

ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕ ЗАКРЫТОГО МЕМРИСТОРА НА ПОДВИЖНЫХ ВАКАНСИЯХ В МАТЕРИАЛЕ С ЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ УДЕЛЬНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ОТ ИХ КОНЦЕНТРАЦИИ

*И. В. Бойло**, *К. Л. Метлов***

*Донецкий физико-технический институт им. А. А. Галкина
283048, Донецк, Россия*

Поступила в редакцию 13 августа 2025 г.,
после переработки 13 августа 2025 г.
Принята к публикации 20 августа 2025 г.

Линейная по концентрации добавка к удельному сопротивлению материала не дает прямого вклада в общее сопротивление мемристора при перераспределении вакансий с сохранением их общего числа. Но сопутствующее локальное изменение удельного сопротивления меняет кинетику дрейфа вакансий под действием приложенного электрического тока. Эти изменения особенно значительны при наличии в материале мемристора фазового перехода металл–изолятор. Получено кинетическое уравнение для локальной концентрации вакансий в таком мемристоре, проанализированы точные решения для его стационарных состояний. Показано, что не только в слабо нелинейном случае, когда зависимостью удельного сопротивления от концентрации вакансий можно пренебречь, но и в сильно нелинейном мемристоре с фазовым переходом его кинетику можно свести к классическому точно решаемому уравнению Бюргерса.

DOI: 10.31857/S004445102510013X

1. ВВЕДЕНИЕ

Мемристор — предложенный Леоном Чуа [1, 2] двухтерминальный элемент электрических цепей, сопротивление которого зависит от суммарного прошедшего через него электрического заряда. Такой элемент был реализован фирмой Hewlett Packard на основе миграции заряженных кислородных вакансий в диоксиде титана [3]. Его можно изготовить и на основе других материалов, допускающих миграцию ионов [4], — различных оксидов переходных металлов [5], манганитов [6, 7]. Основным свойством мемристора является наличие гистерезиса на его вольт-амперной характеристике. Гистерезис возникает потому, что состояние мемристора определяется не мгновенной величиной проходящего через него электрического тока, а зависит еще и от величины тока в прошлом (т. е. от истории внешних воздействий). В мемристоре на подвижных вакансиях

состояние представлено в виде некоторого пространственного распределения концентрации вакансий, а его изменение происходит посредством управляемой внешним электрическим током диффузии. Измеряемое сопротивление мемристора электрическому току отражает мгновенное распределение вакансий.

В литературе изменение состояния таких мемристоров моделируется различными кинетическими уравнениями для концентрации вакансий [8–10], в основном численно. Если удельное сопротивление материала считать постоянной величиной, то нелинейная кинетика мемристора описывается уравнением Бюргерса. Такой подход допускает точное аналитическое решение как для переходных процессов [11] в закрытом мемристоре (с постоянным общим количеством вакансий в нем), так и для периодических [12], возникающих при пропускании через такой мемристор токового меандра. Изменение сопротивления закрытого мемристора с постоянным удельным сопротивлением материала определяется исключительно интерфейсными эффектами и зависит от концентраций подвижных вакансий в области подключенных к нему контактов [11].

* E-mail: boylo@donfti.ru

** E-mail: metlov@donfti.ru

Если удельное сопротивление материала мемристора ρ зависит от концентрации вакансий c линейно, $\rho = \text{const} + \beta c$, где $\partial\beta/\partial c = 0$, переменная составляющая полного сопротивления закрытого мемристора все так же определяется исключительно интерфейсами. Объемный вклад в сопротивление зависит только от полного количества вакансий, а значит, в закрытом мемригоре не зависит от их (определяемого историей внешних воздействий) пространственного распределения. Но кинетика перераспределения вакансий от коэффициента β все же зависит, и при определенных условиях эта зависимость способна проявить себя достаточно сильно. Именно эти, интересные с нашей точки зрения, эффекты детально исследуются в настоящей работе.

