

МОДУЛИ УПРУГОСТИ ГОЛУБЫХ ФАЗ ХОЛЕСТЕРИЧЕСКИХ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛОВ СО СЛАБОЙ КИРАЛЬНОСТЬЮ

В. А. Чижиков ^{a,b*}, В. Е. Дмитриенко ^{a,c**}

^a Институт кристаллографии им. А. В. Шубникова Курчатовского комплекса кристаллографии и фотоники
119333, Москва, Россия

^b МИРЭА — Российский технологический университет (Институт радиоэлектроники и информатики)
119454, Москва, Россия

^c Институт физики твердого тела им. Ю. А. Осипьяна Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 8 сентября 2025 г.,
после переработки 21 сентября 2025 г.
Принята к публикации 23 сентября 2025 г.

Развиты новые теоретические подходы описания упругих свойств кубических голубых фаз холестерических жидких кристаллов. Голубые фазы представляют собой трехмерно-периодические киральные жидкости с локальной анизотропией средней ориентации молекул, и из-за своей периодичности они обладают решеточными модулями упругости, присущими обычным кристаллическим телам. Приближение жестких тензоров, хорошо применимое при малом значении параметра киральности ($\kappa \ll 1$), было использовано для вычисления упругих модулей наблюдаемых на эксперименте голубых фаз O^8 (BP I) и O^2 (BP II). Показано, что в одноконстантном приближении для жидкокристаллических модулей Франка ($K_{11} = K_{22} = K_{33}$) кубическая решетка голубых фаз имеет изотропную упругость, причем первый параметр Ламе λ_L и коэффициент Пуассона ν равны нулю. Найдено, что знак коэффициента Пуассона определяется отношением модулей упругости K_0/K_1 ; в частности, при $K_0 > K_1$ коэффициент Пуассона отрицателен.

DOI: 10.7868/S3034641X25110138

1. ВВЕДЕНИЕ

Голубые фазы являются одним из популярных объектов исследований в физике жидких кристаллов (ЖК) на протяжении многих лет (обзоры ранних работ можно найти в [1–3], а недавнее широкое развитие этой тематики представлено в [4–8]). По своей структуре голубые фазы — это самоорганизующиеся трехмерно-периодические киральные жидкости с локальной анизотропией средней ориентации молекул, которая описывается параметром порядка в виде бесследового тензора второго ранга. Локальная анизотропия сложным образом изменяется внутри элементарной кристаллической ячейки, образуя области с двойной закруткой и неизбежные дефекты (дисклинации). Периодичность структуры

вызывает дифракцию света, зависящую от длины волны, из-за чего отдельные кристаллиты выглядят окрашенными в разные цвета, часто в голубой, отсюда и название этих фаз.

Привлекательной стороной теории голубых фаз является то, что она строится на основе сравнительно простого функционала свободной энергии Ландау—де Жена, содержащего небольшое количество параметров. Это позволило построить детальную картину структуры и фазовых переходов реально существующих фаз и сравнить ее с экспериментом [1–3, 9–11]. Похожие выражения для свободной энергии используются и в других областях физики, например в теории слабой кристаллизации [12] и для описания киральных магнетиков [13], и поэтому развиваемая в настоящей статье теория упругих свойств может найти применения как в этих случаях, так и для других пространственно-периодических киральных структур [14, 15].

Очень важно, что у голубых фаз из-за периодичности структуры возникает ненулевая (хотя и очень

* E-mail: chizhikov@crys.ras.ru

** E-mail: dmitrien@crys.ras.ru

маленькая) жесткость [5, 16–18], присущая всем кристаллическим телам, т. е. голубые фазы обладают решеточными модулями упругости, вычисление которых является предметом настоящей статьи. Эти вычисления проведены в рамках того же функционала энергии Ландау – де Жена, что использовался для описания структуры и фазовых переходов.

Начиная с восьмидесятых годов прошлого века, огромное число работ было посвящено изучению дифракционных оптических свойств голубых фаз, за что их часто называют фотонными кристаллами. Как и в случае дифракции рентгеновских лучей в обычных кристаллах, подробное исследование спектральной интенсивности и поляризации отраженных и прошедших сквозь кристалл световых пучков, и в особенности кругового дихроизма, позволило детально и количественно изучить структуру всех трех голубых фаз, ВР I, ВР II, ВР III, а также геликоидальной холестерической фазы [19–22]. В частности, было показано [23], что зависимость структуры голубых фаз и холестериков от температуры определяется единым универсальным скалярным параметром порядка — средним квадратом тензорного параметра порядка. Заметный скачок этого параметра наблюдается при переходе из изотропной жидкости в голубые фазы, а его скачки при переходах между голубыми фазами и в холестерик очень малы, хотя все переходы являются переходами первого рода. В настоящей работе показано, что такое же поведение характерно и для упругих модулей голубых фаз с малой киральностью.

Отметим, что кроме своих нетривиальных физических свойств и возможных практических приложений [24–26], голубые фазы интересны еще и как пример систем со сравнительно простым локальным взаимодействием на межмолекулярном уровне, которые могут самоорганизоваться в сложные пространственно-неоднородные макроскопические объекты. Возможно, что подобные простые, но вполне эффективные механизмы самоорганизации действуют в живых организмах сейчас и были особенно важны для зарождения жизни.

2. СВОБОДНАЯ ЭНЕРГИЯ ХОЛЕСТЕРИЧЕСКОГО ЖИДКОГО КРИСТАЛЛА

Для изучения структуры и физических свойств холестерического ЖК воспользуемся безразмерной плотностью свободной энергии Ландау – де Жена φ [1, 2, 5], записанной в виде функции параметра по-

рядка $\hat{\chi}(\mathbf{r})$, который является симметричным бесследовым тензором и описывает локальную двусосную анизотропию холестерика:

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_{grad} + \varphi_{bulk}, \\ \varphi_{grad} &= \kappa^2 \{ \|\nabla \times \hat{\chi} \pm \hat{\chi}\|^2 + \eta (\nabla \cdot \hat{\chi})^2 \}, \\ \varphi_{bulk} &= \tau \text{Sp}(\hat{\chi}^2) - \sqrt{6} \text{Sp}(\hat{\chi}^3) + 2 \text{Sp}(\hat{\chi}^4).\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь φ_{grad} и φ_{bulk} — градиентная и объемная части плотности свободной энергии соответственно, а входящие в φ_{grad} математические обозначения определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}(\nabla \times \hat{A})_{\alpha\beta} &= \epsilon_{\alpha\mu\nu} \nabla_\mu A_{\nu\beta}, \\ (\nabla \cdot \hat{A})_\alpha &= \nabla_\mu A_{\mu\alpha}, \\ \|\hat{A}\| &= \sqrt{A_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}}.\end{aligned}$$

Здесь $\hat{\epsilon}$ — антисимметричный псевдотензор Леви-Чивиты. Последнее выражение является определением фробениусовой нормы матрицы. Смысл входящих в энергию числовых констант κ , η , τ будет разъяснен в тексте немного ниже.

Отметим, что существует альтернативный подход к описанию холестерических ЖК, основанный на параметре порядка в виде директора $\mathbf{n}$ и свободной энергии Франка – Озеена

$$F = \frac{1}{2} K_{11} (\text{div} \mathbf{n})^2 + \frac{1}{2} K_{22} (\mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{n} \pm q)^2 + \frac{1}{2} K_{33} [\mathbf{n} \times \text{rot} \mathbf{n}]^2. \quad (2)$$

Важным преимуществом подхода, основанного на тензоре 2-го ранга $\hat{\chi}$, для изучения свойств голубых фаз является то, что в отличие от поля директора $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ поле $\hat{\chi}(\mathbf{r})$ не имеет сингулярностей на топологических дефектах (дисклинациях). Применительно к упругости это означает, что нет необходимости учитывать вклад от дефектов отдельно от основного объема кристалла. Кроме того, как будет показано дальше, предпосылкой устойчивости голубых фаз вблизи температуры перехода из изотропной фазы в холестерическую может служить двусосность тензора $\hat{\chi}$, принципиально отсутствующая у директора. В одноосном случае переход от (1) к (2) осуществляется заменой

$$\chi_{\alpha\beta} \sim n_\alpha n_\beta - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta}.$$

Градиентная часть φ_{grad} плотности свободной энергии (1) всюду неотрицательна, так как содержит только полные квадраты. Это достигается включением в нее положительного члена $\kappa^2 \text{Sp}(\hat{\chi}^2)$,

который можно отнести к объемной части энергии, переопределив параметр τ [1]. Отметим, что хотя различные способы деления энергии на условно градиентную и объемную части не способны привести к разным физическим результатам, они могут существенно повлиять на понимание этих результатов. В частности, член $\kappa^2 \text{Sp}(\hat{\chi}^2)$ может компенсировать часть градиентной энергии, связанной с двойной закруткой поля параметра порядка $\hat{\chi}(\mathbf{r})$. В этом случае выигрыш энергии от двойной закрутки будет учтен в объемном члене φ_{bulk} .

Количество свободно меняющихся параметров в энергии (1) сведено к минимуму. Здесь κ — безразмерный положительный параметр называемый киральностью, который характеризует величину закрутки поля параметра порядка $\hat{\chi}(\mathbf{r})$. Знак закрутки зависит от выбора плюса или минуса в первом слагаемом градиентной энергии. В физическом смысле киральность κ определяется отношением двух характерных длин:

$$\kappa = 2\pi\xi/p. \quad (3)$$

Здесь ξ — корреляционная длина, по порядку величины близкая к длине составляющих ЖК органических молекул (10–50 Å), а p — шаг холестерического геликоида, сопоставимый по размеру с длиной волны видимого спектра (10³–10⁴ Å). Таким образом, $\kappa \ll 1$ для большинства холестерических ЖК.

