ЖЭТФ, 2025, том 168, вып. 5 (11), стр. 624–630

ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В СРЕДЕ С ЧАСТОТНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

П. С. Рыжиков [*]**, *В. А. Макаров***

Физический факультет Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова
119991, Москва, Россия

Поступила в редакцию 9 сентября 2025 г.,
после переработки 9 сентября 2025 г.
Принята к публикации 27 сентября 2025 г.

Найдены все компоненты тензора энергии-импульса электромагнитного поля в непоглощающей однородной среде со стационарными характеристиками, демонстрирующей линейный отклик на внешнее воздействие и обладающей частотной дисперсией второго порядка. Полученные формулы для плотностей энергии и импульса, а также потоков этих величин, записаны с помощью декартовых компонент электрического поля или, в случае квазимонохроматического электрического поля, декартовых компонент его комплексной амплитуды.

DOI: 10.7868/S3034641X25110044

1. ВВЕДЕНИЕ

Законы сохранения энергии и импульса являются фундаментальными законами природы. Их выполнение связано с инвариантностью физических систем относительно трансляции в пространстве и во времени [1–3]. В электродинамике формулировка этих двух законов приводит к связи между плотностями энергии (импульса) и потока энергии (импульса), выражаемой уравнением непрерывности [4–6]. Сохранение энергии и импульса в электродинамике требует, соответственно, отсутствия зависимости оптических восприимчивостей среды от времени (свойство стационарности сред) и пространственных координат (свойство однородности сред). При наличии таких зависимостей законы сохранения содержат также слагаемые, определяющие изменения энергии и импульса, вызванные силами, поддерживающими эти зависимости [7].

Анализ выражений для плотностей энергии и импульса электромагнитного излучения, а также их потоков интересен не только из теоретических соображений, но и с точки зрения практических применений. Так, плотность энергии поля связана с его гамильтонианом [8–10] и может определять пороги некоторых явлений в нелинейной оптике [11]. Плотность потока энергии поля определяет его наблюдаемую интенсивность [12]. Импульс и поток импульса характеризуют механическое воздействие электромагнитного поля на среду. Помимо этого, некоторые компоненты потока импульса могут выступать в качестве альтернативы гамильтониану при описании распространения поля в среде [13, 14]. Импульс электромагнитного поля также определяет его угловой момент [5, 15], практические применения которого являются в настоящее время предметом активных исследований [16–26]. Совокупность плотностей энергии и импульса и плотностей их потоков образуют тензор энергии-импульса электромагнитного поля.

В большинстве задач неоднородность и нестационарность оптического отклика среды на внешнее электрическое поле падающего излучения не принимаются во внимание. В то же время другие оптические свойства среды хотя и не приводят к несохранению энергии и импульса, но могут существенно повлиять на распределение энергии, импульса и их потоков в пространстве и их эволюцию во времени. Среди таких свойств среды чаще всего рассматривается частотная дисперсия оптического отклика.

Формула Бриллюэна определяет плотность энергии электромагнитного поля в первом приближении теории частотной дисперсии [4, 27]. Этот классический результат электродинамики известен уже более ста лет. В этом же приближении выведены также аналогичные формулы для остальных компонент

[*] E-mail: ryzhikov.ps14@physics.msu.ru

тензора энергии-импульса [28]. Похожие формулы были получены в первом приближении по параметру пространственной дисперсии [27], а также при одновременном учете пространственной и частотной дисперсии однородной среды [29].

Вывод формулы Бриллюэна основан на исключении из рассмотрения некоторых слагаемых, которые в первом приближении частотной дисперсии оказываются пренебрежимо малыми [30]. В то же время при описании распространения поля в среде обычно недостаточно учитывать только первое приближение теории частотной дисперсии. Большинство задач о распространении коротких световых импульсов в среде требуют учета как минимум второго порядка [31], а в некоторых случаях и более высоких порядков частотной дисперсии [31–33]. Естественно, что для корректного описания энергии поля в таких процессах классическая формула Бриллюэна не подходит.

В связи с этим возникает необходимость обобщения этой формулы на более высокие порядки частотной дисперсии. Ниже будет показано, что метод работ [34,35], ранее использованный нами при выводе компонент тензора энергии-импульса в средах с пространственной дисперсией, может быть успешно применен для нахождения компонент этого тензора в средах, обладающих частотной дисперсией второго порядка.

2. МАТЕРИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В отсутствие пространственной дисперсии и нелинейности оптического отклика среды наиболее общее выражение, связывающее декартову компоненту P_i поляризации среды в точке, определяемой радиус-вектором $\mathbf{r}$, в момент времени t с компонентой E_j напряженности электрического поля в той же точке пространства в момент времени t', имеет вид [4, 27]

$$P_i(\mathbf{r},t) = \int\limits_{-\infty}^{t} dt' \tilde{\chi}_{ij}(t;t') E_j(\mathbf{r},t'). \tag{1}$$

Здесь и далее мы используем подход Ландау – Лифшица [36], согласно которому индукция магнитного поля тождественно равна его напряженности, а магнитные свойства вещества учитывает тензор $\tilde{\chi}_{ij}(t;t')$. Перейдем в (1) от абсолютного времени t' к задержке $\tau = t - t'$,

$$P_i(\mathbf{r},t) = \int\limits_{0}^{\infty} d\tau \tilde{\chi}_{ij}(t;\tau) E_j(\mathbf{r},t-\tau), \tag{2}$$

и будем считать, что частотный спектр напряженности электрического поля сосредоточен вблизи частоты ω. В этом случае $E_j(\mathbf{r},t)$ можно записать в виде

$$E_j(\mathbf{r},t) = \tilde{E}_j(\mathbf{r},t) e^{-i\omega t} + \text{c.c.}, \tag{3}$$

где $\tilde{E}_j$ — медленно меняющаяся во времени амплитуда j-й компоненты поля. Для краткости опустим далее аргумент $\mathbf{r}$ у поляризации и напряженности поля. Представляя $\tilde{E}_j(t)$ в (3) в виде интеграла Фурье и подставляя полученное выражение в (2), запишем $P_i(t)$ в виде

$$\begin{aligned} P_i(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{\infty} d\tau \tilde{\chi}_{ij}(t,\tau) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\alpha e^{-i(\omega+\alpha)(t-\tau)} \times \\ \times \tilde{E}_j(\alpha) + \text{c.c.} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\alpha \tilde{\chi}_{ij}(t,\omega+\alpha) \times \\ \times e^{-i(\omega+\alpha)t} \tilde{E}_j(\alpha) + \text{c.c.} \end{aligned} \tag{4}$$

В последней формуле $\tilde{E}_j(\alpha)$ существенно отличается от нуля только в ограниченной области значений α вблизи нуля. Это дает возможность разложить $\tilde{\chi}_{ij}(t;\omega+\alpha)$ в ряд Тейлора по α и представить (4) в виде бесконечной суммы:

$$\begin{aligned} P_i(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\alpha \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \alpha^n \frac{\partial^n}{\partial \omega^n} \tilde{\chi}_{ij}(t;\omega) \right) \times \\ \times e^{-i(\omega+\alpha)t} \tilde{E}_j(\alpha) + \text{c.c.} \end{aligned} \tag{5}$$

Наконец, обратное преобразование Фурье позволяет записать материальное уравнение в виде ряда:

$$P_i(t) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \omega^n} \tilde{\chi}_{ij}(t;\omega) \partial_t^n \tilde{E}_j(t) \right) e^{-i\omega t} + \text{c.c.} \tag{6}$$

Выражение в скобках в последней формуле можно считать амплитудой поляризации $\tilde{P}_i(t)$. Далее будем предполагать отклик среды стационарным (т. е. зависимость $\tilde{\chi}_{ij}$ от времени отсутствует) и ограничимся первыми тремя слагаемыми в (6). В этом случае

$$\tilde{P}_i(t) = \chi_{ij}(\omega)\tilde{E}_j(t) + \beta_{ij}(\omega)\partial_t \tilde{E}_j(t) + \mu_{ij}(\omega)\partial_t^2 \tilde{E}_j(t), \tag{7}$$

где $\chi_{ij}(\omega) = \tilde{\chi}_{ij}(\omega)$,

$$\beta_{ij}(\omega) = i\frac{\partial \tilde{\chi}_{ij}(\omega)}{\partial \omega}, \quad \mu_{ij}(\omega) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \tilde{\chi}_{ij}(\omega)}{\partial \omega^2}.$$

Также будем считать, что частотный спектр поля находится в окне прозрачности среды и потерями можно пренебречь.

