

# АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПЕРЕНОСА ПРИМЕСИ В МОДЕЛИ ДВУПОРИСТОЙ РЕЗКО КОНТРАСТНОЙ СРЕДЫ С КРУПНОМАСШТАБНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

П. С. Кондратенко <sup>a,b,\*</sup>, К. В. Леонов <sup>a</sup>

<sup>a</sup> Институт проблем безопасного развития атомной энергетики Российской академии наук  
115191, Москва, Россия

<sup>b</sup> Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)  
141700, Долгопрудный, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 14 июля 2025 г.,  
после переработки 23 июля 2025 г.  
Принята к публикации 23 июля 2025 г.

Разработана асимптотическая теория переноса примеси в модели статистически однородной резко контрастной двупористой среды с параметрами (скорость адвекции, коэффициент диффузии, а также характерные времена модели), имеющими крупномасштабные пространственные зависимости. Предполагается, что расстояние от основной области локализации примеси до точки наблюдения значительно превышает размер этой области. Результат для концентрации сведен к одномерным интегралам вдоль линии траектории концентрационного сигнала. Последняя определяется решением обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка для единичного вектора касательной к траектории.

DOI: 10.7868/S3034641X25100098

## 1. ВВЕДЕНИЕ

При аналитическом описании неклассических процессов переноса среда на больших пространственных масштабах часто предполагается в среднем однородной [1–5]. Между тем реальные среды обладают крупномасштабными неоднородностями. В такой ситуации даже классические процессы адвекции–диффузии требуют выполнения довольно трудоемких численных расчетов. Дополнительные, причем принципиальные, трудности возникают в случае неклассических процессов, для которых управляющие уравнения для концентрации являются интегродифференциальными, а входящие туда интегральные ядра в деталях остаются неизвестными.

С целью преодоления этих трудностей, в работе одного из авторов настоящей статьи [6] предложен новый подход, базирующийся на асимптотическом описании процессов переноса, который учитывает возможность крупномасштабной зависимо-

сти структурных характеристик среды от пространственных координат. Суть подхода базируется на двух моментах. Во-первых, согласно анализу, формирование концентрации на далеких расстояниях обусловлено коротковолновой частью механизма переноса. А во-вторых, асимптотики концентрации на далеких расстояниях носят экспоненциальный характер. Формально, таким образом, ситуация напоминает ту, которая имеет место в волновой оптике или квантовой механике, когда становится применимым приближение геометрической оптики или квазиклассическое приближение соответственно.

Асимптотический подход получил свое дальнейшее развитие в работах [7–9] применительно к классической диффузии и [10–12] по отношению к переносу примеси посредством диффузии и адвекции.

В настоящей работе представлена асимптотическая теория переноса примеси в важных для практических приложений статистически однородных резко контрастных средах, обладающих крупномасштабными неоднородностями. Примерами таких сред являются песчаные и глинистые геологические формации (см. [5, 13, 14]).

Дальнейшая структура статьи следующая. В разд. 2 дана постановка задачи. Раздел 3 посвя-

\* E-mail: kondrat@ibrae.ac.ru

щен выводу формулы для квазиэйконала — показателя экспоненты в выражении для концентрации. В разд. 4 получены соотношения для предэкспоненты. В разд. 5 найдены выражения для концентрации в различных пространственно-временных интервалах. В Заключение кратко подведены итоги.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Среда в модели статистически однородной резко контрастной (двупористой) среды, впервые предложенной в работах [15, 16], представляется в виде набора проницаемых каналов, проникающих во всю среду, и слабопроницаемых изолированных пористых блоков. Как каналы, так и блоки насыщены влагой. Средняя ширина канала намного меньше среднего размера блока,  $a \ll b$ . Механизм переноса примеси представляет собой адвекцию и диффузию в каналах, и диффузию внутри пористых блоков. На стенках каналов и порах в блоках имеет место сорбция примеси. Прямой перенос между блоками отсутствует, поскольку коэффициент диффузии в блоках мал по сравнению с таковым в каналах, а адвекции в блоках нет вовсе. Корреляционная длина в распределении характеристик среды имеет порядок размера блока  $b$ , типичная величина которого около 10 см [17].