Заметим, что в (1) использованы безразмерные координаты $\mathbf{r}' = 4\pi\mathbf{r}/p$, поэтому выражение для φ_{grad} неприменимо в нематическом пределе $p \rightarrow \infty$. Используя в случае некирального ЖК перенормировку координат $\mathbf{r}'' = 2\mathbf{r}/\xi$, мы придем к выражению для плотности градиентной энергии

$$\varphi_{grad} = \|\nabla \times \hat{\chi}\|^2 + \eta(\nabla \cdot \hat{\chi})^2.$$

Параметр η равен отношению модулей упругости ЖК: $\eta = K_0/K_1$. Случай $\eta = 1$ ($K_0 = K_1$) называют одноконстантным. Следует отметить, что часто используемая для описания нематических и холестерических ЖК энергия Франка–Озеена (2) содержит три объемных модуля упругости, K_{11}, K_{22}, K_{33} . Модули Франка связаны с K_0 и K_1 следующим образом:

$$K_{11} = K_{33} \sim \frac{1}{2}(K_0 + K_1), \quad K_{22} \sim K_1. \quad (4)$$

Таким образом, в одноконстантном приближении все модули Франка равны между собой: $K_{11} = K_{22} = K_{33}$.

Последний свободный параметр τ играет роль температуры. Поскольку плотность градиентной

энергии φ_{grad} всюду неотрицательна, она вполне минимизируется полем $\hat{\chi}(\mathbf{r}) = 0$, что соответствует изотропной жидкости. При $\tau \geq 0.25$ это решение также отвечает минимуму объемной энергии φ_{bulk} . При $\tau < 0.25$ объемная энергия минимизируется одноосным параметром порядка, как, например, в однородной нематической фазе

$$\hat{\chi}_N \sim \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (5)$$

с директором, направленным вдоль оси x . В принципе, одновременная минимизация градиентной и объемной энергий могла бы сохраниться при выполнении условий

$$\begin{aligned} \nabla \times \hat{\chi} \pm \hat{\chi} &= 0, \\ \nabla \cdot \hat{\chi} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Нетривиальное решение системы уравнений (6) имеет вид двuosных геликоидов типа

$$\hat{\chi}_{helix} \sim \begin{pmatrix} \cos z & \pm \sin z & 0 \\ \pm \sin z & -\cos z & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где знак при синусах соответствует правому (плюс) или левому (минус) геликоиду. Тот факт, что объемная энергия минимизируется одноосным параметром порядка, а градиентная — двuosным, приводит к интересной конкуренции этих двух энергий при $\tau \approx 0$, которая и порождает голубые фазы ЖК. При уменьшении температуры объемная энергия побеждает и холестерик переходит в одноосную геликоидальную фазу с параметром порядка

$$\hat{\chi}_{Ch} \sim \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \cos z & \pm \sin z & 0 \\ \pm \sin z & \frac{1}{3} - \cos z & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

которую можно описать с помощью директора, поворачивающегося в плоскости xy при изменении координаты z .

Для решения задачи минимизации свободной энергии (1) кристаллической голубой фазы удобно перейти к фурье-представлению параметра порядка:

$$\hat{\chi}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\chi}_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (9)$$

где суммирование ведется по векторам $\mathbf{k}$ обратной решетки, $\hat{\chi}_{-\mathbf{k}} = \hat{\chi}_{\mathbf{k}}^*$ в силу действительности поля

$\hat{\chi}(\mathbf{r})$. Тогда можно легко вычислить среднюю плотность свободной энергии:

$$\langle \varphi_{grad} \rangle = \kappa^2 \sum_{\mathbf{k}} \{ (k^2 + 1) \text{Sp}(\hat{\chi}_{\mathbf{k}} \cdot \hat{\chi}_{\mathbf{k}}^*) + (\eta - 1) \mathbf{k} \cdot \hat{\chi}_{\mathbf{k}} \cdot \hat{\chi}_{\mathbf{k}}^* \cdot \mathbf{k} \pm 2i \text{Sp}(\mathbf{k} \times (\hat{\chi}_{\mathbf{k}} \cdot \hat{\chi}_{\mathbf{k}}^*)) \}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{bulk} \rangle = & \tau \sum_{\Sigma \mathbf{k}_i=0} \text{Sp}(\hat{\chi}_{\mathbf{k}_1} \cdot \hat{\chi}_{\mathbf{k}_2}) - \\ & - \sqrt{6} \sum_{\Sigma \mathbf{k}_i=0} \text{Sp}(\hat{\chi}_{\mathbf{k}_1} \cdot \hat{\chi}_{\mathbf{k}_2} \cdot \hat{\chi}_{\mathbf{k}_3}) + \\ & + 2 \sum_{\Sigma \mathbf{k}_i=0} \text{Sp}(\hat{\chi}_{\mathbf{k}_1} \cdot \hat{\chi}_{\mathbf{k}_2} \cdot \hat{\chi}_{\mathbf{k}_3} \cdot \hat{\chi}_{\mathbf{k}_4}). \quad (11) \end{aligned}$$

Входящее в (10) векторное произведение вектора на матрицу имеет тот же смысл, что и в (1). В (11) суммы берутся соответственно по двум, трем и четырем векторам обратной решетки при условии, что сумма этих векторов равна нулю.

3. СТРУКТУРА ГОЛУБЫХ ФАЗ

Как видно из выражений (10), (11), средняя плотность свободной энергии является функцией двух типов переменных: компонент волновых векторов $\mathbf{k}$ и компонент соответствующих им тензоров $\hat{\chi}_{\mathbf{k}}$,

$$\langle \varphi \rangle = f(\{\mathbf{k}\}, \{\hat{\chi}_{\mathbf{k}}\}).$$

Поскольку количество переменных функции f в принципе не определено, а в идеале должно быть бесконечным, поиск структур, минимизирующих свободную энергию ЖК, является, вообще говоря, задачей нетривиальной. Для ограничения количества учитываемых фурье-компонент $\hat{\chi}_{\mathbf{k}}$ используются экспериментальные данные (наблюдаемые брэгговские рефлексы) [1, 2, 5]. Существенные ограничения на тензорный вид $\hat{\chi}_{\mathbf{k}}$ возникают из учета симметрии голубых фаз [1]. Например, известно, что голубые фазы ВР I и ВР II обладают кубической симметрией. Разумеется, нет гарантии, что найденные при моделировании структуры соответствуют глобальному минимуму свободной энергии. Тем не менее в результате интенсивного поиска в течение многих лет были математически описаны несколько кубических фаз, обладающих при $\tau \approx 0$ лучшей энергией, чем у геликоидальной холестерической фазы (8). Среди них фаза с пространственной группой O^5 ($I432$), подробно разобранный нами

в [27], а также фазы с симметриями O^8 ($I4_132$) и O^2 ($P4_232$), ассоциируемые с экспериментально наблюдаемыми фазами ВР I и ВР II, для которых ранее предпринималась попытка построения теории упругости [28].

В данной работе мы будем рассматривать почти идеальные структуры голубых фаз. Здесь слово «почти» означает, что структура отвечает локальному минимуму градиентной части свободной энергии, но не до конца минимизирует полную энергию. Как уже было упомянуто, средняя плотность градиентной энергии $\langle \varphi_{grad} \rangle$ имеет минимум, если тензорное поле параметра порядка составлено из фурье-гармоник

$$\hat{\chi}_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (12)$$

$$\hat{\chi}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2} A (\mathbf{m}_1 \mp i\mathbf{m}_2) \otimes (\mathbf{m}_1 \mp i\mathbf{m}_2), \quad (13)$$

представляющих собой двuosные геликоиды. Здесь векторы $\mathbf{m}_1$ и $\mathbf{m}_2$ образуют ортонормированный базис в плоскости, перпендикулярной волновому вектору $\mathbf{k}$,

$$[\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2] = \mathbf{k}/|\mathbf{k}| \equiv \mathbf{n}_{\mathbf{k}}. \quad (14)$$

Например, набор векторов $\mathbf{m}_1 = (100)$, $\mathbf{m}_2 = (010)$, $\mathbf{k} = (001)$ определяет фурье-гармонику, которая, будучи объединена с комплексно сопряженной, образует геликоид (7). Множитель $1/2$ дает удобную нормировку:

$$\|\hat{\chi}_{\mathbf{k}}\|^2 = \text{Sp}(\hat{\chi}_{\mathbf{k}} \cdot \hat{\chi}_{\mathbf{k}}^*) = A^2, \quad (15)$$

а выбор знака «плюс» или «минус» задает левый или правый геликоид соответственно. При этом структура всегда состоит из геликоидов одной киральности, определяемой свойствами холестерика, которые, в свою очередь, связаны с киральностью составляющих его молекул. Отметим, что абсолютный минимум $\langle \varphi_{grad} \rangle$ достигается для волновых векторов единичной длины, $k = 1$, однако если голубая фаза составлена из нескольких симметрично не связанных гармоник, то их волновые числа k различаются и равновесный период решетки определяется конкуренцией гармоник.

