

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ НА ГРАНИЦЕ ДВУХ ДИЭЛЕКТРИКОВ С ЗЕРКАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫМИ СЕЧЕНИЯМИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

А. Н. Даринский, В. Н. Любимов*

*Отделение «Институт кристаллографии им. А.В. Шубникова»
Курчатовского комплекса кристаллографии и фотоники
НИИ «Курчатовский институт»
119333, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 26 августа 2025 г.,
после переработки 10 сентября 2025 г.
Принята к публикации 10 сентября 2025 г.

Анализируется возможность существования поверхностной электромагнитной волны в бикристалле, составленном из оптически двуосных диэлектриков следующим образом. Обе части вырезаны из одного и того же кристалла, но ориентированы так, что сечения поверхностей показателей преломления сагиттальной плоскостью поверхностной волны в одной части бикристалла зеркально симметричны относительно границы сечениям в другой части. Зеркальную симметрию можно обеспечить тремя способами. Доказано, что при использовании одного из этих способов в бикристалле не существует поверхностной волны, а при другом способе поверхностная волна обязательно существует, исключая, возможно, изолированные направления распространения. В третьем варианте не удастся сделать определенный вывод о существовании поверхностной волны. Вместе с тем в бикристалле рассматриваемого типа, составленном из отрицательного оптически одноосного диэлектрика, поверхностной волны не существует ни в одном из вариантов. Если берется одноосный положительный диэлектрик, то тогда существование поверхностной волны определяется теми же условиями, что и в случае оптически двуосного диэлектрика.

DOI: 10.7868/S3034641X25110028

1. ВВЕДЕНИЕ

Поверхностные электромагнитные волны (ПЭВ) в конкретной структуре определенного типа, например, на границе двух однородных диэлектриков или на границе металл–анизотропный диэлектрик, могут быть найдены численно. Однако такой метод не годится для того, чтобы установить общие закономерности существования ПЭВ во всем классе структур какого-либо типа. Для этого требуется аналитическое рассмотрение.

В некоторых случаях, решая в явном виде граничную задачу, удается вывести точное или приближенное дисперсионное уравнение и проанализировать существование его решений [1–18]. Такая возможность имеется при достаточно симметрич-

ной ориентации анизотропных сред, причем для ряда геометрий распространения ПЭВ находится точное аналитическое решение точного дисперсионного уравнения [4, 14–18]. Для произвольной геометрии распространения ПЭВ решение приходится искать численно, см., например, [3, 12, 19–21], поскольку дисперсионное уравнение оказывается слишком сложным для анализа, даже когда нормальные компоненты волнового вектора плоских парциальных волн находятся из решения биквадратного уравнения. Отметим, что в общем случае нормальные компоненты будут корнями полного алгебраического уравнения четвертой степени [22].

Выходом в сложившейся ситуации оказывается применение свойств поверхностных импедансов сред к анализу дисперсионных уравнений, представленных в форме определителя матрицы, образованной из компонент импедансов. Не выписывая компоненты импедансов в явном виде через материальные константы и углы, задающие геометрию распро-

* E-mail: Alexandre_Dar@mail.ru

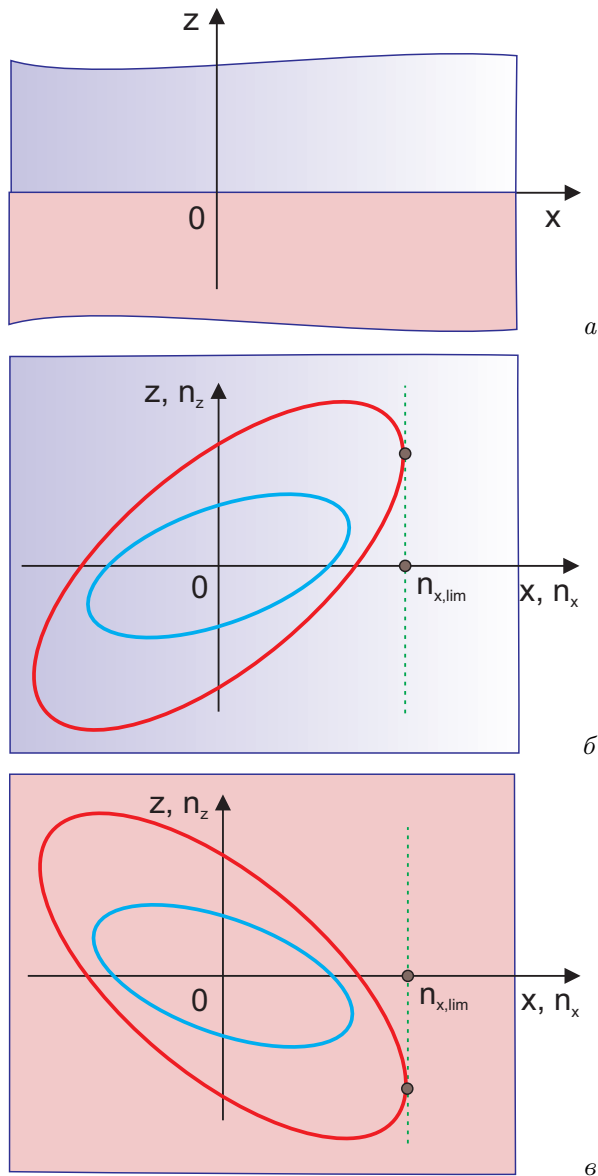


Рис. 1. Бикристалл с границей $z = 0$ в текущей системе координат xyz (а) и сечения поверхностей показателя преломления объемных волн $n(\mathbf{m})$ на заданной частоте плоскостью xz в верхней (б) и нижней (в) частях бикристалла. Плоскость xz — сагиттальная плоскость ПЭВ. Единичный вектор $\mathbf{m} = (m_x, m_z)$ — волновая нормаль объемной волны, $n_{x,z} = nm_{x,z}$. Сечения на рис. б и в зеркально симметричны относительно плоскости $z = 0$. Пунктирная линия — касательная к сечению. У объемных волн $n_x \leq n_{x,\text{lim}}$

странения, удастся прийти к ряду заключений относительно корней дисперсионного уравнения. Данный метод позволил проанализировать существование ПЭВ на границе двух полубесконечных однородных анизотропных, бианизотропных и магнитооптически активных сред, ПЭВ в одномерных фо-

тонных кристаллах (периодических сверхрешетках) [23–29], ПЭВ при наличии пленки металла в указанных структурах [30]. В частности, в рамках анализа одного дисперсионного уравнения были сделаны выводы относительно максимального числа ПЭВ в пределах запрещенной зоны в сверхрешетках с произвольным числом слоев в периоде [24, 27–29]. Для того чтобы выяснить этот вопрос, выписывая дисперсионное уравнение через явные выражения компонент трансфер-матрицы, что вполне реализуемо, например, в случае изотропных диэлектриков, см. [31], необходимо получать и анализировать дисперсионное уравнение отдельно для каждого заданного числа слоев.

