

СКАЛЯРНО-ГРАВИТАЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И ЕЕ АСТРОФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Ю. Г. Игнатьев*

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт физики
420008, Казань, Россия

Поступила в редакцию 1 сентября 2025 г.,
после переработки 23 сентября 2025 г.
Принята к публикации 27 сентября 2025 г.

Исследована эволюция малых неоднородных сферически-симметричных возмущений космологической модели, основанной на скалярно заряженной идеальной жидкости и скалярном поле Хиггса. В неустойчивых точках фоновой модели неустойчивыми становятся и возмущения скалярного поля, в отличие от продольных гравитационных возмущений. Возмущения растут экспоненциально быстро и их характер существенно зависит от фактора скалярного заряда жидкости. В случае скалярно нейтральной жидкости в определенном секторе масс бозонов возмущения в форме стоячих волн растут экспоненциально быстро и неограниченно. В случае же скалярно заряженной жидкости возмущения в форме стоячих колебаний растут до определенного момента времени, после которого принимают форму растущих волн, бегущих к центру возмущения. Оценена возможность нелинейной генерации продольных гравитационных возмущений быстро растущими возмущениями скалярного поля и приведены оценки масс сформированных возмущениями черных дыр.

DOI: 10.7868/S3034641X25110059

1. ВВЕДЕНИЕ

Статья посвящена теоретической проблеме раннего образования¹⁾ сверхмассивных черных дыр (supermassive black holes, SMBH), $\sim 10^9 M_\odot$, в центрах квазаров и их зародышей (seeds of supermassive black holes, SSBH) [1, 2]:

$$m_{SSBH} \sim 10^4 \div 10^6 M_\odot \approx 10^{42} \div 10^{44} m_{Pl}. \quad (1)$$

В последние годы было подтверждено существование SMBH с массами в диапазоне $10^9 \div 10^{11} M_\odot$ в центрах галактик и квазаров (см., например, [3, 4]). SMBH с массой порядка $10^9 M_\odot$ являются центральными объектами светящихся квазаров, наблюдаемых при красных смещениях $z > 6$. В настоящее время открыты сотни квазаров с $z > 6$ и десяток объектов с $z > 7$, причем благодаря стремительному расширению наблюдательных возможностей внегалактической астрономии в последние 5–7 лет чис-

ло обнаруженных SMBH также стремительно увеличивается. Уже обнаружено более 200 квазаров при красных смещениях $z > 6$ [5]. Самый далекий из открытых в настоящее время квазаров с массой центральной SMBH $10^7 M_\odot$ обнаружен при $z = 8.68$ [6], квазар с красным смещением $z = 7.642$ имеет абсолютную светимость $1.4 \cdot 10^{47}$ эрг/с и массу центральной черной дыры $1.6 \pm 0.4 \cdot 10^9 M_\odot$ [7, 8]. Астрофизическое происхождение таких SMBH в ранней Вселенной остается до сих пор недостаточно понятным, так как наблюдательные данные приводят к вопросу о механизме образования и быстрого и устойчивого роста таких объектов в ранней Вселенной. Недавнее открытие излучения квазара со светимостью $10^{14} S_\odot$ и массой $10^{10} M_\odot$ в начале 2024 г. [9], излучение которого формируется в аккреционном диске диаметром 7 световых лет, подталкивает исследователей к построению адекватной модели образования ранних сверхмассивных черных дыр.

Результаты численного моделирования [10] налагают ряд ограничений на параметры образования SMBH. Легкие зародыши черных дыр с массой $M \leq 10^3 M_\odot$ даже при сверхкритической аккреции не могут вырасти до масс порядка $10^8 M_\odot$ при $z = 6$. Для образования SMBH с массами

* E-mail: yurii.ignatjev.1947@yandex.ru

¹⁾ То есть при возрасте Вселенной менее одного миллиарда лет, $z \gtrsim 6$.

$10^8 \div 10^9 M_\odot$ необходимы более тяжелые зародыши SSBH $M_{SSBH} \sim 10^4 \div 10^6 M_\odot$ и богатые газом галактики, содержащие квазары. В настоящее время существует несколько теоретических сценариев образования легких зародышей с $10^2 \div 10^3 M_\odot$ при $z > 20$, последующего образования средней черной дыры путем столкновения легких зародышей и последующей газовой аккреции на SSBH средней массы для образования уже зародыша SSBH требуемой массы $10^6 M_\odot$ (1). Таким образом, в существующих моделях образование зародышей (SSBH) проходит в три этапа: образование звездоподобного легкого зародыша, образование среднего зародыша — черной дыры с помощью механизмов звездной динамики, холодная аккреция пыли на образованную черную дыру. Другие механизмы образования SSBH, в том числе и экзотические, рассмотрены в работе [11], в [12] рассмотрена модель образования SSBH в ходе фазовых хромодинамических переходов.

Заметим, что в трехэтапных сценариях образования SSBH необходимо еще оценить вероятность образования SSBH в ходе реализации указанных этапов и сравнить полученный результат с наблюдаемой концентрацией SMBH. На наш взгляд, огромное (и все растущее) наблюдаемое количество SMBH свидетельствует не о случайном, а о закономерном характере их рождения в процессе космологической эволюции. Поэтому необходимо, как и в случае построения теории образования крупномасштабной структуры Вселенной, искать механизмы прямого образования SMBH. Стандартная теория образования крупномасштабной структуры Вселенной [13, 14] основывается на теории Лифшица [15, 16] гравитационной устойчивости изотропной Вселенной, заполненной нерелятивистской идеальной жидкостью (пылью). Эта теория описывает гравитационную неустойчивость нерелятивистской изотропной однородной жидкости, приводящей к росту продольных коротковолновых гравитационных возмущений со временем по степенному закону [17]:

$$h_\alpha^\beta \sim \frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} \sim t^{2/3}. \quad (2)$$

Степенной закон роста возмущений (2) не позволяет за столь короткий отрезок космологического времени t_g вырасти гравитационным возмущениям до величин, обеспечивающих наблюдаемые массы SMBH²⁾ [10]. Для обеспечения раннего образования SMBH в результате развития гравитационных

возмущений необходима экспоненциальная скорость роста возмущений.

Таким образом, стандартные механизмы гидродинамической и газовой гравитационной неустойчивости [15–17] не способны обеспечить столь быстрый рост неустойчивых масс. Указанная проблема достаточно подробно рассмотрена в статьях [18–23]. Интерес к механизмам образования SMBH с учетом факта доминирующего присутствия их в составе квазаров вызван, в частности, тем обстоятельством, что такие черные дыры формируются в составе квазаров на достаточно ранних стадиях эволюции Вселенной, до образования звезд. Это обстоятельство, в частности, открывает возможность формирования SSBH в условиях, когда существенное влияние на этот процесс могут оказать скалярные поля и барионная темная материя. Численное моделирование в [10] было проведено в рамках стандартной модели газовой аккреции, не учитывающей возможное влияние скалярных полей на процесс образования черных дыр. В работах [18, 19] отмечено, что столь раннее образование SSBH, когда существенное влияние на космологические процессы могут оказывать скалярные поля, приводит к необходимости учета взаимодействия скалярно заряженной³⁾ материи со скалярными полями в теории гравитационной неустойчивости.

В связи с указанной проблемой в [24] построена теория плоских, а в [25] — сферических возмущений в космологической среде скалярно нейтральной идеальной жидкости с хиггсовым взаимодействием. При этом, в отличие от предыдущих работ (см., например, [23]) в работах [24, 25] рассматривалась феноменологическая модель скалярно заряженной идеальной жидкости, отражающая основные черты строгой динамической модели. Применение этой модели позволило, во-первых, значительно упростить ее численное интегрирование, а во-вторых, — провести аналитическое исследование ряда ее свойств, в частности, аналитически исследовать гравитационную неустойчивость космологической системы скалярно нейтральной жидкости со скалярным полем Хиггса и сравнить результаты с результатами более ранней работы Зельдовича, Маломеда и Хлопова [26].

Не ставя цели построения теории образования SMBH в ранней Вселенной, в настоящей статье мы сосредоточим внимание на описании теоретической модели возможного прямого механизма

²⁾ Пылевая аккреция даже в экзотических условиях приводит к массам на 6 порядков меньше требуемых.

³⁾ То же, что электрически заряженная, т.е. обладающая зарядом по отношению к скалярному полю.

обеспечения экспоненциального роста возмущений в космологической скалярно доминирующей среде. Таким образом, целями данной статьи является, во-первых, построение математической модели эволюции сферически-симметричных скалярно-гравитационных возмущений в среде как скалярно нейтральной, так и скалярно заряженной идеальной жидкости, во-вторых, исследование наиболее общих свойств этой модели как качественных, так и асимптотических, и выявление и изучение неустойчивых экспоненциально растущих мод возмущений, необходимых для формирования SSBH.

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

2.1. Самосогласованная система уравнений

Рассмотрим феноменологическую модель материи, основанной на классическом поле Хиггса Φ и идеальной заряженной жидкости, предложенную в [24]. Функция Лагранжа L_s скалярного поля Хиггса Φ есть⁴⁾

$$L_s = \frac{1}{16\pi}(g^{ik}\Phi_{,i}\Phi_{,k} - 2V(\Phi)), \quad (3)$$

где

$$V(\Phi) = -\frac{\alpha}{4}\left(\Phi^2 - \frac{m^2}{\alpha}\right)^2 \quad (4)$$

— потенциальная энергия скалярного поля, α — константа самодействия, m — масса квантов. Компоненты тензора энергии-импульса (ТЭИ) скалярных полей относительно функции Лагранжа (3) равны

$$S_k^i = \frac{1}{8\pi}\left(\Phi^{,i}\Phi_{,k} - \frac{1}{2}\delta_k^i\Phi_{,j}\Phi^{,j} + V(\Phi)\delta_k^i\right). \quad (5)$$

Далее, ТЭИ идеальной жидкости равен

$$T_k^i = (\varepsilon + p)u^i u_k - \delta_k^i p, \quad (6)$$

где u^i — единичный времениподобный вектор динамической скорости жидкости,

$$(u, u) = 1. \quad (7)$$

Вариацией L_s (3) по скалярному полю получаем описывающее его уравнение:

$$\Delta\Phi + V'_\Phi = -8\pi\sigma \Rightarrow \Delta\Phi + \Phi(m^2 - \alpha\Phi^2) = -8\pi\sigma, \quad (8)$$

⁴⁾ Здесь и далее латинские буквы пробегает значения $\overline{1}, 4$, греческие — $\overline{1}, 3$. Используется планковская система единиц $G = c = \hbar = 1$.

