образом, в результате взаимодействия со стенками активные атомы покидают состояние КПН и начинают когерентно взаимодействовать с внешним излучением. Поэтому вблизи границ образуется слой с возрастающей концентрацией атомов в возбужденном состоянии. Размеры данной области определяются эффективностью взаимодействия активных атомов с полем и скоростью их движения, т. е. частотами Раби и коэффициентами диффузии. Затем возбужден-

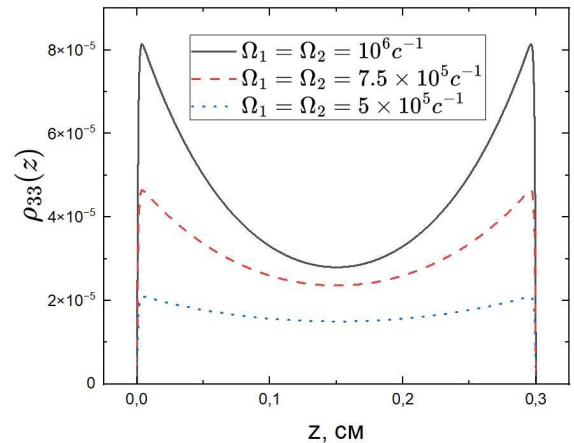


Рис. 3. Зависимости населенности возбужденного состояния от координаты для различных частот Раби. Параметры расчета: $L = 0.3$ см, $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = \delta_R = 0$, $D = 10$ см²/с, $\Gamma_{||} = 100$ с⁻¹, $\Gamma_{\perp} = 50$ с⁻¹, $\gamma_{31} = \gamma_{32} = 10^7$ с⁻¹, $\nu = 10^9$ с⁻¹

ные атомы диффундируют к центру ячейки, по ходу движения возбужденное состояние релаксирует в основное со скоростями γ_{31}, γ_{32} , а состояние пленения восстанавливается и образуется слой с уменьшающейся концентрацией возбужденных атомов. Размеры этого слоя определяется скоростью движения активных атомов, т. е. коэффициентом диффузии и скоростью восстановления состояния КПН, которая задается частотами Раби и скоростями релаксации $\gamma_{31}, \gamma_{32}, \Gamma_{\perp}$. Таким образом, взаимодействие активных атомов со стенками приводит к образованию так называемых реставрационных слоев, размеры которых определяются коэффициентами диффузии, частотами Раби и частотами релаксации. Так, при $D = 1$ см²/с в интервале $z = 0.1$ – 0.2 см зависимость переходит в прямую, параллельную горизонтальной оси, что говорит о восстановлении состояния КПН внутри системы. Увеличение коэффициента диффузии до $D = 2.5$ см²/с приводит к возникновению более резкого провала в центре ячейки и увеличению размеров реставрационных слоев, а при переходе к $D = 5$ см²/с и $D = 10$ см²/с горизонтальный участок пропадает. Дальнейшее увеличение коэффициента диффузии привело бы к столь быстрому движению релаксировавших на стенках активных атомов, что состояние КПН не успевало бы восстановиться и все большая часть активных атомов вдали от стенок когерентно взаимодействовала с излучением. Кроме того, увеличение коэффициента диффузии не влияет на значение населенности возбужденного состояния в максимумах, а лишь сдвигает их положение от границ ячейки.

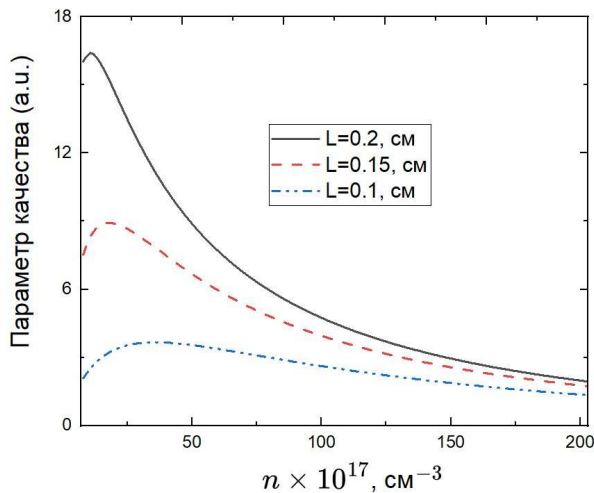


Рис. 4. Зависимости параметра качества КПН-резонанса от концентрации буферного газа для различных значений L . Параметры расчета: $\Delta_2 = \delta_R = 0$, $D = 10 \text{ см/с}^2$, $\Omega_1 = \Omega_2 = 10^6 \text{ с}^{-1}$, $\Gamma_{||} = 100 \text{ с}^{-1}$, $\Gamma_{\perp} = 50 \text{ с}^{-1}$, $\gamma_{31} = \gamma_{32} = 10^7 \text{ с}^{-1}$, $\nu = 10^9 \text{ с}^{-1}$