Для произвольного бикристалла, образованного из двух диэлектриков, удастся установить только то, что может существовать не более одной ПЭВ [24, 25]. В данной работе будет доказано, что в определенном типе бикристаллов, составленных из двух одинаковых оптически двусосных кристаллов, ПЭВ не существует, однако в похожем бикристалле ПЭВ обязательно существует, за исключением изолированных направлений распространения. Бикристаллы различаются ориентацией частей относительно друг друга, но в обоих вариантах сечение поверхности показателей преломления одной половины бикристалла в сагиттальной плоскости ПЭВ получается из сечения поверхности показателей преломления другой половины отражением в плоскости границы (рис. 1). Напомним, что поверхность показателей преломления описывается уравнением Френеля [22].

Статья организована следующим образом. В разд. 2 вводится матрица, которая далее будет называться импедансом полубесконечной среды. В разд. 3 приводятся свойства импеданса. В разд. 4 доказывается невозможность существования ПЭВ в одном из вариантов бикристалла с зеркально-симметричными сечениями полостей поверхности показателей преломления и возможность существования ПЭВ в двух других вариантах такого бикристалла, причем в одном из этих двух случаев ПЭВ почти всегда существует. Полученные результаты обсуждаются в Заключение. В Приложении рассматривается случай совпадения нормальных волновых чисел неоднородных парциальных мод.

2. ИМПЕДАНС ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ СРЕДЫ

ПЭВ, распространяющаяся по границе $z = 0$ вдоль оси x (рис. 1) с частотой ω и тангенциальным волновым числом $k_x > 0$, ищется в виде

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}(z) \\ \mathbf{H}(z) \end{pmatrix} e^{i(k_x x - \omega t)}, \quad (1)$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, функции $\mathbf{E}(z)$ и $\mathbf{H}(z)$ описывают зависимость электрического и магнитного полей от z . Тангенциальные компоненты $E_{x,y}(z)$ и $H_{x,y}(z)$ могут быть найдены из системы четырех уравнений

$$\frac{d\xi}{dz} = i\hat{\mathbf{N}}\xi, \quad (2)$$

где четырехкомпонентный вектор ξ включает $E_{x,y}(z)$ и $H_{x,y}(z)$, а явный вид матрицы $\hat{\mathbf{N}}$ зависит от порядка следования $E_{x,y}(z)$ и $H_{x,y}(z)$, см., например, [24, 32–35]. Если

$$\xi(z) = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}(z) = \begin{pmatrix} -E_y \\ H_y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(z) = \begin{pmatrix} H_x \\ E_x \end{pmatrix}, \quad (3)$$

то тогда, согласно [24],

$$\hat{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{N}}_1 & \hat{\mathbf{N}}_2 \\ \hat{\mathbf{N}}_3 & \hat{\mathbf{N}}_1^t \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где

$$\hat{\mathbf{N}}_1 = \begin{pmatrix} -k_x \frac{\mu_{xz}}{\mu_{zz}} & \omega m_{xy} \\ -\omega \epsilon_{xy} & -k_x \frac{\epsilon_{xz}}{\epsilon_{zz}} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$\hat{\mathbf{N}}_2 = \begin{pmatrix} \omega m_{xx} & 0 \\ 0 & \omega \epsilon_{xx} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$\hat{\mathbf{N}}_3 = \begin{pmatrix} \omega \epsilon_{yy} - \frac{k_x^2}{\omega \mu_{zz}} & k_x \left(\frac{\epsilon_{yz}}{\epsilon_{zz}} - \frac{\mu_{yz}}{\mu_{zz}} \right) \\ k_x \left(\frac{\epsilon_{yz}}{\epsilon_{zz}} - \frac{\mu_{yz}}{\mu_{zz}} \right) & \omega m_{yy} - \frac{k_x^2}{\omega \epsilon_{zz}} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

символ « t » обозначает транспонирование,

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} &= \epsilon_{ij} - \epsilon_{iz} \epsilon_{jz} \epsilon_{zz}^{-1}, \\ m_{ij} &= \mu_{ij} - \mu_{iz} \mu_{jz} \mu_{zz}^{-1}, \quad i, j = x, y. \end{aligned} \quad (8)$$

В выражениях (5)–(7) используется метрическая система единиц СИ.

Компоненты ϵ_{ij} и μ_{ij} диэлектрической $\hat{\epsilon}$ и магнитной $\hat{\mu}$ проницаемостей заданы относительно текущей системы координат. Будем считать, что $\hat{\epsilon}$ и $\hat{\mu}$ — вещественные тензоры, т. е. поглощение не учитывается, и, кроме того,

$$\hat{\epsilon} > 0, \quad \hat{\mu} > 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial(\omega \hat{\epsilon})}{\partial \omega} > 0, \quad \frac{\partial(\omega \hat{\mu})}{\partial \omega} > 0. \quad (10)$$

Неравенства (10) следуют из требования положительности энергии электромагнитного поля при наличии частотной дисперсии [36]. Здесь и далее неравенство $\hat{\mathbf{Q}} > 0$ ($\hat{\mathbf{Q}} < 0$) означает положительную (отрицательную) определенность матрицы $\hat{\mathbf{Q}}$.

В однородной среде уравнение (2) в общем случае имеет четыре решения $\xi_\alpha(z) = \xi_\alpha \exp(ik_{z,\alpha} z)$, $\alpha = 1, 2, 3, 4$, где ξ_α — собственные векторы матрицы $\hat{\mathbf{N}}$,

$$\xi_\alpha = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_\alpha \\ \mathbf{V}_\alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_\alpha = \begin{pmatrix} -E_{\alpha,y} \\ H_{\alpha,y} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}_\alpha = \begin{pmatrix} H_{\alpha,x} \\ E_{\alpha,x} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$k_{z,\alpha}$ — собственные значения $\hat{\mathbf{N}}$.

При заданном значении k_x нас будет интересовать интервал частот $\omega < \omega_{lim} = ck_x/n_{x,lim}(\omega_{lim})$. В этом интервале все четыре $k_{z,\alpha}$ оказываются комплексными величинами, и, соответственно, этот интервал наиболее выгоден с точки зрения существования ПЭВ. Комплексные $k_{z,\alpha}$ появляются комплексно-сопряженными парами, поскольку $\hat{\mathbf{N}}$ — вещественная матрица.