2. МОДЕЛЬ

Рассмотрим тонкую пленку толщиной d из материала, содержащего заряженные подвижные вакансии, ограниченную двумя плоскими, непроницаемыми для вакансий, хорошо проводящими контактами. Пусть координата x отсчитывается в направлении, перпендикулярном поверхности пленки, $0 \leq x \leq d$. Состояние такого мемристора в момент времени t описывается мгновенной локальной концентрацией $C(x, t)$ мобильных вакансий, причем их общее количество $\int_0^d C dx$ является постоянной, не зависящей от времени, величиной. В силу локального сохранения количества вакансий их движение подчиняется уравнению непрерывности

$$\partial_t C(x, t) + \nabla \cdot \mathbf{J}(x, t) = 0, \quad (1)$$

где ∂_t — производная по времени. В одномерном случае ток вакансий $\mathbf{J} = \{J, 0, 0\}$, а $\nabla \cdot \mathbf{J}(x, t) = \partial_x J(x, t)$. Рассматривая диффузию и прыжковый термически-активированный транспорт вакансий под действием электрического тока, представим ток вакансий в виде [11]

$$J = -D\partial_x C + C \left(1 - \frac{C}{C_{max}} \right) \frac{2D}{a} \text{sh} \frac{aq\rho I}{k_B T}, \quad (2)$$

где D — коэффициент диффузии, q — заряд одной вакансии, I — величина пропускаемого через мемристор тока, k_B — постоянная Больцмана, T — температура, a — длина прыжка вакансий (расстояние между соседними равновесными позициями вакансий в материале), ρ — удельное сопротивление материала. Здесь также считается, что локальная концентрация вакансий ограничена некоторой наперед

заданной величиной C_{max} , являющейся свойством материала [11].

Перейдем к безразмерной координате $\xi = x/d$, безразмерному времени $\tau = tD/d^2$ и введем нормированную концентрацию вакансий $c = C/C_{max}$, $0 \leq c(\xi, \tau) \leq 1$. Тогда линейную зависимость удельного сопротивления от концентрации вакансий удобно представить как

$$\rho = \rho_0 [1 + \beta(c(\xi, \tau) - r)], \quad (3)$$

где r — коэффициент заполнения мемристора вакансиями,

$$0 < r = \int_0^1 c(\xi, \tau) d\xi = \text{const} < 1, \quad (4)$$

а $\rho_0 = \int_0^1 \rho d\xi = \text{const}$ — среднее удельное сопротивление материала мемристора. Параметр β характеризует силу влияния концентрации вакансий на удельное сопротивление и может быть как положительным, так и отрицательным. Подставляя (3) в (2) и (1), переходя к пределу непрерывного дрейфа $a \rightarrow 0$ для нормированной концентрации вакансий получим уравнение

$$\partial_\tau c + p [1 - r\beta - c(2 - 2(1+r)\beta + 3\beta c)] \partial_\xi c - \partial_{\xi\xi} c = 0, \quad (5)$$

где параметр $p = 2qd\rho_0 I/k_B T$ играет роль безразмерной эффективной величины проходящего через мемристор тока. В пределе $\beta \rightarrow 0$ это уравнение сводится к классическому уравнению Бюргерса [11], но в общем случае содержит нелинейность более высокого (третьего) порядка по c . Задача о кинетике рассматриваемого замкнутого мемристора сводится к решению этого уравнения с граничными условиями $J|_{x=0} = J|_{x=d} = 0$.

Интересно, что решения уравнения (5) при положительных и отрицательных значениях параметра β связаны преобразованием

$$\beta \rightarrow -\beta, \quad p \rightarrow -p, \quad r \rightarrow 1 - r, \quad c \rightarrow 1 - c, \quad (6)$$

благодаря чему достаточно научиться решать (5) только при положительных (или только отрицательных) значениях β , а решения с β противоположного знака можно получить потом простым переопределением параметров (6). Так же преобразуются и все следствия из уравнения (5).

