ЖЭТФ, 2025, том 168, вып. 4 (10), стр. 537–553 © 2025

ПРОЦЕССЫ ЭЛЕКТРОН-ЭЛЕКТРОННОГО РАССЕЯНИЯ В КВАНТОВЫХ ЯМАХ В КВАНТУЮЩЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ. II. РАССЕЯНИЕ В СЛУЧАЕ ДВУХ ПОДЗОН

М. П. Теленков [*]***, Ю. А. Митягин***

Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
119991, Москва, Россия

Поступила в редакцию 19 апреля 2025 г.,
после переработки 23 июня 2025 г.
Принята к публикации 25 июня 2025 г.

Рассмотрены процессы электрон-электронного рассеяния с участием уровней Ландау двух подзон. Рассчитана матрица скоростей электрон-электронного рассеяния, содержащая все типы переходов между уровнями Ландау. Проведен анализ этой матрицы и установлена относительная величина скоростей переходов различного типа. Установлено влияние на процессы электрон-электронного рассеяния изменения ориентации квантующего магнитного поля.

DOI: 10.31857/S0044451025100104

1. ВВЕДЕНИЕ

В нашей предыдущей работе [1] были рассмотрены процессы электрон-электронного рассеяния в квантовых ямах в квантующем магнитном поле. Были получены выражения для матрицы скоростей электрон-электронного рассеяния между уровнями Ландау различных подзон в квантующем магнитном поле произвольной ориентации по отношению к слоям структуры. Были выполнены расчеты скоростей электрон-электронного рассеяния для переходов между уровнями Ландау одной подзоны размерного квантования и выявлены закономерности поведения элементов матрицы рассеяния для всевозможных внутриподзонных переходов.

Данная работа является продолжением начатых в [1] исследований по анализу четырехмерной матрицы скоростей электрон-электронного рассеяния и включает в себя рассмотрение процессов электрон-электронного рассеяния в многоподзонном случае. Также проведен анализ влияния ориентации магнитного поля на процессы электрон-электронного рассеяния в системе уровней Ландау.

[*] E-mail: telenkovmp@lebedev.ru

2. МАТРИЦА СКОРОСТЕЙ ЭЛЕКТРОН-ЭЛЕКТРОННОГО РАССЕЯНИЯ В КВАНТУЮЩЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ, НАКЛОННОМ ПО ОТНОШЕНИЮ К СЛОЯМ КВАНТОВОЙ ЯМЫ

При расчете матрицы скоростей мы будем использовать модель, которая изложена в нашей предыдущей работе [1]. Здесь мы приводим только основные выражения, используемые непосредственно при расчетах и необходимые для качественного объяснения полученных результатов.

В магнитном поле

$$\mathbf{B} = B_\perp \mathbf{e}_z + B_\parallel \mathbf{e}_y,$$

где z — ось роста квантовой ямы, уровни энергии и волновые функции стационарных состояний электрона в квантовой яме в калибровке Ландау

$$\mathbf{A} = \left(B_\parallel z - B_\perp y\right) \mathbf{e}_x$$

даются выражениями

$$E_{(\nu,n)} = \varepsilon_\nu + \Delta_\nu \left(B_\parallel\right) + \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2}\right) \qquad (1)$$

и

$$\psi_{(\nu,n),k_x}(x,y,z) = \\ = \frac{\exp\left(ik_x x\right)}{\sqrt{L}} \varphi_\nu(z)\, \Phi_n\left(y - k_x l_c^2 - \langle z\rangle_\nu \mathrm{tg}\theta\right). \qquad (2)$$

Здесь $\varphi_\nu(z)$ — волновая функция уровня энергии ε_ν размерного квантования, $\Phi_n(y)$ — волновая функция n-го ($n = 0, 1, 2, \dots$) уровня энергии линейного гармонического осциллятора с циклотронной частотой $\omega_c = eB_\perp/m_w c$, m_w — эффективная масса в яме, $l_c = \sqrt{\hbar/m_w\omega_c} = \sqrt{\hbar c/eB_\perp}$ — магнитная длина,

$$\Delta_\nu\left(B_\parallel\right) = \frac{e^2}{2m_w c^2}\left(\delta z\right)_\nu^2 B_\parallel^2, \tag{3}$$

$$\langle z\rangle_\nu = \int dz\varphi_\nu^*(z)\, z\varphi_\nu(z) \tag{4}$$

— среднее значение координаты z электрона, $\left(\delta z\right)_\nu$ — ее среднеквадратичное отклонение, θ — угол наклона магнитного поля к оси роста квантовой ямы ($\mathrm{tg}\,\theta = B_\parallel/B_\perp$), L — поперечный размер гетероструктуры. Каждый уровень Ландау вырожден по проекции волнового вектора k_x с кратностью

$$\alpha = \frac{e}{\pi\hbar c}B_\perp. \tag{5}$$

В дальнейшем уровень Ландау будем обозначать $i = (\nu_i, n_i)$, где n_i — номер уровня Ландау в ν_i-ой подзоне.

Переход вследствие электрон-электронного взаимодействия, в котором один электрон переходит с уровня Ландау i на уровень Ландау f, а другой электрон — с уровня Ландау j на уровень Ландау g, будем обозначать $\{i \to f \& j \to g\}$.

Матрица скоростей определяет потоки электронов между уровнями Ландау. Поток электронов с уровня Ландау i (среднее число электронов, уходящих с уровня в единицу времени, отнесенное к единице площади гетероструктуры) равен

$$J_{e-e}^{i,-} = \sum_{j,f,g} J_{e-e}\begin{pmatrix} i & j \\ f & g\end{pmatrix}, \tag{6}$$

где

$$J_{e-e}\begin{pmatrix} i & j \\ f & g\end{pmatrix} = W_{e-e}\begin{pmatrix} i & j \\ f & g\end{pmatrix} N_i N_j \left[1 - \frac{N_g}{\alpha}\right]\left[1 - \frac{N_f}{\alpha}\right] \tag{7}$$

— полная интенсивность рассеяния электронов с уровней Ландау i и j на уровни Ландау f и g соответственно (перехода $\{(\nu_i, n_i) \to (\nu_f, n_f)\ \&\ (\nu_j, n_j) \to (\nu_g, n_g)\}$), N_i — число электронов на уровне Ландау i , отнесенное к единице площади структуры (населенность уровня Ландау).

Элемент матрицы скоростей для данного перехода имеет вид

$$W_{e-e}\begin{pmatrix} i & j \\ f & g\end{pmatrix} = A_{e-e}\begin{pmatrix} i & j \\ f & g\end{pmatrix} F_{ee}\left(E_i + E_j - E_f - E_g\right), \tag{8}$$

где амплитуда перехода дается выражением

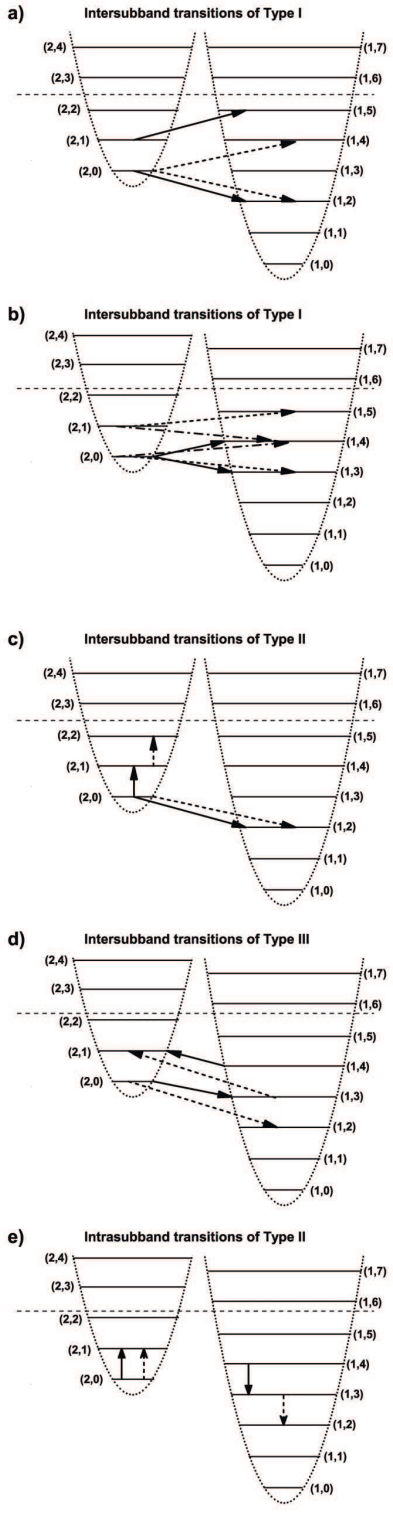

Рис. 1. Различные типы переходов, в которых участвуют электроны, находящиеся на уровнях Ландау разных подзон. Стрелки различного типа показывают различные переходы первого и второго электронов взаимодействующей пары

$$A_{e-e}\binom{i\ j}{f\ g}=\frac{4e^4}{\pi^2\varepsilon_s^2\hbar}\frac{\exp\left\{-(\xi_{\nu_f,\nu_i}+\xi_{\nu_g,\nu_j})^2/4\right\}}{2^{n_i+n_j+n_f+n_g}n_i!n_j!n_f!n_g!}\iint dk_1dk_2\exp\left\{-\left[k_2-\frac{\xi_{\nu_i,\nu_j}+\xi_{\nu_g,\nu_f}}{2}\right]^2\right\}|M_{i,j,g,f}(k_1,k_2)|^2, \quad (9)$$

$$M_{i,j,g,f}(k_1,k_2)=\int dy\exp\left\{-\frac{(y+k_1-k_2)^2}{2}\right\}G_{\nu_i,\nu_j,\nu_g,\nu_f}\left(|k_2|;\left|y+\frac{\xi_{\nu_i,\nu_j}+\xi_{\nu_f,\nu_g}}{2}\right|\right)\Lambda_{n_i,n_j,n_g,n_f}(k_2,y+k_1-k_2), \quad (10)$$

$$G_{\nu_i,\nu_j,\nu_g,\nu_f}(\gamma,y)=\int dz_1K_0\left(\gamma\sqrt{y^2+\frac{4z_1^2}{l_c^2}}\right)R_{\nu_i,\nu_j,\nu_g,\nu_f}(z_1), \quad (11)$$

$$R_{\nu_i,\nu_j,\nu_g,\nu_f}(z_1)=\int dz_2\varphi_{\nu_i}(z_2)\varphi_{\nu_j}(z_2-2z_1)\varphi^*_{\nu_f}(z_2)\varphi^*_{\nu_g}(z_2-2z_1), \quad (12)$$

$$\Lambda_{n_i,n_j,n_g,n_f}(k,y)=2^{\frac{n_i+n_j+n_f+n_g}{2}}\sqrt{2}\sum_{p_1=0}^{n_i}\frac{1}{2^{p_1/2}}\binom{n_i}{p_1}H_{p_1}(\delta_i)\sum_{p_2=0}^{n_j}\frac{1}{2^{p_2/2}}\binom{n_j}{p_2}H_{p_2}(\delta_j)\sum_{p_3=0}^{n_g}\frac{1}{2^{p_3/2}}\binom{n_g}{p_3}H_{p_3}(\delta_g)\times$$
$$\times\sum_{p_4=0}^{n_f}\frac{1}{2^{p_4/2}}\binom{n_f}{p_4}H_{p_4}(\delta_f)\frac{1+(-1)^{n_i+n_j+n_f+n_g-p_1-p_2-p_3-p_4}}{2}\Gamma\left(\frac{1+n_i+n_j+n_f+n_g-p_1-p_2-p_3-p_4}{2}\right), \quad (13)$$