где σ — плотность скалярного заряда⁵⁾. Уравнения Эйнштейна для системы «скалярное поле+идеальная жидкость» имеют вид

$$R_k^i - \frac{1}{2}\delta_k^i R = 8\pi(T_k^i + S_k^i) + \delta_k^i \Lambda_0, \quad (9)$$

где Λ_0 — затравочное значение космологической постоянной, связанное с ее наблюдаемым значением Λ , получающимся при изъятии постоянного слагаемого в потенциальной энергии, соотношением

$$\Lambda = \Lambda_0 - \frac{m^4}{4\alpha}, \quad \Lambda \leq \Lambda_0. \quad (10)$$

Вследствие уравнений поля (8) и уравнений Эйнштейна (9) выполняются законы сохранения энергии-импульса системы:

$$\nabla_k T^{ik} = 0. \quad (11)$$

2.2. Фоновое состояние

В качестве фоновой рассмотрим пространственно плоскую метрику Фридмана

$$ds_0^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \equiv dt^2 - a^2(t)[dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)], \quad (12)$$

а в качестве фонового решения — однородное изотропное распределение материи, в котором все гидродинамические функции и скалярное поле зависят только от космологического времени t :

$$\Phi = \Phi(t), \quad \varepsilon = \varepsilon(t), \quad p = p(t), \quad u^i = u^i(t). \quad (13)$$

Подстановка

$$u^i = \delta_4^i \quad (14)$$

сводит (11) к одному уравнению⁶⁾

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon + p) = 0. \quad (15)$$

При этом ТЭИ скалярного поля в фоновом состоянии также принимает вид ТЭИ идеальной изотропной жидкости:

$$S_\beta^{(0)\beta} = -\frac{1}{16\pi a^2}\dot{\Phi}_0^2 - \frac{\alpha}{32\pi}\left(\Phi_0^2 - \frac{m^2}{\alpha}\right)^2 \stackrel{def}{=} -p_s, \quad (16)$$

$$S_4^{(0)4} = \frac{1}{16\pi a^2}\dot{\Phi}_0^2 - \frac{\alpha}{32\pi}\left(\Phi_0^2 - \frac{m^2}{\alpha}\right)^2 \stackrel{def}{=} \varepsilon_s,$$

⁵⁾ В [27] показано, как макроскопические уравнения получаются из микроскопической динамики в самом общем случае, в том числе для системы частиц, обладающих скалярными зарядами.

⁶⁾ Здесь и далее $\dot{f} = df/dt$, $f' = df/dr$.

так что

$$\varepsilon_s + p_s = \frac{1}{8\pi} \dot{\Phi}^2. \quad (17)$$

Заметим, что в исследуемой модели для суммарных плотности энергии $\varepsilon + \varepsilon_f$ и давления $p + p_f$ всегда выполняется изотропное условие энергодоминантности, вследствие чего в такой модели не существуют космологические отскоки [28].

Уравнение фонового скалярного поля (8) в метрике Фридмана принимает вид

$$\ddot{\Phi} + \frac{3}{a} \dot{a} \dot{\Phi} + m_0^2 \Phi - \alpha \Phi^3 = -8\pi\sigma. \quad (18)$$

Таким образом, получим систему фоновых уравнений космологической модели **S** на основе скалярного поля и идеальной жидкости (см. [24]):

$$\dot{\xi} = H, \quad (19)$$

$$\dot{\Phi} = Z, \quad (20)$$

$$\dot{H} = -\frac{Z^2}{2} - 4\pi(\varepsilon + p), \quad (21)$$

$$\dot{Z} = -3HZ - \Phi(m^2 - \alpha\Phi^2) - 8\pi\sigma, \quad (22)$$

$$\dot{\varepsilon} = -3(\varepsilon + p)H, \quad (23)$$

где введен параметр Хаббла $H(t)$:

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \equiv \dot{\xi}. \quad (24)$$

При этом уравнение Эйнштейна $\frac{4}{4}$, являющееся первым интегралом системы (19)–(23) с нулевым значением константы, принимает вид

$$3H^2 - \frac{Z^2}{2} - 8\pi\varepsilon + \frac{\alpha}{4} \left(\Phi^2 - \frac{m^2}{\alpha} \right)^2 - \Lambda_0 = 0. \quad (25)$$

Уравнение (25) описывает гиперповерхность в четырехмерном фазовом пространстве $\mathbb{R}_4 = \{H, \Phi, Z, \varepsilon\}$ динамической системы **S**₄⁽⁰⁾, соответствующую автономной системе уравнений (20)–(23), которую, следуя [29], будем называть гиперповерхностью Эйнштейна–Хиггса. Таким образом, каждой космологической модели соответствует одна линия на гиперповерхности Эйнштейна–Хиггса.

Система динамических уравнений (19)–(23) не является полной до тех пор, пока не установлены связи между давлением p , плотностью скалярного заряда σ и плотностью энергии ε идеальной жидкости. В [27] на основе микроскопической динамики скалярно заряженных частиц получены общие выражения для макроскопических скаляров σ , p и ε , в частности, в явном алгебраическом виде для полностью вырожденной ферми-системы скалярно заряженных частиц (модель **S**). В [24, 25] показано,

как можно построить простую модель **S** скалярно заряженной жидкости, удовлетворяющую предельным соотношениям точной модели **S** в случае достаточно малых скалярных зарядов q :

$$e^2 \Phi^2 \ll 1 : \sigma \simeq e^2 \Phi \varepsilon, \quad p \simeq \frac{1}{3} \varepsilon (1 - e^2 \Phi^2), \quad (26)$$

где $e^2 \equiv q^2 \beta^2 \geq 0$ — безразмерный параметр, пропорциональный квадрату скалярного заряда частиц, β^2 — параметр, зависящий от функции распределения частиц. Как можно видеть, даже в случае малых зарядов линейная связь между давлением и плотностью энергии отсутствует. Причиной этому является прямое влияние скалярного поля на динамическую массу скалярного заряда. Лишь в самом предельном случае $e \rightarrow 0$ скалярный потенциал выпадает из связи (26), что приводит к ультрарелятивистскому уравнению состояния $p \rightarrow \varepsilon/3$.

Наряду с этой моделью **S** мы будем рассматривать модель **S**⁽⁰⁾ на основе нейтральной жидкости, полагая $\sigma = 0$, $p = k\varepsilon$, а также и скалярно-вакуумную модель **S**⁽⁰⁰⁾. Фоновая система динамических уравнений для модели **S**⁽⁰⁰⁾ получается из системы (19)–(23) предельным переходом $\varepsilon \equiv 0$. Качественный анализ фоновых систем и их численное моделирование проведены в [24]. Координаты особых точек и их характеры для всех космологических моделей, основанных на моделях **S**, **S**⁽⁰⁾ и **S**⁽⁰⁰⁾, совпадают [30]. Отметим общее предельное свойство макроскопических скаляров σ и p , вытекающее из (26):

$$\sigma|_{\varepsilon \rightarrow 0} \rightarrow 0, \quad p|_{\varepsilon \rightarrow 0} \rightarrow 0. \quad (27)$$

2.3. Особые точки динамической системы

Особые точки динамической системы **S**₅, (19)–(23), и их характеры существенным образом определяют поведение неоднородных возмущений космологической модели. Координаты особых точек автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений определяются равенством нулю их правых частей [31]. Система **S**₅ содержит автономную подсистему **S**₄, (20)–(23), исследование которой не требует привлечения специальных средств, связанных с вырождением матрицы системы. По этой же причине следует подставить значение $-Z^2/2$ из первого интеграла (25) в уравнение (21). Из подсистемы **S**₄ найдем алгебраические уравнения для определения координат особых точек в фазовом подпространстве $\mathbb{R}_4 = \{H, \Phi, Z, \varepsilon\}$:

$$Z = 0, \quad \varepsilon + p = 0, \quad \Phi(m^2 - \alpha\Phi^2) = 0. \quad (28)$$

Вследствие (27) и (28) в особых точках M_s динамической системы $\mathbf{S}_4$ выполняются условия

$$\varepsilon_s = 0, p_s = 0, \sigma_s = 0. \quad (29)$$

Фазовые траектории динамической системы стремятся к особым точкам в бесконечном будущем или в бесконечном прошлом [31]. Поэтому соотношения (29) необходимо понимать как асимптотические при $t \rightarrow \pm\infty$. Подстановка решений алгебраических уравнений (28), (29) в интеграл (25) дает значение $H = H_s$ в особой точке:

$$H_s = \pm \sqrt{\frac{\Lambda_s}{3}}, \quad \Lambda_s \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda_0 - \frac{\alpha}{4} \left(\Phi_s^2 - \frac{m^2}{\alpha} \right)^2. \quad (30)$$

Таким образом, особые точки динамической системы $\mathbf{S}_4$ совпадают с особыми точками скалярно-вакуумной динамической системы $\mathbf{S}^{(00)}$ [30]:

$$M_0 = [H_0, 0, 0, 0], \quad M_s = [H_s, \Phi_s, 0, 0]. \quad (31)$$

Для существования особых точек (31) необходима вещественность H_s , т. е.

$$\Lambda_s = \Lambda_0 - \frac{\alpha}{4} \left(\Phi_s^2 - \frac{m^2}{\alpha} \right)^2 \geq 0. \quad (32)$$

Из (30) следует, что

$$\Lambda_s \leq \Lambda_0. \quad (33)$$

2.4. Асимптотическое поведение модели

Качественный анализ динамической системы $\mathbf{S}_4$ [24] приводит к следующим собственным значениям λ_a характеристической матрицы в особых точках:

$$\lambda(M_0) = \left[\mp 6\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}, \mp 4\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}, \mp \frac{\sqrt{3\Lambda}}{2} \pm \frac{\sqrt{3\Lambda - 4m^2}}{2} \right], \quad (34)$$

$$\lambda(M_s) = \left[\mp 6\sqrt{\frac{\Lambda_0}{3}}, \pm \left(4 - \frac{e^2 m^2}{\alpha} \right) \sqrt{\frac{\Lambda_0}{3}}, \mp \frac{\sqrt{3\Lambda_0}}{2} \pm \frac{\sqrt{3\Lambda_0 + 8m^2}}{2} \right], \quad (35)$$

где знаки принимают независимые друг от друга значения. Таким образом, все особые точки M_s являются седловыми, т. е. неустойчивыми. Единственная точка M_0 при условии

$$3\Lambda - 4m^2 < 0 \quad (36)$$

является притягивающим фокусом, т. е. условно устойчивой точкой по отношению к данной моде.

Координаты особых точек $M(H_s, \Phi_s, Z_s, \varepsilon_s)$ фоновой динамической системы (20)–(23) равны (см. [24])

$$\begin{aligned} M_0^\pm &= \left[\pm \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}, 0, 0, 0 \right], \\ M_\pm^\pm &= \left[\pm \sqrt{\frac{\Lambda_0}{3}}, \pm \frac{m}{\sqrt{\alpha}}, 0, 0 \right], \end{aligned} \quad (37)$$

где космологические постоянные Λ и Λ_0 связаны соотношением (10), причем всегда $\Lambda < \Lambda_0$.

При выполнении условия (28) фоновые уравнения гравитационного и скалярного полей сводятся к единственному нетривиальному уравнению Эйнштейна (25):

$$\Phi_s = 0 \Rightarrow \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\Lambda}{3}, \quad \Phi_s = \pm \frac{m}{\sqrt{\alpha}} \Rightarrow \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\Lambda_0}{3}. \quad (38)$$

Отсюда получаем известные инфляционные решения для масштабного фактора (см., например, [14]), обусловленные значениями космологической постоянной:

$$a(t) = e^{\pm H_s t} : \quad \Phi_s = 0 \Rightarrow H_s = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}, \quad (39)$$

$$\Phi_s = \pm \frac{m}{\sqrt{\alpha}} \Rightarrow H_s = \sqrt{\frac{\Lambda_0}{3}}. \quad (40)$$

Особые точки динамической системы представляют ее точные решения. В случае притягивающей особой точки это решение является устойчивым, а в случае седловой или отталкивающей — точное решение неустойчиво. Таким образом, инфляционное решение (39) устойчиво, а инфляционное решение (40) неустойчиво. Будем называть эти решения устойчивой и неустойчивой инфляцией соответственно. Если космологическая модель находится в состоянии неустойчивой инфляции, то через некоторое время Δt_{in} она перейдет в состояние устойчивой инфляции с меньшим значением постоянной Хаббла. Поскольку асимптотические вблизи особых точек решения имеют временную зависимость, пропорциональную $\sum_a \exp(\lambda_a t)$, время жизни неустойчивой инфляции можно оценить как

$$\Delta t_{in} \simeq |\max(\text{Re} \lambda_a)|^{-1}, \quad (41)$$

где λ_a — собственное значение матрицы динамической системы для неустойчивой моды.