3. СВЯЗЬ ТЕНЗОРА ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА С АМПЛИТУДОЙ КВАЗИМОНОХРОМАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Из уравнений Максвелла в однородной непоглощающей среде следуют равенства [37]

$$c^{-1}\left(E_i\partial_t D_i + B_i\partial_t B_i\right) + \partial_i\left(e_{ijk}E_jB_k\right) = 0, \tag{8}$$

$$\begin{gathered} c^{-1}\partial_t\left(e_{ijk}D_jB_k\right) + D_j\partial_i E_j - \partial_j\left(D_jE_i\right) + \\ +B_j\partial_i B_j - \partial_j\left(B_jB_i\right) = 0, \end{gathered} \tag{9}$$

отражающие законы сохранения энергии и импульса электромагнитного поля соответственно. Для получения аналитических выражений для плотностей энергии и импульса поля и плотностей их потоков в такой среде эти выражения нужно преобразовать к виду уравнений непрерывности:

$$c^{-1}\partial_t U + \partial_k S_k = 0, \tag{10}$$

$$c^{-1}\partial_t g_p + \partial_k G_{pk} = 0, \tag{11}$$

где U — плотность энергии, S_k — компоненты плотности потока энергии, g_p — плотность импульса, G_{pk} — плотность потока импульса. Определяемые таким образом компоненты тензора энергии-импульса поля соответствуют подходу Минковского [38]. Подставляя (3) и (7) в (8) и (9) и сравнивая результат с (10) и (11) соответственно, можно заметить, что для определения этих величин необходимо преобразовать часть слагаемых в получившихся выражениях, а именно сумму

$$\begin{gathered} F = \left[\chi_{ij}(\omega) + \beta_{ij}(\omega)\partial_t + \mu_{ij}(\omega)\partial_t^2\right]\tilde{E}_j\partial_p\tilde{E}_i^* + \\ + \left[\chi_{ji}(-\omega) + \beta_{ji}(-\omega)\partial_t + \mu_{ji}(-\omega)\partial_t^2\right]\tilde{E}_i^*\partial_p\tilde{E}_j, \end{gathered} \tag{12}$$

к виду, совпадающему с правой частью следующего равенства:

$$\begin{gathered} F_1 = \partial_p\Big[A_{ij}^{(0,0)}\tilde{E}_i^*\tilde{E}_j + A_{ij}^{(1,0)}\partial_t\tilde{E}_i^*\tilde{E}_j + A_{ij}^{(0,1)}\tilde{E}_i^*\partial_t\tilde{E}_j + \\ + A_{ij}^{(2,0)}\partial_t^2\tilde{E}_i^*\tilde{E}_j + A_{ij}^{(0,2)}\tilde{E}_i^*\partial_t^2\tilde{E}_j + A_{ij}^{(1,1)}\partial_t\tilde{E}_i^*\partial_t\tilde{E}_j\Big] + \\ +\partial_t\Big[B_{ij}^{(1,0;0,0)}\partial_p\tilde{E}_i^*\tilde{E}_j + B_{ij}^{(0,0;1,0)}\tilde{E}_i^*\partial_p\tilde{E}_j + \\ +B_{ij}^{(1,1;0,0)}\partial_t\partial_p\tilde{E}_i^*\tilde{E}_j + B_{ij}^{(0,0;1,1)}\tilde{E}_i^*\partial_t\partial_p\tilde{E}_j + \\ + B_{ij}^{(1,0;0,1)}\partial_p\tilde{E}_i^*\partial_t\tilde{E}_j + B_{ij}^{(0,1;1,0)}\partial_t\tilde{E}_i^*\partial_p\tilde{E}_j\Big], \end{gathered} \tag{13}$$

т. е. найти коэффициенты $\hat{A}$ и $\hat{B}$, при которых правые части выражений (12) и (13) тождественно равны. Для этого необходимо раскрыть производные в правой части равенства (13) и приравнять коэффициенты при одинаковых произведениях полей и их производных в правых частях формул (12) и (13). В результате будет получена система уравнений относительно коэффициентов $\hat{A}$ и $\hat{B}$. При $p = x, y, z$ замена правой части выражения (12) на (13) в формулах, получаемых в результате подстановки (3) и (7) в (8), (9), дает возможность определить формулы для компонент плотности и плотности потока импульса электромагнитного поля.

Для определения плотности и плотности потока энергии необходимо сначала заменить в равенствах (12) и (13) производную ∂_p на $\partial_t - i\omega$, если ∂_p действует на компоненты $\tilde{\mathbf{E}}$, на $\partial_t + i\omega$, если оператор ∂_p действует на компоненты $\tilde{\mathbf{E}}^*$, и на ∂_t, если ∂_p действует на произведение компонент напряженности электрического поля. Далее необходимо раскрыть производные в правой части модифицированного равенства (13) и приравнять коэффициенты при одинаковых произведениях полей и их производных в правых частях модифицированных равенств (12) и (13). В результате будет получена еще одна система уравнений относительно нового набора коэффициентов $\hat{A}$ и $\hat{B}$.