Теперь перейдем к рассмотрению аналогичных зависимостей с теми же параметрами расчета, но будем фиксировать коэффициент диффузии $D = 10 \text{ см/с}^2$ и варьировать частоты Раби внешних полей. Результаты численного счета для частот Раби $\Omega_1 = \Omega_2 = 5 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$, $\Omega_1 = \Omega_2 = 7.5 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$, $\Omega_1 = \Omega_2 = 10^6 \text{ с}^{-1}$ приведены на рис. 3. Как и ранее, на представленных кривых присутствуют два реставрационных слоя, расположенных симметрично относительно центра оси. При уменьшении частот Раби с $\Omega_1 = \Omega_2 = 10^6 \text{ с}^{-1}$ до $\Omega_1 = \Omega_2 = 7.5 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$ максимумы населенности возбужденного состояния сдвигаются к центру, поскольку эффективность взаимодействия системы с полем уменьшается. По этой же причине максимальная концентрация возбужденных атомов уменьшается. Кроме того, уменьшение частот Раби приводит к сглаживанию провала населенности, и при $\Omega_1 = \Omega_2 = 10^5 \text{ с}^{-1}$ он почти незаметен. Это связано с тем, что переход системы в состояние пленения возможен только при определенных значениях частот Раби, меньше которых КПН-резонанс не наблюдается [4].

На следующем этапе полученные зависимости $\rho_{33}(z)$ усреднялись по координате для различных значений двухфотонной отстройки и строились контуры КПН-резонанса. В спектроскопии важным понятием является параметр качества резонанса, который мы определим как отношение разности населенностей возбужденного состояния в нуле двухфотонной отстройки и крыле линии к ширине

КПН-резонанса. Для практических задач атомной спектроскопии наиболее интересными представляются резонансы с максимальным значением параметра качества. На рис. 4 представлены зависимости параметра качества КПН-резонанса от концентрации буферного газа для различных размеров ячейки. На каждой кривой присутствует максимум, соответствующий оптимальной концентрации буферных атомов для данной ячейки. При увеличении концентрации буферного газа до значений $n \simeq 25 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ параметр качества увеличивается, поскольку, несмотря на столкновительное уширение линии, буферный газ препятствует релаксации активных атомов на стенках. Дальнейшее увеличение концентрации буферных атомов приводит к ухудшению качества резонанса из-за высокого столкновительного уширения. И затем при $n \simeq 200 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ параметр качества практически перестает зависеть от размеров газовой ячейки. Для меньших ячеек параметр качества ниже, поскольку при уменьшении размеров среды возрастает роль граничных эффектов. Так, максимальный параметр качества достижимый в ячейке с $L = 0.1 \text{ см}$ при выбранных параметрах примерно в три раза меньше, чем у ячейки с $L = 0.2 \text{ см}$. Кроме того, при переходе от ячеек с размерами $L = 0.1 \text{ см}$ к $L = 0.15 \text{ см}$ максимум на кривой становится более резким и сдвигается в область меньших концентраций, а для $L = 0.2 \text{ см}$ положение экстремума попадает на границу области, в которой еще применимы полученные уравнения (43)–(46). Это связано с меньшим вкладом приграничных слоев в формирование КПН-резонанса для ячеек больших размеров: чем больше размеры среды, тем меньше активные атомы «чувствуют» ее границы, и для нивелирования вклада от атомов, релаксировавших на стенках, требуются меньшие концентрации буферного газа.

Таким образом, взаимодействие активных атомов со стенками приводит к образованию двух реставрационных слоев, размеры которых определяются параметрами системы — концентрацией буферных атомов, частотами Раби и скоростями релаксаций γ_{31} , γ_{32} , $\Gamma_{\perp}$. Разрушение низкочастотной когерентности на стенках ухудшает качество КПН-резонанса, и для каждого из размеров ячейки существует оптимальная концентрация буферного газа, при которой параметр качества резонанса максимален. Однако рассмотренная упрощенная модель одномерной среды не позволяет учесть влияние релаксации атомов на границах одной из осей на их распределение по другой. Как будет показано в дальнейшем, учет взаимодействия активных атомов со

всей поверхностью газовой ячейки приводит к ухудшению качества резонанса. Кроме того, в экспериментах интенсивность излучения неоднородно распределена по сечению луча, что также оказывает влияние на параметр качества КПН-резонанса. Поэтому в следующем разделе будет исследовано влияние двумерного диффузионного движения активных атомов на формирование КПН-резонанса.

5. РЕШЕНИЕ ДИФФУЗИОННЫХ УРАВНЕНИЙ В ТРЕХМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Теперь перейдем к численному решению системы (41)–(43), (49) для случая двумерной оптически тонкой среды в стационарном случае и проанализируем полученные результаты. Поскольку многие эксперименты по исследованию явления КПН проводятся в газовых ячейках цилиндрической формы, будем использовать цилиндрическую систему координат и примем, что лазерное излучение распространяется вдоль оси z (рис. 5).