Уравнение переноса концентрации примеси  $c(\mathbf{r}, t)$ , усредненной по объему порядка корреляционной длины, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ c(\mathbf{r}, t) + \int_0^t dt' \varphi(\mathbf{r}, t - t') c(\mathbf{r}, t') \right] + \\ + \operatorname{div} [\mathbf{u}(\mathbf{r}) c(\mathbf{r}, t) - D(\mathbf{r}) \nabla c(\mathbf{r}, t)] = 0, \quad (1) \\ c(\mathbf{r}, 0) = N \delta(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Здесь  $\mathbf{u}$  — средняя скорость адвекции,  $D$  — коэффициент, учитывающий вклад молекулярной диффузии и дисперсии ( $\sim ub$ ) (из-за извилистости каналов). Второй член в квадратных скобках в уравнении (1) отвечает за обмен примесью между каналами и блоками. Величина  $N$  представляет собой полное число частиц примеси. Начало координат выбрано в точке локализации источника примеси в начальный момент времени (источник считается точечным). Предполагаем, что жидкая компонента среды является несжимаемой, так что уравнение непрерывности имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (2)$$

В представлении Лапласа,  $c_p(\mathbf{r}) = \int_0^\infty dt c(\mathbf{r}, t) e^{-pt}$ , уравнение переноса (1) принимает вид

$$\Lambda_p(\mathbf{r}) c_p(\mathbf{r}) + \operatorname{div} (\mathbf{u}(\mathbf{r}) c_p(\mathbf{r}) - D(\mathbf{r}) \nabla c_p(\mathbf{r})) = N \delta(\mathbf{r}), \quad (3)$$

где

$$\Lambda_p(\mathbf{r}) = p(1 + \varphi_p(\mathbf{r})), \quad \varphi_p(\mathbf{r}) = \int_0^\infty dt e^{-pt} \varphi(\mathbf{r}, t). \quad (4)$$

Функция  $\Lambda_p(\mathbf{r})$  в предельных интервалах имеет вид

$$\Lambda_p(\mathbf{r}) \cong \begin{cases} p, & p \gg t_a^{-1}, \\ \sqrt{\frac{p}{t_a}}, & t_b^{-1} \ll p \ll t_a^{-1}, \\ \sqrt{\frac{t_b}{t_a}} p, & p \ll t_b^{-1}, \end{cases} \quad (5)$$

где  $t_a \sim a^2/4d$  — характерное время диффузии примеси из каналов в блоки до глубины порядка толщины каналов;  $t_b \sim b^2/4d$  — характерное время установления равновесия по концентрации между каналами и блоками;  $d$  — эффективный коэффициент диффузии в блоках. В соответствии с этими определениями имеет место неравенство  $t_a \ll t_b$ . Отметим, что в среде с крупномасштабными неоднородностями функция  $\varphi(t)$  вместе с  $t_a$  и  $t_b$ , а также величины  $\mathbf{u}$  и  $D$  являются функциями координат.

Нас будет интересовать концентрация на асимптотически далеких расстояниях от источника примеси, когда  $r' \gg R(t)$ , где  $R(t)$  — размер основной области ее локализации в момент времени  $t$ , а  $r'$  — расстояние от этой области до точки наблюдения  $\mathbf{r}$ . Тогда решение уравнения (3) представляется в форме

$$c_p(\mathbf{r}) = A_p(\mathbf{r}) e^{-\Gamma_p(\mathbf{r})}, \quad (6)$$

где показатель экспоненты удовлетворяет неравенству  $\Gamma_p(\mathbf{r}) \gg 1$ , благодаря которому в задаче возникает малый параметр

$$\xi = (|\nabla \Gamma_p| \min\{L, r'\})^{-1}, \quad \xi \ll 1. \quad (7)$$

Здесь  $L$  — характерный линейный масштаб неоднородности среды, определяемый пространственной зависимостью величин  $\mathbf{u}$ ,  $D$ ,  $t_a$  и  $t_b$ .

## 3. КВАЗИЭЙКОНАЛ

Подставляя выражение (6) в уравнение (3), в нулевом порядке по малому параметру  $\xi$  получаем уравнение

$$\Lambda_p(\mathbf{r}) + (\mathbf{u}(\mathbf{r}) \nabla \Gamma_p(\mathbf{r})) - D(\mathbf{r}) (\nabla \Gamma_p(\mathbf{r}))^2 = 0, \quad (8)$$

представляющее собой уравнение в частных производных первого порядка, которое по своей форме аналогично уравнению эйконала в геометрической оптике [18]. Из уравнения (8) следует

$$\nabla \Gamma_p(\mathbf{r}) \Rightarrow \mathbf{F}_p(\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{u}(\mathbf{r})}{2D(\mathbf{r})} + \nu n_p(\mathbf{r}), \quad (9)$$

где

$$n_p(\mathbf{r}) = \sqrt{\left(\frac{\mathbf{u}(\mathbf{r})}{2D(\mathbf{r})}\right)^2 + \frac{\Lambda_p(\mathbf{r})}{D(\mathbf{r})}}, \quad (10)$$

а  $\nu$  — вещественный безразмерный единичный вектор,  $\nu^2 = 1$ . Далее показатель экспоненты  $\Gamma_p(\mathbf{r})$  в (6) будем называть квазиэйконалом.