2.5. Масштабные преобразования модели

Конкретная фоновая модель $\mathbf{S}_5$, (19)–(23), определяется, во-первых, фундаментальными физиче-

скими параметрами, которые будем задавать упорядоченным списком

$$\mathbf{P} = [\alpha, m, e, \Lambda_0], \quad (42)$$

и, во-вторых, начальными условиями в виде упорядоченного списка значений координат фазового пространства в нулевой момент космологического времени $t_0 = 0$: $\{\xi(0), H(0), \Phi(0), Z(0), \varepsilon(0)\}$, который с учетом первого интеграла (25) и автономности динамической системы $\mathbf{S}_5$ всегда можно свести к списку трех величин

$$\mathbf{I} = [\Phi_0, Z_0, \varepsilon_0, \varkappa], \quad (43)$$

где по умолчанию $\xi(0) = 0$, а $\varkappa = \pm 1$ — знак решения уравнения (25) относительно H в точке $t = 0$.

При анализе численных решений динамической системы $\mathbf{S}_5$ важное значение имеет ее следующее свойство, доказанное в работе [30].⁷⁾

Свойство 1 ■ Полная система уравнений математической модели $\mathbf{S}_5$, (19)–(23), инвариантна по отношению к одновременным масштабным преобразованиям с коэффициентом подобия $\ell = \text{const} > 0$ фундаментальных параметров (44) и фазовых координат (45) модели:

$$\mathcal{S}_\ell(\mathbf{S}_5) : \alpha = \ell^2 \tilde{\alpha}, m = \ell \tilde{m}, e = \sqrt{\ell} \tilde{e}, \Lambda_0 = \ell^2 \tilde{\Lambda}_0, \quad (44)$$

$$x^i = \ell^{-1} \tilde{x}^i, \Phi = \tilde{\Phi}, Z = \ell \tilde{Z}, H = \ell \tilde{H}, \varepsilon = \ell^2 \tilde{\varepsilon}. \quad (45)$$

Таким образом, при масштабных преобразованиях подобия (44), (45) и соответствующем преобразовании начальных условий решения уравнений исходной модели $\mathbf{S}_5$ и масштабно преобразованной модели $\tilde{\mathbf{S}}_5$ совпадают. ■

Будем называть модели, связанные подобием, подобными моделями. Свойство подобия 1 позволяет сравнивать космологические модели на различных масштабах взаимодействий:

- базовая модель на планковских масштабах $\ell = 1$ — $\mathbf{S}_{\mathbf{P}1}$:

$$\mathbf{P}_0 = [1, 1, 10^{-1}, 3], \quad t = 1, \quad (46)$$

- модель великого объединения $\ell = 10^{-4}$ — $\mathbf{S}_{\mathbf{SU}(5)}$:

$$\mathbf{P}_1 = [10^{-8}, 10^{-4}, 10^{-3}, 3 \cdot 10^{-8}], \quad t = 10^4, \quad (47)$$

- стандартная модель $\ell = 10^{-15}$ — $\mathbf{S}_{\mathbf{SM}}$:

$$\mathbf{P}_2 = [10^{-30}, 10^{-15}, 3 \cdot 10^{-9}, 3 \cdot 10^{-30}], \quad t = 10^{15}. \quad (48)$$

⁷⁾ В [30] это свойство доказано для более общей и строгой модели скалярно заряженной жидкости.

Величину скалярного заряда e , как и космологическую постоянную Λ_0 , мы будем варьировать в каждой модели. В связи с этим будем в ряде случаев рассматривать и альтернативную линейку фундаментальных параметров модели:

$$\mathbf{P}_0^* = [1, 1, 10^{-1}, 2.527 \cdot 10^{-1}], \quad (49)$$

$$\mathbf{P}_1^* = [10^{-8}, 10^{-4}, 10^{-3}, 2.527 \cdot 10^{-9}], \quad (50)$$

$$\mathbf{P}_2^* = [10^{-30}, 10^{-15}, 3 \cdot 10^{-9}, 2.527 \cdot 10^{-31}]. \quad (51)$$

Заметим, что при масштабных преобразованиях (44), (45) координаты особых точек также преобразуются по законам (45), а собственные значения матрицы динамической системы — по закону $\lambda = \ell \tilde{\lambda}$ [30].

2.6. Пример фоновой модели

Для адекватного отображения графиков с большим разбросом масштабов знакопеременных функций в дальнейшем используется масштабирующая взаимно-однозначная функция $\text{Lig}(z)$ [32]:

$$\text{Lig}(z) = \text{sgn} z \lg(1 + |z|), \quad \text{Lig}^{-1}(z) = \text{sgn}(z)(10^{|z|} - 1),$$

$$\text{Lig}(z)|_{|z| \rightarrow 0} \simeq z, \quad \text{Lig}(z)|_{|z| \rightarrow \infty} \simeq \text{sgn}(z) \lg(z).$$

Рассмотрим численный пример, демонстрирующий основные свойства модели $\mathbf{S}_5$ на масштабах порядка $\text{SU}(5)$ для набора фундаментальных параметров $\mathbf{P}_1$ (47). Согласно (30), (31) и (37) получим для этой модели

$$M_0^+ = [9.57 \cdot 10^{-5}, 0, 0, 0], \quad M_+^+ = [10^{-4}, 1, 0, 0], \quad (52)$$

где M_0^+ — устойчивая особая точка, а M_+^+ — неустойчивая. На рис. 1 показаны графики эволюции геометрических факторов $\xi(t), H(t)$ для этой модели.

Как можно видеть, во-первых, рассматриваемая модель с параметрами $\mathbf{P}_1$ имеет начальную космологическую сингулярность $\xi = -\infty$ в момент времени $t_s \approx -9766$. Во-вторых, космологическая система из начального состояния $I_1 = [1, 0, 10^{-10}, 1]$ за время порядка $t_1 \sim 10^4$ переходит в состояние неустойчивого равновесия $M_+^+(H_1 = 10^{-4}, \Phi = 1, Z = 0, \varepsilon \rightarrow 0)$, в котором задерживается на время $\Delta t_{in} \approx 3 \cdot 10^5 \div 8 \cdot 10^5$ (неустойчивая инфляция), и затем окончательно переходит в состояние устойчивого равновесия (устойчивая инфляция) $M_0^+(H_0 = 9.57 \cdot 10^{-5}, \Phi = 0, Z = 0, \varepsilon = 0)$.

В-третьих, с уменьшением величины скалярного заряда e время неустойчивой инфляции Δt_{in} растет и при

$$e \lesssim e_0 \approx 9.9 \cdot 10^{-7} \Rightarrow \Delta t_{in} = +\infty \quad (53)$$

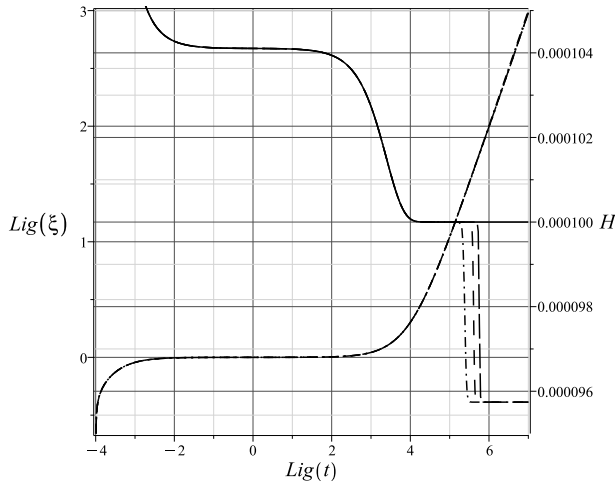


Рис. 1. Эволюция геометрических факторов $\xi(t)$ (4 линии практически сливаются) и $H(t)$ в модели $\mathbf{P}_1$: штрихпунктирная линия — $e = 10^{-2}$, штриховая — $e = 10^{-4}$, длинные штрихи — $e = 10^{-6}$, сплошная — $e \lesssim 10^{-7}$

время в данной модели $\mathbf{S}$ с параметрами $\mathbf{P}_1$ стремится к бесконечности. Таким образом, при $e < e_0$ модель $\mathbf{S}$ ведет себя как модель с ультрарелятивистской скалярно нейтральной жидкостью $\mathbf{S}$. В этом случае первая (неустойчивая) инфляция является и конечным состоянием системы [24], вторая инфляция пропадает.

3. ЛИНЕЙНЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

3.1. Сферические возмущения

Метрику с гравитационными возмущениями запишем в изотропных сферических координатах с конформно-евклидовой метрикой трехмерного пространства (см., например, [17]), допускающей непрерывный переход к метрике Фридмана (12) [25]:

$$ds^2 = e^{\nu(r,t)} dt^2 - a^2(t) e^{\lambda(r,t)} \times [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)], \quad (54)$$

где $\nu(r,t)$ и $\lambda(r,t)$ — малые продольные возмущения метрики Фридмана ($\nu \ll 1$, $\lambda \ll 1$). Далее для возмущений скалярного поля, плотности энергии и вектора скорости жидкости положим

$$\begin{aligned} \Phi(r,t) &= \Phi(t) + \phi(r,t), \quad \varepsilon(r,t) = \varepsilon(t) + \delta\varepsilon(r,t), \\ p(r,t) &= p(t) + \delta p(r,t), \quad \sigma(r,t) = \sigma(t) + \delta\sigma(r,t), \\ u^i &= e^{-\frac{1}{2}\nu(r,t)} \delta_4^i + \frac{v(r,t)}{a^2} \delta_1^i, \end{aligned} \quad (55)$$

где $\Phi(t)$, $\varepsilon(t)$ и $p(t)$ — невозмущенные (фоновые) значения соответствующих величин, а $\phi(r,t)$, $v(r,t)$ и $\delta\varepsilon(r,t)$ — их малые возмущения. Отсюда для модели $\mathbf{S}$ (26) получаем

$$\begin{aligned} \sigma &= e^2 \Phi_0 \varepsilon, \quad \delta p = \frac{1}{3} [\delta\varepsilon(1 - e^2 \Phi^2) - 2e^2 \varepsilon \Phi \phi], \\ p &= \frac{1}{3} \varepsilon(1 - e^2 \Phi^2), \quad \delta\sigma = e^2 (\phi \varepsilon + \Phi \delta\varepsilon). \end{aligned} \quad (56)$$

3.2. Уравнения для возмущений модели

3.2.1. Возмущения суммарного тензора энергии-импульса

Таким образом, отличные от нуля возмущения компонент суммарного тензора энергии-импульса имеют вид

$$\begin{aligned} 8\pi\delta(S^\beta_\beta + T^\beta_\beta) &= \\ &= \phi\Phi(m^2 - \alpha\Phi^2) - \dot{\phi}\dot{\Phi} + \frac{1}{2}\nu\dot{\Phi}^2 - 8\pi\delta p, \quad \beta = \overline{1,3}, \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} 8\pi\delta(S^4_4 + T^4_4) &= \\ &= \phi\Phi(m^2 - \alpha\Phi^2) + \dot{\phi}\dot{\Phi} - \frac{1}{2}\nu\dot{\Phi}^2 + 8\pi\delta\varepsilon, \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} 8\pi\delta(S^1_4 + T^1_4) &= \\ &= \dot{\Phi}\phi' - \nu(\varepsilon + p) \Rightarrow -\frac{1}{a^2}\delta(S^4_1 + T^4_1) = \delta(S^1_4 + T^1_4). \end{aligned} \quad (59)$$

