

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОВОДИМОСТИ ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ РЭЛЕЯ С ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Б. Я. Балагуров*, О. А. Васильев**

*Институт биохимической физики им. Н. М. Эмануэля Российской академии наук
119334, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 19 мая 2025 г.,
после переработки 27 июня 2025 г.
Принята к публикации 1 июля 2025 г.

Численным методом проведено исследование эффективной проводимости двумерной модели Рэля — изотропной матрицы с периодическим расположением диэлектрических включений круговой формы. Как сама проводимость, так и ее производные определены в широком интервале изменения концентрации диэлектрической компоненты: от нуля и практически до критического значения, соответствующего соприкосновению соседних включений. Показано, что в критической области (окрестности точки фазового перехода металл–диэлектрик) вычисленные значения проводимости и ее производных с разумной точностью совпадают с соответствующими результатами, полученными в рамках бинарного приближения. Это означает, что найденные ранее аналитические результаты адекватно описывают проводимость рассматриваемой модели в критической области. Проведенное сравнение численных и аналитических результатов позволило определить границу критической области.

DOI: 10.31857/S0044451025090093

1. ВВЕДЕНИЕ

Двумерная модель Рэля, введенная в работе [1], представляет собой изотропное основание (матрицу) с круговыми включениями, центры которых расположены в узлах квадратной решетки. Эта модель является представителем семейства низкоразмерных двухкомпонентных периодических систем, описывающих свойства соответствующих композитов. Исследование электрофизических характеристик подобных моделей дает существенный вклад в понимание физических процессов, происходящих в реальных композиционных материалах.

Последовательное решение задачи о проводимости двумерной модели Рэля впервые было дано в работе [2] методом мультипольного разложения. В результате исходная проблема свелась к решению бесконечной системы линейных уравнений для некоторых величин ξ_n ($n = 0, 1, 2, \dots$), определение которых позволяет найти эффективную проводимость.

В дальнейшем аналогичный подход использовался в ряде работ [3–7]. Результаты для решеток обобщенной формы приведены в [8].

Общефизический интерес представляет изучение композитов, в которых возможен фазовый переход типа металл–диэлектрик. Эффективные характеристики такого композита в критической области (окрестности точки фазового перехода) обладают нетривиальным поведением, что затрудняет их теоретическое изучение. Тем не менее в работе [9] было предложено так называемое бинарное приближение, сводящее задачу о проводимости двумерной модели Рэля к проблеме протекания тока через пару соседних включений. Особенностью этого приближения является то обстоятельство, что его точность тем выше, чем ближе параметры модели к точке фазового перехода. Поэтому аналитические результаты для проводимости, полученные в этом приближении, будут применимы в критической области. Справедливость этого утверждения должна быть проверена путем прямого расчета проводимости модели численным методом [2].

В предыдущей работе [10] исследовались численным методом эффективные характеристики рас-

* E-mail: byabalagurov@mail.ru

** E-mail: ol.vasilyev@mail.ru

смаатриваемой модели при критической концентрации, соответствующей соприкосновению соседних включений. Проводимость и ее производные вычислялись практически во всем интервале изменения параметра h — отношения проводимостей компонент. Оказалось, что в диапазоне изменения h в пределах от 10^{-6} до 10^{-3} данные численного счета согласуются с аналитическими результатами работы [9], что подтверждает адекватность использованного ранее метода бинарного приближения. При этом величина $h_c \sim 10^{-3}$ является границей критической области, расположенной при всех $h < h_c$, а $h_m \sim 10^{-6}$ — границей действия численного метода, применимого при всех $h > h_m$.