Рассматриваемая система является аксиально симметричной, поэтому производные от компонент матрицы плотности по полярному углу равны нулю. В качестве граничных условий, как и ранее, выберем условия полного тушения. В силу цилиндрической симметрии системы производная на оси ячейки по радиальной координате принимается равной нулю. Математически граничные условия выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha\beta}|_{z=L} = \rho_{\alpha\beta}|_{z=0} = 0, \quad \alpha \neq \beta \\ \rho_{11}|_{z=L} = \rho_{11}|_{z=0} = 0.5, \\ \rho_{22}|_{z=L} = \rho_{22}|_{z=0} = 0.5, \\ \rho_{33}|_{z=L} = \rho_{33}|_{z=0} = 0, \\ \rho_{\alpha\beta}|_{r=R} = 0, \quad \alpha \neq \beta, \\ \rho_{11}|_{r=R} = 0.5, \quad \rho_{22}|_{r=R} = 0.5, \quad \rho_{33}|_{r=R} = 0, \\ \frac{\partial \rho_{\alpha\beta}}{\partial r}|_{r=0} = 0. \end{aligned}$$

Для решения поставленной задачи применялся метод матричной прогонки, который аналогичен использовавшейся ранее обычной прогонке с той лишь разницей, что из-за замены одномерной оси двумерной сеткой размерность матрицы каждого коэффициента вместо 4×4 становилась $4M \times 4M$. В остальном метод матричной прогонки работал схожим образом: дифференциалы заменялись на конечные приращения и строилась однородная двумерная сетка, в каждом узле которой было получено значение соответствующей компоненты матри-

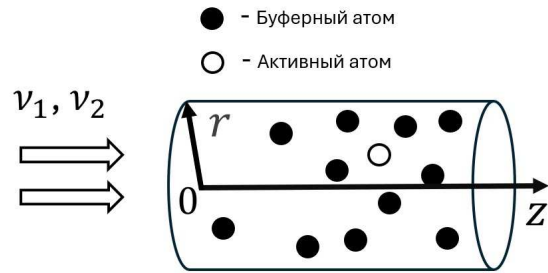


Рис. 5. Газовая ячейка с буферным газом и активными атомами, взаимодействующая с бихроматическим лазерным излучением

цы плотности. Из элементов матрицы плотности составлялся вектор 4×1 и строилась система матричных уравнений. На следующем этапе значения данного вектора по одной из координат заменялись на вектор $4M \times 1$ и выполнялась прогонка по второй координате.

Несмотря на схожие принципы работы, проведение вычислений с помощью метода матричной прогонки гораздо более трудоемко: для определения значений коэффициентов, связывающих компоненты матрицы плотности в соседних точках, необходимо решать матричные уравнения и строить обратные матрицы размерностями $4M \times 4M$, где $M \sim 100 \dots 1000$. Поиск обратных матриц таких размерностей требует значительных вычислительных мощностей и занимает много времени. Теперь мы перейдем к обсуждению результатов численного счета.

Для начала рассмотрим зависимость населенности возбужденного состояния от продольной и поперечной координат в КПН-резонансе при взаимодействии системы с полем, интенсивность которого постоянна вдоль радиуса ячейки. На рис. 6 представлены зависимости населенности возбужденного состояния от радиальной координаты в точках $z = 0.005L$, $z = 0.125L$, $z = 0.25L$, $z = 0.375L$, $z = 0.5L$ для ячейки с $R = 2.2$ см, $L = 2.2$ см. Приведенные зависимости асимметричны, поскольку правый конец оси абсцисс соответствует стенке газовой ячейки, а левый — центру. Как и ранее, из-за релаксации активных атомов на стенках вблизи границы образуются два реставрационных слоя. При переходе от кривой для $z = 0.5L$, соответствующей центру ячейки, к кривой $z = 0.375L$ населенность возбужденного состояния возрастает, поскольку вторая кривая расположена ближе к торцевому концу ячейки, на котором релаксируют низкочастотные когерентности. Дальнейшее уменьшение продольной ко-

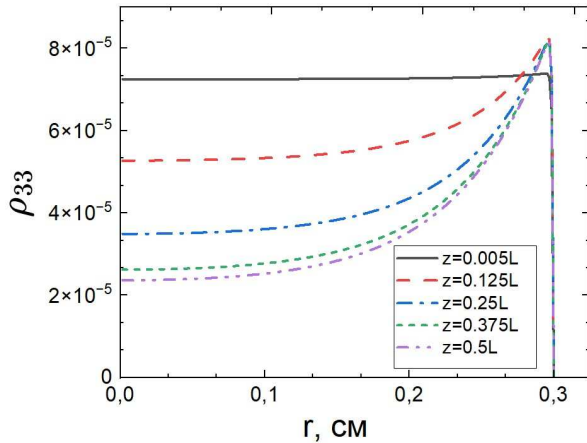


Рис. 6. Зависимости населенности возбужденного состояния от радиальной координаты в различных точках на оси ячейки. Интенсивность излучения равномерно распределена вдоль радиуса ячейки. Параметры расчета: $R = 0.3$ см, $L = 0.3$ см, $D = 7$ см²/с, $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = \delta_R = 0$, $\Omega_1 = \Omega_2 = 10^6$ с⁻¹, $\Gamma_{||} = 100$ с⁻¹, $\Gamma_{\perp} = 50$ с⁻¹, $\gamma_{31} = \gamma_{32} = 10^7$ с⁻¹, $\Gamma_{13} = \Gamma_{31} = \Gamma_{23} = \Gamma_{32} = 10^9$ с⁻¹

ординаты до значения $z = 0.125L$ приводит к возрастанию концентрации возбужденных атомов из-за разрушения состояния КПН на торцевых концах ячейки. Далее на сплошной кривой, соответствующей $z = 0.005L$, экстремум почти неразличим и при $r \leq 0.995R$ концентрация возбужденных атомов перестает зависеть от поперечной координаты. Это связано с тем, что поверхность $z = 0.005L$ попадает в область первого реставрационного слоя, в котором находятся атомы с разрушенными низкочастотными когерентностями, которые не способны переходить в состояние КПН.