Поскольку голубые фазы обладают высокой симметрией, большинство фурье-гармоник оказываются связаны между собой преобразованиями пространственной группы. Таким образом, достаточно определить лишь минимальное число независимых гармоник для каждой фазы и далее размножить их поворотами. Действительно, если пространственная группа включает в себя преобразование симметрии

$$\underline{\mathbf{r}} = R \cdot \mathbf{r} + \mathbf{t}, \quad (16)$$

где R — матрица поворота, а $\mathbf{t}$ — трансляция (для несимморфных групп), то фурье-гармоника (12) под действием этого элемента симметрии переходит в эквивалентную гармонику

$$\hat{\chi}_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (17)$$

где

$$\underline{\mathbf{k}} = R \cdot \mathbf{k}, \quad (18)$$

$$\hat{\chi}_{\underline{\mathbf{k}}} = \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{t}) [R \cdot \hat{\chi}_{\mathbf{k}} \cdot R^{-1}]. \quad (19)$$

Вектор обратной решетки сам может обладать симметрией в том случае, если он параллелен или перпендикулярен оси симметрии кристалла. В первом случае при повороте вокруг выделенной оси $\underline{\mathbf{k}} = \mathbf{k}$ и, следовательно, $\hat{\chi}_{\underline{\mathbf{k}}} = \hat{\chi}_{\mathbf{k}}$. Во втором — в случае оси четного порядка (2, 4, 6) — существует поворот на угол π , для которого $\underline{\mathbf{k}} = -\mathbf{k}$ и $\hat{\chi}_{\underline{\mathbf{k}}} = \hat{\chi}_{\mathbf{k}}^*$. Тогда условие (19) накладывает строгое ограничение на фазу фурье-гармоники. В остальных случаях симметричных ограничений на фазу гармоники не существует и фаза выбирается из условия минимума объемной части свободной энергии $\langle \varphi_{bulk} \rangle$.

Как уже было упомянуто, голубые фазы в холестерических ЖК появляются вследствие конкуренции между градиентным и объемным вкладами в свободную энергию. При этом очевидно, что градиентная энергия только проигрывает от появления пространственной решетки. Действительно, средняя плотность градиентной энергии $\langle \varphi_{grad} \rangle$ минимизируется двусосными геликоидами (12), (13) с волновым числом $k = 1$. Однако после возникновения решетки даже при условии, что новая структура образована исключительно двусосными геликоидами, с необходимостью появятся волновые векторы (они же векторы обратной решетки), имеющие разную длину. Для фурье-гармоник с $k \neq 1$ градиентная энергия строго положительна:

$$\langle \varphi_{grad} \rangle \propto (k - 1)^2 > 0. \quad (20)$$

Для того чтобы голубая фаза была устойчивой, выигрыш градиентной энергии должен перекрываться выигрышем объемной. При $\tau \geq 0$ единственным не положительным членом в выражении (1) для плотности свободной энергии является $-\sqrt{6}\text{Sp}(\hat{\chi}^3)$. Это слагаемое достигает наименьших значений, когда параметр порядка становится одноосным. Таким образом, существование голубых фаз при $\tau \approx 0$ есть следствие стремления системы к максимальной одноосности, иначе говоря, к состоянию, описываемому с помощью директора. При τ достаточно меньшем нуля одноосность окончательно побеждает с переходом в геликоидальную фазу (8).

Далее опишем независимые гармоники, которые соответствуют наиболее сильным брэгговским рефлексам в идеальных голубых фазах O^5 , O^8 и O^2 . При этом ограничимся структурами, составленными из левых геликоидов (выбор знака «плюс» в (13) и «минус» в (1) и (10)).

3.1. Фаза O^5

Идеальная структура голубой фазы O^5 ($I432$) состоит из одинаковых геликоидов с осями вдоль кристаллографически эквивалентных направлений $\langle 110 \rangle$. Волновые векторы $\mathbf{k}$ лежат параллельно осям 2 и перпендикулярно осям 4 точечной группы кристалла, что, в соответствии с вышесказанным, означает, что фазы геликоидов определяются симметрией (с точностью до знака, см. таблицу на стр. 385 [1]). Выбирая $\mathbf{m}_1 = (001)$, $\mathbf{m}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1\bar{1}0)$ для вектора обратной решетки $\mathbf{k} \parallel [110]$, найдем из (13)

$$\hat{\chi}_{110} = \frac{\chi_{(110)}}{4} \begin{pmatrix} -1 & 1 & i\sqrt{2} \\ 1 & -1 & -i\sqrt{2} \\ i\sqrt{2} & -i\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Здесь вместо индекса $\mathbf{k}$ для фурье-гармоники удобнее использовать индексы Миллера hkl ; $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{a}(hkl)$, где a — параметр кубической элементарной ячейки. Гармоники для других, эквивалентных векторов обратной решетки находятся по формулам (18), (19) с поворотными элементами из точечной группы 432 ($\mathbf{t} = 0$, так как $I432$ симморфная группа).

Числовой множитель $\chi_{(110)}$, общий для всех гармоник, определяется из условия минимума свободной энергии. Здесь мы ввели обозначение $\chi_{\langle hkl \rangle}$ для нормировочного действительного множителя,

$$\chi_{\langle hkl \rangle} = \pm \|\hat{\chi}_{hkl}\|.$$

Как принято в кристаллофизике, заключенные в угловые скобки индексы Миллера $\langle hkl \rangle$ обозначают множество векторов обратной решетки, связанных с hkl преобразованиями точечной группы, в данном случае O_h ($m\bar{3}m$). Инверсию здесь необходимо добавлять, так как в общем случае вектор обратной решетки $-\mathbf{k}$ может быть не связан с вектором $\mathbf{k}$ элементом группы O (432). Таким образом, множество $\langle hkl \rangle$ содержит все векторы, получаемые из hkl перестановкой координат и/или изменением их знаков. Для индексов Миллера общего вида это множество будет содержать 48 векторов, однако в частных случаях количество векторов может быть меньшим.

Например, для индексов Миллера 110 будет всего $N_{\langle 110 \rangle} = 12$ векторов:

$$\langle 110 \rangle = \{011, 0\bar{1}1, 01\bar{1}, 0\bar{1}\bar{1}, 101, 10\bar{1}, \bar{1}01, \bar{1}0\bar{1}, 110, \bar{1}10, \bar{1}\bar{1}0, \bar{1}\bar{1}0\}.$$

В силу симметрии нормировочный множитель $\chi_{\langle hkl \rangle}$ должен быть одинаков для всех эквивалентных гармоник. В дальнейшем мы будем также использовать угловые скобки для обозначения усреднения, что, надеемся, не приведет к большой путанице.

Уместно отметить один интересный факт. Поскольку идеальная фаза O^5 состоит из двусосных геликоидов с волновым числом $k = 1$, ее средняя градиентная энергия равна нулю. А так как плотность градиентной энергии неотрицательна, она также равна нулю во всем объеме элементарной ячейки, включая как почти одноосные (описываемые директором) области, так и существенно двусосные (ядра дисклиний). С другой стороны, в голубых фазах O^8 и O^2 , структуры которых описаны ниже, присутствуют геликоиды с разными k , и, значит, их средняя градиентная энергия строго положительна. При этом плотность градиентной энергии, определяемая суперпозицией скрещенных двусосных геликоидов, оказывается неоднородно распределенной по элементарной ячейке. Значение φ_{grad} достигает минимума в областях с двойной закруткой директора и максимума на ядрах дисклиний. Это, кажется, вполне согласуется с той общепринятой точкой зрения, что выигрыш в градиентной энергии связан с двойной закруткой поля директора. Тем не менее случай фазы O^5 показывает, что в теории, основанной на тензорном параметре порядка $\hat{\chi}(\mathbf{r})$ и выражении (1) для свободной энергии, причиной понижения градиентной энергии служит вовсе не двойная закрутка, а двусосные геликоиды вида (13).

Энергетический баланс фазы O^5 в значительной степени определяется членом $-\sqrt{6}\text{Sp}(\hat{\chi}^3)$ в плотности свободной энергии. На рис. 1 показано распределение величины $\text{Sp}(\hat{\chi}^3)$ в элементарной ячейке идеальной голубой фазы O^5 .

3.2. Фаза O^8

В идеальной структуре фазы O^8 ($I4_132$) в соответствии с экспериментом выделяют три основные неэквивалентные фурье-гармоники с индексами Миллера $\langle 200 \rangle$, $\langle 110 \rangle$, $\langle 211 \rangle$. Фазы гармоник, как и в случае голубой фазы O^5 , задаются симметрией. Вы-

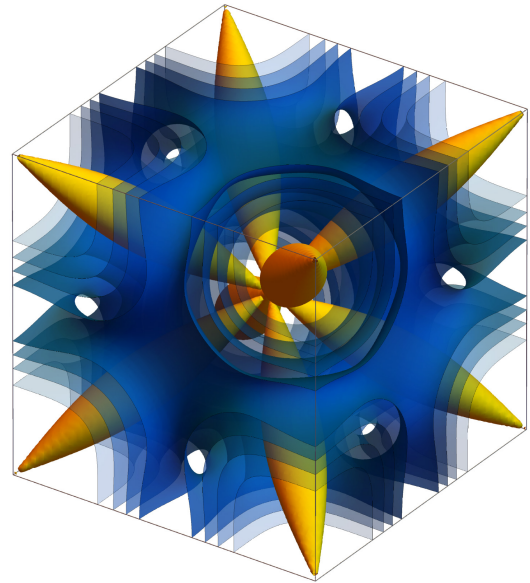


Рис. 1. Распределение величины $\text{Sp}(\hat{\chi}^3)$, определяющей выигрыш свободной энергии, в элементарной ячейке идеальной голубой фазы O^5 . Поверхность $\text{Sp}(\hat{\chi}^3) = 0$ (желтый) определяет границу топологических дефектов (ядра дисклиний). Голубые поверхности соответствуют значениям $\text{Sp}(\hat{\chi}^3)$ в 20, 40, 60 и 80% от максимального

бирая $\mathbf{m}_1 = (010)$, $\mathbf{m}_2 = (001)$ для вектора обратной решетки $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{a}(200)$, получаем

$$\hat{\chi}_{200} = \frac{\chi_{\langle 200 \rangle}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & i & -1 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

а выбирая $\mathbf{m}_1 = \frac{1}{2}(1, -1, \sqrt{2})$, $\mathbf{m}_2 = \frac{1}{2}(1, -1, -\sqrt{2})$ для $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{a}(110)$, имеем

$$\hat{\chi}_{110} = \frac{\chi_{\langle 110 \rangle}}{4} \begin{pmatrix} i & -i & \sqrt{2} \\ -i & i & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -2i \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Отметим тот факт, что фазы фурье-гармоники 110 отличаются для групп O^5 и O^8 . Это связано с тем обстоятельством, что пространственная группа O^8 несимморфная. В частности, поворот на угол π относительно оси $[001]$, переводящий вектор $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{a}(110)$ в $-\mathbf{k}$, сопровождается смещением на $\mathbf{t} = \frac{a}{2}(101)$, что приводит к изменению знака правой части выражения (19).