$K_0(x)$ — функция Макдональда, $H_n(x)$ — полином Эрмита степени n, $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера,

$$\delta_i=\frac{y+k+\xi_{\nu_f,\nu_i}}{2}, \quad (14)$$

$$\delta_j=\frac{-y-k+\xi_{\nu_g,\nu_j}}{2}, \quad (15)$$

$$\delta_g=\frac{-y+k-\xi_{\nu_g,\nu_j}}{2}, \quad (16)$$

$$\delta_f=\frac{y-k-\xi_{\nu_f,\nu_i}}{2}, \quad (17)$$

$$\xi_{\nu_1,\nu_2}=\sqrt{\frac{e}{\hbar cB_\perp}}\left[\langle z\rangle_{\nu_1}-\langle z\rangle_{\nu_2}\right]B_\parallel. \quad (18)$$

Форм-фактор, выражающий закон сохранения энергии при электрон-электронном рассеянии с учетом конечной ширины уровней Ландау, равен

$$F_{ee}(E_i+E_j-E_f-E_g)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\Gamma^{ee}_\Sigma}\exp\left\{-\frac{(E_i+E_j-E_f-E_g)^2}{2(\Gamma^{ee}_\Sigma)^2}\right\}. \quad (19)$$

Полученные закономерности иллюстрируются на примере квантовой ямы $GaAs/Al_{0.3}Ga_{0.7}As$ шириной 25 нм, если иное не оговорено специально. В такой квантовой яме ниже уровня оптического фонона лежат две подзоны размерного квантования и электрон-электронное рассеяние является основным механизмом межподзонной релаксации [2]. Для таких квантовых ям типичная величина ширины уровня Ландау составляет 1 мэВ, что дает ширину перехода $\Gamma^{ee}_\Sigma=2$ мэВ в форм-факторе (19).

Поскольку все основные особенности электронного спектра в рассматриваемой системе, качественно отличающие ее от других электронных систем, обусловлены компонентой магнитного поля, направленной вдоль оси роста гетероструктуры, для того чтобы максимально четко выделить роль этих особенностей, рассмотрим вначале процессы рассеяния в магнитном поле, направленном перпендикулярно слоям гетероструктуры.

3. ВНУТРИПОДЗОННЫЕ ПЕРЕХОДЫ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ ЭЛЕКТРОНОВ В РАЗНЫХ ПОДЗОНАХ

В многоподзонном случае возникает особый тип переходов — каждый электрон взаимодействующей пары остается после рассеяния в той же подзоне, в которой он находился изначально, но, в отличие от внутриподзонных переходов, рассмотренных в [1], эти электроны находятся в разных подзонах (рис. 1 *e*). Будем называть такие переходы внутриподзонными переходами типа II, поскольку для каждого электрона такой переход является внутриподзонным. Соответственно, ранее рассмотренные в [1] переходы, когда начальные и конечные уровни

Ландау обоих электронов находятся внутри одной подзоны ($\nu_i = \nu_j = \nu_f = \nu_g$), будем называть внутриподзонными переходами типа I.

Электрон-электронное рассеяние является упругим двухчастичным процессом. Для перехода

$$\{(\nu_i, n_i) \to (\nu_f, n_f)\,\&\,(\nu_j, n_j) \to (\nu_g, n_g)\}$$

закон сохранения энергии (условие резонанса перехода) имеет вид

$$E_{(\nu_i,n_i)} + E_{(\nu_j,n_j)} = E_{(\nu_f,n_f)} + E_{(\nu_g,n_g)}. \qquad (20)$$

Подстановка в (20) выражения (1) для одночастичной энергии дает

$$n_f - n_i + n_g - n_j = \frac{\varepsilon_{\nu_i} - \varepsilon_{\nu_f} + \varepsilon_{\nu_j} - \varepsilon_{\nu_g}}{\hbar\omega_c}. \qquad (21)$$

Для внутриподзонных переходов типа II $\nu_i = \nu_f$ и $\nu_j = \nu_g$, поэтому условие резонанса (21) принимает вид

$$n_f - n_i + n_g - n_j = 0 \qquad (22)$$

и, соответственно, выполняется при любом значении магнитного поля. В результате характер зависимости скоростей переходов типа II от магнитного поля такой же, как и в случае внутриподзонных переходов типа I — скорость перехода медленно уменьшается с увеличением напряженности магнитного поля (рис. 2). При этом изменение номера уровня Ландау одного электрона в акте электрон-электронного рассеяния равно по модулю и противоположно по знаку изменению номера уровня Ландау другого электрона. Поэтому здесь возникают такие же разновидности переходов, как и для типа I, с той лишь разницей, что электроны переходят по лестнице уровней Ландау разных подзон. Множество всех внутриподзонных переходов типа II, для которых выполняется закон сохранения энергии, можно описать формулами

$$\{(\nu_i, n_i) \to (\nu_i, n_i - \Delta n) \& (\nu_j, n_j) \to (\nu_j, n_j + \Delta n)\} \quad (23)$$
$$\{(\nu_i, n_i) \to (\nu_i, n_i + \Delta n) \& (\nu_j, n_j) \to (\nu_j, n_j - \Delta n)\}. \quad (24)$$

Здесь так же, как и для переходов типа I, переданная электрону энергия и число уровней Δn, через которое «перепрыгнул» электрон, пропорциональны друг другу $E_{trans} = \hbar\omega_c \Delta n$.

При переходах типа II зависимость от переданной электрону энергии аналогична такой зависимости для переходов типа I — скорость переходов типа II сильно уменьшается при увеличении переданной энергии (рис. 3). Объяснение этой закономерности

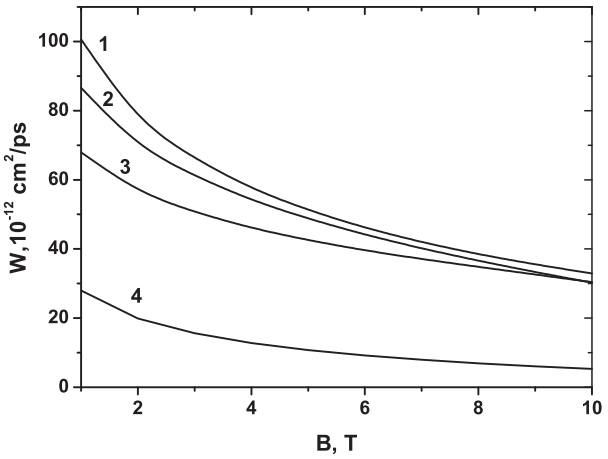

Рис. 2. Зависимость скорости электрон-электронного рассеяния от напряженности магнитного поля для внутриподзонных переходов типа II: *1* — $\{(2,0) \to (2,1)\,\&\,(1,1) \to (1,0)\}$; *2* – $\{(2,1) \to (2,2)\,\&\,(1,1) \to (1,0)\}$; *3* — $\{(2,0) \to (2,1)\,\&\,(1,4) \to (1,3)\}$; *4* — $\{(2,0) \to (2,2)\,\&\,(1,2) \to (1,0)\}$

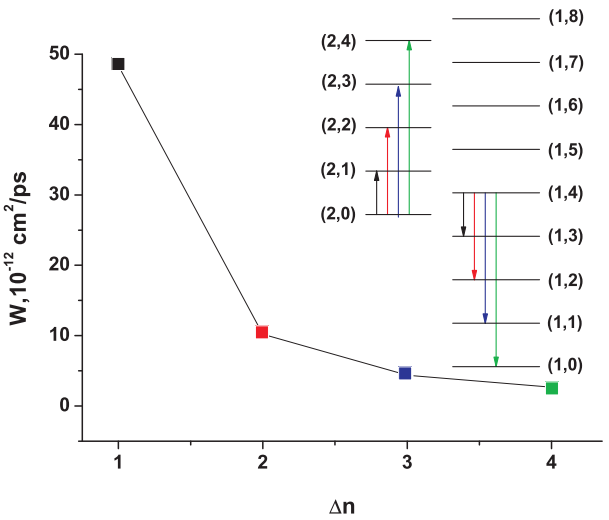

Рис. 3. Зависимость скорости электрон-электронного рассеяния для внутриподзонных переходов типа II от изменения Δn номера уровня Ландау электрона при переходе. Магнитное поле $B = 3.5$ Тл. На вставках показаны схемы переходов. Цвет стрелок, обозначающих переход, совпадает с цветом точки на графике

такое же, как и в случае внутриподзонных переходов типа I (см. работу [1]).

Особо подчеркнем тот факт, что скорости внутриподзонных переходов типа I и типа II близки по величине (рис. 4). Это обстоятельство имеет существенное значение для физической картины релаксации электронов с уровней Ландау верхней подзоны, лежащих ниже энергии оптического фонона.

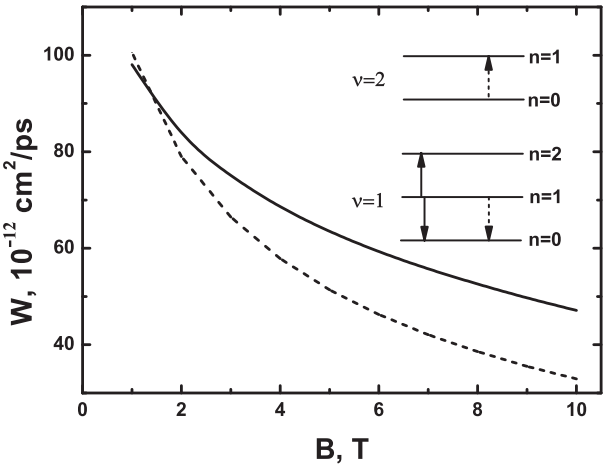

Рис. 4. Зависимость скорости электрон-электронного рассеяния от магнитного поля для внутриподзонного перехода типа I $\{(1,1) \to (1,0)\,\&\,(1,1) \to (1,2)\}$ (сплошная кривая) и внутриподзонного перехода типа II $\{(1,1) \to (1,0)\,\&\,(2,0) \to (2,1)\}$ (штриховая)

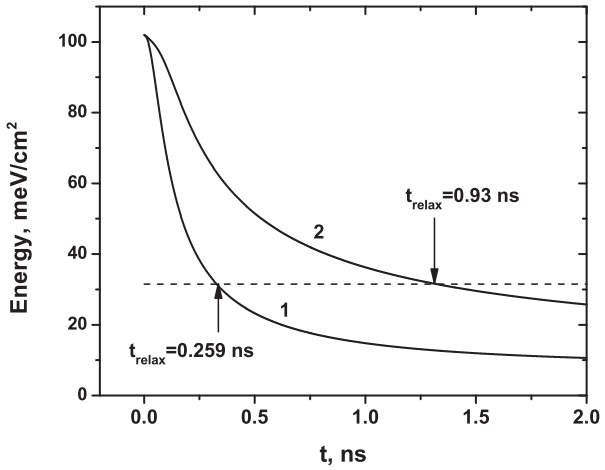

Рис. 5. Зависимость энергии возбуждения электронной подсистемы от времени при ее селективном возбуждении на уровень Ландау (2,0). Магнитное поле $B = 3.5$ Тл (при этом значении уровень оптического фонона проходит вблизи уровня Ландау (2,3)). Температура кристаллической решетки $T_L = 4.2$ K. Концентрация электронов в яме $1.5{\cdot}10^{10}$ см$^{-2}$. Неравновесность создается мгновенным возбуждением электронов на уровень Ландау (2,0) так, что в начальный момент времени $t = 0$ заселены только два уровня Ландау — уровень $(1,0)$ и уровень $(2,0)$ с концентрациями 10^{10} см$^{-2}$ и $5 \cdot 10^9$ см$^{-2}$ соответственно. Кривая *1* получена с учетом всех переходов с уровней Ландау, лежащих ниже энергии оптического фонона. При получении кривой *2* пренебрегается внутриподзонными переходами типа II

При возбуждении электронов в верхнюю подзону переходы типа II порождают и стимулируют интенсивный канал релаксации, в котором электроны достигают уровня оптического фонона, перемещаясь по лестнице уровней Ландау верхней подзоны, и переходят в нижнюю подзону в результате процессов межподзонного электрон-фононного рассеяния [2].