Пронумеруем решения так, чтобы

$$k_{z,\alpha} = k_{z,\alpha+2}^*, \quad \text{Im}(k_{z,\alpha}) > 0, \quad \alpha = 1, 2, \quad (12)$$

где символ « $*$ » обозначает комплексное сопряжение, и ищем ПЭВ в виде

$$\xi^{(+)} = \sum_{\alpha=1}^2 b_\alpha \xi_\alpha e^{ik_{z,\alpha} z}, \quad z > 0, \quad (13)$$

$$\xi^{(-)} = \sum_{\alpha=3}^4 b_\alpha \xi_\alpha e^{ik_{z,\alpha} z}, \quad z < 0, \quad (14)$$

где b_α — неизвестные коэффициенты. Имея в виду (13) и (14), введем две матрицы 2×2 $\hat{\mathbf{Z}}^{(\pm)}$ посредством соотношений

$$\mathbf{V}_\alpha = i\hat{\mathbf{Z}}^{(+)} \mathbf{U}_\alpha, \quad \mathbf{V}_{\alpha+2} = -i\hat{\mathbf{Z}}^{(-)} \mathbf{U}_{\alpha+2}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (15)$$

при $z = 0$, так что

$$\hat{\mathbf{Z}}^{(\pm)} = \mp i \hat{\mathbf{V}}^{(\pm)} \hat{\mathbf{U}}^{(\pm)-1}, \quad (16)$$

где $\hat{\mathbf{V}}^{(+)}$ и $\hat{\mathbf{U}}^{(+)}$ — матрицы 2×2 , столбцами которых будут векторы $\mathbf{V}_\alpha$ и $\mathbf{U}_\alpha$, $\alpha = 1, 2$. Матрицы $\hat{\mathbf{V}}^{(-)}$ и $\hat{\mathbf{U}}^{(-)}$ строятся аналогично из векторов $\mathbf{V}_\alpha$ и $\mathbf{U}_\alpha$, $\alpha = 3, 4$. Матрицы $\hat{\mathbf{Z}}^{(\pm)}$ будем называть импедансами полубесконечных сред.

При заданной геометрии распространения и заданном значении k_x могут существовать определенные частоты ω_d , на которых матрица $\hat{\mathbf{N}}$ имеет совпадающие комплексные собственные значения,

$k_{z,1} = k_{z,2} = k_{z,d}$. Поскольку матрица $\hat{\mathbf{N}}$ не является эрмитовой, может быть две ситуации: 1) $\hat{\mathbf{N}}$ диагонализирована и по-прежнему имеет четыре линейно независимых собственных вектора; 2) $\hat{\mathbf{N}}$ не диагонализирована и имеет только два собственных вектора, $\xi_d = \xi_1 = \xi_2$ и ξ_d^* , соответствующие собственным значениям $k_{z,d}$ и $k_{z,d}^*$. В первом случае в выражениях (13)–(16), по сути дела, ничего не меняется. Изменения в (13)–(16) во втором случае обсуждаются в Приложении. Однако в обоих случаях совпадение собственных значений не сказывается на свойствах импеданса, приведенных ниже.

3. СВОЙСТВА ИМПЕДАНСА

Полагаем, что на границе в бикристалле непрерывны тангенциальные компоненты электрического и магнитного полей. В этом случае, в силу (11)–(15), дисперсионное уравнение ПЭВ сводится к

$$\det(\hat{\mathbf{Z}}_1^{(+)} + \hat{\mathbf{Z}}_2^{(-)}) = 0, \quad (17)$$

где $\hat{\mathbf{Z}}_1^{(+)}$ — импеданс среды 1, занимающей область $z > 0$, а $\hat{\mathbf{Z}}_2^{(-)}$ — импеданс среды 2, занимающей область $z < 0$. Наличие корней у этого уравнения при заданном k_x может быть выяснено с помощью свойств импедансов (16) при $\omega \leq \omega_{lim}$ [23–25]:

$$\hat{\mathbf{Z}}^{(+)} = \hat{\mathbf{Z}}^{(-)*}, \quad (18)$$

$$\hat{\mathbf{Z}}^{(\pm)} = \hat{\mathbf{Z}}^{(\pm)\dagger}, \quad (19)$$

где символ « $\dagger$ » обозначает эрмитово сопряжение,

$$\hat{\mathbf{Z}}^{(\pm)} > 0 \text{ при } \omega \rightarrow 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{Z}}^{(\pm)}}{\partial \omega} < 0, \quad (21)$$

$$\det(\text{Re}[\hat{\mathbf{Z}}^{(\pm)}]) \neq 0 \text{ при } \omega < \omega_{lim}, \quad (22)$$

$$\text{Re}[\hat{\mathbf{Z}}^{(\pm)}] > 0 \text{ при } \omega < \omega_{lim}, \quad (23)$$

$$\det(\text{Re}[\hat{\mathbf{Z}}^{(\pm)}]) = 0 \text{ при } \omega = \omega_{lim}. \quad (24)$$

Равенство (18) выполняется, поскольку

$$\xi_{\alpha+2} = \xi_{\alpha}^*, \quad \alpha = 1, 2, \quad (25)$$

в силу (12) и того факта, что $\hat{\mathbf{N}}$ — действительная матрица.

Соотношение (19) следует из того, что, согласно (11), произведение $P_{z,\alpha} = \xi_{\alpha}^{\dagger} \hat{\mathbf{T}} \xi_{\alpha} / 4$, где $\hat{\mathbf{T}}$ — матрица 4×4 , построенная из единичной $\hat{\mathbf{I}}$ и нулевой $\hat{\mathbf{O}}$ матриц 2×2 ,

$$\hat{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{O}} & \hat{\mathbf{I}} \\ \hat{\mathbf{I}} & \hat{\mathbf{O}} \end{pmatrix}, \quad (26)$$

есть компонента z потока энергии парциальной моды α , и эта компонента равна нулю, если $\text{Im } k_{z,\alpha} \neq 0$, а также при $\omega = \omega_{lim}$. На частоте $\omega = \omega_{lim}$ пара комплексно-сопряженных величин $k_{z,\alpha} = k_{z,\alpha+2}^*$ сливаются в одну вещественную $k_{z,d}$, и в результате уравнение (2) имеет решение в виде так называемой предельной объемной волны, поток энергии которой параллелен плоскости $z = 0$. На рис. 1 предельной объемной волне соответствует точка касания перпендикуляра к оси x сечения поверхности показателей преломления.