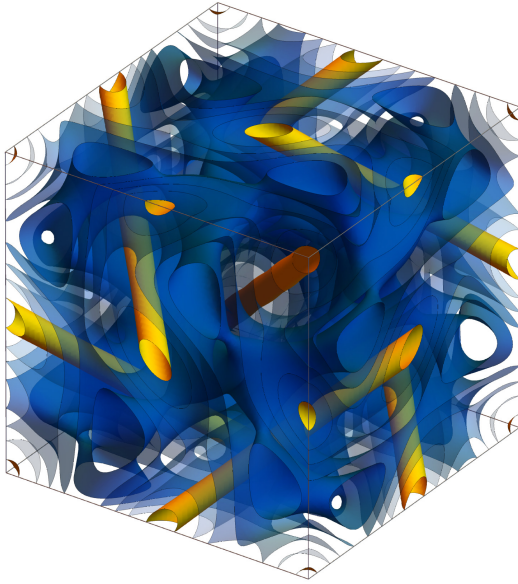


Рис. 2. Распределение величины $\text{Sp}(\hat{\chi}^3)$, определяющей выигрыш свободной энергии, в элементарной ячейке идеальной голубой фазы O^8 (BP I). Поверхность $\text{Sp}(\hat{\chi}^3) = 0$ (желтый) определяет границу топологических дефектов (ядра дисклиний). Голубые поверхности соответствуют значениям $\text{Sp}(\hat{\chi}^3)$ в 20, 40, 60 и 80% от максимального

Полагая $\mathbf{m}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1\bar{1}\bar{1})$, $\mathbf{m}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(01\bar{1})$ для волнового вектора $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{a}(211)$, получаем

$$\hat{\chi}_{211} = \frac{\chi_{(211)}}{12} \left[\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 5 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix} + i\sqrt{6} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right]. \quad (24)$$

Оставшиеся фурье-гармоники можно вычислить из гармоник (22)–(24) по формулам (18), (19), перечисляя поворотные элементы пространственной группы O^8 .

На рис. 2 показано распределение величины $\text{Sp}(\hat{\chi}^3)$ в элементарной ячейке идеальной голубой фазы O^8 .

3.3. Фаза O^2

Идеальная структура фазы O^2 ($P4_232$) содержит два типа основных фурье-гармоник: $\langle 100 \rangle$ и $\langle 110 \rangle$, фазы которых определяются симметрией. Гармони-

ка 100 похожа на гармонику 200 фазы O^8 с удвоенным периодом, ср. (22):

$$\hat{\chi}_{100} = \frac{\chi_{\langle 100 \rangle}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & i & -1 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

а гармоника 110 совпадает с гармоникой 110 фазы O^5 с точностью до численного значения коэффициента $\chi_{\langle 110 \rangle}$, см. (21). Оставшиеся фурье-гармоники можно вычислить из этих двух, используя формулы (18), (19) с поворотными элементами пространственной группы O^2 .

На рис. 3 показано распределение величины $\text{Sp}(\hat{\chi}^3)$ в элементарной ячейке идеальной голубой фазы O^2 .

4. УПРУГАЯ ДЕФОРМАЦИЯ РЕШЕТКИ КУБИЧЕСКОГО КРИСТАЛЛА

Как уже было сказано, средняя плотность свободной энергии $\langle \varphi \rangle$ при заданных физических параметрах κ , η , τ определяется набором переменных $\{\mathbf{k}\}$ и $\{\chi_{\mathbf{k}}\}$. Предположим, что система находится в состоянии равновесия, отвечающего локальному минимуму энергии. Если к системе приложить механическое напряжение, то вызванное деформацией приращение свободной энергии будет квадратичной функцией приращений переменных:

$$\varphi_{def} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \langle \varphi \rangle}{\partial k_i \partial k_j} \Delta k_i \Delta k_j + \frac{\partial^2 \langle \varphi \rangle}{\partial k_i \partial \chi_j} \Delta k_i \Delta \chi_j + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \langle \varphi \rangle}{\partial \chi_i \partial \chi_j} \Delta \chi_i \Delta \chi_j. \quad (26)$$

Здесь индексы « i », « j » нумеруют все компоненты волновых векторов $\mathbf{k}$ и тензоров параметра порядка $\hat{\chi}_{\mathbf{k}}$; по повторяющимся индексам предполагается суммирование. Приращения Δk_i компонент векторов обратной решетки целиком определяются тензором деформации, в то время как изменения $\Delta \chi_i$ компонент тензоров параметра порядка возникают из-за релаксации системы к новому состоянию равновесия:

$$\frac{\partial \varphi_{def}}{\partial \Delta \chi_i} = \frac{\partial^2 \langle \varphi \rangle}{\partial \chi_i \partial k_j} \Delta k_j + \frac{\partial^2 \langle \varphi \rangle}{\partial \chi_i \partial \chi_j} \Delta \chi_j = 0. \quad (27)$$

С учетом (27) энергия упругой деформации ЖК имеет вид

$$\varphi_{def} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \langle \varphi \rangle}{\partial k_i \partial k_j} \Delta k_i \Delta k_j - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \langle \varphi \rangle}{\partial \chi_i \partial \chi_j} \Delta \chi_i \Delta \chi_j. \quad (28)$$

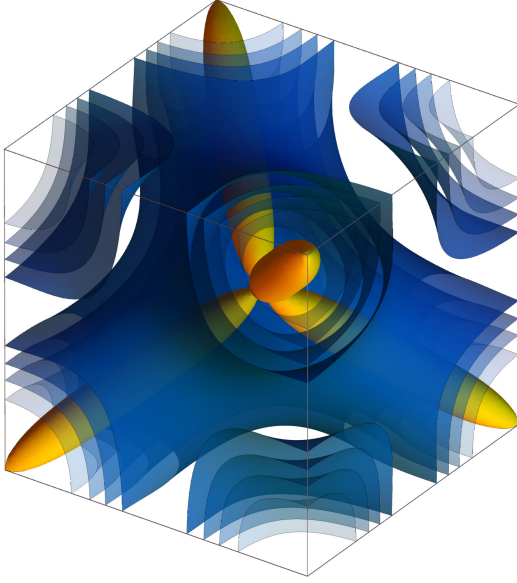


Рис. 3. Распределение величины $\text{Sp}(\hat{\chi}^3)$, определяющей выигрыш свободной энергии, в элементарной ячейке идеальной голубой фазы O^2 (BP II). Поверхность $\text{Sp}(\hat{\chi}^3) = 0$ (желтый) определяет границу топологических дефектов (ядра дисклиний). Голубые поверхности соответствуют значениям $\text{Sp}(\hat{\chi}^3)$ в 20, 40, 60 и 80% от максимального

В [27] было показано, что в холестериках с малым параметром киральности ($\kappa \ll 1$) можно пренебречь искажением тензоров $\hat{\chi}_{\mathbf{k}}$ при деформациях голубой фазы — так называемое приближение жестких тензоров. Отбрасываемое при этом второе слагаемое в (28) имеет порядок κ^4 . Поскольку явная зависимость от векторов $\mathbf{k}$ обратной решетки содержится только в градиентной части свободной энергии (10), в этом приближении можно записать энергию упругой деформации как

$$\varphi_{def} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\partial^2 \langle \varphi_{grad} \rangle}{\partial k_{\alpha} \partial k_{\beta}} (k'_{\alpha} - k_{\alpha})(k'_{\beta} - k_{\beta}), \quad (29)$$

где $\mathbf{k}'$ — вектор обратной решетки после деформации. Искривленный вектор $\mathbf{k}'$ связан с начальным $\mathbf{k}$ таким образом, что фаза фурье-гармоники в смещенной точке $\mathbf{r}'$ сохраняется:

$$\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}' = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}. \quad (30)$$

При однородной деформации смещение точек кристалла определяется аффинным преобразованием

$$\mathbf{r}' = (1 + \hat{u}) \cdot \mathbf{r}, \quad (31)$$

где

$$(\hat{u})_{\alpha\beta} = \frac{\partial(r'_{\alpha} - r_{\alpha})}{\partial r_{\beta}}. \quad (32)$$

Из (30) следует, что

$$\mathbf{k}' = \mathbf{k} \cdot (1 + \hat{u})^{-1}. \quad (33)$$

Тензор $1 + \hat{u}$ может иметь антисимметричную часть, которая соответствует вращению кристалла как целого. В изотропном пространстве энергия не меняется при поворотах, и удобно избавиться от вращения, симметризовав тензор $\hat{u}$. Согласно теореме о существовании полярного разложения действительной матрицы, можно найти такую ортогональную матрицу R , что

$$1 + \hat{u} = R \cdot (1 + \hat{u}_s),$$

где $1 + \hat{u}_s$, а следовательно, и $\hat{u}_s$ — симметричная матрица. Применив к деформированной системе поворот R^{-1} , получим

$$\mathbf{r}'_{new} = R^{-1} \cdot \mathbf{r}'_{old} = (1 + \hat{u}_s) \cdot \mathbf{r}, \quad (34)$$

тем самым достигнув желаемого результата.