На рис. 5 приведен пример, иллюстрирующий значение переходов типа II для процессов межподзонной релаксации. Здесь показаны две зависимости энергии электронной подсистемы от времени при ее селективном возбуждении на уровень Ландау (2,0), лежащий ниже энергии оптического фонона. Расчет выполнен с использованием модели, изложенной в работах [1, 2]. При расчете первой зависимости (кривая *1*) учитывались все процессы электрон-электронного рассеяния с уровней Ландау, лежащих ниже энергии оптического фонона. При получении второй зависимости (кривая *2*) мы пренебрегли внутриподзонными переходами типа II. Видно, что пренебрежение внутриподзонными переходами типа II приводит к сильному замедлению скорости релаксации, так что время релаксации увеличивается более чем в три раза.

4. МЕЖПОДЗОННЫЕ ПЕРЕХОДЫ

Множество переходов между двумя подзонами мы делим на три типа.

В межподзонных переходах типа I оба электрона взаимодействующей пары находятся в одной подзоне ($\nu_i = \nu_j$) и в результате рассеяния переходят на уровни Ландау другой подзоны ($\nu_g = \nu_f \neq \nu_i = \nu_j$). Примеры переходов этого типа приведены на рис. 1 *a* и 1 *b*.

К типу II мы относим переходы, в которых только один электрон переходит в другую подзону, тогда как второй электрон остается в начальной подзоне, т. е. $\nu_i = \nu_j$, $\nu_i = \nu_f$ и $\nu_j \neq \nu_g$. Примеры переходов этого типа приведены на рис. 1 *c*.

В начальном состоянии переходов типа III электроны взаимодействующей пары находятся в разных подзонах ($\nu_i \neq \nu_j$), и каждый из них переходит на уровни Ландау другой подзоны ($\nu_f = \nu_j$ и $\nu_g = \nu_i$). Примеры переходов этого типа приведены на рис. 1 *d*.

В отличие от внутриподзонного рассеяния, характер зависимости скорости межподзонных переходов от магнитного поля определяется их типом.

В переходах типа I закон сохранения энергии

$$E_{(\nu_i,n_i)} + E_{(\nu_j,n_j)} = E_{(\nu_f,n_f)} + E_{(\nu_g,n_g)}$$

принимает вид

$$n_f + n_g - n_i - n_j = \frac{2\Delta\varepsilon_{if}}{\hbar\omega_c}, \tag{25}$$

где

$$\Delta\varepsilon_{if} = \varepsilon_{\nu_i} - \varepsilon_{\nu_f} \tag{26}$$

— расстояние между подзонами. Это условие выполняется в двух случаях: если отношение $\Delta\varepsilon_{if}/\hbar\omega_c$ является целым числом,

$$\frac{\Delta\varepsilon_{if}}{\hbar\omega_c} = p,\ p = 1, 2, 3, \ldots, \tag{27}$$

или полуцелым числом,

$$\frac{\Delta\varepsilon_{if}}{\hbar\omega_c} = p + \frac{1}{2},\ p = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{28}$$

Условие (27) соответствует значению магнитного поля

$$B_{\perp,p} = \frac{m_w c}{\hbar e}\frac{\Delta\varepsilon_{if}}{p}, \tag{29}$$

при котором нулевой уровень Ландау верхней подзоны совпадает с уровнем Ландау p нижней подзоны $\left(E_{(\nu_i,0)} = E_{(\nu_f,p)}\right)$. Поскольку система уровней Ландау подзоны является эквидистантной и расстояние между соседними уровнями является одинаковым в каждой подзоне, выравнивание с уровнями Ландау нижней подзоны будет одновременно происходить для всех уровней Ландау верхней подзоны: $E_{(\nu_i,n)} = E_{(\nu_f,p+n)}$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$ (см. рис. 6). Поэтому при значении магнитного поля, удовлетворяющего условию (29), большое число переходов одновременно находится в резонансе. Все эти переходы можно описать формулой

$$\{(\nu_i, n) \to (\nu_f, p + n - \delta n)\,\&\,(\nu_i, n + \Delta N) \to \\ \to (\nu_f, p + n + \Delta N + \delta n)\}. \tag{30}$$

В этой формуле n — номер начального уровня Ландау электрона в начальной подзоне, энергия которого уменьшается в акте рассеяния. Переданная в акте рассеяния энергия равна

$$E_{trans} = |E_f - E_i| = |E_g - E_j| = \hbar\omega_c\delta n.$$

Разница энергии в начальном состоянии электрона, который переходит на вышележащий уровень, и начальной энергии второго электрона взаимодействующей пары равна

$$\Delta E_{init} = \hbar\omega_c\Delta N.$$

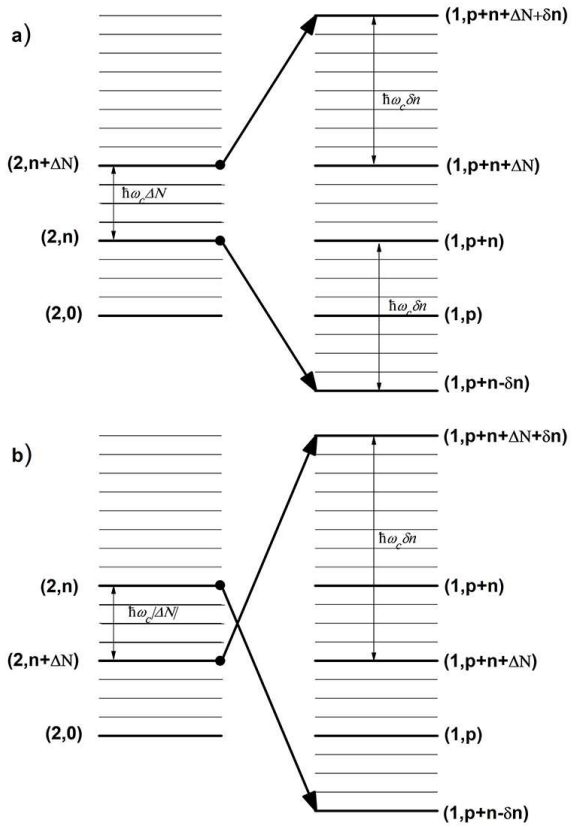

Рис. 6. Схема межподзонных переходов типа I в случае, когда уровни Ландау верхней подзоны совпадают с уровнями Ландау нижней подзоны при $\Delta N \geq 0$ (*a*) и $\Delta N < 0$ (*b*)

В формуле (30) δn по-прежнему есть энергия, переданная одному электрону в акте рассеяния, выраженная в единицах $\hbar\omega_c$. Однако δn теперь отличается от изменения номера уровня Ландау в подзоне при переходе,

$$\Delta n = |n_f - n_i| = |n_g - n_j|,$$

как для электрона, энергия которого уменьшается при рассеянии,

$$n_f - n_i = p - \delta n, \tag{31}$$

так и для электрона, энергия которого при этом увеличивается,

$$n_g - n_j = p + \delta n. \tag{32}$$

В зависимости от знака разницы между номерами начальных уровней Ландау ΔN мы имеем различные виды (подтипы) межподзонных переходов типа I.

При $\Delta N = 0$ формула (30) описывает переходы, в начальном состоянии которых оба электрона находятся на одном и том же уровне Ландау (ν_i, n). При этом $\delta n \le p + n$.

Значение $\Delta N \neq 0$ дает переходы, в которых электроны взаимодействующей пары исходно находятся на разных уровнях Ландау, — электрон, энергия которого уменьшается в результате рассеяния, находится до рассеяния на уровне (ν_i, n), а второй электрон — на уровне $(\nu_i, n + \Delta N)$.

Пример переходов с $\Delta N > 0$ показан на рис. 6 *a*. При этом $\delta n \le p + n$. Случай $\Delta N < 0$ показан на рис. 6 *b*. При этом $\Delta N \ge -n$.

Условие (28) соответствует значению магнитного поля

$$B_{\perp,p} = \frac{m_w c}{\hbar e} \frac{\Delta\varepsilon_{if}}{p + 1/2}, \tag{33}$$

при котором нулевой уровень Ландау верхней подзоны лежит точно посередине между уровнями Ландау p и $p + 1$ нижней подзоны:

$$E_{(\nu_i,0)} = \left(E_{(\nu_f,p)} + E_{(\nu_f,p+1)}\right)/2.$$

Соответственно, и все вышележащие уровни верхней подзоны лежат в точности посередине между соседними уровнями Ландау нижней подзоны:

$$E_{(\nu_i,n)} = \left(E_{(\nu_f,p+n)} + E_{(\nu_f,p+n+1)}\right)/2,$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$ (см. рис. 7). Таким образом, в данном случае условие резонанса также выполняется одновременно для множества переходов. Все это множество переходов можно описать формулой

$$\{(\nu_i, n) \to (\nu_f, p + n + 1/2 - \delta n)\&(\nu_i, n + \Delta N) \to \\ \to (\nu_f, p + n + \Delta N + 1/2 + \delta n)\}. \tag{34}$$

Так же, как и раньше, δn представляет собой энергию, переданную одному электрону, выраженную в единицах $\hbar\omega_c$, т. е.

$$E_{trans} = |E_f - E_i| = |E_g - E_j| = \hbar\omega_c \delta n,$$

но теперь δn принимает полуцелые положительные значения, меньшие, либо равные $p + n + 1/2$. При $\delta n = 1/2$ электроны переходят на ближайшие к ним уровни Ландау нижней подзоны, при $\delta n = 3/2$ — на уровни нижней подзоны, следующие за ближайшими и т. д. В формуле (34) ΔN может принимать целые значения, превышающие $-\delta n$. Схемы переходов с $\Delta N \ge 0$ и $\Delta N < 0$ приведены на рис. 7 *a* и 7 *b* соответственно. Изменение номера уровня Ландау в подзоне для электрона рассеивающейся пары,

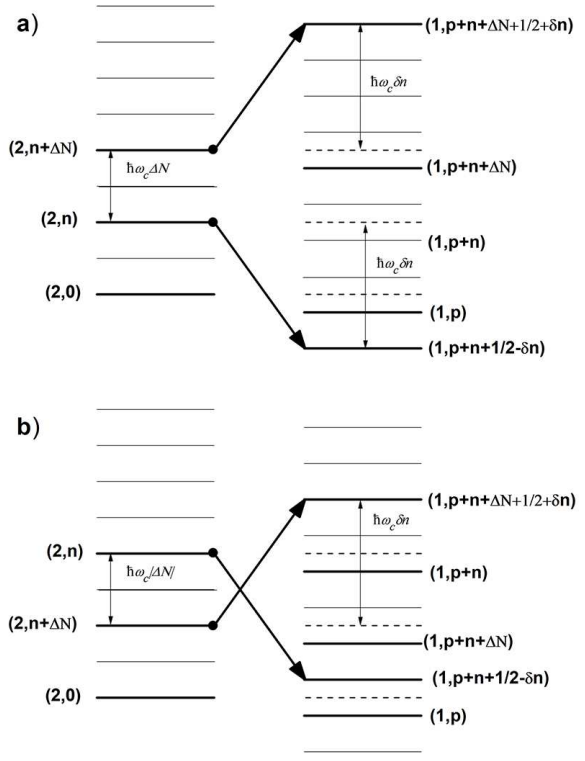

Рис. 7. Схема межподзонных переходов типа I в случае, когда уровни Ландау верхней подзоны находятся посредине между уровнями Ландау нижней подзоны при $\Delta N > 0$ (*a*) и $\Delta N < 0$ (*b*)

энергия которого уменьшается в результате взаимодействия, равно

$$n_f - n_i = p - \left(\delta n - \frac{1}{2}\right), \tag{35}$$

а для электрона, энергия которого увеличивается, —

$$n_g - n_j = p + \left(\delta n + \frac{1}{2}\right). \tag{36}$$

Таким образом, мы видим, что для каждого межподзонного перехода типа I закон сохранения энергии выполняется только при одном значении магнитного поля: или при значении, определяемом выражением (29), или при значении, даваемом (33). Поскольку уровни Ландау имеют конечную ширину, зависимость от магнитного поля скорости межподзонного перехода типа I представляет собой резонансный пик (рис. 8).