3.2.2. Возмущенное уравнение поля

Из уравнения скалярного поля (8) получим уравнение относительно его возмущения $\phi(r,t)$:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{1}{a^2 r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} + \phi(m^2 - 3\alpha\Phi^2) + \\ + \frac{1}{2}\dot{\Phi}(3\dot{\lambda} - \dot{\nu}) + \nu(m^2\Phi - \alpha\Phi^3 + 8\pi\sigma) = -8\pi\delta\sigma. \end{aligned} \quad (60)$$

3.2.3. Возмущенные уравнения Эйнштейна

Учитывая равенство диагональных трехмерных компонент возмущенного ТЭИ (57), выпишем сначала разность диагональных уравнений Эйнштейна

$$\frac{1}{1-2} : \quad \frac{r}{2a^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\lambda + \nu) \right) = 0. \quad (61)$$

Интегрируя (61), найдем

$$\frac{\partial}{\partial r} (\lambda + \nu) = C_1 r \Rightarrow \lambda + \nu = \frac{1}{2} C_1 r^2 + C_2. \quad (62)$$

Вследствие условий перехода решений системы в фоновое решение на пространственной бесконечности должны выполняться нулевые граничные условия

$$\lambda(r, t)|_{r \rightarrow \infty} = \nu(r, t)|_{r \rightarrow \infty} = 0 = \phi(r, t)|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (63)$$

$$\lambda'(r, t)|_{r \rightarrow \infty} = \nu'(r, t)|_{r \rightarrow \infty} = 0 = \phi'(r, t)|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (64)$$

Отсюда следует, что в решении (61) должно быть $C_1 = C_2 = 0$. Таким образом,

$$\lambda(r, t) = -\nu(r, t). \quad (65)$$

Учитывая это решение, приведем уравнение поля (60) и остальные нетривиальные уравнения Эйнштейна для возмущений к виду (в левой части уравнений указаны индексы соответствующих уравнений Эйнштейна)

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} + (m^2 - 3\alpha\Phi^2)\phi - \\ - 2Z\dot{\nu} + (m^2\Phi - \alpha\Phi^3 + 8\pi e^2\Phi\varepsilon)\nu + \\ + 8\pi e^2(\Phi\delta\varepsilon + \varepsilon\phi) = 0, \end{aligned} \quad (66)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1}: \ddot{\nu} + 4H\dot{\nu} + \left(3H^2 - \frac{Z^2}{2} - \frac{8\pi}{3}\varepsilon(4 - e^2\Phi^2)\right)\nu - \\ - Z\dot{\phi} + \Phi(m^2 - \alpha\Phi^2 + \frac{16\pi e^2}{3}\varepsilon)\phi + \\ + \frac{8\pi}{3}\delta\varepsilon(1 - e^2\Phi^2) = 0, \end{aligned} \quad (67)$$

$$\begin{aligned} \frac{4}{4}: \frac{1}{a^2 r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \nu}{\partial r}\right) - 3H\dot{\nu} - Z\dot{\phi} - \\ - \left(3H^2 - \frac{1}{2}Z^2\right)\nu - \Phi(m^2 - \alpha\Phi^2)\phi = 8\pi\delta\varepsilon, \end{aligned} \quad (68)$$

$$\frac{4}{1}: \frac{8\pi}{3}\varepsilon(4 - e^2\Phi^2)\nu - (Z\phi - H\nu - \dot{\nu})' = 0. \quad (69)$$

Уравнения для возмущений модели $\mathbf{S}^{(00)}$ получаются из системы (66)–(69) подстановкой $\varepsilon = 0$, $\delta\varepsilon = 0$. Таким образом, в общем случае мы имеем четыре линейных дифференциальных уравнения относительно четырех неизвестных функций $\nu(r, t)$, $\phi(r, t)$, $\delta\varepsilon(r, t)$ и $v(r, t)$, т.е. формально полностью определенную систему уравнений. Однако не все функции находятся в одинаковых положениях. Заметим, что уравнение (69) при $\varepsilon \neq 0$ фактически является определением величины скорости вещества $v(r, t)$, а уравнение (68) — определением возмущения плотности энергии жидкости $\delta\varepsilon(r, t)$. В противном же случае — в случае отсутствия идеальной жидкости, т.е. в вакуумно-полевой модели $\mathbf{S}^{(00)}$, из (69) получаем

$$\varepsilon \equiv 0 \Rightarrow (\dot{\phi}\phi - H\nu - \dot{\nu})' = 0. \quad (70)$$

Используя эту связь в остальных уравнениях для возмущений (66)–(68), получаем три независимых линейных дифференциальных уравнения относительно одной неизвестной функции. Таким образом, в этом случае система является существенно

переопределенной и, по крайней мере формально, противоречивой.

3.2.4. Возмущенные уравнения Эйнштейна с исключенными материальными функциями

Итак, полагая $\varepsilon \neq 0$, получим из (69) определение радиальной скорости:

$$v = \frac{3}{8\pi} \frac{\partial}{\partial r} \frac{Z\phi - \dot{\nu} - H\nu}{\varepsilon(4 - e^2\Phi^2)}. \quad (71)$$

Аналогично из (68) найдем выражение для возмущения плотности энергии жидкости:

$$\begin{aligned} 8\pi\delta\varepsilon = \frac{1}{a^2} \Delta_r \nu - 3H\dot{\nu} - \left(3H^2 - \frac{Z^2}{2}\right)\nu - \\ - Z\dot{\phi} - \Phi_0(m^2 - \alpha\Phi_0)\phi, \end{aligned} \quad (72)$$

где Δ_r — радиальная часть оператора Лапласа в сферических координатах трехмерного евклидова пространства,

$$\Delta_r \phi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r}. \quad (73)$$

Подставляя (72) в правую часть уравнения (67), получим в случае

$$\varepsilon \neq 0 \quad (74)$$

систему двух однородных линейных уравнений в частных производных второго порядка типа уравнений Лифшица [15]:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{1}{a^2} \Delta_r \phi + (m^2 - 3\alpha\Phi^2)\phi - 2Z\dot{\nu} + \\ + (m^2\Phi - \alpha\Phi^3 + 8\pi e^2\Phi\varepsilon)\nu + 8\pi e^2(\Phi\delta\varepsilon + \varepsilon\phi) = 0, \quad (75) \\ \ddot{\nu} + (5 - e^2\Phi^2)H\dot{\nu} - \frac{1 - e^2\Phi^2}{3a^2} \Delta_r \nu - \frac{Z}{3}(2 - e^2\Phi^2)\dot{\phi} + \\ + \left[(4 - e^2\Phi^2)\left(H^2 - \frac{Z^2}{6}\right) - \frac{32\pi}{3}\varepsilon\right]\nu + \\ + \frac{\Phi}{3}[(4 - e^2\Phi^2)(m^2 - \alpha\Phi^2) + 16\pi\varepsilon]\phi = 0, \end{aligned} \quad (76)$$

причем в уравнение для возмущений скалярного поля (75) необходимо подставить выражение для возмущения плотности энергии жидкости (72), но мы не будем делать этого здесь, избегая слишком громоздких выражений. Итак, получаем полностью определенную систему двух однородных линейных дифференциальных уравнений в частных производных (75), (76) относительно двух функций $\phi(r, t)$ и $\nu(r, t)$. Заметим, что оба уравнения содержат оператор Лапласа. Уравнения для возмущений в модели $\mathbf{S}^{(0)}$ со скалярно нейтральной жидкостью получаются из уравнений (71), (72) и (75), (76)

при $e = 0$. Для получения уравнений возмущений скалярно-вакуумной модели $\mathbf{S}^{(00)}$ необходимо в первоначальной системе уравнений (66)–(69) положить $\varepsilon = \delta\varepsilon = 0$ и $e^2 \equiv 0$.

4. РЕШЕНИЕ В ОСОБЫХ ТОЧКАХ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

4.1. Уравнения для возмущений в окрестности особых точек

В особых точках фоновой модели с учетом условий (28) и (29) для координат особых точек система уравнений (75), (76) вырождается в систему двух независимых уравнений:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{1}{a^2}\Delta_r\phi + (m^2 - 3\alpha\Phi_s^2)\phi = 0, \quad (77)$$

$$\ddot{\nu} + (5 - e^2\Phi_s^2)H_s\dot{\nu} - \frac{1 - e^2\Phi_s^2}{3a^2}\Delta_r\nu + (4 - e^2\Phi_s^2)H_s^2\nu = 0, \quad (78)$$

в которые необходимо подставить инфляционные решения (39), (40) в особых точках фоновой модели.

4.2. Разделение переменных

Уравнения (77), (78) решаются разделением переменных. Полагая частные решения в виде

$$\phi(r, t) = \rho(r)\tau(t), \quad \nu(r, t) = R(r)T(t)$$

и проводя стандартное разделение переменных, получим из (77), (78) с учетом (39), (40):

$$\ddot{\tau} + 3H_s\dot{\tau} + \left(m^2 - 3\alpha\Phi_s^2 + n^2e^{-2H_s t}\right)\tau = 0, \quad (79)$$

$$\ddot{T} + (5 - e^2\Phi_s^2)H_s\dot{T} + \left[(4 - e^2\Phi_s^2)H_s^2 + n^2e^{-2H_s t}\right]T = 0,$$

$$\rho'' + \frac{2}{r}\rho' + n^2\rho = 0, \quad R'' + \frac{2}{r}R' + 3n^2R = 0,$$

где $-n^2$ — вообще говоря, различные константы разделения. Найдем общие решения этих уравнений:

$$\phi_n = \frac{1}{r} \exp\left(inr - \frac{3}{2}H_s t\right) \times \left[C_1 J_\gamma\left(\frac{n}{H_s}e^{-H_s t}\right) + C_2 Y_\gamma\left(\frac{n}{H_s}e^{-H_s t}\right)\right], \quad (80)$$

$$\nu_n = \frac{1}{r} \exp\left(i\frac{\sqrt{3}nr}{\sqrt{1 - e^2\Phi_s^2}} - \frac{5 - e^2\Phi_s^2}{2}H_s t\right) \times \left[\tilde{C}_1 J_\sigma\left(\frac{n}{H_s}e^{-H_s t}\right) - \tilde{C}_2 Y_\sigma\left(\frac{n}{H_s}e^{-H_s t}\right)\right], \quad (81)$$

где $C_1, C_2, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ — произвольные константы, $J_k(z)$ и $Y_k(z)$ — функции Бесселя первого и второго рода с индексом k (см., например, [33]), причем индексы функций Бесселя в (80), (81) равны

$$\gamma = -\frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{4(m^2 - 3\alpha\Phi_s^2)}{3\Lambda_s}}, \quad \sigma = -\frac{3 - e^2\Phi_s^2}{2}. \quad (82)$$

Переходя к конформной временной переменной η ,

$$ad\eta = dt \Rightarrow \eta = -\frac{1}{H_s}e^{-H_s t},$$

и распространяя значения n на всю вещественную ось $n \in (-\infty, +\infty)$, мы можем записать частные решения $\phi(r, t)$ в более компактном виде:

$$\phi_n(r, \eta) = \frac{e^{inr}}{r} (-H_s\eta)^{\frac{3}{2}} [C_n^1 J_\gamma(n\eta) + C_n^2 Y_\gamma(n\eta)]. \quad (83)$$

$$\nu_n(r, \eta) = \frac{1}{r} \exp\left(i\frac{\sqrt{3}nr}{\sqrt{1 - e^2\Phi_s^2}}\right) (-H_s\eta)^{\frac{5 - e^2\Phi_s^2}{2}} \times \\ \times [\tilde{C}_n^1 J_\sigma(n\eta) + \tilde{C}_n^2 Y_\sigma(n\eta)].$$

Общее решение определяется интегралами Фурье вида

$$\phi(r, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(r, \eta) dn.$$

На рис. 2 показаны графики эволюции действительных частей возмущения потенциала $\phi(1, t)$ и метрики $\nu(1, t)$ для значений фундаментальных параметров модели $\mathbf{S}_{\mathbf{P}_1}$: $\mathbf{P}_0$ и констант $C_1^1 = C_1^2 = 1$, $\tilde{C}_1^1 = \tilde{C}_1^2$ и $n = 1$ в неустойчивой особой точке модели $M_+^+ = [1, 1, 0, 0]$. Для этих значений параметров индексы функций Бесселя в формулах (81) и (80) равны $\sigma = -1.495$ и $\gamma = -4.5^8$. Далее, на рис. 3 показаны аналогичные графики в устойчивой особой точке модели $M_0^+ = [1, \sqrt{33}/6 \approx 0.957, 0, 0]$. Для этих значений параметров индексы функций Бесселя равны $\gamma = -3i\sqrt{55}/22$, $\sigma = -3/2$.