Решение уравнения (8), подобно описанному в [18], сводится к линейному интегралу вдоль траектории концентрационного сигнала — квазилуча:

$$\Gamma_p = \int_0^{\mathbf{r}} (d\mathbf{l} \mathbf{F}_p), \quad d\mathbf{l} = \nu dl, \quad (11)$$

где  $dl$  — дифференциальный элемент длины вдоль квазилуча. Траектория квазилуча находится из вариационного принципа — аналога принципа Ферма:

$$\delta_l \Gamma_p = 0, \quad (12)$$

где символ  $\delta_l$  обозначает вариацию квазиэйконала  $\Gamma_p$  относительно траектории. Равенство (12) означает, что в первом порядке по бесконечно малому изменению траектории величина интеграла (11) остается неизменной. Аналогично работе [9], из равенства (12) находится уравнение для траектории:

$$[\nu \text{rot} \mathbf{F}_p] = 0. \quad (13)$$

#### 4. ПРЕДЭКСПОНЕНТА

В первом порядке по малому параметру  $\xi$  подстановка равенства (6) в уравнение (3) приводит к уравнению для предэкспоненты  $A_p(\mathbf{r})$ :

$$\frac{d}{dl} \ln (A_p^2(\mathbf{r}) D(\mathbf{r}) n_p(\mathbf{r})) + \text{div} \nu(\mathbf{r}) = 0. \quad (14)$$

Его решение, которое удовлетворяет вытекающему из уравнения (1) условию

$$c_p(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \rightarrow 0} = \frac{N}{4\pi D(0)r}, \quad (15)$$

имеет вид

$$A_p(\mathbf{r}) = \frac{N}{4\pi D(0)l(\mathbf{r})} \sqrt{\frac{n_p(0)D(0)}{n_p(\mathbf{r})D(\mathbf{r})}} e^{-H(\mathbf{r})}, \quad (16)$$

$$H(\mathbf{r}) = \int_0^{\mathbf{r}} dl \left( \frac{\text{div} \nu}{2} - \frac{1}{l} \right).$$

При выводе выражения (16) были использованы следующие свойства, справедливые на малых расстояниях от источника примеси  $l \ll L$ , где все характеристики среды можно приближенно считать независимыми от координат и равными соответствующим значениям при  $\mathbf{r} = 0$ :

$$\nu|_{\mathbf{r} \rightarrow 0} = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \text{div} \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \frac{2}{r}.$$

#### 5. АСИМПТОТИКИ КОНЦЕНТРАЦИИ ПРИМЕСИ

Концентрация примеси как функция координат и времени получается из (6) путем обратного преобразования Лапласа:

$$c(\mathbf{r}, t) = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} A_p(\mathbf{r}) \exp[-\Gamma_p(\mathbf{r}) + pt], \quad \text{Re } a > 0.$$

Интеграл здесь благодаря неравенству  $\Gamma_p(\mathbf{r}) \gg 1$  берется методом стационарной фазы. В итоге для концентрации получается выражение

$$c(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}, t) \exp[-\Gamma(\mathbf{r}, t)], \quad (17)$$

где

$$\Gamma(\mathbf{r}, t) = \Gamma_{p_0}(\mathbf{r}, t) - p_0 t, \quad (18)$$

$$A(\mathbf{r}, t) = \frac{A_{p_0}(\mathbf{r})}{\sqrt{2\pi |\Gamma''_{p_0}(\mathbf{r})|}}, \quad (19)$$

а  $p_0 = p_0(\mathbf{r}, t)$  — стационарная точка, определяемая из условия

$$\left. \frac{\partial \Gamma_p(\mathbf{r})}{\partial p} \right|_{p=p_0} = t, \quad (20)$$

и

$$\Gamma''_{p_0}(\mathbf{r}) = \left. \frac{\partial^2 \Gamma_p(\mathbf{r})}{\partial p^2} \right|_{p=p_0}. \quad (21)$$

В последнем равенстве при вычислении второй производной по переменной Лапласа следует учитывать зависимость от  $p$  не только подынтегрального выражения в (11), но и траектории квазилуча, вдоль которой ведется интегрирование. Исключения представляют интервалы между характерными временами задачи, когда зависимости квазиэйконала  $\Gamma_p(\mathbf{r})$  от переменных  $\mathbf{r}$  и  $p$  факторизуются — в этом случае траектория квазилуча не зависит от переменной Лапласа и реализуются характерные режимы переноса, включая неклассические. Именно для таких интервалов получим далее замкнутые выражения для концентрации в координатно-временном представлении.