Сопоставление со скоростями внутриподзонного рассеяния показывает, что скорости межподзонного рассеяния типа I даже в резонансах существенно

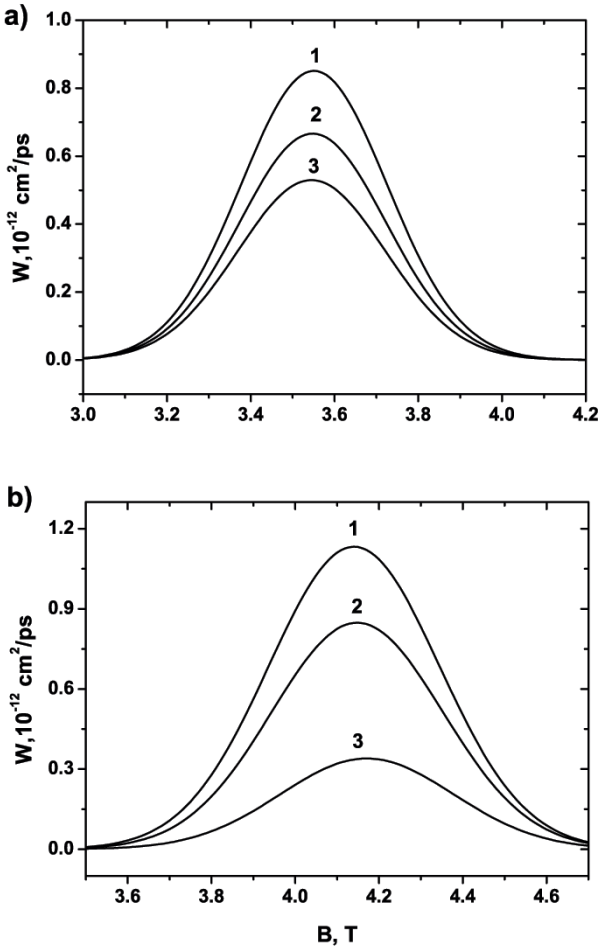

Рис. 8. Зависимости скорости электрон-электронного рассеяния от магнитного поля для переходов типа I: *a*) *1* — $\{(2,0) \to (1,3)\,\&\,(2,0) \to (1,4)\}$; *2* — $\{(2,0) \to (1,3)\&\ (2,1) \to (1,5)\}$; *3* — $\{(2,0) \to (1,3)\,\&\,(2,2) \to (1,6)\}$; *b*) *1* — $\{(2,0) \to (1,3)\,\&\,(2,0) \to (1,3)\}$; *2* — $\{(2,0) \to (1,2)\&\ (2,0) \to (1,4)\}$; *3* — $\{(2,0) \to (1,1)\,\&\,(2,0) \to (1,5)\}$

(примерно на два порядка) меньше скоростей внутриподзонного рассеяния как типа I, так и типа II. Однако межподзонные переходы типа I приводят к перетоку электронов из верхних подзон в нижние и тем самым являются важным каналом межподзонной релаксации.

Для межподзонных переходов типа I представляет интерес вопрос о возможности производить простое разделение переходов по величине их скорости, такое как в случае внутриподзонных переходов по величине энергии E_{trans}, передаваемой в акте рассеяния одному электрону [1]. На первый взгляд, казалось бы, для межподзонных переходов типа I зависимость скорости перехода от E_{trans} должна быть подобной внутриподзонным переходам — скорость межподзонных переходов типа I должна уменьшаться с ростом E_{trans}. Однако анализ матрицы скоростей рассеяния показал, что это совсем не так.

На рис. 9 представлены зависимости скорости межподзонных переходов типа I от переданной энергии. На каждом из рисунков фиксированы начальные состояния электронов взаимодействующей пары (n и ΔN свои для каждого рисунка) и изменяются конечные состояния по мере возрастания энергии (числа δn), передаваемой одному электрону в акте рассеяния, которая отложена по оси абсцисс. Видно, что для межподзонных переходов нет столь явной зависимости скорости рассеяния от переданной энергии, как в случае внутриподзонных переходов. В случае, когда оба электрона рассеиваются с уровня (2,0), скорость рассеяния довольно быстро уменьшается с ростом переданной энергии (рис. 9 *a*). В то же время, когда электроны рассеиваются с различных уровней Ландау, скорости первых несколько переходов могут быть близки по величине (рис. 9 *b*) и даже превышать скорость перехода с минимальным изменением энергии электрона (рис. 9 *c*). Возможна также довольно сложная немонотонная зависимость от переданной энергии (рис. 9 *d*).

Столь различное поведение скорости переходов разного типа при изменении переданной энергии E_{trans} можно объяснить следующим образом.

В резонансе скорость переходов определяется не напрямую изменением энергии электрона, а различием волновой функции (2) каждого электрона до и после рассеяния. Поскольку гетероструктура и, соответственно, уровни энергии размерного квантования ε_ν и их волновые функции $\varphi_\nu(z)$ фиксированы, различие в волновых функциях начального и конечного состояния перехода

$$\{(\nu_f, n_f) \to (\nu_i, n_i)\,\&\,(\nu_j, n_j) \to (\nu_g, n_g)\}$$

данного типа определяются разницей номеров уровней Ландау

$$\Delta n_1 = |n_f - n_i|, \quad \Delta n_2 = |n_g - n_j|$$

в тех подзонах, к которым эти уровни относятся. Чем меньше эта разница, тем ближе волновые функции начального и конечного состояний. В случае $\Delta n_\alpha = 0$ различие волновых функций начального и конечного состояний α-го электрона пары является минимальным — эти волновые функции различаются только волновыми функциями $\varphi_\nu(z)$ уровней энергии размерного квантования.

В случае внутриподзонных переходов $\Delta n_1 = \Delta n_2 = \Delta n$, причем переданная энергия

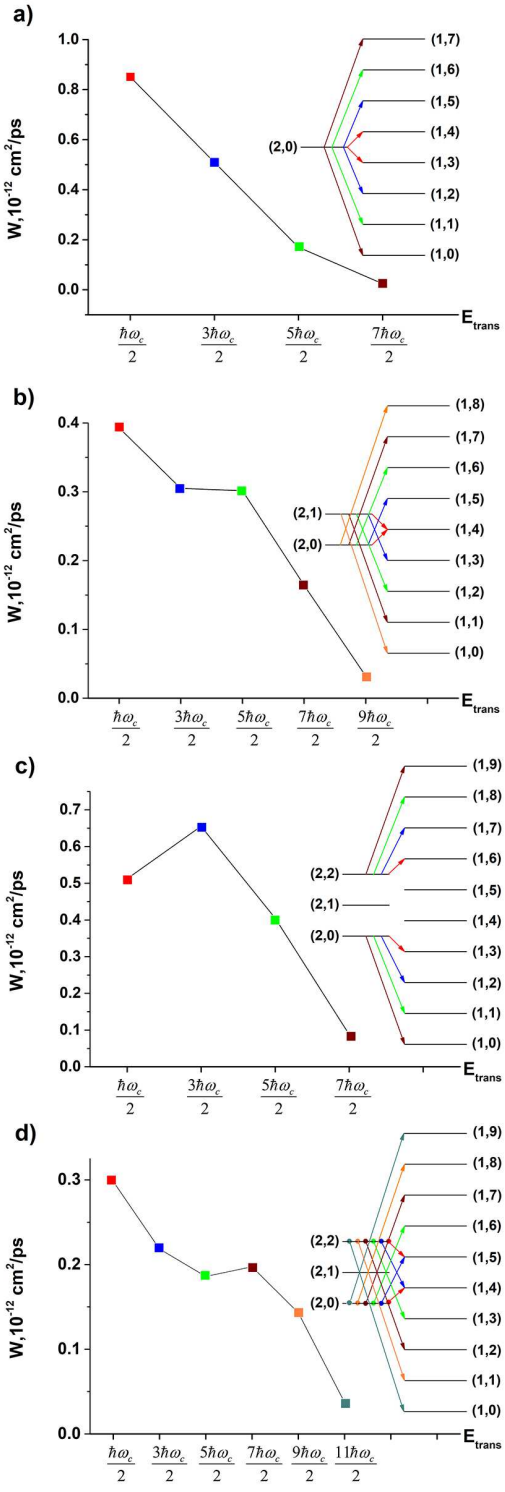

Рис. 9. Зависимость скорости межподзонных переходов типа I от переданной энергии E_{trans}. Магнитное поле $B = 3.5$ Тл соответствует резонансу, когда уровень Ландау (2,0) лежит посредине между уровнями Ландау (1,3) и (1,4)

$E_{trans} = \hbar\omega_c\Delta n$. Поэтому при увеличении E_{trans} увеличивается Δn, растет различие волновых функций начального и конечного состояний каждого электрона взаимодействующей пары, и, как следствие, уменьшается скорость перехода. Это объясняет наблюдаемую монотонную зависимость скоростей внутриподзонных переходов от E_{trans}. Указанной причиной объясняется также и то, что различие между скоростями уменьшается с ростом Δn. Это связано с тем, что чем больше нулей у волновой функции, тем меньше это различие при добавлении еще одного нуля.

В случае же межподзонных переходов типа I $\Delta n_1 \neq \Delta n_2$. Это хорошо видно на схемах переходов, приведенных на рис. 9 в виде вставок. Например, для перехода

$$\{(2,0) \to (1,3)\,\&\,(2,0) \to (1,4)\}$$

изменение номера уровня Ландау для одного электрона $\Delta n_1 = |3-0| = 3$, а для другого $\Delta n_2 = |4-0| = 4$. Для межподзонных переходов типа I мы ввели число δn так, чтобы $E_{trans} = \hbar\omega_c\delta n$. Величина δn дает нам число уровней Ландау, через которое электрон «перепрыгивает» при рассеянии (см. схемы на рис. 6 и 7). Однако поскольку подзоны сдвинуты друг относительно друга, величины Δn_1 и Δn_2 не совпадает с этим числом уровней. Связь Δn_1 и Δn_2 с δn дана выражениями (31) и (32) для строго совпадения уровней верхней и нижней подзон и выражениями (35) и (36) для резонанса, когда уровни верхней подзоны находятся посредине между уровнями Ландау нижней подзоны. Из этих выражений, а также схем переходов на вставках рис. 9, хорошо видно, что при увеличении переданной энергии E_{trans} и, соответственно, δn различие в номерах уровней Ландау для одного электрона увеличивается, что действует в сторону уменьшения скорости перехода. В то же самое время для второго электрона рассеивающейся пары эта разность сначала уменьшается, действуя в сторону увеличения скорости перехода. После достижения нуля при $\delta n = p$ или $\delta n - 1/2 = p$ она растет, что, как и в случае с первым электроном, приводит к уменьшению матричного элемента. Таким образом, мы видим, что при $\delta n \leq p$ электроны рассеивающейся пары действуют в разные стороны с точки зрения изменения скорости перехода при увеличении δn, что и приводит к столь сложному поведению скорости межподзонных переходов типа I при изменении E_{trans}.