При $\beta = 0$ уравнение (5) допускает аналитическое решение [11]. В остальных случаях его аналитическое решение неизвестно. Для многих конкретных значений параметров это уравнение несложно решить численно. Пример такого численного решения,

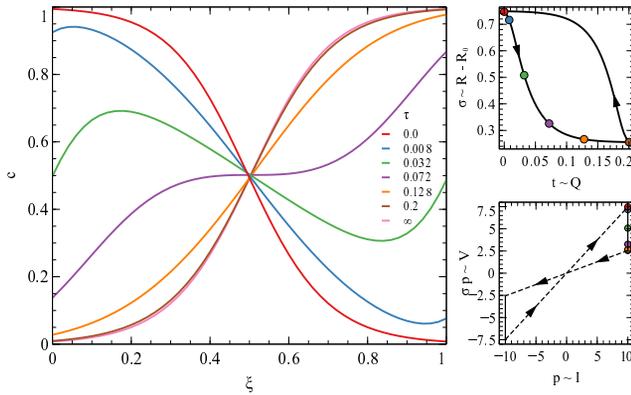


Рис. 1. Слева — полученные численным решением уравнения (5) профили концентрации $c(\xi, \tau)$ в разные времена τ при переключении мемристора с $r = 1/2$, $\beta = 0.1$ и $p = 10$ из равновесного состояния с $p = -10$, $\tau = \infty$; справа — петли гистерезиса того же мемристора при подаче на него меандра с большим периодом (более 0.2 в безразмерных единицах времени) для $\alpha = \pi/6$ в нормированных координатах сопротивление — прошедший заряд (вверху) и ток-напряжение (внизу), точками показаны состояния, соответствующие профилям, изображенным слева

демонстрирующий эволюцию распределения вакансий в мемристора при его переключении между стационарным («выключенным») состоянием при отрицательном значении тока $p < 0$ и стационарным («включенным») состоянием при $p > 0$ показан на рис. 1.

Как уже было сказано, полное сопротивление закрытого мемристора из материала с удельным сопротивлением (3) определяется исключительно поверхностными эффектами на его контактах, чувствительными к локальной концентрации вакансий вблизи них. Учитывая, что $0 < c < 1$, представим его феноменологически в виде разложения по степеням c :

$$R = \frac{d}{A} \int_0^1 \left(\rho_0 + \frac{\kappa_{1,0} + \kappa_{1,1}c + O(c^2)}{d} \delta(\xi) + \frac{\kappa_{2,0} + \kappa_{2,1}c + O(c^2)}{d} \delta(\xi - 1) \right) d\xi, \quad (7)$$

где A — площадь поверхности контакта, $\kappa_{1,j}$ и $\kappa_{2,j}$ — коэффициенты разложения поверхностного сопротивления на левом и правом интерфейсах по степеням c , а дельта-функция Дирака $\delta(\xi)$ предполагается левосторонней, что формально выносит ее за границы области движения вакансий. Параметр β на сопротивление мемристора непосредственно не влияет. Интегрируя, в первом порядке по c получим

$$R = R_0 + R_1 c(0, \tau) + R_2 c(1, \tau),$$

где

$$R_0 = (d\rho_0 + \kappa_{1,0} + \kappa_{2,0})/A,$$

$$R_1 = \kappa_{1,1}/A, \quad R_2 = \kappa_{2,1}/A.$$

Перегруппировкой членов сопротивление можно выразить через безразмерный параметр σ как

$$R = R_0 + (R_1 + R_2)\sigma,$$

где

$$\sigma(\tau) = c(0, \tau) \cos^2 \alpha + c(1, \tau) \sin^2 \alpha \quad (8)$$

и введен безразмерный параметр асимметрии интерфейсов $0 < \alpha = \arctg \sqrt{R_2/R_1} < \pi/2$. Для того, чтобы сопротивления мемристора во включенном и выключенном состояниях различались, интерфейсы должны быть разными ($\alpha \neq \pi/4$). В противном случае, вольт-амперная характеристика при пропускании меандра тока (рис. 1 справа внизу) будет иметь вид повернутого «стола с ножками» (table with legs), когда обе наклонные прямые линии сольются в «столешницу», а переходные процессы (соответствующие миграции вакансий при стационарных значениях тока в меандре) сформируют «ножки».