Для начала заметим, что помимо времен  $t_a$  и  $t_b$  (см. (5)) в нашей задаче есть еще одно характерное время  $t_u = 4D/u^2$ , определяющее момент, когда смещения примеси за счет диффузии  $\sim \sqrt{4Dt_u}$  и, благодаря адвекции,  $ut_u$  сравниваются по величине. При этом время  $t_u$  может быть меньше или больше обоих времен  $t_a$  и  $t_b$ , а может и оказаться между ними. Соответственно, учитывая, что  $t_a \ll t_b$ , существует всего шесть характерных интервалов, куда может попасть текущее время  $t$ . Далее рассмотрим отдельно три интервала, когда  $t \ll t_u$ , и столько же, когда  $t \gg t_u$ .

Помимо этих неравенств, мы будем также считать выполненными условия:  $\sqrt{4Dt} \ll L$ ,  $ut_u \ll L$ .

### 5.1. Малые времена

Учитывая то, что в асимптотике  $p_0(\mathbf{r}, t) > 1$  при  $t \ll t_u$ , согласно (9), (10) имеем выражение для градиента квазиэиконала

$$\nabla \Gamma_p(\mathbf{r}) = \nu n_p(\mathbf{r}), \quad n_p(\mathbf{r}) \cong \sqrt{\frac{\Lambda_p(\mathbf{r})}{D(\mathbf{r})}}, \quad (22)$$

в котором возникает факторизация зависимостей от координат и переменной Лапласа:

$$n_p(\mathbf{r}) \cong \begin{cases} \sqrt{\frac{p}{D(0)}} m_1(\mathbf{r}), & p \gg t_a^{-1}, \\ \left( \frac{p}{D^2(0)t_a(0)} \right)^{1/4} m_2(\mathbf{r}), & t_b^{-1} \ll p \ll t_a^{-1}, \\ \sqrt{\frac{p}{\tilde{D}(0)}} m_3(\mathbf{r}), & p \ll t_b^{-1}. \end{cases} \quad (23)$$

Здесь

$$m_1(\mathbf{r}) = \sqrt{D(0)/D(\mathbf{r})}, \quad m_2(\mathbf{r}) = [t_a(0)/t_a(\mathbf{r})]^{1/4} m_1(\mathbf{r}), \\ m_3(\mathbf{r}) = \sqrt{\tilde{D}(0)/\tilde{D}(\mathbf{r})}, \quad \tilde{D} = \sqrt{t_a/t_b} D.$$

Подставляя выражения (23) в (22), на основе (11) получим результат для  $\Gamma_p(\mathbf{r})$ :

$$\Gamma_p(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{p}{D(0)}} \psi_1(\mathbf{r}), \quad p \gg t_a^{-1}, \quad (24)$$

$$\Gamma_p(\mathbf{r}) = \left[ \frac{p}{D^2(0)t_a(0)} \right]^{1/4} \psi_2(\mathbf{r}), \quad t_b^{-1} \ll p \ll t_a^{-1}, \quad (25)$$

$$\Gamma_p(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{p}{\tilde{D}(0)}} \psi_3(\mathbf{r}), \quad p \ll t_b^{-1}, \quad (26)$$

где введена величина  $\psi_i(\mathbf{r}) = \int_0^{\mathbf{r}} dl m_i(\mathbf{r})$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Из уравнения (13) с учетом (22) и (23) вытекает уравнение для единичного вектора  $\nu$  касательной к траектории:

$$\frac{d\nu_i}{dl} = \frac{\nabla m_i(\mathbf{r}) - \nu_i(\nu_i \nabla m_i(\mathbf{r}))}{m_i(\mathbf{r})}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (27)$$

Таким образом, величина квазиэиконала для случая малых времен определяется выражением (11) (и, соответственно, выражениями (24)–(26)), в котором интегрирование происходит по траектории квазилуча, определяемой уравнением (27) для единичного вектора касательной к траектории.