Теперь перейдем к анализу распределения населенности возбужденного состояния вдоль продольной координаты в точках $r = 0.005R$, $r = 0.25R$, $r = 0.5R$, $r = 0.75R$, $r = 0.995R$ для ячейки с $R = 2.2$ см, $L = 2.2$ см (рис. 7). Данные зависимости симметричны, поскольку правый и левый концы оси абсцисс соответствуют торцам ячейки и вблизи границ возникают симметрично расположенные реставрационные слои. Заметим, что при увеличении радиальной координаты от $r = 0.005R$ до $r = 0.75R$, глубина провала в объеме газовой ячейки уменьшается. Это закономерно, поскольку движение в положительном направлении оси r соответствует приближению к стенкам ячейки, на которых разрушается состояние КПН. Кривая же, полученная для точки $r = 0.995R$, описывает поведение атомов, покинувших состояние КПН из-за взаимодействия со стенками. Поэтому на данной зависимости не на-

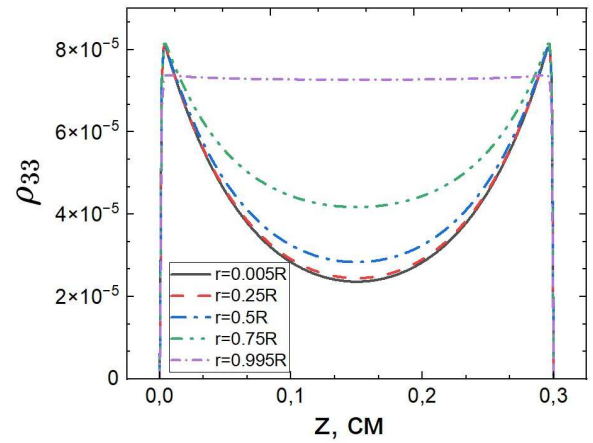


Рис. 7. Зависимости населенности возбужденного состояния от продольной координаты в различных точках r . Интенсивность излучения равномерно распределена вдоль радиуса ячейки. Параметры расчета те же, что и на рис. 3

блюдается уменьшения населенности возбужденного состояния при движении к центру оси ячейки. Из рассмотрения приведенных на рис. 6, 7 зависимостей можно заключить, что атомы, находящиеся в разных точках газовой ячейки, дают неодинаковый вклад в контур КПН-резонанса.

Рассмотрим контуры КПН-резонансов, усредненных по двум координатам. Для компонент матрицы плотности, усредненных по координатам r и z , будем использовать обозначение $\bar{\rho}_{\alpha\beta}$. Примем, что с системой взаимодействует гауссов пучок бихроматического лазерного излучения, который задается следующей формулой:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_1 e^{-\frac{r^2}{a^2}} e^{-i(\nu_1 t - k_1 z)} + \mathbf{E}_2 e^{-\frac{r^2}{a^2}} e^{-i(\nu_2 t - k_2 z)} + \text{с.с.},$$

где $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ — амплитуды полей на оси ячейки, $a/\sqrt{2}$ — ширина гауссова пучка. При построении зависимостей фиксировались коэффициент диффузии, частоты Раби на оси ячейки и скорости спонтанных распадов электронных состояний, а размеры газовой ячейки и ширина луча изменялись. Начнем с анализа влияния продольных размеров ячейки на контур КПН-резонанса при фиксированном радиусе $R = 2.2$ см и постоянной ширине гауссова пучка $a/\sqrt{2} = 0.35$ см (рис. 8).

Заметим, что при уменьшении продольных размеров ячейки от $L = 2.2$ см до $L = 0.25$ см населенность возбужденного состояния в нуле двухфотонной отстройки возрастает, а контур КПН-резонанса уширяется. Это связано с увеличением влияния граничных эффектов на контур КПН-резонанса для ячеек меньших размеров: при постоянном коэффи-

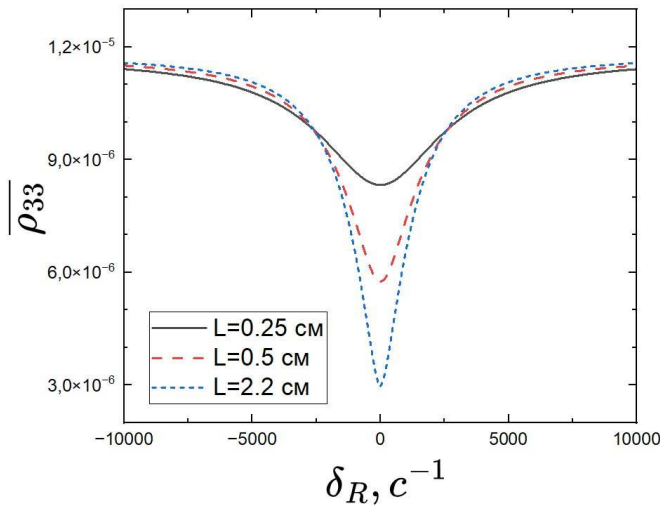


Рис. 8. Контуры КПН-резонанса, усредненные по двум координатам. Параметры расчета: $R = 2.2 \text{ см}$, $a = 0.5 \text{ см}$, $D = 10 \text{ см}^2/\text{с}$, $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = \delta_R$, $\Omega_1 = \Omega_2 = 10^6 \text{ с}^{-1}$, $\Gamma_{||} = 100 \text{ с}^{-1}$, $\Gamma_{\perp} = 50 \text{ с}^{-1}$, $\gamma_{31} = \gamma_{32} = 10^7 \text{ с}^{-1}$, $\nu = 10^9 \text{ с}^{-1}$