3. РАВНОВЕСНЫЕ СОСТОЯНИЯ

Полная кинетика переключений рассматриваемого мемристора доступна на данный момент только численно. Но при прохождении через мемристор постоянного тока, $|p| = \text{const}$, она достаточно простая и представляет собой релаксацию (на конечном этапе по экспоненциальному закону) к одному из равновесных (стационарных при $\tau \rightarrow \infty$) состояний. Эти состояния можно найти аналитически. Одно из них соответствует положительным значениям $p > 0$, когда вакансии собираются у правого ($\xi = 1$) конца мемристора, другое — отрицательным, когда вакансии собираются у левого ($\xi = 0$) его конца. Распределения вакансий $\lim_{\tau \rightarrow \infty} c(\xi, \tau) = c(\xi)$ в этих состояниях связаны простым преобразованием

$$p \rightarrow -p, \quad \xi \rightarrow 1 - \xi. \quad (9)$$

Это означает, что достаточно найти одно из них.

Сделать это достаточно просто, поскольку для стационарного распределения $c = c(\xi)$ уравнение (5) можно проинтегрировать по ξ , и этот интеграл, как следует из (1), пропорционален величине потока вакансий. Константу интегрирования нужно выбрать так, чтобы поток на границах мемристора $\xi = 0, 1$

был равен нулю. В стационарном случае это автоматически означает, что поток равен нулю везде: $J = 0$. В пределе $a \rightarrow 0$ из (2) для $c(x)$ получим

$$-c' + pc(1 - c)(1 + \beta(c - r)) = 0. \quad (10)$$

Это (пусть и нелинейное) обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка легко решается методом разделения переменных, что дает

$$\xi + C_0 = \frac{\beta \ln \frac{c}{1 + \beta(c - r)}}{p[\beta(r - 1) - 1](\beta r - 1)} + \frac{2 \operatorname{th}^{-1}(1 - 2c)}{p[\beta(r - 1) - 1]}, \quad (11)$$

где C_0 — постоянная интегрирования. Величину C_0 можно найти из условия (4) для полного количества вакансий в мемристоре и выразить зависимость $c(\xi)$ параметрически:

$$\xi = \frac{1}{1 - \beta r} \left[s + \frac{\beta^2 r^2}{1 + \beta(1 - r)} + \frac{\beta}{p(1 + \beta(1 - r))} \times \right. \\ \left. \times \ln \frac{e^p - 1}{(e^p - e^{ps}) e^{\beta pr^2} + (e^{ps} - 1) e^{(\beta + 1) pr}} \right], \quad (12a)$$

$$c = \left[1 - \frac{e^{-ps}(1 + \beta(1 - r))[1 - e^{p(1-r)(1-\beta r)}]}{(1 - \beta r)[1 - e^{-pr(1+\beta(1-r))}} \right]^{-1}, \quad (12b)$$

где параметр $0 \leq s \leq 1$. При $\beta = 0$ стационарный профиль $c(\xi)$ выражается явно,

$$c_B(p, r, \xi) = \frac{(e^{pr} - 1) e^{p\xi}}{e^{p(r+\xi)} - e^{pr} - e^{p\xi} + e^p}, \quad (13)$$

и в точности совпадает с полученным в [11]. Для $\beta \neq 0$ возможны несколько случаев, которые мы проанализируем в следующих разделах.

3.1. Слабая нелинейность:

$$-1/(1 - r) < \beta < 1/r$$

Самый простой случай, когда параметр β , определяющий наличие кубического нелинейного члена в уравнении (5), мал. Конкретно рассмотрим случай, когда он мал настолько, что удельное сопротивление мемристора $\rho > 0$ для любых $0 < c < 1$. Из (3) это эквивалентно условию $-1/(1 - r) < \beta < 1/r$, т. е. при каждом значении коэффициента заполнения мемристора r параметр β в рассматриваемом слабо нелинейном режиме может принимать (положительные и отрицательные) значения из некоторого интервала вокруг $\beta = 0$.

На рис. 2 приведены примеры равновесных распределений вакансий в мемристоре при некотором (достаточно большом) токе $p = 20$ и нескольких

значениях коэффициента заполнения r во всем интервале значений β . Обратите внимание, что распределения вакансий на крайнем левом и крайнем правом графиках рис. 2 связаны последовательным применением преобразований подобия (6) и (9). Поэтому, вообще говоря, достаточно рассмотреть случай $0 < r < 1/2$.