Асимптотики концентрации примеси определяются тем, какому из интервалов в (5) принадлежит стационарное значение  $p_0$  переменной Лапласа в (17). Подстановка (16) и (24)–(26) в (17) с учетом (18)–(21) приводит к следующим результатам, которые описывают первые по удаленности от источника примеси ступени асимптотик во временных интервалах:

$$c(\mathbf{r}, t) = \frac{N}{[4\pi D(0)t]^{3/2}} \left[ \frac{D(0)}{D(\mathbf{r})} \right]^{1/4} \frac{\psi_1(\mathbf{r})}{l(\mathbf{r})} \times \\ \times \exp[-\Gamma_1(\mathbf{r}, t) - H_1(\mathbf{r})], \quad \Gamma_1(\mathbf{r}, t) = \frac{\psi_1^2(\mathbf{r})}{4D(0)t} \quad (28)$$

при  $t/\Gamma_1(\mathbf{r}, t) \ll t_a, t_u$ ,

$$c(\mathbf{r}, t) = \frac{N}{\sqrt{24\pi^3 D(0)t} l(\mathbf{r})} \left[ \frac{D(0)}{D(\mathbf{r})} \right]^{1/4} \left[ \frac{t_a(\mathbf{r})}{t_a(0)} \right]^{1/8} \times \\ \times \sqrt{\frac{\Gamma_2(\mathbf{r}, t)}{3}} \exp[-\Gamma_2(\mathbf{r}, t) - H_2(\mathbf{r})], \\ \Gamma_2(\mathbf{r}, t) = 3 \left[ \frac{\psi_2(\mathbf{r}, t)}{4\sqrt{D(0)}\sqrt{t_a(0)t}} \right]^{4/3} \quad (29)$$

при  $t_a \ll 3t/\Gamma_2(\mathbf{r}, t) \ll t_b, t_u$ ,

$$c(\mathbf{r}, t) = \frac{N}{[4\pi \tilde{D}(0)t]^{3/2}} \left[ \frac{\tilde{D}(0)}{\tilde{D}(\mathbf{r})} \frac{t_a(0)}{t_b(0)} \frac{t_a(\mathbf{r})}{t_b(\mathbf{r})} \right]^{1/4} \frac{\psi_3(\mathbf{r})}{l(\mathbf{r})} \times \\ \times \exp[-\Gamma_3(\mathbf{r}, t) - H_3(\mathbf{r})], \quad \Gamma_3(\mathbf{r}, t) = \frac{\psi_3^2(\mathbf{r})}{4\tilde{D}(0)t} \quad (30)$$

при  $t_b \ll t/\Gamma_3(\mathbf{r}, t) \ll \sqrt{t_b/t_a} t_u$ .

Заметим, что основное отличие в результатах модели с пространственно-зависимыми параметрами от модели с постоянными параметрами сводится к замене расстояний от источника примеси до точки наблюдения  $\mathbf{r}$  соответствующими им длинами концентрационного пути — интегралами

$\psi_i(\mathbf{r})$  вдоль траектории концентрационных сигналов. Отсюда следует, что выражения (28), (29) и (30) отвечают режимам переноса, определяемым зависимостью от времени размера основной области локализации примеси  $R(t)$ : быстрой классической диффузии,  $R(t) \sim [D(0)t]^{1/2}$ , субдиффузии,  $R(t) \sim [D(0)\sqrt{t_a(0)t}]^{1/2}$ , и медленной классической диффузии,  $R(t) \sim [\tilde{D}(0)t]^{1/2}$ , соответственно (см. [5]).

Оценки величины квазиэйконала  $\Gamma(\mathbf{r}, t)$ , в зависимости от отношения удаленности точки наблюдения  $r'$  от основной области локализации примеси к размеру этой области  $R(t)$ , для относительно малых времен получаются из асимптотических формул (28)–(30):  $\Gamma \sim [r'/R(t)]^2$  для режимов диффузии и  $\Gamma \sim [r'/R(t)]^{4/3}$  для субдиффузии.

Обратим также внимание на то, что формулы (28)–(30) пригодны для описания многоступенчатой пространственной структуры асимптотики концентрации, возникающей из-за смены режимов переноса во времени (см. [5]). Действительно, пусть текущее время лежит в интервале  $t_a \ll t \ll t_b$ . Тогда формула (29) описывает ближнюю по удаленности от основной области локализации примеси ступень. При фиксированном времени с ростом пространственного аргумента благодаря возрастанию величины квазиэйконала  $\Gamma_2(\mathbf{r}, t)$  неравенство в (29) нарушается, а его место займет неравенство из формулы (28). Это означает, что формула (29) описывает вторую ступень асимптотики, и, таким образом, асимптотика концентрации при  $t_a \ll t \ll t_b$  является двухступенчатой. Аналогичным образом асимптотика концентрации при  $t \gg t_b$  является трехступенчатой — первая, вторая и третья ступени описываются формулами (30), (29) и (28) соответственно.