Переходя к анализу графиков на рис. 2, соответствующих неустойчивой точке модели M_+^+ : $\mathbf{P}_0$, заметим, во-первых, что на рисунке видны области высокочастотных колебаний скалярного поля на ранних этапах, перерастающие на поздних стадиях в гладкие кривые. Этот переход свидетельствует о трансформации бегущих волн в стоячие колебания, амплитуда которых быстро растет со временем, т. е. о развитии неустойчивости в системе. В устойчивой же точке модели M_0^+ : $\mathbf{P}_0$ колебания скалярного поля затухают со временем, как это видно из рис. 3.

⁸⁾ Графики мнимых частей возмущений практически не различаются, поэтому далее мы их не приводим.

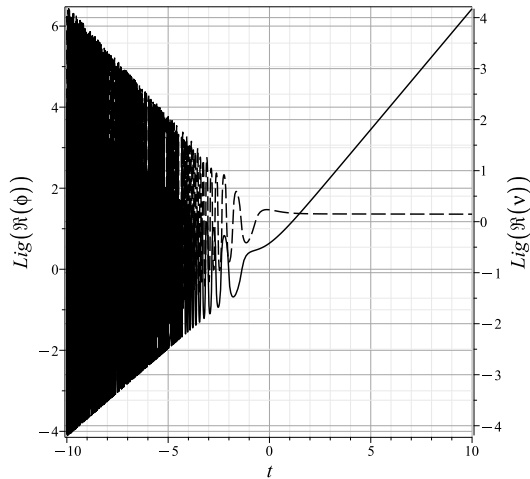


Рис. 2. Эволюция возмущений $\text{Re } \phi(1, t)$ (сплошная линия) и $\text{Re } \nu(1, t)$ (штриховая линия) в неустойчивой точке M_+^+ модели P_0

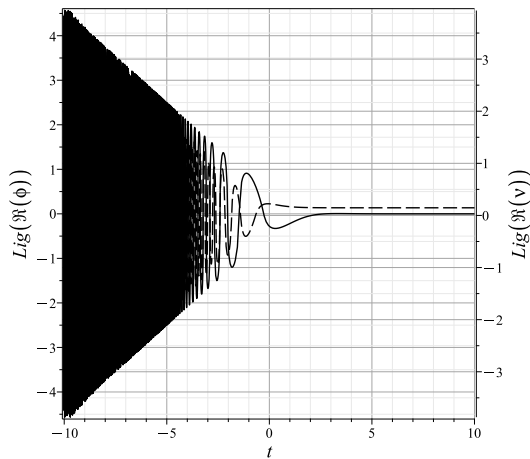


Рис. 3. Эволюция возмущений $\text{Re } \phi(1, t)$ (сплошная линия) и $\text{Re } \nu(1, t)$ (штриховая линия) в устойчивой точке M_0^+ модели P_0

На рис. 4 как раз и демонстрируется этот факт — колебания в устойчивой точке M_0^+ представляют собой затухающие радиальные волны малой амплитуды, распространяющиеся в противоположных направлениях со скоростью света $v_f = 1$. На рис. 5 показаны колебания скалярного поля в неустойчивой точке модели M_+^+ , представляющие стоячие быстро растущие колебания.

Во-вторых, можно заметить, что амплитуда возмущений скалярного поля растет в случае действительного значения индекса функции Бесселя γ (82). Выясним, каким образом значение индекса γ связа-

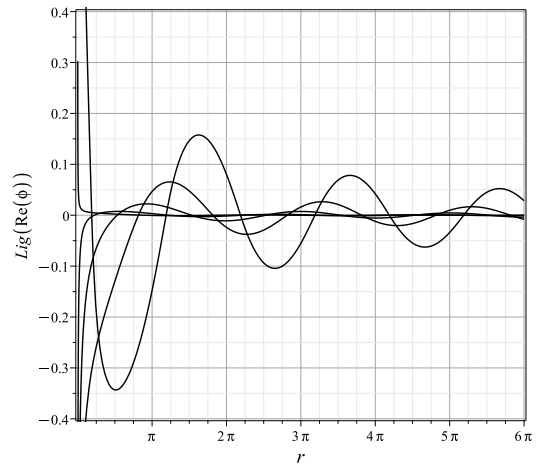


Рис. 4. Бегущие к центру затухающие колебания скалярного поля в устойчивой точке M_0^+ модели P_0 в моменты времени $t = 0, 1, 2, 3, 4$ — по уменьшению амплитуды

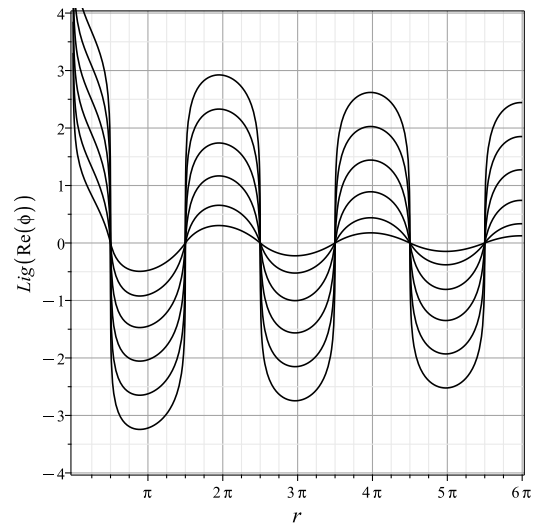


Рис. 5. Стоячие растущие колебания скалярного поля в неустойчивой точке M_+^+ модели P_0 в моменты времени $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ — по увеличению амплитуды

но с характером особой точки модели. Согласно (37) в устойчивой особой точке M_0^+ величина $\Phi_s = 0$, а в неустойчивой M_+^+ — $\Phi_s = m/\sqrt{\alpha}$. Таким образом, найдем значения γ в этих точках:

$$M_0^+ : \Phi_s = 0, \Lambda_s = \Lambda \Rightarrow \gamma = -\frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{4m^2}{3\Lambda}}, \quad (84)$$

$$M_+^+ : \Phi_s = \frac{m^2}{\alpha}, \Lambda_s = \Lambda_0 \Rightarrow \gamma = -\frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{8m^2}{3\Lambda_0}}. \quad (85)$$

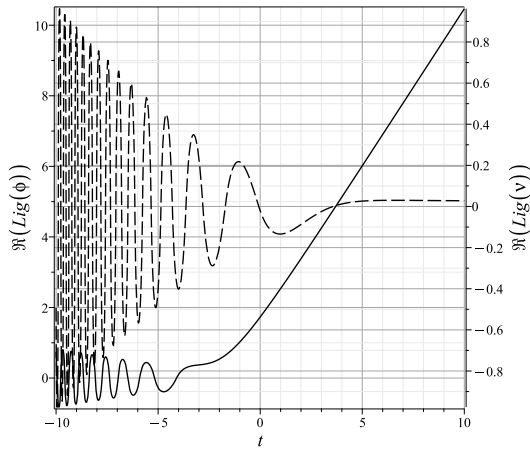


Рис. 6. Эволюция возмущений $\text{Re}\phi(1, t)$ (сплошная линия) и $\text{Re}\nu(1, t)$ (штриховая линия) в неустойчивом секторе (86) точки модели $\mathbf{P}_0^*$: M_0^+ : $\gamma \approx -5.124$

Отсюда видно, что в неустойчивой точке модели M_+^+ индекс γ всегда действителен и отрицателен, $\text{Re}\gamma < 0$, $\text{Im}\gamma = 0$. Таким образом, в неустойчивой точке M_+^+ модели $\mathbf{S}$ неустойчивы возмущения скалярного поля. Кроме того, неустойчивые моды существуют и в точке M_0^+ при неравенстве, противоположном условию (36). Для этой точки существует сектор масс бозонов, в котором γ остается действительной величиной. С учетом определения Λ (10) получим из (84) для этой области:

$$M_0^+ : \gamma^2 > 0 \Leftrightarrow \frac{3m^2}{8\alpha} < \sqrt{1 + \frac{9\Lambda_0}{16\alpha}} - 1. \quad (86)$$

Именно этой особой точке и сектору масс (86) соответствует наибольшая неустойчивость скалярного поля. На рис. 6 показана эволюция возмущений в базовой модели $\mathbf{S}_{\mathbf{P}_1}$ с параметрами $\mathbf{P}_0^*$.

В-третьих, амплитуда неустойчивых мод возмущений растет со временем не по степенному закону, как в теории гидродинамической неустойчивости Лифшица [15], а по экспоненциальному — как в теории Ляпунова. Наклонные прямые на графиках рис. 2, 6 заданы, фактически, в логарифмическом масштабе. В линейном масштабе получим экспоненциальные кривые $\phi \propto \exp(Nt)$ с $N \approx 0.5$. В точке M_0^+ модели $\mathbf{S}_{\mathbf{P}_1}$ с параметрами $\mathbf{P}_0$ возмущения скалярного поля растут по закону $\phi \simeq 56 \exp(2t)$ (см. рис. 10), т. е. с вчетверо бóльшим инкрементом роста колебаний. В дальнейшем будем называть неустойчивость в точке M_+^+ первой неустойчивостью, а неустойчивость в точке M_0^+ — второй неустойчивостью.

Фактически, неустойчивость такого типа (но не в деталях) для плоских возмущений была обнаружена сорок лет назад в забытой ныне работе Зельдовича с соавторами [26]⁹⁾ на основе простой качественной модели типа Джинса с нелинейным скалярным полем в статической Вселенной. В этой же работе было высказано предположение о формировании первичных черных дыр механизмом неустойчивости нелинейного скалярного поля. Однако не была установлена связь неустойчивости с типом инфляции (устойчивая–неустойчивая)¹⁰⁾, как это можно видеть при сравнении рис. 2, с одной стороны, и рис. 3 — с другой.

Наконец, в-четвертых, согласно формулам (82) при $\alpha = 0$ неустойчивость исчезает, поэтому механизм развития неустойчивости скалярного поля напрямую связан с самодействием скалярного поля, что было замечено и в цитированной работе [26].

5. РАЗВИТИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ: УСЛОВИЯ И ЭТАПЫ

5.1. Зависимость развития неустойчивости от типа модели

Коэффициенты метрики и потенциал скалярного поля согласно Свойству 1 инвариантны по отношению к масштабным преобразованиям фундаментальных параметров модели (44), (45). Поэтому для перехода от модели $\mathbf{S}_{\mathbf{P}_1}$ с параметрами $\mathbf{P}_0$ (46) к модели $\mathbf{S}_{\mathbf{S}_U}$ с параметрами $\mathbf{P}_1$ (47) на графиках рис. 4–7 необходимо растянуть временную шкалу в 10^4 раз, а при переходе к модели $\mathbf{S}_{\mathbf{S}_M}$ с параметрами $\mathbf{P}_2$ (48) — в 10^{15} раз. Необходимо, однако, помнить, что все масштабы вычисляются в планковских единицах. Времена развития неустойчивости Δt до ее нелинейной стадии весьма малы в стандартной шкале времени, фактически они составляют порядка десятков комптоновских времен по отношению к массе хиггсова бозона конкретной модели $\Delta t \sim 10 \div 100 m^{-1}$.

Заметим также, что условие (84) существования наиболее неустойчивой моды скалярных возмущений в точке M_0^+ , т. е. вблизи нулевого фонового скалярного потенциала Φ , как и условие (86) на сектор масс бозонов, является масштабно-инвариантным, т. е. не зависит от выбора теоретико-полевой модели.

⁹⁾ Автор весьма благодарен М. Ю. Хлопову за указание на эту работу.

¹⁰⁾ В рамках модели [26] этот факт, как и многие другие, невозможно было установить.

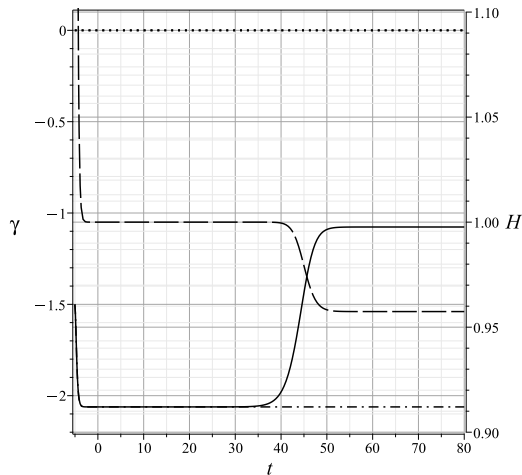


Рис. 7. Эволюция индекса $\gamma(t)$ (82): сплошная линия — $\text{Re } \gamma$ в базовой модели $\mathbf{S}_{\mathbf{P}1}$ с параметрами $\mathbf{P}_0$ и штрихпунктирная — в модели со скалярно нейтральной жидкостью $\mathbf{P}_{\mathbf{P}1}$, $e = 0$, пунктирные совпадающие линии в обеих моделях — $\text{Im } \gamma$. Длинные штрихи — эволюция $H(t)$ в модели $\mathbf{P}_0$

5.2. Необходимые и достаточные условия скалярной неустойчивости

Итак, с одной стороны, экспоненциальная неустойчивость скалярного поля развивается только в условиях инфляционного расширения Вселенной, которое приводит к постоянному значению плотности энергии космологической системы, т.е. к росту ее энергии. С другой стороны, режим инфляционного расширения возможен только в особых точках динамической системы, описывающей фоновую космологическую модель.

Кроме того, экспоненциальная неустойчивость возникает только в неустойчивых, седловых, точках фоновой динамической системы. Но время жизни Δt_{in} этого неустойчивого инфляционного состояния ограничено. Так, на рис. 1, на котором представлена эволюция геометрических факторов модели $\mathbf{S}_{\mathbf{SU}5}$, это время пребывания на «инфляционной полке» составляет $\Delta t_{in} \simeq 5 \cdot 10^5$. После этого космологическая модель переходит в устойчивое инфляционное состояние, и развитие неустойчивости прекращается. Поэтому возникает естественный вопрос: хватает ли времени Δt_{in} для достаточного развития неустойчивости?

Попробуем ответить на этот вопрос. Для этого необходимо каким-то образом описать переходы из одного сингулярного состояния в другое. Замечая, что зависимость от времени амплитуд возмущений

в формулах (75), (76) определяется фактором $H_s t$, который на этапах инфляции совпадает с геометрическим фактором $\xi(t)$, и проводя подстановки $H_s t = \xi(t)$, $H_s = H(t)$ и $\Phi_s = \Phi(t)$ в (80), (81), получим формулы, которые качественно правильно описывают переход из одного состояния инфляции в другой:

$$\nu_n = \frac{1}{r} \exp \left(i \frac{\sqrt{3}nr}{\sqrt{1 - e^2 \Phi^2(t)}} - \frac{5 - e^2 \Phi^2(t)}{2} \xi(t) \right) \times \left[\tilde{C}_1 J_{\sigma(t)} \left(\frac{n}{H(t)} e^{-\xi(t)} \right) - \tilde{C}_2 Y_{\sigma(t)} \left(\frac{n}{H(t)} e^{-\xi(t)} \right) \right], \quad (87)$$

$$\phi_n = \frac{1}{r} \exp \left(inr - \frac{3}{2} \xi(t) \right) \times \left[C_1 J_{\gamma(t)} \left(\frac{n}{H(t)} e^{-\xi(t)} \right) + C_2 Y_{\gamma(t)} \left(\frac{n}{H(t)} e^{-\xi(t)} \right) \right], \quad (88)$$

где

$$\gamma(t) = -\frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4(m^2 - 3\alpha \Phi^2(t))}{9H^2(t)}}, \quad (89)$$

$$\sigma(t) = -\frac{3 - e^2 \Phi^2(t)}{2}.$$

На рис. 7 показана космологическая эволюция индекса $\gamma(t)$ (89) в базовой модели $\mathbf{P}_{\mathbf{P}1}$ и модели со скалярно нейтральной жидкостью $\mathbf{P}_{\mathbf{P}1}$ при $e = 0$. Из представленных графиков можно сделать вывод, что космологическая система быстро (за время $t_g \approx -12$) оказывается в точке неустойчивого равновесия $M_+^+ = [1, 1, 0, 0]$ и пребывает в ней в течение времени $\Delta t_{in} \approx 45$ в первом случае и $\Delta t_{in} = \infty$ — во втором. В первом случае космологическая система скатывается в устойчивую точку равновесия с $H \rightarrow 0.957$, во втором — остается в состоянии с 0.913 (см. рис. 1). В момент перехода в первом случае $\text{Re } \gamma$ обращается в нуль. Таким образом, в случае $\mathbf{P}_{\mathbf{P}1}(0.1)$ рост возмущений скалярного поля продолжается до момента времени $t_e \approx 45$, в случае $\mathbf{P}_{\mathbf{P}1}(0)$ продолжается бесконечно долго¹¹⁾.

Эта ситуация проиллюстрирована на рис. 8 штриховой линией. В то время как система со скалярными зарядами после экспоненциального роста амплитуды возмущений скалярного поля на 8 порядков возвращается в исходное состояние, в системе со скалярно нейтральной жидкостью рост возмущений продолжается неограниченно (на рис. 8 это 20 порядков).

На скорость роста возмущений существенное влияние оказывает величина затравочной космологической постоянной Λ_0 — с ее увеличением

¹¹⁾ В линейной модели возмущений.

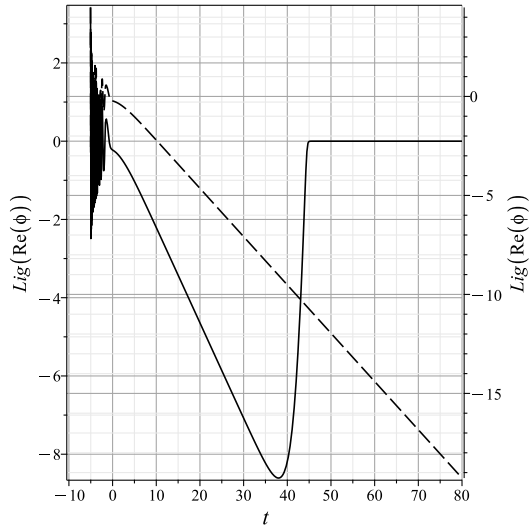


Рис. 8. Эволюция возмущений скалярного поля в базовой модели S_{P1} с параметрами (47) — сплошная линия (слева), в модели нейтральной жидкости — штриховая линия (справа)

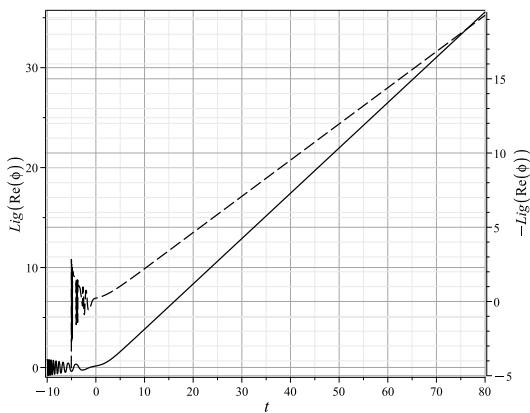


Рис. 9. Эволюция возмущений скалярного поля в базовой модели S_{P1}^* с нейтральной жидкостью с параметрами $\Lambda_0 = 0.2527$ — сплошная линия (слева), $\Lambda_0 = 3$ — штриховая линия (справа)

скорость роста возмущений быстро уменьшается (рис. 9).

Однако влияние скалярного заряда на развитие возмущений не так просто, как это может показаться из графиков на рис. 8. При уменьшении величины затравочной космологической постоянной Λ_0 после роста и последующего уменьшения амплитуды возмущений процесс может перейти к экспоненциальному росту амплитуды колебаний до некоторой предельной амплитуды ϕ_c , при которой этот процесс

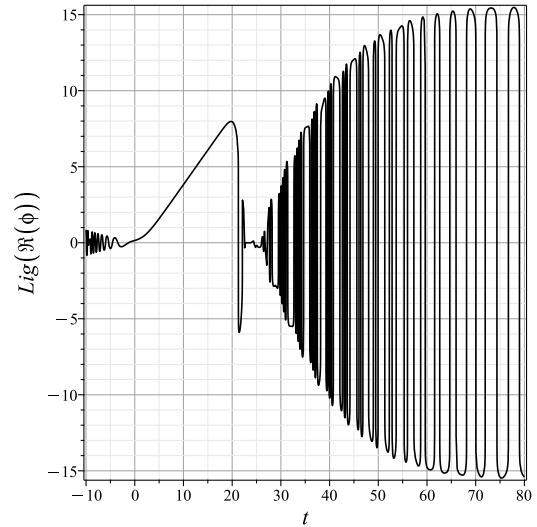


Рис. 10. Эволюция возмущений скалярного поля в базовой модели S_{P1} со скалярным зарядом $e = 0.1$

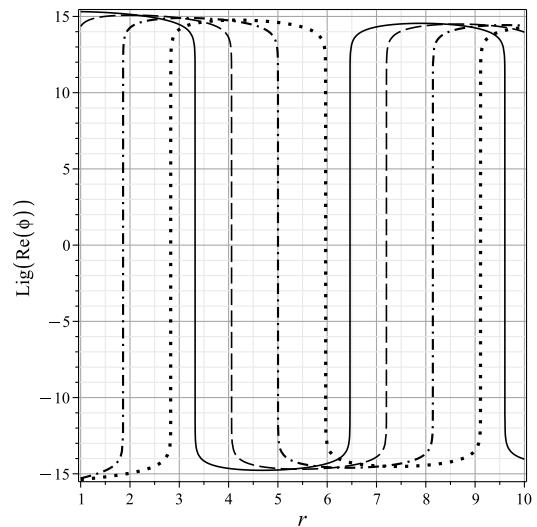


Рис. 11. Эволюция пространственной структуры возмущений скалярного поля в базовой модели S_{P1}^* со скалярным зарядом $e = 0.1$. Пунктирная линия — $t = 71$, штрихпунктирная — $t = 71.5$, штриховая — $t = 72$, сплошная — $t = 72.5$, $n = 1$

насыщается. Так, на рис. 10 $\phi_c \simeq 10^{15}$.