Можно сказать, что в слабо нелинейном режиме влияние параметра β на равновесные распределения вакансий прежде всего количественное. Причем, с точки зрения достижения наибольшей разницы между включенным и выключенным сопротивлениями мемристора, эффект от ненулевого значения β скорее отрицательный.

Действительно, для максимальной разницы сопротивления σ из (8) между равновесными состояниями с противоположными знаками p необходимо, чтобы разница в концентрации вакансий на противоположных концах мемристора была максимальной. На рис. 2 видно, что уже при $p = 20$ эта разность при $\beta = 0$ почти достигает своего максимального значения, равного 1. В то же время при увеличении $|\beta|$ достигаемая с тем же током $p = 20$ концентрация вакансий на левом и правом концах мемристора начинает (и довольно существенно) отличаться от 0 и 1 соответственно. Конкретно, для предельных значений β можно получить следующие оценки максимальной (на левом конце мемристора) и минимальной (на его правом конце) концентраций вакансий:

$$\max_{\beta} c(0) = \frac{(e^p - 1) r}{e^p(r + p(1 - r)) - r} \approx \frac{r}{r + p(1 - r)} \Big|_{p \gg 1}, \quad (14)$$

$$\min_{\beta} c(1) = \frac{e^p pr}{e^p(1 + (p - 1)r) + r - 1} \approx \frac{pr}{1 + (p - 1)r} \Big|_{p \gg 1}. \quad (15)$$

Понятно, что при $p \rightarrow \infty$ имеем $\max_{\beta} c(0) \rightarrow 0$ и $\min_{\beta} c(1) \rightarrow 1$, но если в случае $\beta = 0$ этот предел при конечных значениях $p \gg 1$ достигается экспоненциально, то при $\beta \neq 0$ это происходит гораздо медленнее. Таким образом, сопротивление слабо нелинейного мемристора всегда можно насытить достаточно большим током, но чем больше $|\beta|$, тем сделать это сложнее.

3.2. Мемристор с фазовым переходом:

$$r - 1 < 1/\beta < r$$

При больших значениях $|\beta|$ возможна ситуация, когда при некоторой концентрации вакансий

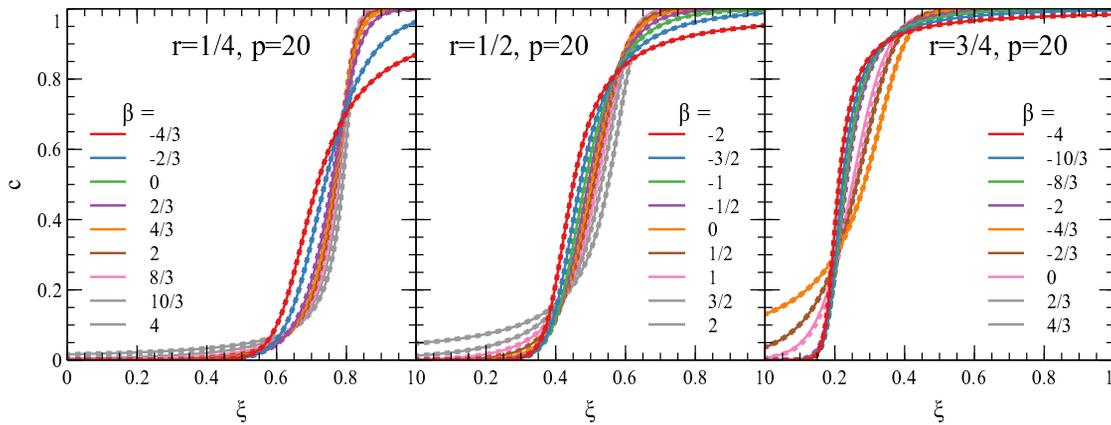


Рис. 2. Распределения концентрации вакансий в равновесных состояниях при $p = 20$ и разных заполнениях мемристора $r = 1/4, 1/2, 3/4$ для различных значений β от $-1/r$ до $1/r$; линии — аналитическое выражение (12), точки — численный счет

$$0 < c_{lim} = \frac{r\beta - 1}{\beta} < 1 \tag{16}$$

удельное сопротивление ρ внутри мемристора, определяемое формулой (3), обращается в нуль. Мы будем идентифицировать эту особенность с наличием фазового перехода (скажем, перехода металл–изолятор) в материале мемристора, когда его удельное сопротивление при достижении определенной концентрации вакансий обращается в нуль (или становится близким к нулю) и при дальнейшем изменении их концентрации (практически) перестает меняться.