циенте диффузии размеры слоя с повышенной концентрацией атомов в возбужденном состоянии не меняются, но при уменьшении продольных размеров системы данный слой занимает все большую часть газовой ячейки. Таким образом, вклад в контур КПН-резонанса от атомов, когерентно взаимодействующих с внешним излучением, возрастает. При этом, как видно на рис. 8, населенность возбужденного состояния в крыле линии зависит от размеров ячейки гораздо слабее. Это закономерно, поскольку при больших двухфотонных отстройках активные атомы не переходят в состояние КПН и населенность возбужденного состояния определяется частотами Раби, которые в данном случае подерживались постоянными.

Проанализируем влияние поперечных размеров ячейки на контур КПН-резонанса при фиксированной длине ячейки $L = 2.2 \text{ см}$ и постоянной ширине гауссова пучка $a/\sqrt{2} = 0.35 \text{ см}$ (рис. 9). В данном случае уменьшение размеров ячейки оказывает иное влияние на контур КПН-резонанса. Так, при уменьшении радиуса газовой ячейки от $R = 2.2 \text{ см}$ до $R = 0.25 \text{ см}$ глубина провала КПН-резонанса в нуле двухфотонной отстройки не уменьшается, что имело место при уменьшении продольных размеров ячейки, а, наоборот, увеличивается. Данная закономерность обусловлена использованием при построении контуров КПН-резонанса лазерного пучка гауссовой формы. Для такого луча при увеличении радиальной координаты частоты Раби уменьшаются

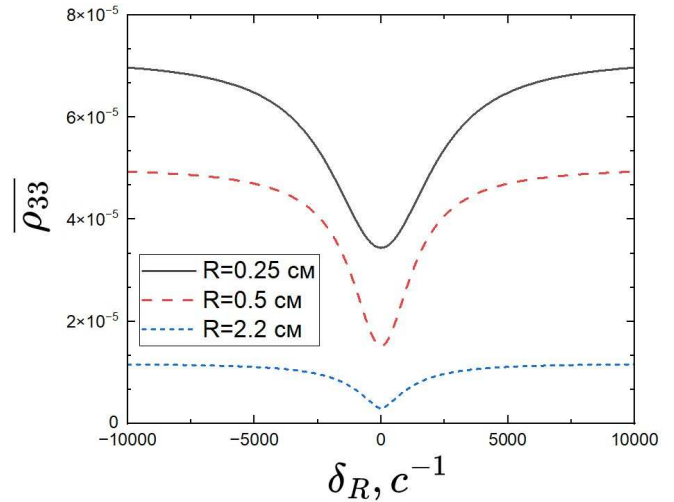


Рис. 9. Контуры КПН-резонанса, усредненные по двум координатам. Параметры расчета: $L = 2.2 \text{ см}$, $a = 0.5 \text{ см}$, $D = 10 \text{ см}^2/\text{с}$, $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = \delta_R$, $\Omega_1 = \Omega_2 = 10^6 \text{ с}^{-1}$, $\Gamma_{||} = 100 \text{ с}^{-1}$, $\Gamma_{\perp} = 50 \text{ с}^{-1}$, $\gamma_{31} = \gamma_{32} = 10^7 \text{ с}^{-1}$, $\Gamma_{13} = \Gamma_{31} = \Gamma_{23} = \Gamma_{32} = 10^9 \text{ с}^{-1}$

как e^{-r^2/a^2} . Таким образом, при меньших размерах ячейки активные атомы в среднем взаимодействуют с полем большей интенсивности, что приводит к увеличению населенности возбужденного состояния в крыльях линии. С другой стороны, при уменьшении поперечных размеров ячейки населенность возбужденного состояния в нуле двухфотонной отстройки увеличивается, что, как и раньше, связано с возрастанием роли граничных эффектов для ячеек меньших радиусов. Таким образом, при взаимодействии с системой гауссова пучка и уменьшении радиуса газовой ячейки возрастание населенности возбужденного состояния в крыльях линии происходит быстрее, чем увеличение населенности в нуле двухфотонной отстройки, что приводит к увеличению глубины провала КПН-резонанса.

Далее обратимся к анализу влияния ширины гауссова пучка на контур КПН-резонанса. На рис. 10 приведены контуры КПН-резонанса, усредненные по продольной и поперечной координатам для ячейки с $R = 2.2 \text{ см}$, $L = 2.2 \text{ см}$ и ширинах гауссова пучка $a/\sqrt{2} = 1.56, 1.13, 0.85, 0.14 \text{ см}$. Из рассмотрения семейства кривых видно, что при уменьшении ширины гауссова пучка от $a/\sqrt{2} = 1.56 \text{ см}$ до 0.14 см глубина провала КПН-резонанса уменьшается. Отметим, что даже при равенстве нулю двухфотонной отстройки, из-за разрушения низкочастотных когерентностей на стенках, всегда существует некоторое количество атомов, способных когерентно взаимодействовать с внешним излучением. Эффек-