В настоящей работе эффективная проводимость и ее производные исследовались численным методом мультипольного разложения для двумерной модели Рэлея с диэлектрическими включениями. В ходе проведенных расчетов соответствующие эффективные характеристики получены практически во всем интервале изменения концентрации, характеризующейся величиной $g = \sqrt{(c_0 - c)/c_0}$, где c — концентрация включений (доля занимаемой площади), $c_0 = \pi/4$ — ее критическое значение. В этом случае в интервале $6.6 \cdot 10^{-6} \leq g \leq 1.6 \cdot 10^{-2}$ наблюдалось совпадение полученных численных результатов с аналитическими из работы [9]. Здесь $g_c \simeq 1.6 \cdot 10^{-2}$ — граница критической области по концентрации, расположенной при всех $g < g_c$, а $g_m \simeq 6.6 \cdot 10^{-6}$ — граница действия численного метода, применимого при $g > g_m$. Наличие величины g_m (как и h_m) связано с конечностью подсистемы величин ξ_n , выбранной для конкретных расчетов. Таким образом, численные результаты, полученные в предыдущей [10] и настоящей работах, подтвердили справедливость аналитических результатов работы [9] и позволили установить границы критической области вдоль координатных осей g и h .

2. КРИТИЧЕСКАЯ ОБЛАСТЬ

Двумерная модель Рэлея представляет собой матрицу — изотропную пленку проводимости σ_1 — с включениями круговой формы радиуса R и проводимости σ_2 . Центры включений расположены в узлах квадратной решетки периода $2a$. Такая система электрически изотропна, и ее эффективная проводимость является скалярной величиной: $\sigma_e = \sigma_e(p; \sigma_1, \sigma_2)$, где p — концентрация (доля занимаемой площади) первой компоненты — матри-

цы. При исследовании критической области удобно пользоваться безразмерными параметрами

$$g = \frac{\sqrt{a^2 - R^2}}{a}, \quad h = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \quad (1)$$

где переменная g характеризует отклонение от критической точки (в критической точке $g = 0$), h — отношение проводимостей компонент (для случая непроводящих включений $h = 0$).

Для дальнейшего удобно ввести безразмерную эффективную проводимость $f(p, h)$ по соотношению

$$\sigma_e(p; \sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 f(p, h). \quad (2)$$

Здесь концентрация первой (проводящей) компоненты

$$p = 1 - c, \quad c = \frac{\pi R^2}{4a^2}, \quad (3)$$

где c — концентрация второй компоненты — включений ($0 \leq c \leq c_0 = \pi/4$).

В пределе $p \rightarrow p_c$ ($p_c = 1 - c_0$ — критическая концентрация первой компоненты) и $h \rightarrow 0$ эффективная проводимость рассматриваемой системы стремится к нулю: $f(p_c, 0) = 0$. Таким образом, в двумерной модели Рэлея может происходить фазовый переход типа металл–диэлектрик. Поведение проводимости $f(p, h)$ в окрестности точки фазового перехода рассмотрено в работе [9] в рамках так называемого бинарного приближения. Это приближение становится точным в пределе $h \rightarrow 0$ и $p \rightarrow p_c$, так что его результаты могут использоваться в критической области — окрестности точки фазового перехода $h \ll 1$ и $g = \sqrt{4(p - p_c)/\pi} \ll 1$. Согласно [9], в этой области для эффективной проводимости $f(p, h)$, полученной при помощи бинарного приближения, имеем следующее выражение:

$$f(p, h) = \frac{g}{\pi} + \frac{2h}{\pi} \left[\ln \frac{1}{g} - F(\gamma) \right], \quad \gamma = \frac{h}{g}, \quad (4)$$

где

$$F(\gamma) = -\gamma \int_0^\infty e^{-\gamma x} \ln(1 - e^{-x}) dx. \quad (5)$$

Формулы (4) и (5) описывают безразмерную эффективную проводимость исследуемой модели Рэлея во всей предпороговой (до соприкосновения соседних включений при $p = p_c$, что эквивалентно $g = 0$) критической области.