Обычно переходы металл–изолятор наблюдают как резкое изменение электрического сопротивления на несколько порядков при изменении температуры материала. Но известно, что критическая температура этого перехода во многих материалах сильно зависит от концентрации и расположения вакансий [13–16]. Этого можно ожидать и *a priori*, поскольку критическая температура перехода металл–изолятор определяется электронной структурой, а заряженные вакансии способны эту структуру существенным образом изменить. Поэтому, при температуре вблизи критической переход металл–изолятор вполне может быть спровоцирован изменением концентрации вакансий. Линейный закон с изломом может показаться грубым описанием поведения сопротивления вблизи фазового перехода, но для достаточно малой окрестности (по абсолютной концентрации вакансий) точки перехода линейное приближение вполне обосновано и, как минимум, может дать неплохое качественное описание. На практике, для создания мемристоров, работающих в сильно нелинейном режиме, потребуются довольно точ-

ная (однократная для рассматриваемых закрытых мемристоров) подстройка полного количества вакансий и стабилизация температуры.

Конечно, ни о какой сверхпроводимости мемристора (и тем более о его отрицательном сопротивлении) в данном случае речи не идет. В мемристоре с фазовым переходом концентрация вакансий способна лишь приближаться к предельному значению c_{lim} , никогда его не достигая. Причина в том, что (при заданном фиксированном токе через мемристор) локальное уменьшение сопротивления уменьшает величину движущего вакансии локального электрического поля. При этом действие температурных флуктуаций, стремящихся уравнять локальную концентрацию вакансий в соседних точках, не ослабевает. В результате, при сколь угодно большом токе, концентрация вакансий не способна пересечь величину c_{lim} . Таким образом, в мемристоре с фазовым переходом она лежит уже не в области значений $0 < c < 1$, а в интервале $c_{lim} < c < 1$ при больших положительных $\beta > 0$ либо в интервале $0 < c < c_{lim}$ при больших (по модулю) отрицательных $\beta < 0$. Удельное сопротивление при этом всегда остается положительным: $\rho > 0$.

Примеры равновесных распределений вакансий (12) в мемристоре с фазовым переходом приведены для двух значений β на рис. 3 во всем интервале коэффициентов заполнения мемристора r . В принципе достаточно изобразить лишь один из этих наборов кривых – при положительных, либо при отрицательных с тем же модулем значениях β . Второй набор получается из него последовательным применением преобразований (6), (9), что сводится к повороту всего графика на 180° вокруг центральной точки

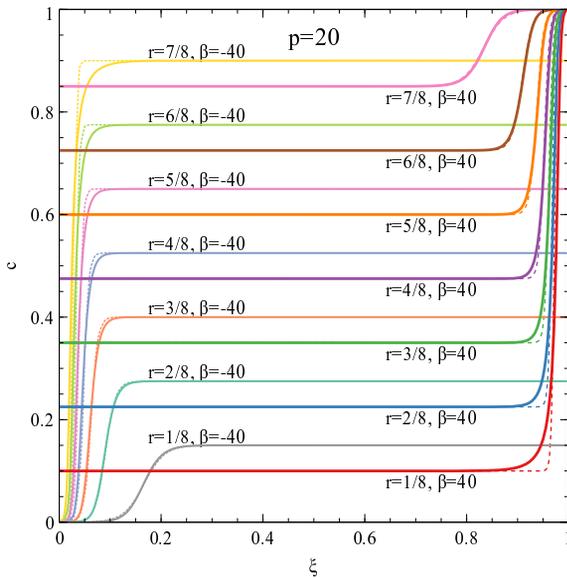


Рис. 3. Распределения концентрации вакансий в равновесных состояниях мемристора с фазовым переходом с $p = 20$ и $\beta = \pm 40$ при разных заполнениях мемристора; линии — точное аналитическое выражение (12), точками показано приближение (17)

$\xi = 1/2, c = 1/2$ и переобозначению коэффициентов заполнения $r \leftrightarrow (1 - r)$.