В случае межподзонных переходов типа III ситуация с зависимостью от E_{trans} аналогичная, только,

может быть, более яркая. Например, в случае переходов типа III возможна ситуация, когда Δn_1 и Δn_2 одновременно уменьшаются с увеличением переданной энергии, вследствие чего скорость перехода существенно и монотонно увеличивается с ростом E_{trans}. Эта ситуация изображена на рис. 10 *a*. Как видно, с ростом E_{trans} скорость рассеяния увеличивается почти на порядок. Однако такая зависимость не является закономерностью. Здесь так же, как и в первом случае, характер зависимости E_{trans} сложным образом зависит от начальных состояний электронов рассеивающейся пары. Возможна ситуация, когда скорость перехода монотонно и довольно медленно уменьшается с E_{trans} (рис. 10 *b*). При других начальных состояниях электронов возникает ситуация, когда скорость сначала сильно возрастает, а затем быстро убывает (рис. 10 *c*).

Причина такого поведения здесь такая же, как и для межподзонных переходов типа I. Величина скорости переходов определяется Δn_1 и Δn_2. Вследствие того, что подзоны сдвинуты друг относительно друга, отсутствует однозначная связь Δn_1 и Δn_2 с переданной энергией E_{trans}. Зависимость E_{trans} от Δn_1 и Δn_2 качественно различается для разных начальных состояний. При этом Δn_1 и Δn_2 различаются и могут изменяться в разные стороны при увеличении E_{trans}.

Таким образом, мы приходим к весьма важному выводу. Нельзя судить об относительной величине скорости межподзонных переходов по величине переданной энергии E_{trans}. Более того, поскольку Δn_1 и Δn_2 различаются и могут по-разному изменяться в зависимости от начальных состояний электронов, отсутствует явная зависимость скорости перехода от Δn_1 и Δn_2, справедливая для всех переходов данного типа. Вследствие этого невозможно заранее однозначно определить, какие из межподзонных процессов электрон-электронного рассеяния наиболее интенсивны и должны учитываться при рассмотрении кинетики, а какие из них малоинтенсивны, и ими заведомо можно пренебречь. Поэтому здесь, по сути, для корректного описания кинетики необходимо рассчитывать «полную» матрицу скоростей межподзонных переходов.

Сказанное иллюстрирует рис. 11, на котором приведены зависимости энергии возбуждения электронной подсистемы от времени при ее селективном возбуждении на уровень Ландау (2,0), лежащий ниже уровня оптического фонона. Кривая *1* рассчитана с учетом всех процессов электрон-электронного рассеяния, обусловленных взаимодействием электронов на уровнях Ландау, лежащих ниже энергии оптического фонона. При расчете кривой *2* пренебрегается всеми межподзонными процессами электрон-электронного рассеяния, за исключением переходов типа I на ближайшие уровни Ландау тех электронов, которые изначально находятся на одном уровне Ландау. Как видно, учет «полной» межподзонной части матрицы скоростей электрон-электронного рассеяния приводит к заметному ускорению релаксации энергии — время релаксации

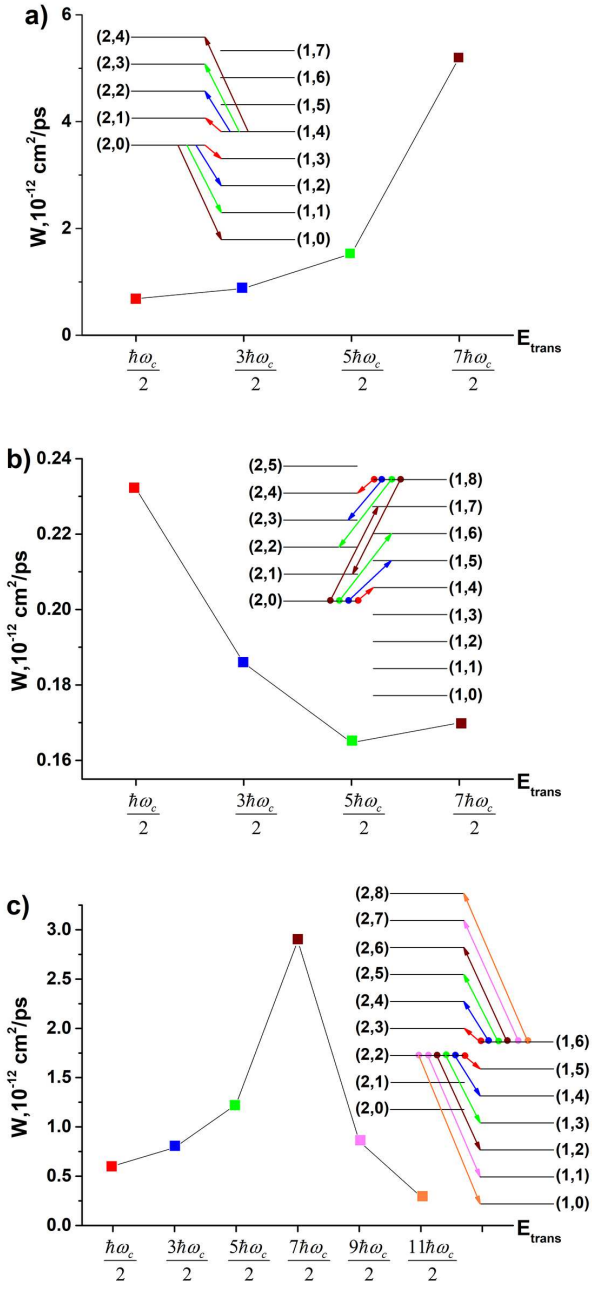

Рис. 10. Зависимости скорости переходов типа III от переданной энергии E_{trans}. Магнитное поле $B = 3.5$ Тл

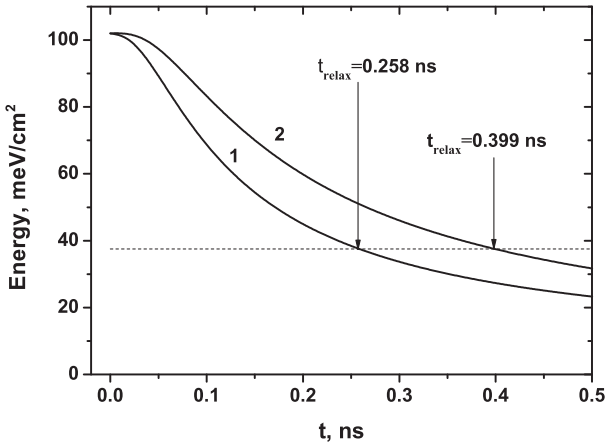

Рис. 11. Зависимость энергии возбуждения электронной подсистемы от времени, рассчитанная с учетом «полной» матрицы скоростей электрон-электронного рассеяния (кривая *1*) и в пренебрежении всеми межподзонными переходами, кроме переходов типа I с минимальной переданной энергией, в начальном состоянии которых оба электрона находятся на одном уровне Ландау (кривая *2*). В начальный момент времени $t = 0$ заселены только два уровня Ландау — уровень (2,0) с концентрацией $5{\cdot}10^9$ см$^{-2}$ и уровень (1,0) с концентрацией 10^{10} см$^{-2}$. Температура кристаллической решетки $T_L = 4.2$ K. Магнитное поле $B = 3.5$ Тл

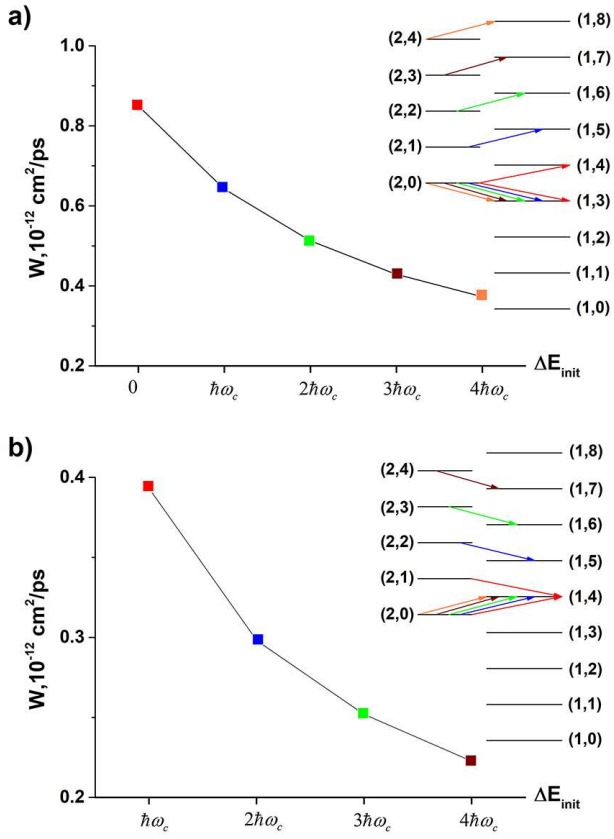

Рис. 12. Зависимость скорости межподзонного рассеяния типа I от разности начальных значений энергии ΔE_{init} электронов взаимодействующей пары. Магнитное поле $B = 3.5$ Тл

уменьшается более чем на 50 %.

Ситуация с зависимостью скорости перехода от разности энергии электронов перед рассеянием, $\Delta E_{init} = |E_i - E_j|$, также не проста по аналогичным причинам. Так же, как и в случае внутриподзонных переходов, величина матричного элемента определяется не ΔE_{init}, а различием $\Delta N = n_i - n_j$ номеров начальных уровней Ландау, каждый из которых отсчитывается в своей подзоне.

В случае переходов типа I взаимодействуют электроны в одной подзоне. Соответственно, $\Delta E_{init} = \hbar\omega_c|\Delta N|$. Поэтому скорости для переходов этого типа медленно убывают с ΔE_{init} (рис. 12).

В случаях внутриподзонных переходов типа II и межподзонных переходов типа III электроны находятся в различных подзонах, которые сдвинуты друг относительно друга. Это приводит к отсутствию однозначной зависимости ΔE_{init} от ΔN, и, соответственно, однозначной зависимости скорости переходов от ΔE_{init}.