Кроме того, в процессе вывода свойства (19) используется ортогональность $\xi_{\alpha}^{\dagger} \hat{\mathbf{T}} \xi_{\beta} = 0$ собственных векторов с $\alpha \neq \beta$, следующая из равенства

$$(\hat{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{N}})^t = \hat{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{N}}. \quad (27)$$

Матрица $\hat{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{N}}$ оказывается симметричной, так как в (4) блоки 2×2 $\hat{\mathbf{N}}_2$ и $\hat{\mathbf{N}}_3$ — симметричные матрицы, и в матрице $\hat{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{N}}$ они стоят на главной диагонали. Отметим, что (27) обеспечивает постоянство компоненты z потока энергии в отсутствие поглощения, бианизотропии и магнитооптической активности.

Неравенство (20) следует из положительной определенности энергии статических электрического и магнитного полей¹⁾. Отрицательная определенность производной импеданса по частоте, т.е. свойство (21), следует из связи между этой производной и энергией электромагнитного поля [25], причем (21) выполняется при любой частотной зависимости диэлектрической и магнитной проницаемостей, удовлетворяющей условию (10). Отметим, что свойство (21) было ранее доказано в [23], но иным, чем в [25], способом, и предполагалось, что материальные константы не зависят от частоты.

Ввиду (13)–(18) уравнение $\det(\text{Re}[\hat{\mathbf{Z}}^{(\pm)}]) = 0$ будет дисперсионным уравнением для ПЭВ в однородной бесконечной среде, но ПЭВ в таком случае не может существовать, поэтому имеет место неравенство (22). Данное неравенство может быть также доказано алгебраически по аналогии с доказательством этого же неравенства применительно к импедансу полубесконечной периодической сверхрешетки, см. [24], Приложение В.

Положительная определенность матриц $\text{Re}[\hat{\mathbf{Z}}^{(\pm)}]$, свойство (23), следует из (20) и (22).

В силу (18) $\det(\text{Re}[\hat{\mathbf{Z}}^{(\pm)}]) = 0$ при $\omega = \omega_{lim}$, поскольку упомянутая выше предельная объемная волна фактически является решением граничной задачи на плоскости $z = \text{const}$ в однородной среде.

¹⁾ Точнее, $\hat{\mathbf{Z}}^{(\pm)} \propto 1/\omega \rightarrow +\infty$ в пределе $\omega \rightarrow 0$.

Из (18)–(23) следуют свойства собственных значений λ_α , $\alpha = 1, 2$, импедансов $\hat{\mathbf{Z}}^{(\pm)}$ при заданном значении k_x :

$$\text{Im}(\lambda_\alpha) = 0 \text{ и } \frac{\partial \lambda_\alpha}{\partial \omega} < 0 \text{ при } \omega \leq \omega_{lim}, \quad (28)$$

$$\lambda_\alpha > 0 \text{ при } \omega \rightarrow 0, \quad (29)$$

$$\lambda_\alpha, \alpha = 1, 2, \text{ убывают монотонно с увеличением } \omega \text{ в интервале } \omega < \omega_{lim}, \quad (30)$$

$$\text{только одно из } \lambda_\alpha, \alpha = 1, 2, \text{ может один раз обратиться в нуль} \quad (31)$$

$$\text{в интервале } \omega < \omega_{lim}.$$

Заметим, что $\partial \lambda_\alpha / \partial \omega$ не являются собственными значениями матриц $\partial \hat{\mathbf{Z}}^{(\pm)} / \partial \omega$.

4. ПОВЕРХНОСТНАЯ ВОЛНА В БИКРИСТАЛЛАХ ОПРЕДЕЛЕННОГО ТИПА

Свойства импеданса $\hat{\mathbf{Z}}^{tot} = \hat{\mathbf{Z}}_1^{(+)} + \hat{\mathbf{Z}}_2^{(-)}$ совпадают со свойствами (18)–(23) импеданса полубесконечной среды, поэтому собственные значения λ_α^{tot} импеданса $\hat{\mathbf{Z}}^{tot}$ обладают свойствами (28)–(31). Поскольку уравнение (17) приводит к условию $\lambda_1^{tot} \lambda_2^{tot} = 0$, в соответствии с (31) оно может иметь только один корень при заданном k_x , так что при заданном значении k_x на границе между полубесконечными оптически анизотропными диэлектриками может существовать не более одной ПЭВ²⁾ [24, 25].

Более точные утверждения относительно существования ПЭВ удастся сделать применительно к бикристаллам с зеркально-симметричными сечениями поверхности показателей преломления (рис. 1). Для того чтобы получить такой бикристалл, в однородном оптически анизотропном диэлектрике произвольно выбирается система координат xyz , затем диэлектрик разрезается перпендикулярно оси z и нижняя половина поворачивается на 180° вокруг одной из трех координатных осей. При повороте вокруг оси x или y нижняя грань нижней половины тоже должна быть перпендикулярна оси z . В итоге можно создать три бикристалла, имеющих одни и те же сечения поверхностей показателей преломления частей плоскостью xz (рис. 1 б, в), но различных по отношению к существованию ПЭВ в направлении оси x . Рассмотрим каждый из них.

²⁾ В бианизотропных или (и) магнитооптически активных диэлектриках две ПЭВ могут существовать [25].

4.1. Поворот на 180° вокруг оси z

Вследствие поворота компоненты xz и yz диэлектрической и магнитной проницаемостей нижней части, отнесенные к выбранной системе координат, меняют знаки. Тогда, согласно (4), векторы $\xi_\alpha^{(-)}$ и волновые числа $k_{z,\alpha}^{(-)}$, характеризующие моды в этой части, находятся из условия

$$\hat{\mathbf{N}}^{(-)} \xi_\alpha^{(-)} = k_{z,\alpha}^{(-)} \xi_\alpha^{(-)}, \quad \alpha = 1, \dots, 4, \quad (32)$$

где

$$\hat{\mathbf{N}}^{(-)} = -\hat{\mathbf{S}} \hat{\mathbf{N}} \hat{\mathbf{S}}, \quad (33)$$

$\hat{\mathbf{S}}$ — матрица 4×4 ,

$$\hat{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{P}} & \hat{\mathbf{0}} \\ \hat{\mathbf{0}} & -\hat{\mathbf{P}} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Считаем, что

$$k_{z,\alpha+2}^{(-)} = k_{z,\alpha}^{(-)*}, \quad \text{Im}(k_{z,\alpha}^{(-)}) > 0, \quad \alpha = 1, 2. \quad (35)$$

Волновое поле в полупространстве $z < 0$ ищется в виде

$$\xi^{(-)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha=3}^4 b_\alpha^{(-)} \xi_\alpha^{(-)} e^{i(k_x x + k_{z,\alpha}^{(-)} z - \omega t)}, \quad (36)$$

а импеданс полупространства $z < 0$ определяется соотношением

$$\mathbf{V}_\alpha^{(-)} = -i \hat{\mathbf{Z}}_2^{(-)} \mathbf{U}_\alpha^{(-)}, \quad \alpha = 3, 4. \quad (37)$$