## 5.2. Большие времена

На больших временах, когда основной вклад в перенос примеси дает адвекция, траектория квазилуча должна быть близкой к линии тока. Последняя по определению является линией, в каждой точке которой касательная совпадает по направлению со скоростью адвекции. В этом случае единичный вектор касательной к квазилучу можно представить в виде

$$\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}_0 + \delta\boldsymbol{\nu}, \quad |\delta\boldsymbol{\nu}| \ll 1, \quad (31)$$

где

$$\boldsymbol{\nu}_0 = \frac{\mathbf{u}}{u}. \quad (32)$$

При этом благодаря равенству  $\boldsymbol{\nu}^2 = 1$  с точностью до поправки второго порядка малости имеем

$$(\boldsymbol{\nu}_0 \delta\boldsymbol{\nu}) = 0. \quad (33)$$

Переменная Лапласа, отвечающая большим временам, удовлетворяет неравенству

$$\Lambda_p t_u \ll 1, \quad (34)$$

для которого выражение градиента квазиэйконала (9), (10) можно приближенно записать в виде

$$\nabla \Gamma_p(\mathbf{r}) \cong -\frac{\mathbf{u}}{2D} + \boldsymbol{\nu} \frac{u}{2D} + \boldsymbol{\nu}_0 \delta n_p, \quad (35)$$

где

$$\delta n_p \cong \frac{\Lambda_p}{u} - \frac{D\Lambda_p^2}{u^3}, \quad |\delta n_p| \ll \frac{u}{2D}. \quad (36)$$

С учетом соотношений (33)–(36) выражение для  $\Gamma_p(\mathbf{r})$  принимает вид

$$\Gamma_p(\mathbf{r}) = \Gamma_p^{\parallel}(\mathbf{r}) + \Gamma_p^{\perp}(\mathbf{r}), \quad (37)$$

где

$$\Gamma_p^{\parallel}(\mathbf{r}) = \int_0^{\mathbf{r}^{\parallel}} dl \left( \frac{\Lambda_p}{u} - \frac{D\Lambda_p^2}{u^3} \right), \quad (38)$$

$$\Gamma_p^{\perp}(\mathbf{r}) = \int_0^{\mathbf{r}^{\parallel}} dl \frac{u - (\mathbf{u}\boldsymbol{\nu})}{2D} \cong \int_0^{\mathbf{r}^{\parallel}} dl \frac{u}{4D} (\delta\boldsymbol{\nu})^2. \quad (39)$$

Величина  $dl$  в (38), (39) и далее является дифференциальным элементом длины вдоль линии тока, вектор  $\mathbf{r}^{\parallel}$  обозначает проекцию точки наблюдения  $\mathbf{r}$  на линию тока. Другими словами, принадлежащая линии тока точка  $\mathbf{r}^{\parallel}$  соответствует минимальному расстоянию от точки наблюдения  $\mathbf{r}$ .

Далее найдем малую добавку к единичному вектору касательной к траектории квазилуча  $\delta\boldsymbol{\nu}$ , которая определяет отклонение траектории квазилуча от линии тока. Подстановка выражения (31) в уравнение (13) в первом порядке по малой величине  $\delta\boldsymbol{\nu}$  приводит к уравнению

$$[\boldsymbol{\nu}_0 \text{rot} \mathbf{N}] = 0, \quad (40)$$

где вектор  $\mathbf{N}$  определен равенством

$$\mathbf{N} = \frac{u}{2D} \delta\boldsymbol{\nu}. \quad (41)$$

Раскрывая левую часть уравнения (40) с учетом условия (33), приходим к уравнению

$$\frac{dN_i}{dl} + a_{ik}(l)N_k = 0, \quad (\boldsymbol{\nu}_0 \mathbf{N})|_{l=0} = 0, \quad (42)$$

где

$$a_{ik}(l) = (\delta_{il} - \nu_{0i}\nu_{0l}) \frac{\partial \nu_{0k}}{\partial x_l}.$$

Решение уравнения (42) для  $\delta \nu$  должно удовлетворять условию

$$\int_0^{\mathbf{r}^{\parallel}} dl \delta \nu(l) = \mathbf{r}^{\perp}, \quad \mathbf{r}^{\perp} = \mathbf{r} - \mathbf{r}^{\parallel}.$$

Также предполагаем, что кратчайшее расстояние от точки наблюдения до линии тока удовлетворяет условию  $|\mathbf{r}^{\perp}| \ll L$ .