Функция $F(\gamma)$ при больших значениях аргумента имеет следующее разложение:

$$\gamma \gg 1: \quad F(\gamma) = -\ln \frac{1}{\gamma} + \mathbb{C} + \frac{1}{2\gamma} - \frac{1}{12\gamma^2} + \frac{1}{120\gamma^4} + \dots \quad (6)$$

Здесь $\mathbb{C} = 0.577215\dots$ — постоянная Эйлера. В противоположном случае малых значений γ имеем

$$\gamma \ll 1: F(\gamma) = \frac{\pi^2}{6} \gamma - \zeta(3) \gamma^2 + \frac{\pi^4}{90} \gamma^3 + \dots, \quad (7)$$

где

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 1.202\dots \quad (8)$$

В предыдущей работе [10] рассматривалась зависимость проводимости и ее производных от параметра h в пределе $p \rightarrow p_c$ ($c \rightarrow c_0$), т.е. $g \rightarrow 0$. Поэтому из формул (4)–(6) при $g \ll h \ll 1$ имеем

$$f(p, h) = h \left[\frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{1}{h} - \mathbb{C} \right) + \frac{1}{6\pi} \frac{g^2}{h^2} - \frac{1}{60\pi} \frac{g^4}{h^4} + \dots \right]. \quad (9)$$

Из формулы (9) в критической области при $p = p_c$ ($g = 0$) имеем

$$\frac{f(p_c, h)}{h} = \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{1}{h} - \mathbb{C} \right), \quad (10)$$

$$\frac{\partial f(p_c, h)}{\partial h} = \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{1}{h} - \mathbb{C} - 1 \right). \quad (11)$$

Величины (10) и (11) являются линейными функциями аргумента $\ln(1/h)$. Заметим также, что из разложения (9) следует

$$h \left[\frac{\partial f(p, h)}{\partial p} \right]_{p=p_c} = \frac{2}{3\pi^2} = 0.0675\dots \quad (12)$$

Здесь учтено, что

$$g^2 = \frac{4}{\pi} (p - p_c).$$

Проведенный в [10] численный эксперимент по определению проводимости и ее производных подтвердил правильность выражений (10)–(12). При этом была определена граница критической области по параметру h .

В настоящей работе исследовалась зависимость эффективной проводимости и ее производных от концентрации, т.е. от аргумента g , в пределе при $h \rightarrow 0$. В этом случае из (4), (5) и (7) в линейном по h приближении имеем

$$f(p, h) = \frac{g}{\pi} + \frac{2h}{\pi} \ln \frac{1}{g}, \quad (13)$$

так как $F(0) = 0$. Поэтому в критической области будем иметь

$$\frac{f(p, 0)}{g} = \frac{1}{\pi}, \quad (14)$$

$$\left[\frac{\partial f(p, h)}{\partial h} \right]_{h=0} = \frac{2}{\pi} \ln \frac{1}{g}, \quad (15)$$

$$\frac{1}{2} g \frac{\partial f(p, 0)}{\partial p} = \frac{1}{\pi^2}. \quad (16)$$

Здесь учтено, что

$$\frac{\partial g}{\partial p} = \frac{2}{\pi g}. \quad (17)$$

Целью нашей работы является проверка выражений (14)–(16) в ходе численного эксперимента, использующего последовательный метод мультипольного разложения, предложенный в [2].

3. МУЛЬТИПОЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

Последовательное решение задачи о проводимости рассматриваемой модели состоит в введении потенциалов для обеих компонент. При этом удобно использовать потенциалы в комплексной форме. Потенциал внутри включения дается суммой конечных в нуле комплексных решений уравнения Лапласа с соответствующими коэффициентами. Вне включения потенциал может быть получен суммированием полей от наведенных на них мультипольных моментов. В результате такой процедуры дипольная часть искомого потенциала выражается через функцию Вейерштрасса [11]. Суммирование мультипольных моментов высших порядков дает вклад в потенциал в виде производных от этой функции со своими коэффициентами. Удовлетворение стандартных граничных условий для введенных потенциалов приводит к бесконечной системе линейных уравнений для величин ξ_n ($n = 0, 1, 2, \dots$), непосредственно связанных с упомянутыми выше коэффициентами:

$$\xi_n + \sum_{m=0}^{\infty} S_{nm} \xi_m = \delta_{n0}, \quad (18)$$

где δ_{n0} — символ Кронекера. Отсюда при $n = 0$ и $n \neq 0$ следует

$$\xi_0 + \sum_{m=1}^{\infty} S_{0m} \xi_m = 1, \quad (19)$$

$$\xi_n + \sum_{m=0}^{\infty} S_{nm} \xi_m = 0, \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (20)$$