Введем теперь тензор деформации $\hat{\pi}$ (от греческого *παράμορφωση* — деформация):

$$\hat{\pi} = \frac{\hat{u}_s}{1 + \hat{u}_s}, \quad (35)$$

который в силу определения также симметричен. Тензор $\hat{\pi}$ удобнее для нашей задачи, чем обычно используемый тензор деформации Коши–Грина $\hat{\varepsilon}$, и связан с последним следующим образом:

$$\hat{\pi} = 1 - (1 + 2\hat{\varepsilon})^{-1/2}. \quad (36)$$

В линейном приближении, используемом при малых деформациях, тензоры $\hat{\pi}$ и $\hat{\varepsilon}$ совпадают.

Используя введенный нами тензор деформации, можно переписать (33) как

$$\mathbf{k}' = (1 - \hat{\pi}) \cdot \mathbf{k} \quad (37)$$

или

$$\Delta \mathbf{k} = \mathbf{k}' - \mathbf{k} = -\hat{\pi} \cdot \mathbf{k}. \quad (38)$$

Последнее равенство позволяет записать энергию упругой деформации (29) как квадратичную функцию компонент тензора $\hat{\pi}$:

$$\varphi_{def} = \frac{1}{2} \lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} \pi_{\alpha\beta} \pi_{\gamma\delta}, \quad (39)$$

где

$$\lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} = \left\langle \sum_{\mathbf{k}} \frac{\partial^2 \langle \varphi_{grad} \rangle}{\partial k_{\alpha} \partial k_{\gamma}} k_{\beta} k_{\delta} \right\rangle_{[[V^2]^2]} \quad (40)$$

есть тензор упругих постоянных. Здесь угловые скобки означают, что стоящий в них тензор должен

быть подвергнут дополнительной симметризации по перестановке индексов:

$$[[V^2]^2] : \lambda_{1234} = \lambda_{2134} = \lambda_{1243} = \lambda_{3412}.$$

В системах с кубической симметрией тензор упругих постоянных имеет три независимые компоненты:

$$\begin{aligned} \varphi_{def} = & \frac{1}{2} \lambda_{xxxx} (\pi_{xx}^2 + \pi_{yy}^2 + \pi_{zz}^2) + \\ & + \lambda_{xxyy} (\pi_{xx} \pi_{yy} + \pi_{yy} \pi_{zz} + \pi_{zz} \pi_{xx}) + \\ & + 2 \lambda_{xyxy} (\pi_{xy}^2 + \pi_{yz}^2 + \pi_{zx}^2). \end{aligned} \quad (41)$$

5. ПАРАМЕТР ОБРАТНОЙ РЕШЕТКИ ГОЛУБОЙ ФАЗЫ

Как уже было сказано, свободная энергия имеет вид квадратичной по деформации функции только в том случае, если система находится в точке упругого равновесия. Условие равновесия, в частности, определяет размер элементарной ячейки голубой фазы. Отметим, что период структуры влияет исключительно на градиентную часть свободной энергии, зависящую от пространственных производных тензорного поля $\hat{\chi}(\mathbf{r})$. Действительно, в выражение для $\langle \varphi_{grad} \rangle$ входят векторы обратной решетки

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{a} (hkl) = b |hkl| \mathbf{n}_k, \quad (42)$$

зависящие от периода a кубической решетки кристалла; hkl — индексы Миллера фурье-гармоники,

$$|hkl| = \sqrt{h^2 + k^2 + \ell^2},$$

$b = 2\pi/a$ — параметр обратной решетки. Кроме векторов $\mathbf{k}$ в выражение (10) входит эрмитов тензор $\hat{\chi}_{\mathbf{k}} \cdot \hat{\chi}_{\mathbf{k}}^*$, который для геликоидальной гармоники (13) с числовым коэффициентом $A = \chi_{(hkl)}$ имеет следующий вид:

$$\hat{\chi}_{\mathbf{k}} \cdot \hat{\chi}_{\mathbf{k}}^* = \frac{1}{2} \chi_{(hkl)}^2 (\mathbf{m}_1 \mp i \mathbf{m}_2) \otimes (\mathbf{m}_1 \pm i \mathbf{m}_2). \quad (43)$$

Подставим (42), (43) в выражение (10) и вычислим среднюю плотность градиентной свободной энергии как функцию b :

$$\langle \varphi_{grad} \rangle = \kappa^2 \sum_{\mathbf{k}} (b^2 |hkl|^2 - 2b |hkl| + 1) \|\hat{\chi}_{\mathbf{k}}\|^2. \quad (44)$$

Минимизируя (44), получим равновесное значение параметра обратной решетки:

$$b = \sum_{\mathbf{k}} |hkl| \|\hat{\chi}_{\mathbf{k}}\|^2 / \sum_{\mathbf{k}} |hkl|^2 \|\hat{\chi}_{\mathbf{k}}\|^2. \quad (45)$$

Данное выражение можно записать в более простой форме, заметив, что усредненный по ячейке квадрат нормы параметра порядка

$$\langle \|\hat{\chi}(\mathbf{r})\|^2 \rangle = \sum_{\mathbf{k}} \|\hat{\chi}_{\mathbf{k}}\|^2 \equiv X^2. \quad (46)$$

Это позволяет ввести понятие среднего значения произвольной величины $A_{\mathbf{k}}$, зависящей от вектора обратной решетки:

$$\langle A_{\mathbf{k}} \rangle = \frac{1}{X^2} \sum_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}} \|\hat{\chi}_{\mathbf{k}}\|^2. \quad (47)$$

Теперь градиентная свободная энергия (44) может быть записана в более прозрачной форме

$$\langle \varphi_{grad} \rangle = \kappa^2 \langle (k-1)^2 \rangle X^2, \quad (48)$$

из которой становится очевидным, что равновесный параметр обратной решетки минимизирует средне-квадратичное отклонение волнового числа k от единицы. При этом сам параметр b можно записать как

$$b = \frac{\langle |hkl| \rangle}{\langle |hkl|^2 \rangle}. \quad (49)$$

Это равенство позволяет легко вычислить b для голубой фазы с эквивалентными фурье-гармониками. Например, учитывая, что $|110| = \sqrt{2}$, для фазы O^5 получаем

$$b(O^5) = 1/\sqrt{2}, \quad (50)$$

что соответствует волновому числу геликоидов $k = 1$. Для того чтобы найти значения параметра b для голубых фаз O^8 и O^2 , частично просуммируем числитель и знаменатель в выражении (45), приведя его к следующему виду:

$$b = \frac{\sum_{\langle hkl \rangle} |hkl| N_{\langle hkl \rangle} \chi_{\langle hkl \rangle}^2}{\sum_{\langle hkl \rangle} |hkl|^2 N_{\langle hkl \rangle} \chi_{\langle hkl \rangle}^2}. \quad (51)$$

Здесь суммирование ведется по множествам кристаллографически эквивалентных векторов $\langle hkl \rangle$, $N_{\langle hkl \rangle}$ — число волновых векторов, входящих в каждое множество. Учитывая, что

$$\begin{aligned} |100| &= 1, & N_{(100)} &= 6, \\ |200| &= 2, & N_{(200)} &= 6, \\ |110| &= \sqrt{2}, & N_{(110)} &= 12, \\ |211| &= \sqrt{6}, & N_{(211)} &= 24, \end{aligned} \quad (52)$$

имеем

$$b(O^8) = \frac{\chi_{(200)}^2 + \sqrt{2} \chi_{(110)}^2 + 2\sqrt{6} \chi_{(211)}^2}{2[\chi_{(200)}^2 + \chi_{(110)}^2 + 6\chi_{(211)}^2]}, \quad (53)$$

$$b(O^2) = \frac{\chi_{\langle 100 \rangle}^2 + 2\sqrt{2}\chi_{\langle 110 \rangle}^2}{\chi_{\langle 100 \rangle}^2 + 4\chi_{\langle 110 \rangle}^2}. \quad (54)$$

Напоследок отметим полезное равенство, являющееся следствием (42) и (49):

$$\langle k^2 \rangle = \langle k \rangle = \frac{\langle |hk\ell| \rangle^2}{\langle |hk\ell|^2 \rangle} \leq 1. \quad (55)$$

6. ОДНОКОНСТАНТНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ. ОБЪЕМНЫЙ МОДУЛЬ УПРУГОСТИ

Для начала ограничимся вычислением модулей упругости в одноконстантном приближении ($\eta = 1$). Отметим, что пропорциональное $\eta - 1$ слагаемое в (10) не вносит вклада в среднюю плотность градиентной свободной энергии неискаженной голубой фазы, поскольку для геликоидальных гармоник вида (13) выполняется равенство

$$\mathbf{k} \cdot \hat{\chi}_{\mathbf{k}} = \hat{\chi}_{\mathbf{k}}^* \cdot \mathbf{k} = 0. \quad (56)$$

Так как при всестороннем растяжении (сжатии) векторы обратной решетки сжимаются (растягиваются), не меняя направления, равенства (56) выполняются также для векторов $\mathbf{k}'$. Последнее означает, что одноконстантное приближение позволяет вычислить объемный модуль упругости

$$K = \frac{1}{3}(\lambda_{xxxx} + 2\lambda_{xxyy}). \quad (57)$$

Энергия упругой деформации равна разнице энергий искаженной и исходной структур:

$$\begin{aligned} \varphi_{def} &= \langle \varphi'_{grad} \rangle - \langle \varphi_{grad} \rangle = \\ &= \kappa^2 \sum_{\mathbf{k}} \{ (k'^2 - k^2) \text{Sp}(\hat{\chi}_{\mathbf{k}} \cdot \hat{\chi}_{\mathbf{k}}^*) \pm \\ &\quad \pm 2i \text{Sp}((\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \times (\hat{\chi}_{\mathbf{k}} \cdot \hat{\chi}_{\mathbf{k}}^*)) \}, \end{aligned} \quad (58)$$