Для иллюстрации сказанного рассмотрим внутриподзонные переходы типа II при значении магнитного поля, когда уровень Ландау (2,0) совпадает с уровнем (1,3). Рассмотрим переходы

$$\{(1, 1 + \Delta N) \to (1, \Delta N)\,\&\,(2, 0) \to (2, 1)\}.$$

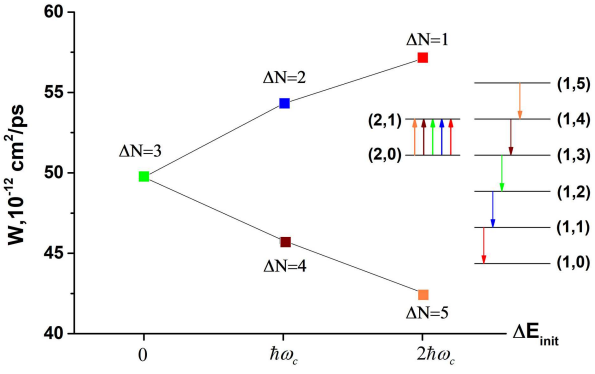

Рис. 13. Зависимость скорости внутриподзонного рассеяния типа II от различия ΔE_{init} в энергии электронов взаимодействующей пары перед рассеянием. Магнитное поле $B = 4.1$ Тл соответствует резонансу, когда уровень Ландау (2,0) совпадает с уровнем Ландау (1,3)

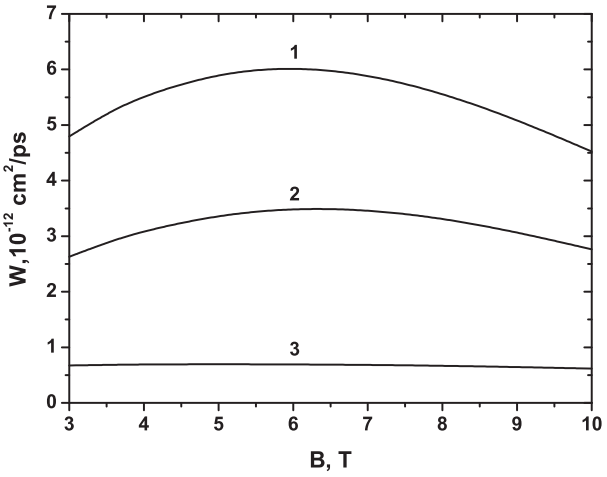

Рис. 14. Зависимость скорости переходов типа III от напряженности магнитного поля: *1* — $\{(2,0) \to (1,0)\,\&\,(1,4) \to (2,4)\}$; *2* — $\{(2,2) \to (1,2)\&\ (1,6) \to (2,6)\}$; *3* — $\{(2,0) \to (1,3)\,\&\,(1,4) \to (2,1)\}$

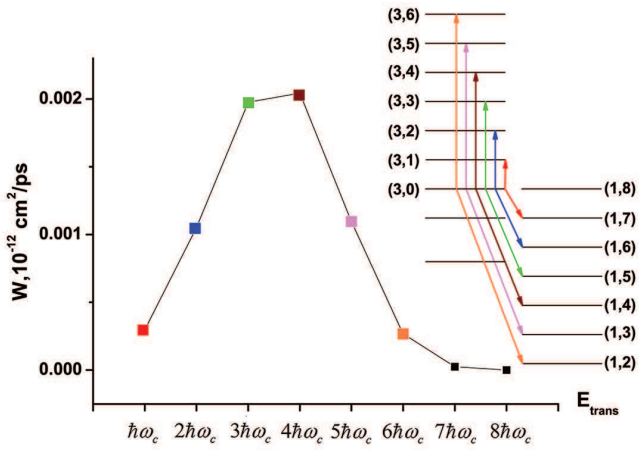

Рис. 15. Зависимость скорости межподзонных переходов типа II от энергии E_{trans}, передаваемой одному электрону в акте рассеяния. Магнитное поле $B = 4.2$ Тл соответствует резонансу, когда совпадают уровни Ландау (3,0) и (1,8)

Из схемы переходов на вставке к рис. 13 видно, что при увеличении ΔN от 1 до 3 величина ΔE_{init} убывает, а при дальнейшем увеличении ΔN величина ΔE_{init} возрастает. В результате для первой части переходов их скорость уменьшается с ростом ΔE_{init}, а для второй — растет.

При этом следует отметить, что зависимость от ΔN является слабой для переходов всех типов.

Для межподзонных переходов типа III условия резонанса имеют тот же вид (22), что и для внутриподзонных переходов. Поэтому зависимость скорости этих переходов от напряженности магнитного поля является плавной (рис. 14). Скорость переходов типа III может достигать значений, превышающих в несколько раз скорость межподзонных переходов типа I, оставаясь при этом на порядок меньше скорости внутриподзонных переходов.

Для межподзонных переходов типа II резонанс имеет место в случае, когда уровни Ландау верхней подзоны совпадают с уровнями Ландау нижней подзоны, т. е. при дискретном наборе значений магнитного поля, определяемом выражением (29). Следовательно, зависимость скорости переходов этого типа от магнитного поля представляет собой резонансный пик.

Полученные выражения для скорости рассеяния позволили установить правило отбора для межподзонных переходов типа II, связанное с симметрией потенциального профиля квантовой ямы — в структурах с симметричным профилем равна нулю скорость всех переходов

$$\{(\nu_i, n_i) \to (\nu_f, n_f)\,\&\,(\nu_j, n_j) \to (\nu_g, n_g)\},$$

у которых сумма номеров подзон $\nu_i + \nu_f + \nu_j + \nu_g$ является нечетной. Действительно, рассмотрим изменение функции $R_{\nu_i,\nu_j,\nu_g,\nu_f}(z)$, определяемой выражением (12), при изменении знака аргумента

$$R_{\nu_i,\nu_j,\nu_g,\nu_f}(-z_1) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dz_2 \varphi_{\nu_i}(z_2)\,\varphi_{\nu_j}(z_2+2z_1) \times \\ \times\, \varphi^*_{\nu_g}(z_2+2z_1)\,\varphi^*_{\nu_f}(z_2)\,. \qquad (37)$$

Проведя в интеграле замену переменной $z_2 \to -z_2$, получаем

$$R_{\nu_i,\nu_j,\nu_g,\nu_f}(-z_1) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dz_2 \varphi_{\nu_i}(-z_2)\,\varphi_{\nu_j}(-z_2+2z_1) \times \\ \times\, \varphi^*_{\nu_g}(-z_2+2z_1)\,\varphi^*_{\nu_f}(-z_2)\,. \qquad (38)$$

В структурах с симметричным потенциальным профилем волновые функции размерного квантования делятся по четности,

$$\varphi_\nu(-z) = (-1)^{\nu+1}\varphi_\nu(z)\,. \qquad (39)$$

Подставляя (39) в (38), получаем

$$R_{\nu_i,\nu_j,\nu_g,\nu_f}(-z_1) = (-1)^{\nu_i+\nu_j+\nu_g+\nu_f} R_{\nu_i,\nu_j,\nu_g,\nu_f}(z_1)\,. \qquad (40)$$

Таким образом, в случае, когда сумма $\nu_i + \nu_j + \nu_g + \nu_f$ является нечетной, функция $R_{\nu_i,\nu_j,\nu_g,\nu_f}(z_1)$ также является нечетной, и, как следствие, является нечетной подынтегральная функция в интеграле (11), определяющем функцию $G_{\nu_i,\nu_j,\nu_g,\nu_f}(\gamma, y)$. Поэтому равны нулю функция

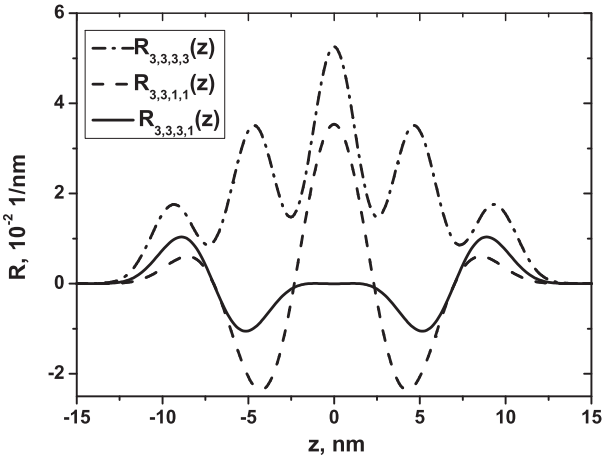

Рис. 16. Функция $R_{\nu_i,\nu_j,\nu_g,\nu_f}(z)$ для переходов различного типа — внутриподзонных переходов в третьей подзоне (штрихпунктирная кривая), межподзонных переходов типа I (штриховая) и типа II (сплошная) из третьей в первую подзону

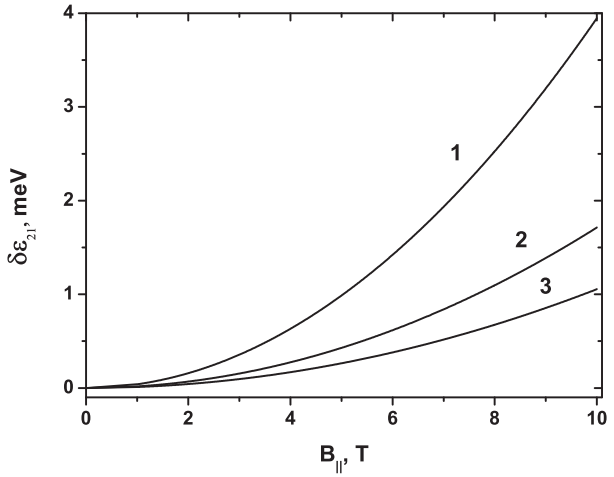

Рис. 17. Зависимость расстояния между нижними подзонами в квантовой яме от компоненты магнитного поля, параллельной ее слоям. Различные кривые соответствуют различным значениям ширины a квантовой ямы: 1 – $a = 25$ нм; 2 – $a = 15$ нм; 3 – $a = 10$ нм. Данные приведены для квантовой ямы GaAs/$Al_{0.3}Ga_{0.7}As$

$G_{\nu_i,\nu_j,\nu_g,\nu_f}(\gamma, y)$ и, соответственно, скорости всех переходов, у которых сумма номеров подзон $\nu_i + \nu_j + \nu_g + \nu_f$ является нечетной.

Для переходов типа II, когда один из электронов переходит в соседнюю подзону, $\nu_i = \nu_j = \nu_f = \nu_g \pm 1$. Соответственно, сумма $\nu_i + \nu_j + \nu_g + \nu_f = 4\nu_i \mp 1$ является нечетной.

Следовательно, в структурах с симметричным профилем переходы типа II между соседними подзонами запрещены. В случае переходов между подзонами, отстоящими дальше друг от друга (например, между первой и третьей), скорость этих переходов отлична от нуля (рис. 15), однако она почти на два порядка меньше, чем для межподзонных переходов типа I. Последнее также обусловлено структурой волновых функций в квантовых ямах с симметричным потенциальным профилем, как это хорошо видно на рис. 16, на котором приведены функции $R_{\nu_i,\nu_j,\nu_g,\nu_f}(z)$ для переходов различных типов.

В структурах с несимметричным потенциальным профилем волновые функции уровней энергии размерного квантования перестают иметь определенную четность, $\varphi_\nu(-z) \neq \pm\varphi_\nu(z)$, и вероятность переходов типа II становится отличной от нуля. Таким образом, величина, поведение и относительный вклад переходов типа II кардинальным образом зависят от симметрии потенциального профиля структуры. Поэтому переходы этого типа необходимо исследовать для каждого конкретного типа структур.

5. ВЛИЯНИЕ ОРИЕНТАЦИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

В случае, когда наряду с квантующим магнитным полем $B_\perp$ к структуре приложено магнитное поле $B_\parallel$, параллельное слоям квантовой ямы, выражение (1) дает следующее условие резонанса для перехода:

$$\Delta\varepsilon_{if} + \delta\varepsilon_{if}\left(B_\parallel\right) + \Delta\varepsilon_{jg} + \delta\varepsilon_{jg}\left(B_\parallel\right) + \\ + \left(n_i - n_f + n_j - n_g\right)\hbar\omega_c = 0, \quad (41)$$

где

$$\delta\varepsilon_{if}\left(B_\parallel\right) = \frac{e^2}{2m_w c^2}\left[(\delta z)^2_{\nu_i} - (\delta z)^2_{\nu_f}\right] B_\parallel^2 \quad (42)$$

— изменение расстояния между подзонами ν_i и ν_f вследствие сдвига каждой из подзон как целого, обусловленного наложением дополнительного поля $B_\parallel$, параллельного слоям структуры. Согласно осцилляторной теореме, волновая функция ν-го уровня энергии размерного квантования имеет $\nu - 1$ нуль. Таким образом, чем больше ν, тем сложнее устроена волновая функция и, соответственно, больше среднеквадратичная флуктуация $(\delta z)_\nu$ координаты z. Следовательно, $\delta\varepsilon_{if}\left(B_\parallel\right) > 0$ при $\nu_i > \nu_f$, т. е. компонента $B_\parallel$ магнитного поля увеличивает расстояние между подзонами (рис. 17).