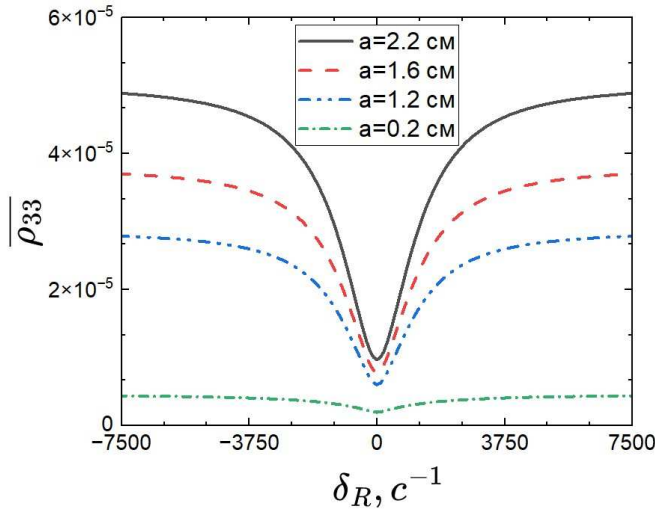


Рис. 10. Контуры КПН-резонанса, усредненные по двум координатам. Параметры расчета: $R = 2.2$ см, $L = 2.2$ см, $D = 10$ см²/с, $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = \delta_R$, $\Omega_1 = \Omega_2 = 10^6$ с⁻¹, $\Gamma_{||} = 100$ с⁻¹, $\Gamma_{\perp} = 50$ с⁻¹, $\gamma_{31} = \gamma_{32} = 10^7$ с⁻¹, $\Gamma_{13} = \Gamma_{31} = \Gamma_{23} = \Gamma_{32} = 10^9$ с⁻¹

тивность такого взаимодействия определяется радиусом гауссова пучка и возрастает при его уширении, что приводит к увеличению населенности возбужденного состояния как в нуле двухфотонной отстройки, так и в крыльях линии. Однако, как видно из кривых, представленных на рис. 10, при уширении лазерного луча увеличение населенности возбужденного состояния в крыльях линии происходит быстрее, чем в нуле двухфотонной отстройки, что в конечном итоге приводит к увеличению глубины провала КПН-резонанса.

В заключение данного раздела мы исследуем влияние ширины лазерного луча на параметр качества КПН-резонанса. На рис. 11 представлены зависимости параметра качества КПН-резонанса от соотношения между шириной гауссова пучка и радиусом ячейки для газовых ячеек размерами 1) $R = 2.2$ см, $L = 2.2$ см, 2) $R = 0.5$ см, $L = 2.2$ см, 3) $R = 0.5$ см, $L = 0.25$ см. Отметим, что параметр качества зависит не от самого отношения a/R , а от каждого из этих двух параметров по отдельности. Однако для проведения анализа представляется наиболее удобным построение зависимости данного параметра именно от отношения радиуса ячейки к ширине луча.

Заметим, что для ячейки с $R = 2.2$ см, $L = 2.2$ см зависимость параметра качества резонанса от ширины гауссова пучка почти линейна, а отклонение наблюдается только при поперечных размерах лу-

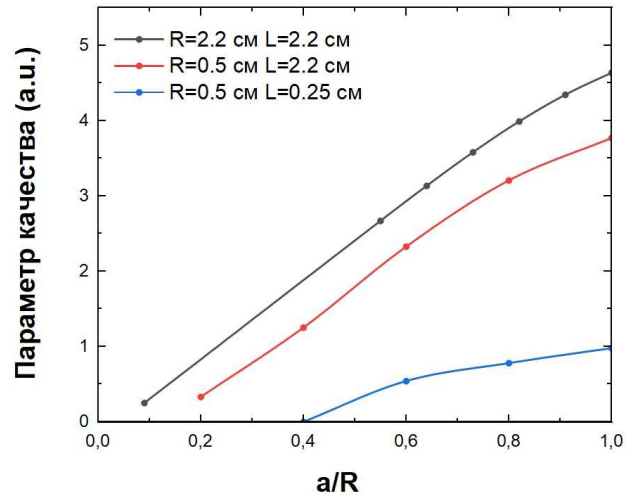


Рис. 11. Параметры качества КПН-резонанса. Параметры расчета: $D = 10$ см²/с, $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = \delta = 0$, $\Omega_1 = \Omega_2 = 10^6$ с⁻¹, $\Gamma_{||} = 100$ с⁻¹, $\Gamma_{\perp} = 50$ с⁻¹, $\gamma_{31} = \gamma_{32} = 10^7$ с⁻¹, $\Gamma_{13} = \Gamma_{31} = \Gamma_{23} = \Gamma_{32} = 10^9$ с⁻¹