Из (33) и (35) следует, что

$$k_{z,\alpha}^{(-)} = -k_{z,\alpha+2}^{(-)}, \quad k_{z,\alpha+2}^{(-)} = -k_{z,\alpha}^{(-)}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (38)$$

$$\xi_\alpha^{(-)} = \hat{\mathbf{S}} \xi_{\alpha+2}^{(-)}, \quad \xi_{\alpha+2}^{(-)} = \hat{\mathbf{S}} \xi_\alpha^{(-)}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (39)$$

где $k_{z,\alpha}$ и ξ_α — собственные значения и собственные векторы матрицы $\hat{\mathbf{N}}$, характеризующей верхнюю часть бикристалла. Соответственно,

$$\mathbf{U}_{\alpha+2}^{(-)} = \hat{\mathbf{P}} \mathbf{U}_\alpha, \quad \mathbf{V}_{\alpha+2}^{(-)} = -\hat{\mathbf{P}} \mathbf{V}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2. \quad (40)$$

Подставляя (40) в (37), получаем

$$\hat{\mathbf{P}} \mathbf{V}_\alpha = i \hat{\mathbf{Z}}_2^{(-)} \hat{\mathbf{P}} \mathbf{U}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2. \quad (41)$$

Положив импеданс верхней половины равным импедансу $\hat{\mathbf{Z}}^{(+)}$ (15),

$$\hat{\mathbf{Z}}_1^{(+)} \equiv \hat{\mathbf{Z}}^{(+)} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{12}^* & Z_{22} \end{pmatrix}, \quad (42)$$

и сравнив (41) с определением $\hat{\mathbf{Z}}^{(+)}$, находим, что

$$\hat{\mathbf{Z}}_2^{(-)} = \hat{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{Z}}^{(+)}\hat{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} Z_{11} & -Z_{12} \\ -Z_{12}^* & Z_{22} \end{pmatrix}. \quad (43)$$

В итоге уравнение (17) сводится к равенствам

$$Z_{11} = 0 \text{ или } Z_{22} = 0, \quad (44)$$

но ни одно из них не может выполняться в интервале $\omega < \omega_{lim}$, поскольку, ввиду (19)–(22), диагональные элементы импеданса $\hat{\mathbf{Z}}^{(+)}$ будут всегда действительными и положительными в этом интервале. Следовательно,

$$\begin{aligned} &\text{ПЭВ не существует, если части} \\ &\text{бикристалла повернуты вокруг оси } z \quad (45) \\ &\text{на } 180^\circ \text{ относительно друг друга.} \end{aligned}$$

4.2. Поворот на 180° вокруг оси y

Знаки компонент xy и yz диэлектрической и магнитной проницаемостей нижней части бикристалла меняются на противоположные, а тогда, согласно (4), в этой части

$$\hat{\mathbf{N}}^{(-)} = \hat{\mathbf{S}}\hat{\mathbf{N}}\hat{\mathbf{S}}, \quad \hat{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{P}} & \hat{\mathbf{0}} \\ \hat{\mathbf{0}} & \hat{\mathbf{P}} \end{pmatrix}, \quad (46)$$

поэтому

$$k_{z,\alpha}^{(-)} = k_{z,\alpha}, \quad \xi_\alpha^{(-)} = \hat{\mathbf{S}}\xi_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4. \quad (47)$$

Из (15), (18), (19) и (37) следует, что

$$\hat{\mathbf{Z}}_2^{(-)} = \hat{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{Z}}^{(+)}\hat{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} Z_{11} & -Z_{12}^* \\ -Z_{12} & Z_{22} \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Подставляя (42) и (48) в (17), получаем уравнение

$$Z_{11}Z_{22} - (\text{Im}[Z_{12}])^2 = 0, \quad (49)$$

которое может иметь решение, т. е. ПЭВ может существовать. В данном случае, по-видимому, нельзя сделать более определенные выводы относительно ПЭВ. Вместе с тем, вспоминая свойства элементов Z_{11} и Z_{22} , можно заметить, что ПЭВ не существует, если $\text{Im}[Z_{12}] = 0$ при $\omega = \omega_{lim}$. Мнимая часть элемента Z_{12} обращается в нуль на этой частоте, когда в предельной объемной волне $E_x = H_x = 0$ (см. ниже).

4.3. Поворот на 180° вокруг оси x

Компоненты xz и xy диэлектрической и магнитной проницаемостей меняют знаки, и в (33)

$$\hat{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} -\hat{\mathbf{I}} & \hat{\mathbf{0}} \\ \hat{\mathbf{0}} & \hat{\mathbf{I}} \end{pmatrix}. \quad (50)$$

Сохранив индексацию мод (35), имеем выражение (36) для поля ПЭВ в нижней половине, а также сохраняются равенства (39), но вместо (40)

$$\mathbf{U}_{\alpha+2}^{(-)} = -\mathbf{U}_\alpha, \quad \mathbf{V}_{\alpha+2}^{(-)} = \mathbf{V}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2. \quad (51)$$

В этом случае из (37) получается

$$\mathbf{V}_\alpha = i\hat{\mathbf{Z}}_2^{(-)}\mathbf{U}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2. \quad (52)$$

Сравнив (52) с (15), заключаем, что

$$\hat{\mathbf{Z}}_2^{(-)} = \hat{\mathbf{Z}}^{(+)}, \quad (53)$$

поэтому $\hat{\mathbf{Z}}^{tot} = 2\hat{\mathbf{Z}}^{(+)}$, и дисперсионное уравнение (17), принимая форму

$$\det(\hat{\mathbf{Z}}^{(+)}) = Z_{11}Z_{22} - |Z_{12}|^2 = 0, \quad (54)$$

совпадает, ввиду (11) и (15), с дисперсионным уравнением ПЭВ в полубесконечной среде при условии $H_x = E_x = 0$ на границе $z = 0$.

Согласно (24)

$$\det(\text{Re}[\hat{\mathbf{Z}}^{(+)})] = Z_{11}Z_{22} - (\text{Re}[Z_{12}])^2 = 0 \quad (55)$$

при $\omega = \omega_{lim}$. Следовательно, на этой частоте

$$\det(\hat{\mathbf{Z}}^{(+)}) = -(\text{Im}[Z_{12}])^2 \leq 0. \quad (56)$$

Если $\det[\hat{\mathbf{Z}}^{(+)}\omega_{lim}] < 0$, то одно из двух собственных значений импеданса $\hat{\mathbf{Z}}^{(+)}$ оказывается отрицательным, и, ввиду (28)–(30), оно должно пройти через нуль в интервале $\omega < \omega_{lim}$, поэтому уравнение (54) обязательно имеет решение в интервале $\omega < \omega_{lim}$, если $\text{Im}[Z_{12}(\omega_{lim})] \neq 0$.