На рис. 11 можно видеть, что возмущения в области насыщения амплитуды представляют собой стоячие растущие колебания с периодом 2π , движущиеся к центру практически без изменения своей формы.

Вся квазипериодическая структура возмущений движется с постоянной фазовой скоростью близкой

к скорости света к центру, вырастая с уменьшением радиуса пропорционально $1/r$.

5.3. Асимптотическое решение и достаточные условия неустойчивости

Оценка времени жизни Δt_{in} неустойчивой инфляции дается формулой (41). Для оценки начала t_g неустойчивой фазы скалярных возмущений и оценки влияния волнового числа n на развитие возмущений используем асимптотическое решение уравнения (75), более удобное для анализа, чем точное решение. Для начала используем общее для исследуемой модели **S** условие малости скалярного заряда $e^2\Phi^2 \ll 1$ (26), а также установленное выше свойство малости возмущений гравитационного поля по сравнению с возмущениями скалярного поля $\nu(r, t) \ll \phi(r, t)$ на интересующем нас этапе развития неустойчивости. Тогда уравнение для возмущений скалярного поля (75) (в том числе и после подстановки (72)) примет вид

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{1}{a^2}\Delta_r\phi + (m^2 - 3\alpha\Phi^2)\phi = 0, \quad (90)$$

т. е. вид точного уравнения в особых точках фоновой динамической системы с тем лишь отличием, что в уравнении (90) $a = \exp(\xi(t))$, $H(t)$ и $\Phi(t)$ не определяются координатами особой точки, а являются решениями фоновой динамической системы. Будем искать решение уравнения (90) в виде

$$\phi(r, t) = \frac{e^{inr}}{r}U(t). \quad (91)$$

Подставляя (91) в (90) и учитывая определение параметра Хаббла (19), получим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции $U(t)$:

$$\ddot{U} + 3\dot{\xi}\dot{U} + (m^2 - 3\alpha\Phi^2 + n^2e^{-2\xi})U = 0.$$

Проводя согласно [34] замену

$$U = \exp(-3/2\xi)\psi(t) \equiv a^{-3/2}(t)u(t),$$

получим двухчленное уравнение относительно $\psi^{12)}$:

$$\ddot{u} + q(t)u = 0, \quad (92)$$

$$q(t) \equiv \frac{1}{a^2}[n^2 + a^2(m^2 - 3\alpha\Phi^2)]. \quad (93)$$

До сих пор мы не налагали на волновое число n никаких ограничений. Теперь мы рассмотрим ВКБ-приближение, полагая¹³⁾

$$n\eta \gg 1 \Rightarrow n \int e^{-\xi} dt \gg 1. \quad (94)$$

Используя асимптотическую теорию дифференциальных уравнений (см., например, [34]) для больших значений n , найдем асимптотическое решение уравнения для возмущений скалярного поля (90), верное и во всем фазовом пространстве:

$$\phi(r, \eta) \simeq \frac{e^{inr}}{a^{3/2}r} \sum_{\pm} C_{\pm} e^{\pm i\psi(t)}, \quad (95)$$

где введена функция эйконала $\psi(t)$ (см. [17]),

$$\psi(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{q} dt = \int_{\eta_0}^{\eta} \sqrt{n^2 + a^2(m^2 - 3\alpha\Phi^2)} d\eta. \quad (96)$$

Решение (95) описывает две волны: опережающую (C_+) и запаздывающую (C_-), бегущие навстречу друг другу с фазовыми скоростями

$$v_f = \pm \frac{\psi}{n} = \pm \sqrt{1 + \frac{a^2}{n^2}(m^2 - 3\alpha\Phi^2)}. \quad (97)$$

При $m^2 - 3\alpha\Phi^2 \geq 0$ фазовая скорость больше или равна скорости света, при

$$m^2 - 3\alpha\Phi^2 < 0 \Leftrightarrow \Phi^2 > \frac{m^2}{3\alpha} \quad (98)$$

фазовая скорость колебаний меньше скорости света. Наконец, при

$$n^2 + a^2(m^2 - 3\alpha\Phi^2) \leq 0 \Rightarrow n^2 < -a^2(m^2 - 3\alpha\Phi^2) \quad (99)$$

фазовая скорость волны обращается в нуль, и волны превращаются в стоячие колебания с экспоненциально растущей амплитудой (запаздывающая волна) и экспоненциально затухающей амплитудой (опережающая волна). На рис. 12 показаны графики временной зависимости величины $-a^2(m^2 - 3\alpha\Phi^2)$ в правой части соотношения (99).

Из этих графиков следует, что выражение в правой части (99) в случае скалярно нейтральной жидкости ($e < 10^{-4}$ для данной модели) неограниченно растет с течением времени, в случае же скалярно заряженной жидкости растет до некоторого момента времени, а потом уменьшается, обращаясь в нуль

¹²⁾ Здесь мы несколько отступаем от обозначения формул [34], приводя их к специфике своей задачи.

¹³⁾ Здесь мы временно переходим к конформному времени η .

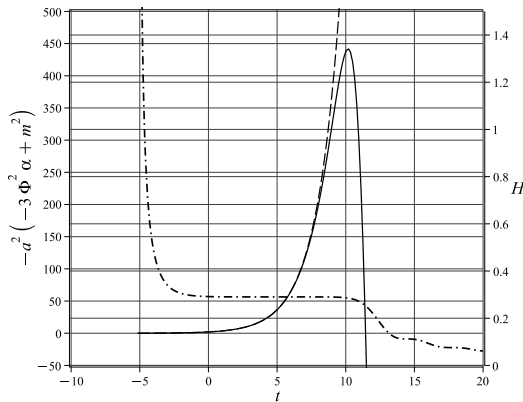


Рис. 12. Эволюция величины $-a^2(m^2 - 3\alpha\Phi^2)$ в (99) для модели S_{PI}^* : сплошная линия — скалярный заряд $e = 0.1$, штриховая — $e = 0$, штрихпунктирная — $H(t)$, $e = 0$

при $t = t_e$. Таким образом, в скалярно заряженной жидкости выражение в правой части (99) положительно на стадии неустойчивой инфляции и отрицательно после ее завершения. В скалярно нейтральной жидкости это выражение положительно на стадии неустойчивой инфляции и после ее завершения продолжает неограниченно расти. Поэтому в случае скалярно нейтральной жидкости для каждого волнового числа n всегда найдется момент времени t_n (или соответствующий ему момент η_n) такой, что

$$-a^2(t_n)(m^2 - 3\alpha\Phi^2(t_n)) = n^2, \quad (100)$$

$$-a^2(t)(m^2 - 3\alpha\Phi^2(t)) > n^2, \quad t > t_n. \quad (101)$$

Для скалярно заряженной жидкости при условии существования момента t_n существует и момент времени $t_e > t_n$, в который выражение в правой части (99) вторично обращается в нуль. Тогда при $t \geq t_n$ получим из (96) для функции эйконала

$$\psi(t)|_{t>t_n} = \psi_n + i \int_{t_n}^t \sqrt{a^2(3\alpha\Phi^2 - m^2) - n^2} \frac{dt}{a}, \quad (102)$$

$$\psi_n = \int_{t_0}^{t_n} \sqrt{m^2 - 3\alpha\Phi^2 + \frac{n^2}{a^2}} dt, \quad \text{Im}(\psi(t_n)) = 0. \quad (103)$$

Вводя далее в ВКБ-решении (95)

$$\tilde{C}_{\pm}(n) = C_{\pm} e^{\pm\psi_n} (= \text{const}), \quad (104)$$

получим окончательно решения при $t > t_n$:

$$\phi(r, \eta)|_{t>t_n} \simeq \frac{e^{inr}}{a^{3/2}r} \sum_{\pm} \tilde{C}_{\pm}(n) e^{\mp\Gamma(n,t)}, \quad (105)$$

где

$$\Gamma(n, t) = \int_{t_n}^t \sqrt{3\alpha\Phi^2 - m^2 - \frac{n^2}{a^2}} dt \quad (106)$$

— интегральный инкремент роста скалярных возмущений.

При этом, начиная с момента времени t_e , картина эволюции скалярных возмущений в скалярно заряженной жидкости начинает отличаться от соответствующей картины в скалярно нейтральной жидкости. С этого момента времени в скалярно заряженной жидкости вновь возникают бегущие волны, однако амплитуда опережающих волн становится весьма малой $-\tilde{C}_+ e^{-\Gamma(n,t_e)}$, тогда как амплитуда запаздывающих колебаний значительно возрастает $-\tilde{C}_- e^{\Gamma(n,t_e)}$. Как раз это явление мы и наблюдаем на рис. 10, 11. Таким образом, полученные асимптотические решения (95) и (105) качественно правильно описывают детали процесса развития скалярных возмущений, выявленные с помощью точных решений в особых точках. Для установления полного соответствия этих решений необходимо подставить в них значения фоновых функций в особых точках (39), (40).

Вернемся к решению главного вопроса о необходимых и достаточных условиях экспоненциальной неустойчивости. Во-первых, условия начала экспоненциального роста возмущений и нижнего предела волновых чисел в неявном виде определяют условия (100) и (101). Для получения явного вида этих условий подставим в них значения фоновых функций в неустойчивой особой точке M_+^+ (40). В результате получим время начала экспоненциальной неустойчивости моды n :

$$n^2 = 2m^2 \exp\left(\sqrt{\frac{4\Lambda_0}{3}} t_n\right) \Rightarrow t_n = \sqrt{\frac{3}{\Lambda_0}} \ln \frac{n}{\sqrt{2}m}. \quad (107)$$

Начиная с этого момента времени скалярные возмущения начинают экспоненциально быстро расти, в случае скалярно нейтральной жидкости — неограниченно долго, в случае скалярно заряженной жидкости — до времени t_e — конца фазы неустойчивой инфляции. Для определения длительности этой фазы используем оценку (41) Δt_{in} , подставляя в нее собственные числа в неустойчивой точке M_+^+ :

$$t_e \sim \frac{2}{\sqrt{3\Lambda_0} + \sqrt{3\Lambda_0 + 8m^2}}.$$

Для возможности процесса экспоненциальной неустойчивости в скалярно заряженной жидкости необходимо выполнение условия $t_e > t_n$, что дает

$$3 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8m^2}{3\Lambda_0}} \right) \ln \frac{n}{\sqrt{2}m} < 1.$$

Разрешая это неравенство относительно n , получим

$$n < \sqrt{2}m \exp \left[\frac{1}{3} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8m^2}{3\Lambda_0}} \right) \right]. \quad (108)$$

Для моделей с параметрами $\mathbf{P}_0^* \div \mathbf{P}_2^*$, (49)–(51), $8m^2 \simeq 3\Lambda_0$ получим из (108)

$$n \lesssim 3m. \quad (109)$$

Таким образом, для развития экспоненциальной неустойчивости моды с волновым числом n в скалярно нейтральной жидкости необходимо и достаточно выполнение условия

$$t > t_n, \quad (110)$$

где момент t_n определяется формулой (107). Для скалярно заряженной жидкости ($e \gtrsim 10^{-6}$) кроме этого условия необходимо выполнение условия (108) (или (109)).