Проведенные вычисления показали, что необходимым условием тождественного равенства правых частей выражений (12) и (13) является выполнение следующих соотношений внутренней симметрии между компонентами тензоров оптических восприимчивостей $\hat{\chi}$, $\hat{\beta}$ и $\hat{\mu}$:

$$\chi_{ij}(\omega) = \chi_{ji}(-\omega), \tag{14}$$

$$\beta_{ij}(\omega) = -\beta_{ji}(-\omega), \tag{15}$$

$$\mu_{ij}(\omega) = \mu_{ji}(-\omega). \tag{16}$$

Стоит отметить, что несмотря на внешнее сходство с соотношениями, следующими из принципа симметрии кинетических коэффициентов, эти соотношения являются непосредственными требованиями закона сохранения энергии и связывают компоненты с разными частотными аргументами.

Соотношения (14)–(16) гарантируют только существование решения системы уравнений для $\hat{A}$ и $\hat{B}$, но не его единственность. Поэтому плотности и плотности потоков энергии и импульса, удовлетворяющие уравнениям (10) и (11), определяются неоднозначно. Среди всех возможных решений системы уравнений для $\hat{A}$ и $\hat{B}$, обеспечивающих равенство $F = F_1$, выделим такое, которое приводит к равноправному вхождению в него компонент электрического поля на частотах $\pm\omega$, т. е. к тождеству

$$
\begin{aligned}
&\left[\chi_{ij}(\omega)+\beta_{ij}(\omega)\partial_t+\mu_{ij}(\omega)\partial_t^2\right]\tilde{E}_j\partial_p\tilde{E}_i^*+\\
&+\left[\chi_{ji}(-\omega)+\beta_{ji}(-\omega)\partial_t+\mu_{ji}(-\omega)\partial_t^2\right]\tilde{E}_i^*\partial_p\tilde{E}_j=\\
&=\frac{1}{2}\partial_p\left[\tilde{P}_i^*\tilde{E}_i+\tilde{P}_i\tilde{E}_i^*\right]+\\
&+\frac{1}{2}\partial_t\Big[-\beta_{ij}(\omega)\tilde{E}_i^*\partial_p\tilde{E}_j-\beta_{ji}(-\omega)\partial_p\tilde{E}_i^*\tilde{E}_j-\\
&-\mu_{ij}(\omega)\tilde{E}_i^*\partial_t\partial_p\tilde{E}_j-\mu_{ji}(-\omega)\partial_t\partial_p\tilde{E}_i^*\tilde{E}_j+\\
&+\mu_{ij}(\omega)\partial_t\tilde{E}_i^*\partial_p\tilde{E}_j+\mu_{ji}(-\omega)\partial_p\tilde{E}_i^*\partial_t\tilde{E}_j\Big]. \qquad (17)
\end{aligned}
$$

С учетом последнего и в результате преобразования (8), (9) к (10), (11) получаются следующие выражения для компонент тензора энергии-импульса:

$$
\begin{aligned}
U=&\frac{1}{2}\Big\{\tilde{E}_i^*\left(\tilde{P}_i+\tilde{E}_i\right)+\tilde{B}_i^*\tilde{B}_i+\Big[\beta_{ij}(\omega)\tilde{E}_i^*-\\
&-\mu_{ij}(\omega)\partial_t\tilde{E}_i^*+\mu_{ij}(\omega)\tilde{E}_i^*\partial_t\Big]\times\\
&\times\left(-i\omega+\partial_t\right)\tilde{E}_j\Big\}+\text{c.c.}, \qquad (18)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_p=&e_{pij}\left(\tilde{E}_i+\tilde{P}_i\right)\tilde{B}_j^*+\frac{1}{2}\Big\{-\beta_{ij}(\omega)\tilde{E}_i^*+\\
&+\mu_{ij}(\omega)\partial_t\tilde{E}_i^*-\mu_{ij}(\omega)\tilde{E}_i^*\partial_t\Big\}\partial_p\tilde{E}_j+\text{c.c.}, \qquad (19)
\end{aligned}
$$

$$
S_k=e_{kij}\tilde{E}_i^*\tilde{B}_j+\text{c.c.}, \qquad (20)
$$

$$
\begin{aligned}
G_{pk}=&\frac{1}{2}\delta_{pk}\left(\tilde{P}_i\tilde{E}_i^*+\tilde{B}_i^*\tilde{B}_i\right)-\\
&-\tilde{E}_p^*\left(\tilde{E}_k+\tilde{P}_k\right)-\tilde{B}_p^*\tilde{B}_k+\text{c.c.} \qquad (21)
\end{aligned}
$$

Здесь $\tilde{P}_i(t)$ задается учитывающей частотную дисперсию формулой (7), а $B_i=H_i$ — декартова компонента индукции магнитного поля. Плотности энергии (18) и импульса (19) включают в себя и другие дополнительные слагаемые, обусловленные частотной дисперсией. Выражения для плотностей потоков энергии (20) и импульса (21) полностью совпадают с классическими формулами для этих величин [4, 28] с точностью до уточнения явного вида поляризации среды.