В том случае, когда $\text{Im}[Z_{12}(\omega_{lim})] = 0$, в интервале $\omega < \omega_{lim}$ решения нет. Действительно, при $\text{Im}[Z_{12}(\omega_{lim})] = 0$ имеем $\det[\hat{\mathbf{Z}}^{(+)}\omega_{lim}] = 0$, поэтому одно из собственных значений импеданса $\hat{\mathbf{Z}}^{(+)}$ обращается в нуль, а второе собственное значение равно $Z_{11} + Z_{22}$. В силу свойств собственных значений, в данной ситуации необходимым и достаточным условием существования ПЭВ в интервале $\omega < \omega_{lim}$ является $Z_{11} + Z_{22} < 0$ при $\omega = \omega_{lim}$, но это неравенство не может выполняться, поскольку $Z_{11}, Z_{22} > 0$ в интервале $\omega < \omega_{lim}$ (см. обсуждение уравнений (44)).

Если $\text{Im}[Z_{12}(\omega_{lim})] = 0$ и, соответственно, $\det[\hat{\mathbf{Z}}^{(+)}(\omega_{lim})] = 0$, то тогда на частоте ω_{lim} в полубесконечной среде существует волна, удовлетворяющая условию $H_x = E_x = 0$ на границе $z = 0$. Выясним, что представляет из себя эта волна.

Прежде всего отметим, что матрица $\hat{\mathbf{N}}$ имеет одно действительное собственное значение $k_{z,d}$ и два комплексных собственных значения $k_{z,2} = k_{z,4}^*$ на частоте ω_{lim} . Два собственных значения, будучи комплексными при $\omega < \omega_{lim}$, именно, $k_{z,1}$ и $k_{z,3} = k_{z,1}^*$, сливаются в одно собственное значение $k_{z,d}$, и система уравнений (2) имеет три решения $\xi_\alpha \exp(ik_{z,\alpha}z)$, $\alpha = d, 2, 4$, и четвертое решение $(\xi_g + iz\xi_d) \exp(ik_{z,d}z)$, где ξ_α , $\alpha = d, 2, 4$, — собственные векторы матрицы $\hat{\mathbf{N}}$, а ξ_g — обобщенный собственный вектор, удовлетворяющий соотношению (A.1). Решение $\xi_d \exp(ik_{z,d}z)$ будет предельной объемной волной.

Учитывая (12), в области $z > 0$ волну с амплитудой, не возрастающей при $z \rightarrow +\infty$ на частоте ω_{lim} , ищем в виде

$$\xi^{(+)}(z) = \sum_{\alpha=d,2} b_\alpha \xi_\alpha \exp(ik_\alpha z). \quad (57)$$

Из равенства (27) следует, что

$$\xi_d^t \hat{\mathbf{T}} \xi_d = \xi_d^t \hat{\mathbf{T}} \xi_2 = 0, \quad \xi_2^t \hat{\mathbf{T}} \xi_2 \neq 0, \quad (58)$$

где $\hat{\mathbf{T}}$ — матрица (26). Заметим, что $\xi_d^t \hat{\mathbf{T}} \xi_d = 0$ соответствует тому, что компонента z потока энергии предельной объемной волны равна нулю, так как собственный вектор действительной матрицы $\hat{\mathbf{N}}$, отвечающий действительному собственному значению, может быть выбран действительным.

Если $H_x = E_x = 0$, то, согласно (11), $\mathbf{V}^{(+)} = 0$. Поэтому $\xi^{(+)\dagger} \hat{\mathbf{T}} \xi^{(+)} = 2\mathbf{U}^{(+)\dagger} \mathbf{V}^{(+)} = 0$, откуда, ввиду (58), следует, что $b_2 = 0$.

В итоге получается, что только сама предельная объемная волна $\xi_d \exp(ik_{z,d}z)$ может удовлетворять условию $H_x = E_x = 0$. Эта волна и условие ее существования находятся из системы уравнений (2) применительно к случаю $H_x = E_x = 0$:

$$\begin{aligned} k_x \frac{\mu_{xz}}{\mu_{zz}} E_y + \omega m_{xy} H_y &= -k_{z,d} E_y, \\ \omega \epsilon_{xy} E_y - k_x \frac{\epsilon_{xz}}{\epsilon_{zz}} H_y &= k_{z,d} H_y, \\ -\left(\omega \epsilon_{yy} - \frac{k_x^2}{\omega \mu_{zz}} \right) E_y + k_x \left(\frac{\epsilon_{yz}}{\epsilon_{zz}} - \frac{\mu_{yz}}{\mu_{zz}} \right) H_y &= 0, \\ -k_x \left(\frac{\epsilon_{yz}}{\epsilon_{zz}} - \frac{\mu_{yz}}{\mu_{zz}} \right) E_y + \left(\omega m_{yy} - \frac{k_x^2}{\omega \epsilon_{zz}} \right) H_y &= 0. \end{aligned} \quad (59)$$

Данная система имеет решение при выполнении одного условия типа равенства для ϵ_{ij} и μ_{ij} .

Таким образом,

ПЭВ обязательно существует, когда части бикристалла развернуты на 180° вокруг оси x относительно друг друга, если в предельной объемной волне, принадлежащей внешней полости поверхности показателей преломления, $H_x \neq 0$ или (и) $E_x \neq 0$;
ПЭВ не существует, если $H_x = E_x = 0$.

Компоненты диэлектрической и магнитной проницаемостей зависят от трех углов, которые определяют ориентацию границы и направление распространения на ней, поэтому в общем случае на выбранной границе, т. е., при заданных двух углах, ПЭВ может не существовать лишь для отдельных направлений распространения, поскольку имеется одно условие для третьего угла.

Например, если магнитная проницаемость изотропна, $\mu_{ij} = \mu \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера, то $k_{z,d} = 0$ или $k_{z,d} = -k_x \epsilon_{xz} / \epsilon_{zz}$. В последнем варианте, которому как раз и соответствует рис. 1, получаемые выражения будут особенно простыми. Если $k_{z,d} \neq 0$, то $E_y = \epsilon_{yz} = 0$ и $H_y \neq 0$, поэтому при заданной ориентации нормали к границе (ось z) угол, задающий ориентацию оси x , должен быть таким, чтобы $\epsilon_{yz} = 0$.