6. ВЫВОДЫ: ГЕНЕРАЦИЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ И ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ SSBH

6.1. Генерация гравитационных возмущений

Как мы видели в разд. 4.2, возмущения гравитационного поля затухают со временем как в устойчивой, так и в неустойчивой точках модели. Это, в свою очередь, является следствием вида возмущенного ТЭИ скалярного поля (57)–(59), который обращается в тождественный нуль в этих точках (28):

$$\delta T_k^i(M_s) \equiv 0. \quad (111)$$

Таким образом, в линейной теории возмущений космологической модели, основанной на хиггсовом скалярном поле и скалярно заряженной (или нейтральной) идеальной жидкости возмущения гравитационного поля, скалярного поля и заряженной жидкости в особых точках фоновой динамической системы, т. е. на этапах инфляции, являются независимыми друг от друга. Все эти возмущения на этапах инфляции эволюционируют как квазивакуумные. Единственное, что связывает эти компоненты, — это фоновое состояние, нелинейно определяемое всеми тремя невозмущенными компонентами космологической системы: $S(t) = [H(t), \Phi(t), Z(t), \varepsilon(t), \Lambda]$.

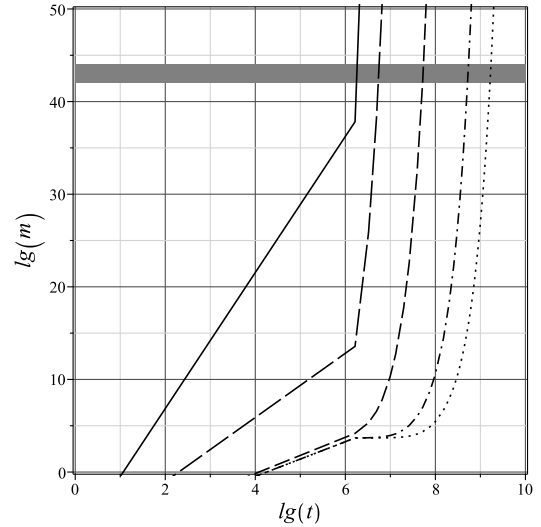


Рис. 13. Эволюция эффективной массы возмущения $m(t)$ в зависимости от космологической постоянной Λ для модели с параметрами SU(5): $\mathbf{P}_1$ (47). Слева направо: $\Lambda = 3 \cdot 10^{-11}, 3 \cdot 10^{-12}, 3 \cdot 10^{-13}, 3 \cdot 10^{-14}$

Однако в особых точках фоновой космологической системы эти компоненты обращаются в константы $S_0 = [H_0, \Phi_0, 0, 0, \Lambda_0]$, фактически определяющие параметры инфляционного решения (39), (40) и его тип. В линейном приближении связь между возмущениями компонент разрывается и они эволюционируют как вакуумные на фоне инфляционной метрики Фридмана, которая могла быть сгенерирована подходящей космологической постоянной. Этим и объясняется затухание гравитационных возмущений и неустойчивость скалярных.

Единственной возможностью неустойчивости продольных гравитационных возмущений в линейной модели является этап перехода фоновой системы из состояния неустойчивой инфляции в состояние устойчивой, когда $S(t) \neq \text{const}$ и становятся ненулевыми компоненты линейного ТЭИ возмущений (57)–(59). Высокая скорость переходов, обнаруживаемая на рис. 1, 7 и 12, может существенно повлиять на этот процесс, в том числе и остановить его. С другой стороны, результаты [23], полученные численными методами в рамках полной модели скалярно заряженной ферми-системы, подтверждают реальность такого сценария. Эта возможность должна быть дополнительно изучена.

Но существует и другая возможность обеспечения роста продольных гравитационных возмущений даже в особых точках космологической системы. Эта возможность определяется двумя обстоятельствами:

1) аномально быстрым ростом возмущений скалярного поля, быстро выводящим этот процесс на нелинейную стадию (рис. 10);

2) формированием в режиме насыщения стоячих волн, движущихся к центру (рис. 11).

Благодаря этим факторам возмущения скалярного поля создают в пространстве быстро растущую плотность энергии, переносимую к центру, т. е. создают в центре массу, которая, в свою очередь, трансформирует продольные гравитационные возмущения. Вычисляя квадратичный по возмущениям скалярного поля ТЭИ, найдем его нетривиальные компоненты в особых точках:

$$\begin{aligned} 16\pi\delta^2 S_1^1 &= -\dot{\phi}^2 - \frac{\phi'^2}{a^2} + \phi^2(m^2 - 3\alpha\Phi^2), \\ 16\pi\delta^2 S_2^2 &= 16\pi\delta^2 S_3^3 = -\dot{\phi}^2 + \frac{\phi'^2}{a^2} + \phi^2(m^2 - 3\alpha\Phi^2), \\ 16\pi\delta^2 S_4^4 &= \dot{\phi}^2 + \frac{\phi'^2}{a^2} + \phi^2(m^2 - 3\alpha\Phi^2), \\ 8\pi\delta^2 S_1^4 &= -16\pi\frac{\delta^2 S_1^4}{a^2} = \dot{\phi}\phi'. \end{aligned} \quad (112)$$

Подставляя далее эти компоненты в правые части линеаризованных уравнений Эйнштейна (61), (67)–(69), получим необходимую систему уравнений. В отличие от предыдущей эта система уравнений будет описывать вынужденную генерацию продольных возмущений гравитационного поля неустойчивым скалярным полем. Важно подчеркнуть, что на первом этапе это будет именно вынужденная генерация, которая на нелинейном этапе стандартным образом перерастет в процесс гравитационного коллапса. Заметим, что на поздних стадиях этого процесса образованная черная дыра формирует вокруг себя скалярное гало [35]. Эти процессы требуют отдельного рассмотрения.

6.2. Возможные параметры SSBH

В заключение статьи приведем оценки параметров зародышей сверхмассивных черных дыр, рожденных в процессе развития скалярно-гравитационной неустойчивости [22], предварив эти оценки написанием о Свойстве 1 подобия, позволяющего переходить от одной теоретико-полевой модели к другой. С помощью этого свойства можно показать, что

$$\tilde{\tau}_g = \ell\tau_g, \quad \tilde{m}_g = \ell m_g, \quad (113)$$

где τ_g — время образования черной дыры в неустойчивой моде возмущения, m_g — ее масса. Поэтому в

космологических моделях с меньшими значениями фундаментальных параметров черные дыры рождаются позже, но при этом с большими массами.

На рис. 13 показана эволюция эффективной массы возмущения $m(t)$ с учетом испарения Хокинга на ранних стадиях в модели SU(5) в зависимости от космологической постоянной Λ на стадии неустойчивой инфляции (по результатам работы [22]). Темная полоса соответствует значениям масс (1). Таким образом, с уменьшением значения космологической постоянной процесс формирования SSBH затягивается, но при этом все равно остается очень быстрым. На нелинейной стадии роста возмущений энергия инфляции $3H^2$ практически полностью преобразуется в массу SSBH. При этом, как показано в [23], радиус локализации сферического возмущения $R(t)$ растет пропорционально масштабному фактору $a(t)$.

Поскольку скалярное поле доминирует в нашей модели, конечным состоянием SMBH является, по видимому, регулярная скалярная черная дыра [36]. Заметим также, что благодаря очень быстрому образованию SMHB в ранней Вселенной можно полагать, что эти объекты образуются раньше галактик, на что указывают и их массы, сравнимые с массами последних [11].

Благодарности. Автор благодарен участникам семинара кафедры теории относительности и гравитации Казанского университета, в частности, С. В. Сушкову и А. Б. Балакину за весьма полезные замечания. Также автор благодарен участникам VI Международной зимней школы-семинара «Петровские чтения-2023» за плодотворное обсуждение доклада (29.11.23), повлиявшее на тематику статьи, особенно А. А. Старобинскому и К. А. Бронникову, а также участникам 18-й Международной конференции по гравитации, астрофизике и космологии (2024), особенно О. С. Сажиной, Т. П. Шестаковой и М. О. Катанаеву.

ЛИТЕРАТУРА

1. Q. Zhu, Y. Li, Y. Li et al., Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **514**, 5583 (2022).
2. L. A. Urena-Lopez and A. R. Liddle, Phys. Rev. D **66**, 083005 (2002).
3. S. Gillessen, F. Eisenhauer, S. Trippe, T. Alexander, R. Genzel, F. Martins, and T. Ott, Astrophys. J. **692**, 1075 (2009).

4. S. Doeleman, J. Weintraub, A. E. E. Rogers et al., *Nature* **455**, 78 (2008).
5. X. Fan, A. Barth, E. Banados, and G. D. Rosa, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **61**, 373 (2023).
6. R. L. Larson, S. L. Finkelstein, D. D. Kocevski et al., *Astrophys. J. Lett.* **953**, L29 (2023).
7. X. Fan, A. Barth, E. Banados et al., *Bull. Am. Astron. Soc.* **51**, 121 (2019).
8. F. Wang, J. Yang, X. Fanet et al., *Astrophys. J. Lett.* **907**, L1 (2021).
9. C. Wolf, S. Lai, C. A. Onken, N. Amrutha, F. Bian, W. J. Hon, P. Tisserand, and R. L. Webster, *Nat. Astron.* **8**, 520 (2024).
10. B. Trakhtenbrot, *Proc. IAU Symposium No. 356*, pp. 261–275 (2019).
11. О. К. Сильченко, *УФН* **19**, 188 (2025).
12. M. Gonin, G. Hasinger, D. Blaschke et al., *Eur. Phys. J. A* **61**, 170 (2025).
13. Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, *Строение и эволюция Вселенной*, Наука, Москва (1975).
14. S. Weinberg, *Cosmology*, Oxford Univ. Press, Oxford (2008).
15. Е. М. Лифшиц, *ЖЭТФ* **16**, 587 (1946).
16. Е. М. Лифшиц, И. М. Халатников, *УФН* **80**, 391 (1963).
17. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1971).
18. Yu. G. Ignat'ev, *Gravit. Cosmol.* **28**, 275 (2022).
19. Yu. G. Ignat'ev, *Gravit. Cosmol.* **28**, 375 (2022).
20. Yu. G. Ignat'ev, *Gravit. Cosmol.* **28**, 163 (2023).
21. Yu. G. Ignat'ev, *Gravit. Cosmol.* **29**, 213 (2023).
22. Yu. G. Ignat'ev, *Gravit. Cosmol.* **29**, 327 (2023).
23. Yu. G. Ignat'ev, *Theor. Math. Phys.* **215**, 862 (2023).
24. Yu. G. Ignat'ev, *Theor. Math. Phys.* **222**, 285 (2025).
25. Yu. G. Ignat'ev, *Theor. Math. Phys.* **223**, 127 (2025).
26. M. Yu. Khlopov, B. A. Malomed, and Ya. B. Zeldovich, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **215**, 575 (1985).
27. Yu. G. Ignat'ev and D. Yu. Ignat'ev, *Theor. Math. Phys.* **209**, 1437 (2021).
28. В. А. Рубаков, *УФН* **184**, 127 (2014) [V. A. Rubakov, *Phys.-Uspekhi* **57**, 128 (2014)].
29. Yu. G. Ignat'ev and D. Yu. Ignatyev, *Gravit. Cosmol.* **26**, 29 (2020).
30. Yu. G. Ignat'ev, *Theor. Math. Phys.* **219**, 688 (2024).
31. О. И. Богоявленский, *Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике*, Наука, Москва (1980).
32. Yu. Ignat'ev, A. Agathonov, M. Mikhailov, and D. Ignatyev, *Astr. Space Sci.* **357**, 61 (2015).
33. Н. Н. Лебедев, *Специальные функции и их приложения*, ГИФМЛ, Москва–Ленинград (1963).
34. М. В. Федорюк, *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений*, URSS, Москва (2009).
35. Yu. G. Ignat'ev, *Theor. Math. Phys.* **219**, 792 (2024).
36. K. A. Bronnikov and J. C. Fabris, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 251101 (2006).