Поскольку при этом сдвиге подзон их структура не изменяется, поле $B_\parallel$ не приводит к изменению

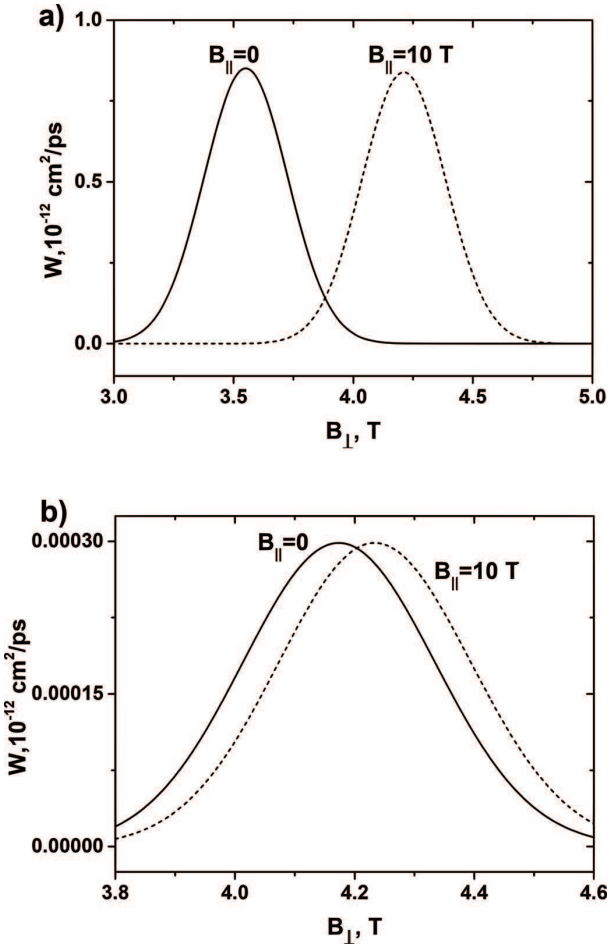

Рис. 18. Влияние компоненты $B_\parallel$ магнитного поля, параллельной слоям квантовой ямы, на зависимость скорости электрон-электронного рассеяния типа I (*a*) и типа II (*b*) от компоненты $B_\perp$ магнитного поля, перпендикулярной слоям квантовой ямы. Сплошная кривая — $B_\parallel = 0$, пунктирная — $B_\parallel = 10$ Тл. Данные приведены для перехода $\{(2,0) \to (1,3)\,\&\,(2,0) \to (1,4)\}$ (*a*) и $\{(3,0) \to (3,1)\,\&\,(3,0) \to (1,7)\}$ (*b*) в квантовой яме $GaAs/Al_{0.3}Ga_{0.7}As$ шириной 25 нм

условия резонанса в случае, когда каждый из электронов в результате рассеяния не меняет свою подзону. К таким переходам относятся внутриподзонные переходы как типа I, так и типа II. Для таких переходов $\Delta\varepsilon_{if} = \Delta\varepsilon_{jg} = 0$ и $\delta\varepsilon_{if} = \delta\varepsilon_{jg} = 0$. Соответственно, условие резонанса в наклонном магнитном поле имеет тот же вид, что и в магнитном поле, перпендикулярном слоям структуры.

Также $B_\parallel$ не меняет условие резонанса и для межподзонных переходов типа III. Хотя в этом случае сдвиги $\delta\varepsilon_{if}\left(B_\parallel\right)$ отличны от нуля для каждого из электронов, однако $\Delta\varepsilon_{if} = -\Delta\varepsilon_{jg}$ и $\delta\varepsilon_{if} = -\delta\varepsilon_{jg}$.

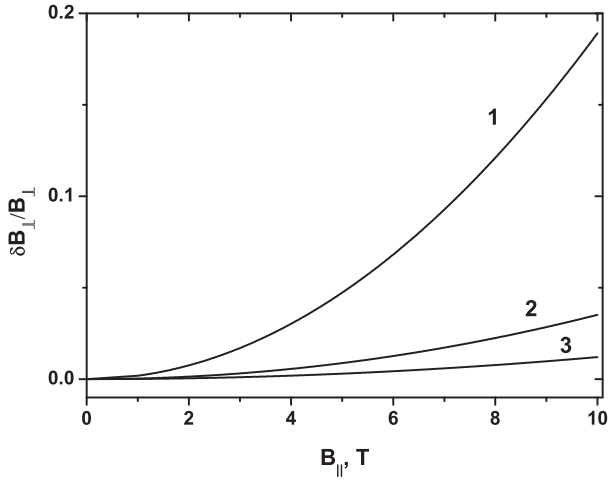

Рис. 19. Зависимость относительного сдвига резонанса перехода типа I между нижними подзонами от компоненты магнитного поля $B_\parallel$, параллельной слоям квантовой ямы. Различные кривые соответствуют различным значениям ширины a квантовой ямы: *1* — $a = 25$ нм; *2* — $a = 15$ нм; *3* — $a = 10$ нм

В случае межподзонных переходов типа I и типа II поле $B_\parallel$ приводит к сдвигу их резонансов (рис. 18). Для межподзонного перехода

$$\{(\nu_i, n_i) \to (\nu_f, n_f)\,\&\,(\nu_i, n_j) \to (\nu_f, n_g)\}$$

типа I условие резонанса (41) принимает вид

$$2\Delta\varepsilon_{if} + 2\delta\varepsilon_{if}\left(B_\parallel\right) - \frac{2\Delta\varepsilon_{if}}{\hbar\omega_c^{(0)}}\hbar\omega_c = 0. \qquad (43)$$

Здесь учтено условие резонанса (25) для данного перехода в отсутствие магнитного поля, параллельного слоям структуры, $\omega_c^{(0)} = eB_\perp^{(0)}/m_w c$, $B_\perp^{(0)}$ — значение перпендикулярной слоям компоненты магнитного поля, для которой имеет место резонанс при $B_\parallel = 0$. Из (43) находим значение компоненты $B_\perp$ магнитного поля, при котором имеет место резонанс, когда $B_\parallel \neq 0$:

$$\frac{B_\perp}{B_\perp^{(0)}} = 1 + \frac{\delta\varepsilon_{if}\left(B_\parallel\right)}{\Delta\varepsilon_{if}}. \qquad (44)$$

Соответственно, относительный сдвиг резонанса

$$\frac{\delta B_\perp}{B_\perp^{(0)}} = \frac{B_\perp - B_\perp^{(0)}}{B_\perp^{(0)}} = \frac{\delta\varepsilon_{if}\left(B_\parallel\right)}{\Delta\varepsilon_{if}}. \qquad (45)$$

Как видно, относительный сдвиг значения магнитного поля, при котором имеет место резонанс перехода, не зависит от номеров уровней Ландау и равен относительному изменению межподзонного расстояния. Как хорошо видно на рис. 19, величина относительного сдвига довольно быстро возрастает с

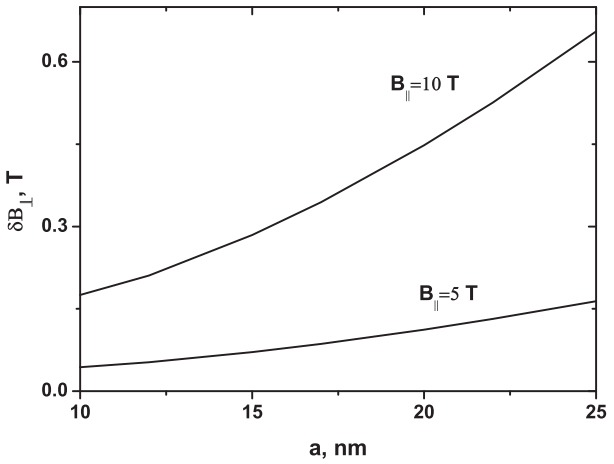

Рис. 20. Зависимость сдвига резонанса межподзонного перехода типа I вследствие наложения магнитного поля $B_\parallel$, параллельного слоям квантовой ямы, от ее ширины. Данные приведены для перехода $\{(2,0) \to (1,3)\,\&\,(2,0) \to (1,4)\}$

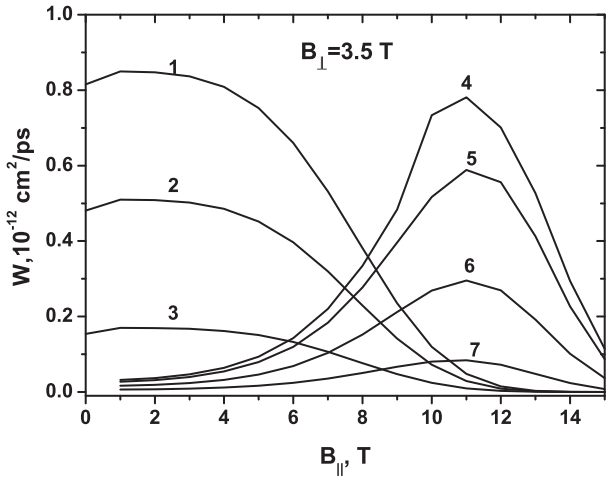

Рис. 21. Зависимость скорости переходов от $B_\parallel$ при фиксированном значении $B_\perp = 3.5$ Тл: *1* — $\{(2,0) \to (1,3)\&\ (2,0) \to (1,4)\}$; *2* — $\{(2,0) \to (1,2)\&(2,0) \to (1,5)\}$; *3* — $\{(2,0) \to (1,1)\&\ (2,0) \to (1,6)\}$; *4* — $\{(2,0) \to (1,4)\&(2,0) \to (1,4)\}$; *5* — $\{(2,0) \to (1,3)\&\ (2,0) \to (1,5)\}$; *6* — $\{(2,0) \to (1,2)\&(2,0) \to (1,6)\}$; *7* — $\{(2,0) \to (1,1)\&\ (2,0) \to (1,7)\}$

увеличением ширины квантовой ямы. Это объясняется тем, что с увеличением ширины квантовой ямы уменьшается $\Delta\varepsilon_{if}$, в то время как $\delta\varepsilon_{if}\left(B_\parallel\right)$ возрастает. Увеличение $\delta\varepsilon_{if}\left(B_\parallel\right)$ обусловлено тем, что с ростом ширины квантовой ямы увеличивается область локализации волновой функции, и, соответственно, увеличивается среднеквадратичное отклонение δz каждой из подзон. Для того чтобы оценить характер этой зависимости, рассмотрим глубокие уровни в прямоугольной квантовой яме с шириной a, у которых подавляющая часть волновой функции находится в яме,

$$\hbar/\sqrt{2m_w\left(U_0-\varepsilon\right)} \ll a.$$

В этом случае можно пренебречь проникновением волновой функции в барьер и провести оценку для бесконечно глубокой квантовой ямы. Тогда получаем

$$(\delta z)_\nu^2 = \frac{a^2}{12}\left(1-\frac{6}{(\pi\nu)^2}\right) \tag{46}$$

и, соответственно,

$$\delta\varepsilon_{if}\left(B_\parallel\right) = \frac{e^2}{4\pi^2 m_w c^2}\left[\frac{1}{\nu_f^2}-\frac{1}{\nu_i^2}\right]a^2B_\parallel^2. \tag{47}$$

Тогда для относительной величины сдвига резонанса имеем

$$\frac{\delta B_\perp}{B_\perp^{(0)}} = \frac{B_\perp - B_\perp^{(0)}}{B_\perp^{(0)}} = \frac{\delta\varepsilon_{if}\left(B_\parallel\right)}{\Delta\varepsilon_{if}} = \frac{e^2}{2\pi^4c^2\hbar^2}\frac{1}{\nu_i^2\nu_f^2}a^4B_\parallel^2. \tag{48}$$

Таким образом, относительный сдвиг резонанса растет как четвертая степень ширины квантовой ямы.