Сравним выражение (18) с формулой Бриллюэна. Для этого, используя определения и внутреннюю симметрию тензоров $\hat{\chi}$, $\hat{\beta}$ и $\hat{\mu}$, перепишем (18) в явном виде:

$$
\begin{aligned}
U=&\tilde{B}_i^*\tilde{B}_i+\frac{\partial}{\partial\omega}\left[\omega\left(\delta_{ij}+\tilde{\chi}_{ij}(\omega)\right)\right]\tilde{E}_i^*\tilde{E}_j+\\
&+i\frac{\partial}{\partial\omega}\tilde{\chi}_{ij}(\omega)\left(\tilde{E}_i^*\partial_t\tilde{E}_j-\tilde{E}_j\partial_t\tilde{E}_i^*\right)+\\
&+i\omega\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}\tilde{\chi}_{ij}(\omega)\left(\tilde{E}_i^*\partial_t\tilde{E}_j-\tilde{E}_j\partial_t\tilde{E}_i^*\right)-\\
&-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}\tilde{\chi}_{ij}(\omega)\left(\tilde{E}_i^*\partial_t^2\tilde{E}_j+\tilde{E}_j\partial_t^2\tilde{E}_i^*-\partial_t\tilde{E}_i^*\partial_t\tilde{E}_j\right). \qquad (22)
\end{aligned}
$$

Сумма первых двух слагаемых в правой части этого выражения в точности совпадает с формулой Бриллюэна, если положить в ней $\mathbf{H}\equiv\mathbf{B}$. Третье слагаемое определяет добавку к плотности энергии, обусловленную первым порядком частотной дисперсии среды и учитывающую немонохроматичность волнового пакета. Порядок малости этого слагаемого определяется медленностью изменения во времени амплитуды электрического поля. Отсутствие этой добавки в формуле Бриллюэна объясняется тем, что при ее выводе в выражении для $\partial_t\mathbf{P}$ отбрасывались слагаемые, содержащие вторые и последующие производные напряженности электрического поля. Четвертое и пятое слагаемые определяют вклад второго порядка частотной дисперсии. При этом четвертое слагаемое зависит от напряженности электрического поля таким же образом, как и третье. Соотношение между этими слагаемыми определяется величиной частотной дисперсии вблизи ω. Пятое слагаемое является малым по отношению к третьему и четвертому, поскольку зависит от вторых производных медленно меняющихся амплитуд поля.

Из (22) видно, что при вычислении плотности энергии немонохроматического поля в среде, в которой значителен вклад второго и более высоких порядков частотной дисперсии в материальное уравнение, необходимо учитывать слагаемые, обусловленные более низкими порядками дисперсии. Интересно отметить, что во втором порядке частотной дисперсии в выражение для U не входит слагаемое, пропорциональное $\omega^2(\partial^2\tilde{\chi}_{ij}(\omega)/\partial\omega^2)\tilde{E}_i^*\tilde{E}_j$. Вместо этого слагаемые в плотности энергии, связанные с высшими порядками частотной дисперсии, всегда содержат хотя бы одну производную по времени от амплитуды напряженности электрического поля и потому оказываются равными нулю для строго монохроматических полей.

4. СВЯЗЬ ТЕНЗОРА ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА С КОМПОНЕНТАМИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Плотности энергии и импульса электромагнитного поля и плотности потоков этих величин можно выразить также через компоненты $E_i(t,\omega)=\tilde{E}_i(t,\omega)e^{-i\omega t}$ вектора напряженности комплексного электрического поля. Формула (4) в этом случае принимает вид

$$P_i(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty d\tau \tilde{\chi}_{ij}(\tau)\int\limits_{-\infty}^\infty d\alpha e^{-i\alpha(t-\tau)}E_j(\alpha,\omega) + \text{c.c.} = \\ = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty d\alpha \tilde{\chi}_{ij}(\alpha)e^{-i\alpha t}E_j(\alpha,\omega) + \text{c.c.} \quad (23)$$

Здесь напряженность электрического поля $E_j(\alpha,\omega)$ существенно отлична от нуля только в небольшой области значений α вблизи ω, что позволяет разложить $\tilde{\chi}_{ij}(\alpha)$ в ряд по степеням $\alpha-\omega$. В результате (23) примет вид

$$P_i(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty d\alpha \left(\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}(\alpha-\omega)^n \frac{\partial^n}{\partial\omega^n}\tilde{\chi}_{ij}(\omega)\right) \times \\ \times e^{-i\alpha t}E_j(\alpha,\omega) + \text{c.c.} \quad (24)$$