Можно также заметить, что при сильной нелинейности, концентрация может оказаться «зажатой» в очень узком интервале значений. Для $\beta > 0$ это происходит при почти полностью заполненном мемриSTORE ($r \approx 1$), а для $\beta < 0$ при почти пустом ($r \approx 0$). В этой ситуации один из множителей в потоке (2), $J \propto c(1 - c)$, перестает оказывать существенное влияние на кинетику движения вакансий, и его можно заменить средним значением. Тогда и в сильно нелинейном случае $|\beta| \gg 1$ рассматриваемая модель (подобно случаю $\beta = 0$) отображается на перемасштабированную модель Бюргерса:

$$c(\xi, \tau) \approx c_{lim} c_B(-pr\beta, r/c_{lim}, \xi, \tau) \text{ при } \beta < 0. \quad (17)$$

Аналогичное выражение для $\beta > 0$ получается преобразованием (6). Здесь $c_B(p, r, \xi, \tau)$ — решение уравнения (5) при $\beta = 0$, а использованная при построениях графиков величина $c_B(p, r, \xi) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} c_B(p, r, \xi, \tau)$ дана уравнением (13). Отметим, что данное отображение справедливо как для стационарных состояний, так и для переходных процессов в мемриSTORE.

Равновесные состояния, соответствующие (17), изображены на рис. 3 линиями из точек. Можно заметить, что уже при $r \leq 1/4$ для $\beta = -40$ (и при $r \geq 3/4$ при $\beta = 40$) эти распределения визуально

неотличимы от точных выражений (12), показанных сплошными линиями. Важным достоинством отображения (17) является наличие точных решений не только для равновесных распределений вакансий, но также для зависящих от времени переходных [11] и периодических [12] процессов. Эти решения автоматически становятся применимы для моделирования таких «прижатых к фазовому переходу» сильно нелинейных мемриSTORE.

Можно отметить, что с ростом $|\beta|$ большая часть мемриSTORE оказывается заполненной вакансиями почти на уровне предельной концентрации c_{lim} , т. е. находится в состоянии с минимальным значением удельного сопротивления. В рассмотренном случае линейной зависимости удельного сопротивления от концентрации вакансий (3) это никак не отражается на сопротивлении между контактами $\xi = 0$ и $\xi = 1$. Однако если добавить третий контакт на некотором промежуточном расстоянии $0 < \xi < 1$, то сопротивление между ним и остальными двумя контактами будет сильно зависеть от состояния мемриSTORE. Такое трехтерминальное устройство под названием мемристор [17] уже было предложено и реализовано [18, 19], в том числе и в контексте нейроморфных вычислений [20]. Надеемся, что изложенная здесь простая теоретическая модель окажется полезной для развития интуиции, необходимой при оптимизации и проектировании таких устройств.

4. ВЫВОДЫ

Рассмотрена модель мемриSTORE из материала с линейной зависимостью удельного сопротивления от концентрации кислородных вакансий (или других заряженных мобильных дефектов). Его кинетика определяется нелинейным уравнением в частных производных, сводящимся в частном случае, когда зависимостью удельного сопротивления от концентрации вакансий можно пренебречь, к уравнению Бюргерса. Получены точные аналитические выражения для распределений вакансий в равновесных состояниях такого мемриSTORE — пространственных распределений вакансий, созданных долговременным протеканием через него электрического тока при постоянной температуре. В случае слабой (но все же не пренебрежимо малой) зависимости удельного сопротивления от концентрации вакансий эта зависимость мешает насыщению сопротивления мемриSTORE долговременным пропусканием постоянного электрического тока. Интересно, что рассмотренная простая модель позволяет описы-