или

$$\varphi_{def} = \kappa^2 \sum_{\mathbf{k}} \{ (k'^2 - k^2) - 2(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{k}} \} \|\hat{\chi}_{\mathbf{k}}\|^2. \quad (59)$$

Здесь мы учли равенство (15) и то, что для геликоидальной фурье-гармоники (13)

$$\text{Sp}((\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \times (\hat{\chi}_{\mathbf{k}} \cdot \hat{\chi}_{\mathbf{k}}^*)) = \pm i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{k}} \|\hat{\chi}_{\mathbf{k}}\|^2.$$

Воспользовавшись равенством (37), получаем

$$\varphi_{def} = \kappa^2 \sum_{\mathbf{k}} \{ \mathbf{k} \cdot (\hat{\pi}^2 - 2\hat{\pi}) \cdot \mathbf{k} + \mathbf{k} \cdot 2\hat{\pi} \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{k}} \} \|\hat{\chi}_{\mathbf{k}}\|^2. \quad (60)$$

Дальнейшие преобразования легко осуществить, используя кубическую симметрию неискаженной голубой фазы. Действительно, если в (60) проводить суммирование по векторам обратной решетки, связанным между собой кристаллической симметрией, то в слагаемых изменяются (поворачиваются) только векторы $\mathbf{k}$ и $\mathbf{n}_{\mathbf{k}}$, в то время как квадрат нормы $\|\hat{\chi}_{\mathbf{k}}\|^2$ и тензор $\hat{\pi}$ постоянны. Усреднение по кубической группе O произведения пары меняющихся векторов дает

$$\langle \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} \rangle_O = \frac{1}{3}k^2\hat{\delta}, \quad \langle \mathbf{k} \otimes \mathbf{n}_{\mathbf{k}} \rangle_O = \frac{1}{3}k\hat{\delta}.$$

После усреднения энергия упругой деформации принимает вид

$$\varphi_{def} = \frac{1}{3}\kappa^2 \sum_{\mathbf{k}} \{ k^2 \text{Sp}(\hat{\pi}^2 - 2\hat{\pi}) + 2k \text{Sp}\hat{\pi} \} \|\hat{\chi}_{\mathbf{k}}\|^2, \quad (61)$$

или, с учетом (55),

$$\varphi_{def} = \frac{1}{3}\kappa^2 \langle k^2 \rangle X^2 \text{Sp}\hat{\pi}^2. \quad (62)$$

Последнее выражение соответствует изотропной упругости с параметрами Ламе

$$\begin{aligned} \mu_L &= \frac{1}{2}\lambda_{xxxx} = \lambda_{xxyy} = \frac{1}{3}\kappa^2 \langle k^2 \rangle X^2, \\ \lambda_L &= \lambda_{xxyy} = 0. \end{aligned} \quad (63)$$

Объемный модуль упругости

$$K = \lambda_L + \frac{2}{3}\mu_L = \frac{2}{9}\kappa^2 \langle k^2 \rangle X^2. \quad (64)$$

Воспользовавшись равенствами (52), найдем выражения для модуля K голубых фаз O^5 , O^8 , O^2 :

$$K(O^5) = \frac{8}{3}\kappa^2 \chi_{\langle 110 \rangle}^2, \quad (65)$$

$$K(O^8) = \frac{4}{3}\kappa^2 \frac{(\chi_{\langle 200 \rangle}^2 + \sqrt{2}\chi_{\langle 110 \rangle}^2 + 2\sqrt{6}\chi_{\langle 211 \rangle}^2)}{\chi_{\langle 200 \rangle}^2 + \chi_{\langle 110 \rangle}^2 + 6\chi_{\langle 211 \rangle}^2}, \quad (66)$$

$$K(O^2) = \frac{4}{3}\kappa^2 \frac{(\chi_{\langle 100 \rangle}^2 + 2\sqrt{2}\chi_{\langle 110 \rangle}^2)}{\chi_{\langle 100 \rangle}^2 + 4\chi_{\langle 110 \rangle}^2}. \quad (67)$$

Напоследок выразим компоненты тензора упругих постоянных через объемный модуль:

$$\lambda_{xxxx} = 3K, \quad \lambda_{xxyy} = 0, \quad \lambda_{xyxy} = 3K/2. \quad (68)$$

7. ДВУХКОНСТАНТНЫЙ СЛУЧАЙ. МОДУЛИ ЮНГА

В двухконстантном приближении ($\eta \neq 1$) в энергии упругой деформации появляется дополнительный вклад

$$\varphi_{def}^{(\eta)} = \kappa^2(\eta - 1) \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cdot \hat{\pi} \cdot \hat{\chi}_{\mathbf{k}} \cdot \hat{\chi}_{\mathbf{k}}^* \cdot \hat{\pi} \cdot \mathbf{k}. \quad (69)$$

Здесь при суммировании по связанным преобразованиями симметрии волновым векторам $\mathbf{k}$ меняется эрмитов тензор $\hat{\chi}_{\mathbf{k}} \cdot \hat{\chi}_{\mathbf{k}}^*$:

$$\hat{\chi}_{\mathbf{k}} \cdot \hat{\chi}_{\mathbf{k}}^* = R \cdot \hat{\chi}_{\mathbf{k}} \cdot \hat{\chi}_{\mathbf{k}}^* \cdot R^{-1}.$$

Усреднение по кубической точечной группе дает

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k} \cdot \hat{\pi} \cdot \hat{\chi}_{\mathbf{k}} \cdot \hat{\chi}_{\mathbf{k}}^* \cdot \hat{\pi} \cdot \mathbf{k} \rangle_O &= \frac{1}{6} k^2 \|\hat{\chi}_{\mathbf{k}}\|^2 \times \\ &\times \{(\pi_{xx}^2 + \pi_{yy}^2 + \pi_{zz}^2)(1 - \mathfrak{N}_{\mathbf{k}}) - \\ &-(\pi_{xx}\pi_{yy} + \pi_{yy}\pi_{zz} + \pi_{zz}\pi_{xx})(1 - \mathfrak{N}_{\mathbf{k}}) + \\ &+ 2(\pi_{xy}^2 + \pi_{yz}^2 + \pi_{zx}^2)\mathfrak{N}_{\mathbf{k}}\}, \end{aligned} \quad (70)$$

где

$$\mathfrak{N}_{\mathbf{k}} = n_{\mathbf{k},x}^4 + n_{\mathbf{k},y}^4 + n_{\mathbf{k},z}^4 = \frac{h^4 + k^4 + \ell^4}{(h^2 + k^2 + \ell^2)^2}. \quad (71)$$

Суммирование содержащих $\mathfrak{N}_{\mathbf{k}}$ членов дает

$$\sum_{\mathbf{k}} \mathfrak{N}_{\mathbf{k}} k^2 \|\hat{\chi}_{\mathbf{k}}\|^2 = \mathfrak{A} \langle k^2 \rangle X^2, \quad (72)$$

где

$$\mathfrak{A} = \left\langle \frac{h^4 + k^4 + \ell^4}{h^2 + k^2 + \ell^2} \right\rangle \frac{1}{\langle h^2 + k^2 + \ell^2 \rangle} \leq 1. \quad (73)$$

Вычисление $\mathfrak{A}$ для голубых фаз O^5 , O^8 , O^2 приводит к следующим выражениям:

$$\mathfrak{A}(O^5) = \frac{1}{2}, \quad (74)$$

$$\mathfrak{A}(O^8) = \frac{1}{2} \frac{2\chi_{\langle 200 \rangle}^2 + \chi_{\langle 110 \rangle}^2 + 6\chi_{\langle 211 \rangle}^2}{\chi_{\langle 200 \rangle}^2 + \chi_{\langle 110 \rangle}^2 + 6\chi_{\langle 211 \rangle}^2}, \quad (75)$$

$$\mathfrak{A}(O^2) = \frac{\chi_{\langle 100 \rangle}^2 + 2\chi_{\langle 110 \rangle}^2}{\chi_{\langle 100 \rangle}^2 + 4\chi_{\langle 110 \rangle}^2}. \quad (76)$$

В итоге, после суммирования в (69), получаем значения компонент тензора $\hat{\lambda}$ в двухконстантном случае:

$$\begin{aligned} \lambda_{xxxx} &= 3K[1 + \frac{1}{2}(\eta - 1)(1 - \mathfrak{A})], \\ \lambda_{xxyy} &= -\frac{3}{4}K(\eta - 1)(1 - \mathfrak{A}), \\ \lambda_{xyxy} &= \frac{3}{2}K[1 + \frac{1}{2}(\eta - 1)\mathfrak{A}]. \end{aligned} \quad (77)$$

Положительная определенность энергии деформации (39) определяется собственными значениями тензора упругих постоянных

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_{xxxx} + 2\lambda_{xxyy}, \\ \lambda_2 &= \lambda_{xxxx} - \lambda_{xxyy}, \\ \lambda_3 &= \lambda_{xyxy}, \end{aligned} \quad (78)$$