ча, примерно равных радиусу ячейки. В случае газовой ячейки с $R = 0.5$ см, $L = 2.2$ см нелинейность выражена более ярко, а при переходе к размерам $R = 0.5$ см, $L = 0.25$ см зависимость параметра качества от ширины гауссова пучка никак не может быть аппроксимирована прямой. Для такой системы при ширине луча, примерно равной радиусу газовой ячейки, параметр качества изменяется слабее, чем при больших значениях продольных и поперечных размеров. Затем по мере уменьшения отношения a/R зависимость становится более резкой, и при переходе от точки $a/R = 0.6$ к точке $a/R = 0.4$ параметр качества уменьшается на порядок. Возникновение нелинейности в зависимости параметра качества от размеров луча связано с возрастанием роли граничных эффектов в формировании контура КПН-резонанса при уменьшении размеров газовой ячейки. Таким образом, наши расчеты показывают, что для малых ячеек существует диапазон радиусов гауссова пучка, при которых параметр качества КПН-резонанса практически не зависит от диаметра луча накачки.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена квантовомеханическая система, содержащая активные Λ -атомы, взаимодействующие с бихроматическим лазерным излучением при наличии буферного газа концентрацией $10^{17} \leq n \leq 10^{19}$ см⁻³. Для описания системы использовалась многочастичная матрица плотности,

эволюция которой подчиняется уравнению Линдблада. Путем усреднения уравнения Линдблада по координатам буферных атомов была получена цепочка уравнений Боголюбова, которая расцеплялась с использованием приближения бинарных столкновений. Для описания взаимодействия активных и буферных атомов была выбрана модель сильных столкновений, исходя из которой было получено выражение для члена прихода в данную скоростную группу. В интеграле столкновений учитывались два процесса, протекающие на разных временных масштабах: частые упругие столкновения, приводящие к разрушению оптических когерентностей, и медленные неупругие спин-обменные взаимодействия, обуславливающие перемешивание населенностей между основными состояниями и релаксацию низкочастотной когерентности.

Затем путем разложения одночастичной матрицы плотности в ряд по малому параметру был выполнен переход от квантового кинетического уравнения к уравнению диффузионного типа. При проведении соответствующих расчетов получены выражения для поправок первого и второго порядков малости к равновесной (максвелловской) функции распределения. Проведено усреднение системы квантовых кинетических уравнений по скоростям активного атома и выполнен переход к представлению вращающейся волны. В результате из фундаментального для квантовой механики уравнения Линдблада была получена система диффузионных уравнений, описывающая эволюцию компонент матрицы плотности Λ -атома, взаимодействующего с бихроматическим лазерным излучением при наличии буферного газа, концентрация которого лежит в диапазоне $10^{17} \text{ см}^{-3} \leq n \leq 10^{19} \text{ см}^{-3}$. Установлено, что поток для каждой из компонент матрицы плотности содержит два вклада: обычный диффузионный поток, подчиняющийся закону Фика и обусловленный пространственной неоднородностью системы, а также светоиндуцированный поток, возникающий из-за селективного по скоростям взаимодействия излучения с активными атомами. Стоит отметить, что имеет место эффект втягивания активных атомов в область лазерного луча, обусловленный неоднородностью лазерных полей. Одновременно с этим учет эффекта СИД приводит к нарушению локальной нормировки матрицы плотности, вместо которой для закрытой газовой ячейки и стационарного случая необходимо использовать более общее условие равенства нулю полного потока активных атомов. В настоящей работе мы стремились продемонстрировать влияние обычного диффузионного движения

Λ -атомов на формирование КПН-резонанса, поэтому при решении диффузионных уравнений светоиндуцированная часть потока компонент матрицы плотности не учитывалась. Такое приближение допустимо, поскольку вклад данной компоненты потока является величиной второго порядка малости, что на порядок меньше вклада от диффузионной части. Кроме того, в состоянии КПН-резонанса при сканировании частот одного из полей светоиндуцированный поток для каждой из компонент матрицы плотности оказывается равен нулю.

Далее полученная система дифференциальных уравнений второго порядка численно решалась методами обычной и матричной прогонки для случаев одномерного и трехмерного движений атомов соответственно. Установлено, что из-за взаимодействия активных атомов со стенками газовой ячейки в приграничной области образуются два реставрационных слоя: в первом населенность возбужденного состояния возрастает из-за когерентного взаимодействия активных атомов с внешним полем, а во втором уменьшается из-за восстановления состояния КПН в объеме ячейки. Размеры первой области определяются частотами Раби, а второй — коэффициентом диффузии и временами жизни когерентностей. Исходя из распределения населенности возбужденного состояния вдоль продольной и поперечной координат построены контуры КПН-резонанса.

Путем численного решения системы уравнений для случая одномерного движения атомов получено, что существуют оптимальные концентрации буферных атомов, при которых параметр качества КПН-резонанса достигает максимального значения. Установлено, что при уменьшении размеров газовой ячейки параметр качества КПН-резонанса уменьшается из-за возрастания вклада граничных эффектов. Параметр качества нелинейно зависит от отношения ширины гауссова пучка к радиусу газовой ячейки, а при уменьшении размеров ячейки нелинейность становится более ярко выраженной. Таким образом, для ячеек меньших размеров могут быть определены оптимальные условия, при которых параметр качества КПН-резонанса практически перестает зависеть от диаметра луча накачки. Результаты, полученные в работе, помимо фундаментальной значимости могут найти приложение в задачах нелинейной высокоточной лазерной спектроскопии и квантовых стандартов частоты.

Финансирование. Один из авторов (Е. К. Р.) благодарит Фонд имени Геннадия Комиссарова за финансовую поддержку в рамках выполнения проекта «Исследование формирования КПН-резонанса

атомами щелочных металлов с учетом их диффузионного движения и релаксационных процессов».