Воспользовавшись формулой

$$(\alpha-\omega)^n = \sum_{q=0}^n \frac{n!}{q!(n-q)!}\alpha^q(-\omega)^{n-q}, \quad (25)$$

выполним обратное преобразование Фурье, в результате которого декартову компоненту $P_i(t)$ поляризации среды можно записать в виде

$$P_i(t) = \sum_{n=0}^\infty\sum_{q=0}^n \frac{i^n}{q!(n-q)!}(-i\omega)^{n-q} \times \\ \times \left(\frac{\partial^n}{\partial\omega^n}\tilde{\chi}_{ij}(\omega)\right)\partial_t^q E_j(t,\omega) + \text{c.c.} \quad (26)$$

Если ограничиться только вторым порядком частотной дисперсии, т. е. оставить в (26) слагаемые с производными напряженности электрического поля не выше второго порядка включительно, то получим выражение аналогичное (7):

$$P_i(t,\omega) = \chi_{ij}(\omega)E_j(t,\omega) + \beta_{ij}(\omega)\partial_t E_j(t,\omega) + \\ + \mu_{ij}(\omega)\partial_t^2 E_j(t,\omega). \quad (27)$$

Подчеркнем, что явный вид тензоров $\hat{\chi}$, $\hat{\beta}$ и $\hat{\mu}$ в (27) отличается от формул для компонент тензоров, входящих в (7) (для удобства сравнения двух материальных уравнений (27) и (7) мы использовали одинаковые обозначения).

Заметим, что равенство (27) можно получить из (26) двумя различными способами, в результате реализации которых получаются разные формулы для компонент входящих в (27) тензоров. С одной стороны, можно закончить ряд (26) слагаемым, соответствующим $n=2$. В этом случае

$$\chi_{ij}(\omega) = \left(1 + \omega\frac{\partial}{\partial\omega} + \frac{\omega^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}\right)\tilde{\chi}_{ij}(\omega), \quad (28)$$

$$\beta_{ij}(\omega) = i\left(\frac{\partial}{\partial\omega} + \omega\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}\right)\tilde{\chi}_{ij}(\omega), \quad (29)$$

$$\mu_{ij}(\omega) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}\tilde{\chi}_{ij}. \quad (30)$$

Такой способ строго соответствует определению второго порядка частотной дисперсии. С другой стороны, можно оставить весь ряд в (26), после чего исключить все слагаемые, соответствующие $q>2$. В результате тензоры $\hat{\chi}$, $\hat{\beta}$ и $\hat{\mu}$ в (27) будут задаваться формулами

$$\chi_{ij}(\omega) = \sum_{n=0}^\infty \frac{\omega^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial\omega^n}\tilde{\chi}_{ij}(\omega), \quad (31)$$

$$\beta_{ij}(\omega) = i\sum_{n=1}^\infty \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!}\frac{\partial^n}{\partial\omega^n}\tilde{\chi}_{ij}(\omega), \quad (32)$$

$$\mu_{ij}(\omega) = -\sum_{n=2}^\infty \frac{\omega^{n-2}}{2(n-2)!}\frac{\partial^n}{\partial\omega^n}\tilde{\chi}_{ij}(\omega). \quad (33)$$

Второй подход в большей степени характеризует роль каждого из порядков дисперсии в (27). Можно легко убедиться, что независимо от выбранного подхода в случае непоглощающей среды эти тензоры удовлетворяют тем же соотношениям внутренней симметрии: $\chi_{ij}(\omega) = \chi_{ji}(-\omega)$, $\beta_{ij}(\omega) = -\beta_{ji}(-\omega)$, $\mu_{ij}(\omega) = \mu_{ji}(-\omega)$, что и тензоры в материальном уравнении (7).