Стоит отметить, что решение уравнения (42) для  $\delta \nu$  (и, следовательно, выражение для поперечной компоненты квазиэйконала  $\Gamma_p^{\perp}(\mathbf{r})$  из (39)) не зависит от переменной Лапласа  $p$ .

Для вычисления предэкспоненты  $A_p$  воспользуемся равенством (16), приближенным выражением

$$n_p(\mathbf{r}) \cong \frac{u}{2D},$$

а также вытекающим из (32) соотношением

$$\operatorname{div} \nu_0 = -\frac{d \ln u}{dl}.$$

В итоге уравнение (14) приобретает вид

$$\frac{d \ln A_p}{dl} = -\frac{1}{2} \operatorname{div} \delta \nu, \quad (43)$$

решение (43) приводит к следующему результату:

$$A_p(\mathbf{r}) = \frac{N}{4\pi D(0)l(\mathbf{r})} \exp \left[ -H(\mathbf{r}^{\parallel}) \right], \quad (44)$$

$$H(\mathbf{r}^{\parallel}) = \int_0^{\mathbf{r}^{\parallel}} dl \left( \frac{1}{2} \operatorname{div} \delta \nu - \frac{1}{l} \right).$$

Подчеркнем, что, несмотря на свое обозначение  $A_p$ , эта величина оказалась независимой от переменной Лапласа  $p$ .

Асимптотики концентрации примеси в случае больших времен также будут определяться тем, какому из интервалов в (5) принадлежит стационарное значение  $p_0$  переменной Лапласа. Подставляя выражения (37) и (44) в (17), с учетом (38), (39) и (5) приходим к следующим результатам. При

$$t_u \ll \frac{t}{4\Gamma^{\parallel}(\mathbf{r}^{\parallel}, t)} \ll \frac{t_a^2}{t_u}$$

имеем

$$c(\mathbf{r}, t) = \frac{N \exp \left[ -\Gamma^{\perp}(\mathbf{r}) - \Gamma^{\parallel}(\mathbf{r}^{\parallel}, t) - H(\mathbf{r}^{\parallel}) \right]}{(4\pi)^{3/2} D(0)l(\mathbf{r}) \sqrt{\int_0^{\mathbf{r}^{\parallel}} dl \frac{\tilde{D}}{u^3}}}, \quad (45)$$

$$\Gamma^{\parallel}(\mathbf{r}^{\parallel}, t) = \frac{\left( \int_0^{\mathbf{r}^{\parallel}} \frac{dl}{u} - t \right)^2}{4 \int_0^{\mathbf{r}^{\parallel}} dl \frac{\tilde{D}}{u^3}}.$$

При

$$t_a, t_u \ll \frac{t}{4\Gamma^{\parallel}(\mathbf{r}^{\parallel}, t)} \ll t_b$$

имеем

$$c(\mathbf{r}, t) = \frac{N \left[ \int_0^{\mathbf{r}^{\parallel}} \frac{dl}{\sqrt{D_u}} \right] \exp \left[ -\Gamma^{\perp}(\mathbf{r}) - \Gamma^{\parallel}(\mathbf{r}^{\parallel}, t) - H(\mathbf{r}^{\parallel}) \right]}{(4\pi t)^{3/2} D(0)l(\mathbf{r})}, \quad (46)$$

$$\Gamma^{\parallel}(\mathbf{r}^{\parallel}, t) = \frac{1}{4t} \left( \int_0^{\mathbf{r}^{\parallel}} \frac{dl}{\sqrt{D_u}} \right)^2.$$

При

$$\frac{t}{4\Gamma^{\parallel}(\mathbf{r}^{\parallel}, t)} \gg \frac{\sqrt{t_b^3 t_a}}{t_u}, \quad \sqrt{\frac{t_b}{t_a}} t_u$$

имеем

$$c(\mathbf{r}, t) = \frac{N \exp \left[ -\Gamma^{\perp}(\mathbf{r}) - \Gamma^{\parallel}(\mathbf{r}^{\parallel}, t) - H(\mathbf{r}^{\parallel}) \right]}{(4\pi)^{3/2} D(0)l(\mathbf{r}) \sqrt{\int_0^{\mathbf{r}^{\parallel}} dl \frac{\tilde{D}}{u^3}}}, \quad (47)$$

$$\Gamma^{\parallel}(\mathbf{r}^{\parallel}, t) = \frac{\left( \int_0^{\mathbf{r}^{\parallel}} \frac{dl}{u} - t \right)^2}{4 \int_0^{\mathbf{r}^{\parallel}} dl \frac{\tilde{D}}{u^3}}.$$