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Alzetta, A. Gozzini, L. Moi, and G. Orriols, *Nuovo Cim. B* **36**, 5 (1976).
2. E. Arimondo and G. Orriols, *Lett. Nuovo Cim.* **17**, 333 (1976).
3. H. R. Gray, R. M. Whitley, and C. R. Stroud Jr., *Opt. Lett.* **3**, 218 (1978).
4. Б. Д. Агапьев, М. Б. Горный, Б. Г. Матисов, Ю. В. Рождественский, *УФН* **163**, 1 (1993).
5. М. Б. Горный, Б. Г. Матисов, Ю. В. Рождественский, *ЖЭТФ* **68**, 728 (1989).
6. S. Harris, *Phys. Today* **50**, 36 (1997).
7. H. Robinson, E. Ensberg, and H. T. Dehmel, *Bull. Am. Phys. Soc.* **3**, 9 (1958).
8. S. Brandt, A. Nagel, R. Wynands, and D. Meschede, *Phys. Rev. A* **56**, R1063 (1997).
9. M. Stähler, R. Wynands, S. Knappe, J. Kitching, L. Hollberg, A. Taichenachev, and V. Yudin, *Opt. Lett.* **27**, 1472 (2002).
10. J. Camparo, C. M. Klimcak, and S. J. Herbulock, *IEEE Trans. Instrum. Meas.* **54**, 1873 (2005).
11. С. А. Зибров, В. Л. Величанский, А. С. Зибров, А. В. Тайченачев, В. И. Юдин, *Письма в ЖЭТФ* **82**, 534 (2005).
12. K. Deng, T. Guo, D. W. He, X. Y. Liu, D. Z. Guo, X. Z. Chen, and Z. Wang, *Appl. Phys. Lett.* **92**, 21104 (2008).
13. R. Straessle, M. Pellaton, C. Affolderbach, Y. Petremand, D. Briand, G. Mileti, and N. F. De Rooij, *J. Appl. Phys.* **113**, 064501-8 (2013).
14. J. Kitching, *Appl. Phys. Rev.* **5**, 031302 (2018).
15. М. Н. Скворцов, С. М. Игнатович, В. И. Вишняков, Н. Л. Квашнин, И. С. Месензова, Д. В. Бражников, В. А. Васильев, А. В. Тайченачев, В. И. Юдин, С. Н. Багаев, И. Ю. Блинов, В. Г. Пальчиков, Ю. С. Самохвалов, Д. А. Парёхин, *Квант. электрон.* **50**, 576 (2020).
16. С. М. Игнатович, М. Н. Скворцов, И. С. Месензова, Н. Л. Квашнин, В. И. Вишняков, Д. В. Бражников, С. Н. Багаев, *Квант. электрон.* **52**, 386 (2022).
17. A. V. Taichenachev, V. I. Yudin, R. Wynands, M. Stähler, J. Kitching, and L. Hollberg, *Phys. Rev. A* **67**, 033810 (2003).
18. Г. А. Казаков, Б. Г. Матисов, И. Е. Мазец, Ю. В. Рождественский, *ЖТФ* **76**, 20 (2006).
19. К. А. Баранцев, Е. Н. Попов, А. Н. Литвинов, *ЖЭТФ* **148**, 869 (2015).
20. Г. В. Волошин, К. А. Баранцев, А. Н. Литвинов, *Квант. электрон.* **50**, 1023 (2020).
21. И. М. Соколов, *Опт. спектроск.* **62**, 487 (1987).
22. А. Н. Литвинов, И. М. Соколов, *Письма в ЖЭТФ* **113**, 791 (2021).
23. Г. В. Волошин, *Опт. спектроск.* **131**, 49 (2023).
24. К. А. Баранцев, Г. В. Волошин, А. С. Курапцев, А. Н. Литвинов, И. М. Соколов, *ЖЭТФ* **163**, 162 (2023).
25. Т. Л. Андреева, *ЖЭТФ* **54**, 641 (1968).
26. И. М. Соколов, *Опт. спектроск.* **57**, 207 (1984).
27. V. V. Batygin and I. M. Sokolov, *Phys. Lett. A* **108**, 29 (1985).
28. М. Б. Горный, Д. Л. Маркман, Б. Г. Матисов, *Радиотехн. и электрон.* **9**, 1780 (1985).
29. O. Firstenberg, M. Shuker, R. Pugatch, D. R. Fredkin, N. Davidson, and A. Ron, *Phys. Rev. A* **77**, 043830 (2008).
30. К. А. Баранцев, М. А. Артемьев, *ЖЭТФ* **167**, 3 (2025).
31. С. Г. Раутиан, Г. И. Смирнов, А. М. Шалагин, *Нелинейные резонансы в спектрах атомов и молекул*, Наука, Новосибирск (1979).
32. Е. Г. Пестов, С. Г. Раутиан, *ЖЭТФ* **56**, 902 (1969) [E. G. Pestov and S. G. Rautian, *JETP* **29**, 3 (1969)].
33. Ф. Х. Гельмуханов, А. М. Шалагин, *ЖЭТФ* **78**, 1674 (1980) [F. Kh. Gel'mukhanov and A. M. Shalagin, *Sov. Phys. JETP* **51**, 839 (1980)].
34. S. G. Rautian and A. M. Shalagin, *Kinetic Problems of Nonlinear Spectroscopy*, North Holland, Amsterdam (1991).