Именно эти соотношения необходимы для возможности сведения (8), (9) к балансным уравнениям (10), (11), процедура осуществления которого полностью аналогична подробно описанной в предыдущем разделе. В результате ее реализации можно найти формулы для плотностей энергии и импульса электромагнитного поля и плотностей потоков этих величин, которые имеют следующий вид:

$$U = \frac{1}{2}\left\{E_i^*\left(P_i+E_i\right) + B_i^*B_i + \left[\beta_{ij}(\omega)E_i^* - \right.\right. \\ \left.\left. -\mu_{ij}(\omega)\partial_t E_i^* + \mu_{ij}(\omega)E_i^*\partial_t\right]\partial_t E_j\right\} + \text{c.c.}, \quad (34)$$

$$g_p = e_{pij}\left(E_i+P_i\right)B_j^* + \frac{1}{2}\left\{-\beta_{ij}(\omega)E_i^* + \right. \\ \left. +\mu_{ij}(\omega)\partial_t E_i^* - \mu_{ij}(\omega)E_i^*\partial_t\right\}\partial_p E_j + \text{c.c.}, \quad (35)$$

$$S_k = e_{kij}E_i^*B_j + \text{c.c.}, \quad (36)$$

$$G_{pk} = \frac{1}{2}\delta_{pk}\left(P_iE_i^* + B_i^*B_i\right) - E_p^*\left(E_k+P_k\right) - \\ -B_p^*B_k + \text{c.c.}, \quad (37)$$

где P_i задается выражением (27).

Рассмотрим отдельно формулу (34), подставив в нее тензоры (31)–(33):

$$U=\frac{1}{2}\left\{E_i^*\left(\delta_{ij}+\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega\tilde{\chi}_{ij}(\omega)\right)\right)E_j+B_i^*B_i+\right.$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!}\left(\frac{\partial^n\tilde{\chi}_{ij}(\omega)}{\partial\omega^n}\right)\partial_tE_i^*\partial_tE_j+E_i^*\times$$
$$\times\left[\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\omega^n}{n!}\left(\frac{\partial^n\tilde{\chi}_{ij}(\omega)}{\partial\omega^n}\right)-\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\partial^n\tilde{\chi}_{ij}(\omega)}{\partial\omega^n}\right)\partial_t^2+\right.$$
$$\left.\left.+2i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{\partial^n\tilde{\chi}_{ij}(\omega)}{\partial\omega^n}\right)\partial_t\right]E_j\right\}+\text{c.c.}\quad(38)$$

В последнем выражении отчетливо видны часть, соответствующая формуле Бриллюэна, а также вклад всех более высоких порядков частотной дисперсии. Если же вместо тензоров (31)–(33) подставить в формулу (34) тензоры (28)–(30), то плотность энергии примет вид

$$U=\frac{1}{2}\left\{E_i^*\left[\delta_{ij}+\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega\tilde{\chi}_{ij}(\omega)\right)\right]E_j+B_i^*B_i+\right.$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\tilde{\chi}_{ij}(\omega)}{\partial\omega^2}\right)\partial_tE_i^*\partial_tE_j+$$
$$+E_i^*\left[\frac{\omega^2}{2}\left(\frac{\partial^2\tilde{\chi}_{ij}(\omega)}{\partial\omega^2}\right)+2i\left(\frac{\partial\tilde{\chi}_{ij}(\omega)}{\partial\omega}\right)\partial_t+\right.$$
$$\left.\left.+2i\omega\left(\frac{\partial^2\tilde{\chi}_{ij}(\omega)}{\partial\omega^2}\right)\partial_t-\left(\frac{\partial^2\tilde{\chi}_{ij}(\omega)}{\partial\omega^2}\right)\partial_t^2\right]E_j\right\}+\text{c.c.}\quad(39)$$

Ни выражение (38), ни более простое выражение (39) не сводятся к формуле Бриллюэна, если подставить в них монохроматические поля. Это противоречит результату, следующему из (22). Причина такого различия связана с различием тензоров оптической восприимчивости среды в выражениях (7) и (27). В случае подхода, основанного на использовании амплитуд поля, мы работаем с простым материальным уравнением, в котором каждому порядку дисперсии соответствует ровно одно слагаемое. При подходе, основанном на использовании компоненты поля, каждое из слагаемых может включать в себя разные порядки частотной дисперсии, в результате чего как само материальное уравнение, так и следующие из него формулы оказываются существенно более сложными.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе найдены все компоненты тензора энергии-импульса электромагнитного поля в непоглощающей однородной среде со стационарными характеристиками, демонстрирующей линейный отклик на внешнее воздействие и обладающей частотной дисперсией второго порядка. Полученные формулы для плотностей энергии и импульса, а также потоков этих величин могут быть записаны с помощью как декартовых компонент электрического поля, так и декартовых компонент комплексной амплитуды квазимонохроматического электрического поля. При записи плотности энергии строго монохроматического поля с помощью комплексной амплитуды плотность энергии в точности совпадает с формулой Бриллюэна, а все дополнительные слагаемые обращаются в нуль. Найденные выражения для плотностей энергии и импульса включают в себя дополнительные слагаемые, обусловленные частотной дисперсией второго порядка, а формулы для плотностей потоков энергии и импульса полностью совпадают с известными классическими формулами с точностью до замены простого выражения для поляризации среды на материальное уравнение, учитывающее второй порядок частотной дисперсии. Как следует из проведенных выше преобразований, при обобщении формулы Бриллюэна на более высокие порядки дисперсии нельзя отбрасывать составляющие плотности энергии поля, зависящие от производных по времени от его амплитуд. Использованный в работе метод может быть использован для получения компонент тензора энергии-импульса электромагнитного поля при учете более высоких порядков частотной дисперсии.