На выбранной границе xy компонента ϵ_{yz} меняет знак при повороте системы координат вокруг оси z на 180° . Отсюда следует, что на любой границе в бикристалле с изотропной магнитной проницаемостью есть положение оси x , для которого $\epsilon_{yz} = 0$, и в этом направлении ПЭВ может не существовать. Считая $\epsilon_{yz} = 0$, находим $\omega_{lim} = k_x / \sqrt{\mu \epsilon_{zz}}$, а также несовпадающие собственные значения матрицы $\hat{\mathbf{N}}$ на этой частоте: $k_{z,\alpha} = \pm k_x \sqrt{1 - \epsilon_{yy} / \epsilon_{zz}}$, $\alpha = 2, 4$. Если $\epsilon_{zz} < \epsilon_{yy}$, то $k_{z,2}$ и $k_{z,4}$ будут мнимыми. В этом случае предельная объемная волна возникает на внешней полости поверхности показателей преломления и оказывается самой медленной из объемных волн в направлении оси x (рис. 1), а тогда ПЭВ не существует. Если же $\epsilon_{zz} > \epsilon_{yy}$, то $k_{z,2}$ и $k_{z,4}$ будут действительными, поэтому решения $\xi_\alpha \exp(ik_{z,\alpha}z)$, $\alpha = 2, 4$, будут однородными объемными волнами, так что предельная объемная волна с $H_x = E_x = 0$ реализуется на внутренней полости поверхности показателей преломления, не влияя на существование ПЭВ.

В частности, в [2, 4] ПЭВ рассматривалась в бикристалле, сформированном из одноосного кристал-

ла с изотропной магнитной проницаемостью следующим образом. Кристалл разрезался пополам по плоскости, проходящей через оптическую ось, одна из частей поворачивалась вокруг нормали к границе на угол 2φ и анализировалось распространение ПЭВ в окрестности биссектрисы угла $\pi - 2\varphi$. Приближенное решение дисперсионного уравнения при $\varepsilon_e/\varepsilon_0 - 1 \ll 1$ и $\varepsilon_e/\varepsilon_0 - 1 \gg 1$ было найдено в [2], а точное решение для направления строго вдоль биссектрисы указанного угла и любых значений $\varepsilon_e/\varepsilon_0 - 1$ было получено в [4]. Если направление распространения совпадает с биссектрисой угла $\pi - 2\varphi$, то тогда сечения поверхности показателей преломления частей бикристалла будут зеркально симметричны относительно границы. Согласно [2, 4] ПЭВ существует вдоль биссектрисы, если показатель преломления $n_e = \sqrt{\varepsilon_e}$ необыкновенной объемной волны больше показателя преломления $n_o = \sqrt{\varepsilon_o}$ обыкновенной волны. Такой вывод согласуется с выводом данной работы. В случае, рассмотренном в [2, 4], $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$, но $\varepsilon_{xy} \neq 0$ и имеет разные знаки выше и ниже границы, поэтому можно считать, что бикристалл получен способом, описанным в данном разделе³⁾. Если $n_o > n_e$, то на частоте ω_{lim} , ограничивающей интервал возможного существования ПЭВ, предельной объемной волной будет обыкновенная волна с $E_x = H_x = 0$, и ПЭВ не существует. Однако, когда $n_o < n_e$, предельной волной оказывается необыкновенная волна, у которой $E_x \neq 0$. Следовательно, ПЭВ должна существовать.

Отметим, что ПЭВ в бикристалле, образованном из оптически одноосной среды с $n_o > n_e$, вообще не существует, поскольку при любой из допустимых ориентаций медленной предельной волной будет обыкновенная волна, в которой $H_x = E_x = 0$. В то же время при $n_o < n_e$ медленной предельной волной будет необыкновенная волна, и она в общем случае не удовлетворяет условию $H_x = E_x = 0$, так что ПЭВ будет существовать.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Общие свойства импеданса оптически анизотропной полубесконечной диэлектрической среды позволяют установить закономерности существования ПЭВ в бикристалле, образованном в соответствии с некоторыми требованиями, значительно точнее, чем в бикристалле, образованном без

каких-либо условий. Полученные результаты применимы к широкому кругу структур типа диэлектрик–диэлектрик, поскольку эти требования определяют только взаимную ориентацию половин бикристалла. Соответственно, одна из половин ориентируется произвольно.

В работе анализировалось существование ПЭВ в бикристалле, составленном так, чтобы в одной его половине сечения поверхности показателей преломления сагиттальной плоскостью ПЭВ были зеркально симметричны сечениям поверхности показателей преломления в другой части. В этом случае оказывается, что относительно общей системы координат некоторые компоненты тензоров диэлектрической и магнитной проницаемостей по разные стороны границы будут одинаковыми, а некоторые компоненты будут иметь противоположные знаки. Рассматриваемый бикристалл можно образовывать несколькими способами, и от способа зависит, какие именно компоненты будут иметь противоположные знаки. Используя уравнения Максвелла, но не находя их решения в явном виде, удастся проследить, как связаны друг с другом импедансы частей бикристалла, причем связь будет разной при разных способах формирования бикристалла, в результате чего дисперсионное уравнение может иметь или не иметь решение.

Доказано, что в одном из вариантов бикристалла ПЭВ не существует. Если бикристалл образован другим способом, то ПЭВ обязательно существует, если предельная объемная волна на внешней поверхности показателей преломления не отвечает определенному условию. Это условие может выполняться в общем случае лишь для изолированных направлений на границе, и в таких направлениях ПЭВ не существует. Если ПЭВ не существует в данном направлении, то ПЭВ, существующая в его окрестности, трансформируется в предельную объемную волну, свободно распространяющуюся по бикристаллу. Если геометрия распространения связана с элементами симметрии среды, как, например, в случае, рассмотренном в [2, 4], то ПЭВ может не существовать для всех направлений распространения или в интервале направлений на выбранной границе. Кроме того, во всех трех рассмотренных вариантах бикристалла, изготовленного из оптически одноосной среды, ПЭВ не появится, если $n_o > n_e$, т. е. если среда будет оптически отрицательной.

Благодарности. Авторы признательны В. И. Альпицу за полезные обсуждения и ценные замечания.

³⁾ В (4) и (59) $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_o$, $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_o \cos^2 \varphi + \varepsilon_e \sin^2 \varphi$, $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_o \sin^2 \varphi + \varepsilon_e \cos^2 \varphi$ и $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = (\varepsilon_o - \varepsilon_e) \sin \varphi \cos \varphi$.

Финансирование. Работа проведена в рамках выполнения государственного задания НИЦ «Курчатовский институт».