которые положительны при $K, \eta > 0$. Собственные значения тензора $\hat{\lambda}$ связаны с объемным модулем упругости и модулями сдвига простыми соотношениями [4]:

$$K = \lambda_1/3, \quad G_1 = \lambda_2/2, \quad G_2 = \lambda_3.$$

Рассчитаем также модуль Юнга, который в случае анизотропной среды зависит от направления растяжения (сжатия). В частности, в случае кубической анизотропии, для растяжения (сжатия) в направлении единичного вектора $\mathbf{n}$ имеем

$$\begin{aligned} E(\mathbf{n}) &= \left[\frac{1}{3\lambda_1} - \frac{1}{3\lambda_2} + \frac{1}{2\lambda_3} + \right. \\ &\left. + \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{2\lambda_3} \right) (n_x^4 + n_y^4 + n_z^4) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (79)$$

Экстремальным значениям модуля Юнга соответствуют кристаллографические направления $\langle 100 \rangle$ и $\langle 111 \rangle$:

$$E_{\langle 100 \rangle} = \frac{3\lambda_1\lambda_2}{2\lambda_1 + \lambda_2} = 3K \frac{1 + \frac{3}{4}(\eta - 1)(1 - \mathfrak{A})}{1 + \frac{1}{4}(\eta - 1)(1 - \mathfrak{A})}, \quad (80)$$

$$E_{\langle 111 \rangle} = \frac{3\lambda_1\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_3} = 3K \frac{1 + \frac{1}{2}(\eta - 1)\mathfrak{A}}{1 + \frac{1}{6}(\eta - 1)\mathfrak{A}}. \quad (81)$$

8. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В целом можно констатировать, что в ЖК с низкой киральностью ($\kappa \ll 1$) проявляется схожее поведение модулей упругости у всех голубых фаз. Разберем это более подробно.

Градиентный вклад в свободную энергию оказывается мал в сравнение с объемным,

$$\langle \varphi_{grad} \rangle \ll \langle \varphi_{bulk} \rangle,$$

и поэтому можно допустить, что коэффициенты $\chi_{\langle hkl \rangle}$ для каждой из фаз определяются из условия минимума объемной энергии. Выражение (11) для $\langle \varphi_{bulk} \rangle$ не содержит других параметров, кроме температуры. Следовательно, коэффициенты $\chi_{\langle hkl \rangle}$ также являются функциями только температуры и не зависят от входящих в градиентную энергию параметров κ и η . Температурная зависимость имеет вид степенного закона

$$\chi_{\langle hkl \rangle} \propto (\tau_m - \tau)^{1/2}, \quad (82)$$

где τ_m — температура, при которой появляется локальный минимум свободной энергии, соответствующий данной голубой фазе. Учитывая, что голубые фазы существуют в весьма узком температурном интервале между изотропной и геликоидальной

фазами, можно пренебречь относительными изменениями коэффициентов $\chi_{\langle hkl \rangle}$ и ввести единый параметр порядка X :

$$X^2 = \langle \|\hat{\chi}(\mathbf{r})\|^2 \rangle = \sum_{\langle hkl \rangle} N_{\langle hkl \rangle} \chi_{\langle hkl \rangle}^2. \quad (83)$$

Все модули упругости пропорциональны X^2 и, следовательно, меняются с температурой по линейному закону:

$$\hat{\lambda} \propto \tau_m - \tau. \quad (84)$$

При этом каждой голубой фазе соответствуют свои собственные температура τ_m и тензорный коэффициент пропорциональности.

Далее рассмотрим характерные особенности упругих свойств голубых фаз, не связанные с температурой. Для этого поделим все модули упругости на объемный модуль K , тем самым исключив температурную зависимость. Тензор $\hat{\lambda}/K$ зависит от двух величин: константы $\eta = K_0/K_1$, характеризующей физическую систему, и $\mathfrak{A}$ — численного параметра, связанного с голубой фазой. Для вычисления $\mathfrak{A}$ достаточно знать отношения коэффициентов $\chi_{\langle hkl \rangle}$. Например, из данных работ [1, 11] можно найти соотношение

$$\chi_{\langle 200 \rangle} : \chi_{\langle 110 \rangle} : \chi_{\langle 211 \rangle} = 1 : 0.934 : -0.329 \quad (85)$$

для фазы O^8 и

$$\chi_{\langle 100 \rangle} : \chi_{\langle 110 \rangle} = 1 : -0.396 \quad (86)$$

для фазы O^2 . Подставляя эти числа в (75), (76), находим

$$\mathfrak{A}(O^8) = 0.698, \quad \mathfrak{A}(O^2) = 0.807. \quad (87)$$

С учетом этих значений можно построить зависимости $E_{\langle 100 \rangle}/K$, $E_{\langle 111 \rangle}/K$ от η для голубых фаз BP I и BP II (рис. 4). Из графиков видно, что функции E/K монотонно возрастают в диапазоне $\eta \in [0, \infty)$. В одноконстантном приближении ($\eta = 1$) решетки голубых фаз упруго изотропны, причем модуль Юнга равен утроенному объемному модулю. При $\eta \neq 1$, в соответствии с выражением (79), возникает кубическая анизотропия упругих свойств. В частности,

$$\begin{aligned} E_{\langle 100 \rangle} &> E_{\langle 111 \rangle}, & \eta < 1, \\ E_{\langle 100 \rangle} &< E_{\langle 111 \rangle}, & \eta > 1. \end{aligned} \quad (88)$$

Коэффициент Пуассона ν равен нулю в одноконстантном приближении ($\eta = 1$). Это означает, что при растяжении (сжатии) решетки вдоль произвольного направления ее поперечные размеры не

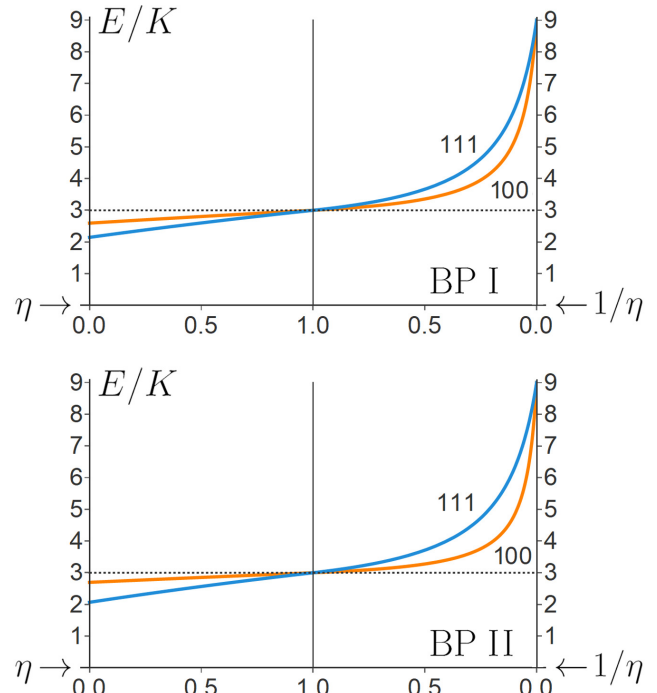


Рис. 4. Зависимости отношений модулей Юнга $E_{\langle 100 \rangle}$ и $E_{\langle 111 \rangle}$ к объемному модулю K от параметра η для голубых фаз O^8 (BP I) и O^2 (BP II) в приближении жестких тензоров

меняются. При $\eta \neq 1$ коэффициент Пуассона, как и модуль Юнга, зависит от направления. Однако знак ν коррелирует со значением параметра η :

$$\text{sign}[\nu(1 - \eta)] = +1. \quad (89)$$

В частности, при $\eta > 1$ решетки голубых фаз ведут себя как ауксетики — материалы с отрицательным значением коэффициента Пуассона, $\nu < 0$. Таким свойством могут обладать искусственно созданные материалы [29], но ауксетики также встречаются и среди обыкновенных кристаллов, в том числе с кубической симметрией [30]. Однако в случае с голубыми фазами имеется важное отличие. Поскольку число молекул ЖК внутри элементарной ячейки не фиксировано, увеличение ее размеров не ведет автоматически к уменьшению плотности. Здесь можно усмотреть аналогию между изменением границ элементарной ячейки голубой фазы и движением доменных стенок в сегнетоэлектриках и ферромагнетиках. Заметим, что в нематических и холестерических ЖК объемный модуль Франка K_{22} , как правило, значительно меньше K_{11} и K_{33} , а следовательно, $\eta > 1$. Для типичного значения $\eta \approx 3$ [2] коэффициент Пуассона голубых фаз BP I, BP II отрицателен

и меняется приблизительно в диапазоне от -0.1 до -0.2 в зависимости от направления растяжения.

Стоит отдельно рассмотреть поведение упругих свойств при $\eta \rightarrow \infty$ ($K_1 \rightarrow 0$). На рис. 4 видно, что при $\eta = \infty$ модуль Юнга вновь перестает зависеть от направления, в котором происходит растяжение (сжатие). При этом $E = 9K$, и, если посмотреть на выражения для параметров Ламе

$$\lambda_L = \frac{3K(3K - E)}{9K - E}, \quad \mu_L = \frac{3KE}{9K - E}, \quad (90)$$

это может показаться катастрофическим поведением. Здесь, однако, нужно учесть, что при больших значениях параметра η условие низкой киральности должно выглядеть как

$$\kappa \ll \eta^{-1/2}. \quad (91)$$

Это означает, что при $\eta \rightarrow \infty$ объемный модуль $K \sim \kappa^2$ и модуль Юнга E стремятся к нулю. Причиной служит исчезновение первого слагаемого в градиентной энергии φ_{grad} в (1), ответственного за закрутку поля параметра порядка $\hat{\chi}(\mathbf{r})$ (в энергии Франка—Озеена этому отвечает $K_{22} = 0$). Таким образом, пропадает зависимость свободной энергии от среднего волнового числа $\langle k \rangle$ геликоидов и, следовательно, от размера элементарной ячейки голубой фазы. При попытке растянуть (сжать) решетку вдоль выделенного направления ячейка претерпевает однородное растяжение (сжатие): коэффициент Пуассона $\nu = -1$. При этом система по-прежнему сохраняет анизотропную упругость, характеризующую модулями сдвига

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{1}{4}(1 - \mathfrak{A})\kappa^2\eta\langle k^2 \rangle X^2, \\ G_2 &= \frac{1}{6}\mathfrak{A}\kappa^2\eta\langle k^2 \rangle X^2. \end{aligned} \quad (92)$$

Проведенное в данной работе теоретическое изучение упругих модулей голубых фаз холестерических ЖК со слабой киральностью можно рассматривать как необходимый шаг для дальнейшего изучения других физических свойств — упругооптических, электрооптических, упругоэлектрических, — важных для практических применений. Все эти свойства могут быть единым образом исследованы в рамках использованной здесь теории Ландау—де Жена.