Финансирование. Исследование выполнено в рамках государственного задания МГУ им. М. В. Ломоносова

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Schwichtenberg, *Physics from Symmetry*, Springer, Berlin (2018).
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Том 1. Механика*, Физматлит, Москва (2004).
3. K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics*, Springer, Berlin (1982).
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Том 8. Электродинамика сплошных сред*, Физматлит, Москва (2005).
5. J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Wiley, New York (1998).
6. C. Heredia and J. Llosa, J. Phys. Commun. **5**, 055003 (2021).
7. S. Stallinga, Phys. Rev. E **73**, 026606 (2006).
8. M. Hillery and L. D. Mlodinow, Phys. Rev. A **30**, 1860 (1984).

9. P. D. Drummond, Phys. Rev. A **42**, 6845 (1990).

10. J. C. Garrison and R. Y. Chiao, Phys. Rev. A **70**, 053826 (2004).

11. P. S. Ryzhikov and V. A. Makarov, Phys. Wave Phenom. **32**, 227 (2024).

12. С. А. Ахманов, С. Ю. Никитин, *Физическая оптика*, Наука, Москва (2004).

13. I. Abram, Phys. Rev. A **35**, 4661 (1987).

14. S. Serulnik and Y. Ben-Aryeh, Quant. Opt.: J. Eur. Opt. Soc. B **3**, 63 (1991).

15. S. M. Barnett, J. Opt. B: Quant. Semiclass. Opt. **4**, S7 (2002).

16. A. Willner, H. Huang, Y. Yan et al., Adv. Opt. Photon. **7**, 66 (2015).

17. A. Trichili, C. Rosales-Guzmán, A. Dudley et al., Sci. Rep. **6**, 27674 (2016).

18. V. D'Ambrosio, E. Nagali, S. Walborn et al., Nat. Commun. **3**, 961 (2012).

19. W. Brullot, M. Vanbel, T. Swusten, and T. Verbiest, Sci. Adv. **2**, e1501349 (2016).

20. P. Polimeno, A. Magazzù, M. Iatì et al., J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf. **218**, 131 (2018).

21. Y. Tian, L. Wang, and G. Duan, Opt. Commun. **485**, 126712 (2020).

22. M. Padgett and R. Bowman, Nat. Photon. **5**, 343 (2011).

23. S. Franke-Arnold, L. Allen, and M. Padgett, Laser Photon. Rev. **2**, 299 (2008).

24. A. Yao and M. Padgett, Adv. Opt. Photon. **3**, 161 (2011).

25. M. Ritsch-Marte, Phil. Trans. R. Soc. A **375**, 20150437 (2017).

26. R. P. Cameron, J. B. Götte, and S. M. Barnett, Phys. Rev. A **94**, 032505 (2016).

27. В. М. Агранович, В. Л. Гинзбург, *Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов*, Наука, Москва (1965).

28. И. Н. Топтыгин, К. Левина, УФН **186**, 146 (2016).

29. Ю. А. Кирочкин, К. Н. Степанов, ЖЭТФ **104**, 3955 (1993).

30. P.W. Milonni, J. Mod. Opt. **42**, 1991 (1995).

31. С. А. Ахманов, В. А. Выслоух, А. С. Чиркин, *Оптика фемтосекундных импульсов*, Наука, Москва (1988).

32. А. М. Желтиков, *Сверхкороткие импульсы и методы нелинейной оптики*, Физматлит, Москва (2006).

33. С. А. Козлов, В. В. Самарцев, *Основы фемтосекундной оптики*, Физматлит, Москва (2009).

34. П. С. Рыжиков, В. А. Макаров, ЖЭТФ **162**, 45 (2022).

35. П. С. Рыжиков, В. А. Макаров, ЖЭТФ **165**, 152 (2024).

36. А. П. Виноградов, УФН **172**, 363 (2002).

37. I. Campos-Flores, J. L. Jiménez-Ramírez, and J. Roa-Neri, J. Electromagn. Analysis Appl. **9**, 203 (2017).

38. S. M. Barnett and R. Loudon, Phil. Trans. R. Soc. A **368**, 927 (2010).