ПРИЛОЖЕНИЕ

Если матрица $\hat{\mathbf{N}}$ не диагонализуется⁴⁾ в точке (k_x, ω_d) плоскости (k_x, ω) , то тогда к двум собственным векторам $\xi_d = \xi_1 = \xi_2$ и ξ_d^* добавляются еще два линейно независимых вектора, ξ_g и ξ_g^* , называемые обобщенными собственными векторами. Эти векторы удовлетворяют соотношению

$$\hat{\mathbf{N}}\xi_g = k_{z,d}\xi_g + \xi_d \quad (\text{A.1})$$

и комплексно-сопряженному соотношению. В пределе $\omega \rightarrow \omega_d$ при условии $\xi_2 \rightarrow \xi_1$, когда $k_{z,2} \rightarrow k_{z,1}$, из равенства

$$\hat{\mathbf{N}} \frac{\xi_2 - \xi_1}{k_{z,2} - k_{z,1}} = \xi_1 + k_{z,2} \frac{\xi_2 - \xi_1}{k_{z,2} - k_{z,1}} \quad (\text{A.2})$$

следует, что

$$\xi_g = \left. \frac{d\xi_1}{dk_{z,1}} \right|_{\omega=\omega_d}.$$

Соотношение (A.1) не изменится, если к ξ_g добавить вектор ξ_d .

В случае $\xi_2 \rightarrow \xi_1$ выражения для импедансов $\hat{\mathbf{Z}}^{(\pm)}$ в точке вырождения можно получить следующим образом. Представим $\xi^{(+)}$ (13) при $\omega \neq \omega_d$ в виде

$$\xi^{(+)} = b_1 \xi_1 e^{ik_{z,1}z} + b_2 \xi'(z), \quad (\text{A.3})$$

где

$$\xi'(z) = \frac{\xi_2 e^{ik_{z,2}z} - \xi_1 e^{ik_{z,1}z}}{k_{z,2} - k_{z,1}}. \quad (\text{A.4})$$

Значения импеданса $\hat{\mathbf{Z}}^{(+)}$ останутся теми же, если вместо $\mathbf{U}_2$ и $\mathbf{V}_2$ подставить соответствующие части вектора $\xi'(0)$, поэтому на частоте ω_d вместо векторов $\mathbf{U}_2$ и $\mathbf{V}_2$ появятся части $\mathbf{U}_g$ и $\mathbf{V}_g$ вектора ξ_g , а $\mathbf{U}_1$ и $\mathbf{V}_1$ переходят в $\mathbf{U}_d$ и $\mathbf{V}_d$, так как в точке вырождения

$$\xi^{(+)} = \left[b_1 \xi_d + b_2 (\xi_g + iz \xi_d) \right] e^{ik_{z,d}z}. \quad (\text{A.5})$$

Аналогичные замены происходят в выражениях для $\xi^{(-)}$ (14) и импеданса $\hat{\mathbf{Z}}^{(-)}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. И. Дьяконов, ЖЭТФ **94**, 119 (1988).
2. Н. С. Аверкиев, М. И. Дьяконов, Опт. и спектр. **68**, 1118 (1990).
3. D. B. Walker, E. N. Glytsis, and T. K. Gaylord, J. Opt. Soc. Am. A **15**, 248 (1998).
4. А. Н. Даринский, Кристаллография **46**, 916 (2001).
5. В. И. Альшиц, В. Н. Любимов, ФТТ **44**, 371 (2002).
6. В. И. Альшиц, В. Н. Любимов, ФТТ **44**, 1895 (2002).
7. В. И. Альшиц, В. Н. Любимов, ЖЭТФ **128**, 904 (2005).
8. В. И. Альшиц, В. Н. Любимов, Письма в ЖЭТФ **112**, 127 (2020).
9. В. И. Альшиц, В. Н. Любимов, УФН **193**, 96 (2023).
10. В. И. Альшиц, В. Н. Любимов, ЖЭТФ **167**, 192 (2025).
11. A. N. Furs, V. M. Galynsky, and L. M. Barkovsky, J. Phys. A: Math. Gen. **38**, 8083 (2005).
12. J. A. Polo, Jr., T. G. Mackay, and A. Lakhtakia, *Electromagnetic Surface Waves: A Modern Perspective*, Elsevier, Waltham (2013).
13. А. Н. Фурс, А. В. Новицкий, Кристаллография **68**, 62 (2023).
14. A. N. Furs and L. M. Barkovsky, Electromagnetics **28**, 146 (2008).
15. S. R. Nelatury, J. A. Polo, and A. Lakhtakia, J. Opt. Soc. Am. A **24**, 856 (2007).
16. S. R. Nelatury, J. A. Polo, and A. Lakhtakia, J. Opt. Soc. Am. A **24**, 2974 (2007).
17. K. Yu. Golenitskii, Phys. Rev. B **110**, 035301 (2024).
18. K. Yu. Golenitskii and N. S. Averkiev, Phys. Rev. A **111**, 063508 (2025).
19. J. A. Polo, S. Nelatury, and A. Lakhtakia, Electromagnetics **26**, 629 (2006).
20. Ch. Zhou, T. G. Mackay, and A. Lakhtakia, J. Opt. Soc. Am. B **36**, 3218 (2019).
21. М. В. Захарченко, Г. Ф. Глинский, ЖТФ **92**, 1720 (2022).

⁴⁾ Например, такое вырождение возникает в одноосном кристалле на границе, проходящей через оптическую ось [22].

22. Ф. И. Федоров, *Теория гиротронии*, Наука и техника, Минск (1976).
23. A. N. Furs and L. M. Barkovsky, J. Opt. A: Pure Appl. Opt. **1**, 109 (1999).
24. A. N. Darinskii and A. L. Shuvalov, Phys. Rev. A **102**, 033515 (2020).
25. A. N. Darinskii, Phys. Rev. A **103**, 033501 (2021).
26. A. N. Darinskii, Phys. Rev. A **104**, 023507 (2021).
27. A. N. Darinskii, Phys. Rev. A **106**, 033513 (2022).
28. А. Н. Даринский, Кристаллография **69**, 1018 (2024).
29. А. Н. Даринский, Кристаллография **69**, 1029 (2024).
30. А. Н. Даринский, Кристаллография **70**, 511 (2024).
31. A. Yariv and P. Yeh, *Photonics: Optical Electronics in Modern Communications*, Oxford Univ. Press (2007), 850 p.
32. D. W. Berreman, J. Opt. Soc. Am. **62**, 502 (1972).
33. A. N. Furs and L. M. Barkovsky, Microw. Opt. Technol. Lett. **14**, 301 (1997).
34. J. Ning and E. L. Tan, J. Opt. Soc. Am. B **26**, 676 (2009).
35. T. G. Mackay and A. Lakhtakia, *The Transfer-Matrix Method in Electromagnetics and Optics*, Morgan & Claypool (2020).
36. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).