В формулах (46) и (47) использованы следующие обозначения:

$$D_u = u^2 t_a, \quad \tilde{u} = \sqrt{\frac{t_a}{t_b}} u.$$

Выражения (45), (46) и (47) свидетельствуют о том, что в продольном относительно линии тока направлении реализуются режимы быстрой классической адвекции–диффузии, квазидиффузии (был впервые открыт в [19]) и медленной классической адвекции–диффузии соответственно, что согласуется с известными результатами для случая среды с постоянными параметрами [15]. Перенос в поперечном направлении происходит в режиме классической диффузии.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итогом работы является асимптотическая теория переноса примеси в модели статистически однородной резко контрастной (двупористой) среды.



Предполагается, что скорость адвекции, коэффициент диффузии и временные параметры, характеризующие среду, являются переменными по пространству параметрами.

На расстояниях, значительно превосходящих размер основной области локализации примеси в данный момент времени, задача сведена сначала к уравнению в частных производных первого порядка, а затем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, определяющих траекторию концентрационного сигнала. Выражения для концентрации представлены в квадратурах вдоль траектории концентрационного сигнала.

Рассмотрены шесть характерных временных интервалов, куда может попасть текущее время  $t$ . Асимптотическое поведение концентрации в случае относительно малых времен, когда переносом примеси за счет адвекции можно пренебречь, соответствует режимам быстрой классической диффузии, субдиффузии и медленной классической диффузии, а в случае больших времен, когда адвекция доминирует над диффузией, реализуются режимы быстрой адвекции–диффузии, квазидиффузии и медленной адвекции–диффузии.

Точность асимптотической теории обеспечивается наличием малого параметра  $\xi$  (формула (7)). Проведенные в работе [9] численные расчеты диффузии примеси в неоднородной среде показали, что даже в основной области локализации примеси погрешность результатов, полученных на основе асимптотической теории, не превышает 25 %. С удалением от основной области локализации точность результатов, благодаря уменьшению параметра  $\xi$ , значительно возрастает.

Ожидается, что разработанная здесь асимптотическая теория приведет к экономии на несколько порядков расчетного времени в сравнении с прямым численным решением интегродифференциального уравнения в частных производных второго порядка с параметрами, зависящими от пространственных координат.

Полученные результаты могут быть использованы для проведения оценок надежности захоронений радиоактивных отходов в геологических средах.

**Благодарности.** Авторы выражают глубокую благодарность Л. В. Матвееву за плодотворное обсуждение результатов работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. J.-P. Bouchaud and A. Georges, Phys. Rep. **195**, 127 (1990).
2. M. B. Isichenko, Rev. Mod. Phys. **64**, 961 (1992).
3. D. ben-Avraham and S. Havlin, *Diffusion and Reactions in Fractals and Disordered Systems*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2000).
4. Л. М. Зеленый, А. В. Милованов, УФН **174**, 809 (2004).
5. Л. А. Большов, П. С. Кондратенко, Л. В. Матвеев, УФН **189**, 691 (2019).
6. П. С. Кондратенко, Письма в ЖЭТФ **106**, 581 (2017).
7. П. С. Кондратенко, А. Л. Матвеев, ЖЭТФ **157**, 703 (2020).
8. П. С. Кондратенко, А. Л. Матвеев, Ю. Н. Обухов, ЖЭТФ **159**, 719 (2021).
9. P. S. Kondratenko, A. L. Matveev, and A. D. Vasiliev, Eur. Phys. J. B **94**, 50 (2021).
10. П. С. Кондратенко, А. В. Мухаряпова, ЖЭТФ **162**, 737 (2022).
11. P. S. Kondratenko, Ann. Phys. **447**, 169002 (2022).
12. П. С. Кондратенко, А. Л. Матвеев, Л. В. Матвеев, ЖЭТФ **167**, 876 (2025).
13. H. H. Gerke and M. Th. van Genuchten, Water Resour. Res. **29**, 305 (1993).
14. Г. И. Баренблатт, Ю. П. Желтов, И. Н. Кочина, Приклад. матем. мех. **24**, 852 (1960).
15. Л. В. Матвеев, ЖЭТФ **142**, 943 (2012).
16. L. V. Matveev, Phys. A: Stat. Mech. Appl. **406**, 119 (2014).
17. E. Bonnet, O. Bour, N. E. Odling et al., Rev. Geophys. **39**, 347 (2001).
18. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Физматлит, Москва (2005), с. 421.
19. К. В. Чукбар, ЖЭТФ **109**, 1335 (1996).