вать мемристоры, материал которых претерпевает (в зависимости от концентрации дефектов) фазовый переход металл–изолятор. Наличие перехода сужает допустимый диапазон концентраций мобильных вакансий. Если диапазон становится достаточно узок, кинетику переключения таких мемристоров (и трехтерминальных мемристоров) можно приближенно отобразить на точно решаемое уравнение Бюргерса с полным учетом линейной зависимости их удельного сопротивления от концентрации вакансий.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Chua, *Memristor – the Missing Circuit Element*, IEEE Trans. Circuit Theory **18**, 507 (1971).
2. L. Chua and S. M. Kang, *Memristive Devices and Systems*, Proc. IEEE **64**, 209 (1976).
3. D. B. Strukov, G. S. Snider, D. R. Stewart, and R. S. Williams, *The Missing Memristor Found*, Nature **453**, 80 (2008).
4. W. Rainer and A. Masakazu, *Nanoionics-Based Resistive Switching Memories*, Nat. Mater. **6**, 833 (2007).
5. A. Sawa, *Resistive Switching in Transition Metal Oxides*, Mater. Today **11**, 28 (2008).
6. B. Bryant, Ch. Renner, Y. Tokunaga et al., *Imaging Oxygen Defects and Their Motion at a Manganite Surface*, Nat. Commun. **2**, 212 (2011).
7. Y. Lide, I. Sampo, and v. D. Sebastiaan, *Direct Observation of Oxygen Vacancy-Driven Structural and Resistive Phase Transitions in $La_{2/3}Sr_{1/3}MnO_3$* , Nat. Commun. **8**, 14544 (2017).
8. N. V. Agudov, A. V. Safonov, A. V. Krichigin et al., *Nonstationary Distributions and Relaxation Times in a Stochastic Model of Memristor*, J. Stat. Mech. **2020**, 024003 (2020).
9. N. Agudov, A. Dubkov, A. Safonov et al., *Stochastic Model of Memristor Based on the Length of Conductive Region*, Chaos Soliton Fract. **150**, 111131 (2021).
10. J. B. Roldán, E. Miranda, D. Maldonado et al., *Variability in Resistive Memories*, Adv. Intell. Syst. **5**, 2200338 (2023).
11. I. V. Boylo and K. L. Metlov, *Nonlinear Effects in Memristors with Mobile Vacancies*, R. Soc. Open Sci. **8**, 210677 (2021).
12. И. В. Бойло, К. Л. Метлов, *Частотная зависимость гистерезиса движения вакансий в закрытом мемристоре на основе точно решаемой модели управляемой нелинейной диффузии*, ЖЭТФ **166**, 858 (2024).
13. W. Zhang, A. Thiess, P. Zalden et al., *Role of Vacancies in Metal–Insulator Transitions of Crystalline Phase-Change Materials*, Nat. Mater. **11**, 952 (2012).
14. L. Wang, S. Dash, L. Chang et al., *Oxygen Vacancy Induced Room-Temperature Metal–Insulator Transition in Nickelate Films and Its Potential Application in Photovoltaics*, ACS Appl. Mater. Interfaces **8**, 9769 (2016).
15. L. Chen, X. Wang, D. Wan et al., *Tuning the Phase Transition Temperature, Electrical and Optical Properties of VO_2 by Oxygen Nonstoichiometry: Insights from First-Principles Calculations*, RSC Adv. **6**, 73070 (2016).
16. M. E. McGahay, S. V. Khare, and D. Gall, *Metal–Insulator Transitions in Epitaxial Rocksalt-Structure $Cr_{1-x/2}N_{1-x}O_x$ (001)*, Phys. Rev. B **102**, 235102 (2020).
17. Q. Xia, M. D. Pickett, J. J. Yang et al., *Two- and Three-Terminal Resistive Switches: Nanometer-Scale Memristors and Memistors*, Adv. Funct. Mater. **21**, 2660 (2011).
18. S. Kaeriyama, T. Sakamoto, H. Sunamura et al., *A Nonvolatile Programmable Solid-Electrolyte Nanometer Switch*, IEEE J. Solid-State Circuits **40**, 168 (2005).
19. Q. Wang, Y. Itoh, T. Hasegawa et al., *Nonvolatile Three-Terminal Operation Based on Oxygen Vacancy Drift in a $Pt/Ta_2O_{5-x}/Pt$, Pt structure*, Appl. Phys. Lett. **102**, 233508 (2013).
20. P. Balakrishna Pillai and M. M. De Souza, *Nanoionics-Based Three-Terminal Synaptic Device Using Zinc Oxide*, ACS Appl. Mater. Interfaces **9**, 1609 (2017).