Благодарности. Авторы признательны М. В. Горкунову, Е. И. Демихову, П. В. Долганову, В. К. Долганову и Е. И. Кацу за критические замечания и полезные обсуждения, а также А. В. Мамоновой за помощь в компьютерных расчетах.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 23-12-00200.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Беляков, В. Е. Дмитриенко, *Голубая фаза жидких кристаллов*, УФН **146**, 369 (1985) [V. A. Belyakov and V. E. Dmitrienko, *The Blue Phase of Liquid Crystals*, Sov. Phys. Usp. **28**, 535 (1985)].
2. D. C. Wright and N. D. Mermin, *Crystalline Liquids: The Blue Phases*, Rev. Mod. Phys. **61**, 385 (1989).
3. P. P. Crooker, *The Blue Phases. A Review of Experiments*, Liq. Cryst. **5**, 751 (1989).
4. P. Oswald and P. Pieranski, *Nematic and Cholesteric Liquid Crystals: Concepts and Physical Properties Illustrated by Experiments*, Boca Raton: CRC Press (Taylor & Francis) (2005).
5. P. J. Collings, *The Structures of the Blue Phases*. (Ch. 18 in *Handbook of liquid crystals*, Eds. J. W. Goodby et al.), Wiley-VCH (2014).
6. H. F. Gleeson, R. J. Miller, L. Tian, V. Gortz, and J. W. Goodby, *Liquid Crystal Blue Phases: Stability, Field Effects and Alignment*, Liq. Cryst. **42**, 760 (2015).
7. J.-S. Wu and I. I. Smalyukh, *Hopfions, Heliknotons, Skyrmions, Torons and both Abelian and Nonabelian Vortices in Chiral Liquid Crystals*, Liq. Cryst. Rev. **10**, 34 (2022).
8. L. Tubiana, G. P. Alexander, A. Barbensi et al., *Topology in Soft and Biological Matter*, Phys. Rep. **1075**, 1 (2024).
9. С. А. Бразовский, С. Г. Дмитриев, *Фазовые переходы в холестерических жидких кристаллах*, ЖЭТФ **69**, 979 (1975) [S. A. Brazovskii and S. G. Dmitriev, *Phase Transitions in Cholesteric Liquid Crystals*, Sov. Phys. JETP **42**, 497 (1975)].
10. С. А. Бразовский, В. М. Филёв, *Критические явления в холестерических жидких кристаллах*, ЖЭТФ **75**, 1140 (1978) [S. A. Brazovsky and V. M. Filyev, *Critical Phenomena in Cholesteric Liquid Crystals*, Sov. Phys. JETP **48**, 573 (1978)].
11. H. Grebel, R. M. Hornreich, and S. Shtrikman, *Landau Theory of Cholesteric Blue Phases*, Phys. Rev. A **28**, 1114 (1983).
12. E. I. Kats, V. V. Lebedev, and A. R. Muratov, *Weak Crystallization Theory*, Phys. Rep. **228**, 1 (1993).

13. С. М. Стишов, А. Е. Петрова, *Термодинамические, упругие и электронные свойства веществ с киральной кристаллической структурой: MnSi, FeSi и CoSi*, УФН **193**, 614 (2023) [S. M. Stishov and A. E. Petrova, *Thermodynamic, Elastic, and Electronic Properties of Substances with a Chiral Crystal Structure: MnSi, FeSi, and CoSi*, Phys. Usp. **66**, 576 (2023)].
14. P. V. Dolganov, K. D. Baklanova, and V. K. Dolganov, *Peculiarities of Focal Conic Structure Formed Near the Cholesteric-Isotropic Phase Transition*, Phys. Rev. E **196**, 014703 (2022).
15. К. Д. Бакланова, В. К. Долганов, Е. И. Кац, П. В. Долганов, *Последовательность трехмерных (3D), двумерных (2D) и одномерных (1D) структур, образующихся из холестерического жидкого кристалла при изменении хиральности*, Письма в ЖЭТФ **117**, 537 (2023) [K. D. Baklanova, V. K. Dolganov, E. I. Kats, and P. V. Dolganov, *Sequence of Three-, Two-, and One-Dimensional Structures Formed from a Cholesteric Liquid Crystal at Change in the Chirality*, JETP Lett. **117**, 535 (2023)].
16. N. A. Clark, S. T. Vohra, and M. A. Handschy, *Elastic Resonance of a Liquid-Crystal Blue Phase*, Phys. Rev. Lett. **52**, 57 (1984).
17. P. E. Cladis, P. Pieranski, and M. Joanicot, *Elasticity of Blue Phase I of Cholesteric Liquid Crystals*, Phys. Rev. Lett. **52**, 542 (1984).
18. R. N. Kleiman, D. J. Bishop, R. Pindak, and P. Taborek, *Shear Modulus and Specific Heat of the Liquid-Crystal Blue Phases*, Phys. Rev. Lett. **53**, 2137 (1984).
19. В. А. Кизель, В. В. Прохоров, *Структура голубых фаз холестерических жидких кристаллов*, ЖЭТФ **87**, 450 (1984) [V. A. Kizel' and V. V. Prokhorov, *Structure of the Blue Phases of Cholesteric Liquid Crystals*, Sov. Phys. JETP **60**, 257 (1984)].
20. Е. И. Демихов, В. К. Долганов, С. П. Крылова, *Дифракция света в упорядоченных и разупорядоченных структурах жидкокристаллических голубых фаз*, ЖЭТФ **93**, 1750 (1987) [E. I. Demikhov, V. K. Dolganov, and S. P. Krylova, *Diffraction of Light in Ordered and Disordered Structures of Liquid-Crystal Blue Phases*, Sov. Phys. JETP **66**, 998 (1987)].
21. E. I. Demikhov and V. K. Dolganov, *The Structure Investigations of the Fog Phase (BPIII) of Liquid Crystals*, Nuovo Cimento D **12**, 1335 (1990).
22. E. Demikhov, H. Stegemeyer, and V. Tsukruk, *Pretransitional Phenomena and Pinning in Liquid-Crystalline Blue Phases*, Phys. Rev. A **46**, 4879 (1992).
23. В. А. Беяков, Е. И. Демихов, В. Е. Дмитриенко, В. К. Долганов, *Оптическая активность, спектры пропускания и структура голубых фаз жидких кристаллов*, ЖЭТФ **89**, 2035 (1985) [V. A. Belyakov, E. I. Demikhov, V. E. Dmitrienko, and V. K. Dolganov, *Optical Activity, Transmission Spectra, and Structure of Blue Phases of Liquid Crystals*, Sov. Phys. JETP **62**, 1173 (1985)].
24. M. D. A. Rahman, S. M. Said, and S. Balamurugan, *Blue Phase Liquid Crystal: Strategies for Phase Stabilization and Device Development*, Sci. Technol. Adv. Mater. **16**, 033501 (2015).
25. S. Khosla, S. Lal, and A. Devi, *Review of Blue Phase Liquid Crystal Devices*, AIP Conf. Proc. **2352**, 020037 (2020).
26. K. Bagchi, T. Emeršič, J. A. Martínez-González, J. J. de Pablo, and P. F. Nealey, *Functional Soft Materials from Blue Phase Liquid Crystals*, Sci. Adv. **9**, eadh9393 (2020).
27. В. А. Чижииков, А. В. Мамонова, В. Е. Дмитриенко, *Решеточная упругость голубых фаз холестерических жидких кристаллов*, ЖЭТФ **166**, 900 (2024) [V. A. Chizhikov, A. V. Mamonova, and V. E. Dmitrienko, *Lattice Elasticity of Blue Phases in Cholesteric Liquid Crystals*, JETP **166**, 879 (2024)].
28. В. Е. Дмитриенко, *Голубая фаза жидких кристаллов: рассеяние света и модули упругости*, Письма в ЖЭТФ **43**, 324 (1986) [V. E. Dmitrienko, *Blue Phase of Liquid Crystals: Light Scattering and Elastic Moduli*, JETP Lett. **43**, 419 (1986)].
29. Xin Ren, Raj Das, Phuong Tran, Tuan Duc Ngo, and Yi Min Xie, *Auxetic Metamaterials and Structures: A Review*, Smart Mater. Struct. **27**, 023001 (2018).
30. Р. В. Гольдштейн, В. А. Городцов, Д. С. Лисовенко, М. А. Волков, *Отрицательный коэффициент Пуассона для кубических кристаллов и нано/микроотрбук*, Физическая мезомеханика **16**, 13 (2013) [R. V. Goldstein, V. A. Gorodtsov, D. S. Lisovenko, and M. A. Volkov, *Negative Poisson's Ratio for Cubic Crystals and Nano/Microtubes*, Phys. Mesomech. **17**, 97 (2014)].