Из (45) следует, что сдвиг резонанса для перехода из верхней подзоны в нижнюю происходит в сторону больших магнитных полей и имеет величину

$$\delta B_\perp = \frac{m_w c}{e\hbar}\frac{2\delta\varepsilon_{if}\left(B_\parallel\right)}{n_f+n_g-n_i-n_j} = \frac{e}{\hbar c}\frac{\left[(\delta z)_{\nu_i}^2-(\delta z)_{\nu_f}^2\right]}{n_f+n_g-n_i-n_j}B_\parallel^2. \tag{49}$$

Как видно из (49), величина сдвига пропорциональна приращению $\delta\varepsilon_{if}\left(B_\parallel\right)$ межподзонного расстояния и, соответственно, растет при увеличении ширины квантовой ямы приблизительно как квадрат ее ширины (рис. 20).

Сдвиги резонансов довольно сильно (квадратично) зависят от $B_\parallel$, что позволяет существенным образом воздействовать этой компонентой магнитного поля как на величину скоростей межподзонного рассеяния типа I, так и на отношение скоростей различных переходов, существенно подавляя одни переходы и существенно повышая вероятность других переходов (рис. 21).

Для межподзонного перехода типа II

$$\{(\nu_i, n_i) \to (\nu_f, n_f)\,\&\,(\nu_i, n_j) \to (\nu_i, n_g)\}$$

условие резонанса (41) принимает вид

$$\Delta\varepsilon_{if} + \delta\varepsilon_{if}\left(B_\parallel\right) - \frac{\Delta\varepsilon_{if}}{\hbar\omega_c^{(0)}}\hbar\omega_c = 0. \qquad (50)$$

Здесь учтено условие резонанса при $B_\parallel = 0$:

$$\frac{\Delta\varepsilon_{if}}{\hbar\omega_c^{(0)}} = n_f - n_i + n_g - n_j. \qquad (51)$$

Из уравнения (50) следует, что для межподзонных переходов типа II также справедливы соотношения (44) и (45), из которых, учитывая (51), находим

$$\delta B_\perp = \frac{m_w c}{e\hbar}\frac{\delta\varepsilon_{if}\left(B_\parallel\right)}{n_f + n_g - n_i - n_j} = \\ = \frac{e}{2\hbar c}\frac{\left[(\delta z)^2_{\nu_i} - (\delta z)^2_{\nu_f}\right]}{n_f + n_g - n_i - n_j}B_\parallel^2. \qquad (52)$$

Компонента $B_\parallel$ входит в выражение (9) для амплитуды скорости рассеяния только через параметр ξ, определяемый выражением (18). Поскольку в акте электрон-электронного рассеяния состояние меняют два электрона, в амплитуде электрон-электронного рассеяния фигурирует два таких параметра, ξ_{ν_f,ν_i}, соответствующий переходу первого электрона, и ξ_{ν_g,ν_j} для второго электрона. В случае, когда оба эти параметра равны нулю $\left(\xi_{\nu_f,\nu_i} = \xi_{\nu_g,\nu_j} = 0\right)$, амплитуда скорости рассеяния не зависит от $B_\parallel$. Параметр ξ пропорционален разности средних координат

$$\langle z\rangle_\nu = \int dz|\varphi_\nu(z)|^2 z$$

в начальном и конечном состояниях электрона. В случае, когда эти средние координаты одинаковы, параметр $\xi = 0$.

В случае внутриподзонных процессов рассеяния типа I $\nu_i = \nu_j = \nu_g = \nu_f$. Соответственно, $\xi_{\nu_f,\nu_i} = \xi_{\nu_g,\nu_j} = 0$, и, следовательно, амплитуда скорости любого внутриподзонного перехода типа I не зависит от компоненты $B_\parallel$ магнитного поля, параллельной слоям структуры. При этом условие резонанса также не зависит от $B_\parallel$.

В случае процессов внутриподзонного рассеяния типа II электроны находятся в разных подзонах. Однако при этом каждый из электронов после рассеяния остается в той же подзоне, в которой он находился изначально, т. е. $\nu_f = \nu_i$ и $\nu_g = \nu_j$. Соответственно, $\langle z\rangle_{\nu_f} = \langle z\rangle_{\nu_i}$ и $\langle z\rangle_{\nu_g} = \langle z\rangle_{\nu_j}$. Следовательно, $\xi_{\nu_f,\nu_i} = \xi_{\nu_g,\nu_j} = 0$, и амплитуда скорости рассеяния любого внутриподзонного перехода типа II также не зависит от $B_\parallel$. Кроме того, от $B_\parallel$ не зависит условие резонанса для любого перехода этого типа.

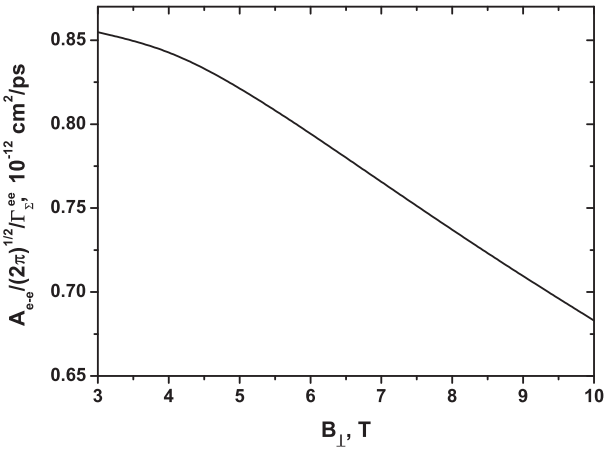

Рис. 22. Зависимость $A_{e-e}/\sqrt{2\pi}\Gamma_\Sigma^{ee}$ от $B_\perp$. Данные приведены для перехода $\{(2,0) \to (1,3)\,\&\,(2,0) \to (1,4)\}$ в квантовой яме GaAs / $Al_{0.3}Ga_{0.7}As$ шириной 25 нм

Таким образом, мы приходим к выводу, что в случае внутриподзонных процессов рассеяния, компонента $B_\parallel$ магнитного поля, параллельная слоям структуры, не оказывает влияния на процессы электрон-электронного рассеяния.

Влияние $B_\parallel$ на амплитуду межподзонных переходов определяется симметрией потенциального профиля $U(z)$ структуры. В случае симметричного потенциального профиля ($U(-z) = U(z)$) волновые функции подзон являются либо четными, либо нечетными. Поэтому средние координаты $\langle z\rangle$ являются одинаковыми для всех уровней Ландау во всех подзонах. Следовательно, для всех переходов $\xi_{\nu_f,\nu_i} = \xi_{\nu_g,\nu_j} = 0$.

Таким образом, мы приходим к выводу, что в квантовых ямах с симметричным потенциальным профилем амплитуда A_{e-e} переходов всех типов не зависит от $B_\parallel$. Влияние этой компоненты магнитного поля проявляется только в сдвиге резонансов межподзонных переходов типа I и II к большим (переходы из верхней подзоны в нижнюю) или меньшим (переходы из нижней подзоны в верхнюю) значениям квантующей компоненты $B_\perp$ магнитного поля. При сдвиге резонансов максимальное значение скорости рассеяния несколько изменяется вследствие зависимости амплитуды A_{e-e} от $B_\perp$ (рис. 22).

В случае несимметричного потенциального профиля волновые функции уровней размерного квантования $\varphi_\nu(z)$ не делятся по четности. Это приводит к тому, что различаются средние координаты $\langle z\rangle$ в начальном и конечном состояниях одного (для типа II) или обоих (для типа I и типа III) взаимодействующих электронов. В результате отличен от нуля один или оба параметра ξ. Это приводит к тому, что амплитуда перехода A_{e-e} зависит как от $B_\perp$, так и от $B_\parallel$.

Асимметрию потенциального профиля можно обеспечить, или прикладывая внешнее поле (например, электрическое [3]), или используя несимметричную конструкцию самой квантовой ямы [4,5]. Из структуры выражения (9) видно, что зависимость амплитуды скорости рассеяния от ξ носит немонотонный характер. Изменение потенциального профиля, необходимое для изменения ξ, влечет за собой изменение волновых функций $\varphi_\nu(z)$ уровней размерного квантования, которые входят в амплитуду не только через параметр ξ, но также и через интеграл $R_{\nu_i,\nu_j,\nu_g,\nu_f}$. Поэтому поведение амплитуды при изменении $B_\parallel$ является довольно сложным и неоднозначным, и его следует изучать отдельно для каждой конфигурации структуры.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассчитана «полная» матрица скоростей электрон-электронного рассеяния, содержащая все типы переходов, в которых участвуют уровни Ландау двух подзон.

Обнаружено, что скорости внутриподзонных переходов типа II (обусловленных взаимодействием электронов в различных подзонах) близки по величине и даже могут превышать скорости внутриподзонных процессов рассеяния типа I, когда оба электрона взаимодействующей пары находятся на одном уровне Ландау.

Показано, что если для внутриподзонного рассеяния имеет место быстрое монотонное уменьшение скорости при увеличении переданной энергии, то для процессов рассеяния между подзонами такая зависимость является неоднозначной — в зависимости от типа и разновидности межподзонных переходов скорость может как монотонно уменьшаться, так и монотонно расти, возможна и немонотонная зависимость скорости рассеяния от энергии, переданной электрону в акте рассеяния.

Получено выражение для скорости электрон-электронного рассеяния в квантующем магнитном поле, наклоненном к плоскости слоев квантовой ямы, справедливое в случае, когда циклотронная энергия меньше энергии размерного квантования.

Показано, что в широком диапазоне магнитных полей компонента $B_\parallel$ магнитного поля в плоскости слоев не оказывает существенного влияния на скорости внутриподзонного электрон-электронного рассеяния.

Во влиянии этой компоненты на межподзонное рассеяние можно выделить два аспекта.

Первый аспект — влияние $B_\parallel$ на форм-фактор, который определяется энергетическим спектром. Резонанс межподзонных переходов типа I и типа II сдвигается к другим значениям магнитного поля вследствие увеличения межподзонного расстояния, вызванного компонентой $B_\parallel$. В то же время параллельная компонента магнитного поля не меняет условие резонанса для переходов типа III.

Второй аспект — влияние $B_\parallel$ на амплитуду межподзонного перехода, которая не зависит напрямую от энергии, а определяется волновыми функциями. Показано, что характер этого влияния определяется симметрией потенциального профиля квантовой ямы. В структуре с симметричным профилем такое влияние практически отсутствует. В случае несимметричного потенциального профиля амплитуда зависит как от $B_\perp$, так и от $B_\parallel$.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. П. Теленков, Ю. А. Митягин, *Процессы электрон-электронного рассеяния в квантовых ямах в квантующем магнитном поле. I. Внутриподзонное рассеяние*, ЖЭТФ **168**, 425 (2025).

2. Yu. A. Mityagin, M. P. Telenkov, I .A. Bulygina et al., Physica E **142**, 115288 (2022).

3. М. П. Теленков, Ю. А. Митягин, П. Ф. Карцев, Письма в ЖЭТФ **92**, 444 (2010).

4. M. P. Telenkov, Yu. A. Mityagin, and P. F. Kartsev, Nanoscale Res. Lett. **7**, 491 (2012).

5. М. П. Теленков, Ю. А. Митягин, А. А. Куцевол и др., Письма в ЖЭТФ **100**, 728 (2014).