В формуле (18) учтено, что $S_{00} = 0$ — см. ниже. В формулах (18)–(20) матрица S_{nm} имеет вид

$$S_{nm} = \kappa \lambda^{n+m+1} Q_{nm}, \quad (21)$$

где

$$\varkappa = \frac{1-h}{1+h} \quad (22)$$

и

$$\lambda = \frac{R^2}{a^2} = 1 - g^2 = \frac{c}{c_0}, c_0 = \frac{\pi}{4}. \quad (23)$$

В выражении (21)

$$Q_{nm} = \frac{(2n+2m)!c_{n+m+1}}{\sqrt{(2n)!(2n+1)!(2m)!(2m+1)!}}. \quad (24)$$

Здесь c_{n+m+1} — коэффициенты в разложении функции Вейерштрасса $\zeta(z)$ в окрестности точки $z = 0$. Согласно [11], для рассматриваемой квадратной решетки (лемнискатный случай) коэффициенты c_n с нечетным индексом равны нулю, так что величина S_{nm} отлична от нуля только в том случае, когда индексы m и n имеют разную четность. При этом $c_2 = 0.590852\dots$ и $c_4 = 0.116368\dots$. Остальные коэффициенты c_{2k} при $k > 2$ могут быть последовательно найдены с помощью рекуррентного соотношения:

$$c_{2k} = \frac{3}{(4k+1)(2k-3)} \sum_{m=1}^{k-1} c_{2m} c_{2k-2m}. \quad (25)$$

Решение уравнений (19) и (20) с S_{nm} из (21) позволяет найти эффективную проводимость модели по формуле

$$f(p, h) = \frac{1 - c\varkappa\xi_0}{1 + c\varkappa\xi_0}. \quad (26)$$

Более полное представление о свойствах модели дает численный эксперимент, в ходе которого исследуется не только сама проводимость $f(p, h)$, но и производные по ее аргументам. Согласно [10], эти производные выражаются через величины ξ_n следующим образом:

$$\frac{\partial f(p, h)}{\partial h} = \frac{4c}{(1+h)^2} \frac{1}{(1+c\varkappa\xi_0)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2, \quad (27)$$

$$\frac{\partial f(p, h)}{\partial p} = \frac{2\varkappa}{(1+c\varkappa\xi_0)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\xi_n^2. \quad (28)$$

Определение производных по этим формулам позволяет избежать численного дифференцирования, особенно затруднительного в критической области — окрестности точки фазового перехода металл–диэлектрик.

Для определения проводимости $f(p, h)$ и ее производных при заданных p и h в рамках мультипольного разложения необходимо выбрать конечную подсистему величин ξ_n ($n = 0, 1, 2, \dots, N$). Выбор величины N в общем случае зависит от минимальных размеров параметров h и g , а также

от необходимой точности вычислений. При этом величина N тем больше, чем ближе параметры h и g к точке фазового перехода. Так, в работе [10] при исследовании зависимости проводимости от параметра h при фиксированной (критической) концентрации использовалась подсистема размера $N = 200000$. Такого же размера подсистема использовалась в настоящей работе.

4. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

При конкретном применении изложенного в предыдущем разделе численного метода удобно ввести новые «переменные» η_n по соотношению

$$\xi_n = \xi_0 \eta_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (29)$$

В этом случае из формулы (20) следует система уравнений для переменных η_n ,

$$\eta_n + \sum_{m=1}^{\infty} S_{nm} \eta_m = -S_{0n}, \quad (30)$$

не содержащая величину ξ_0 . В свою очередь ξ_0 ищется из равенства

$$\frac{1}{\xi_0} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} S_{0n} \eta_n. \quad (31)$$

Для производных от $f(p, h)$ имеем соответственно

$$\frac{\partial f(p, h)}{\partial h} = \frac{4c}{(1+h)^2} \frac{\xi_0^2}{(1+c\varkappa\xi_0)^2} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2 \right), \quad (32)$$

$$\frac{\partial f(p, h)}{\partial p} = \frac{2\varkappa\xi_0^2}{(1+c\varkappa\xi_0)^2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)\xi_n^2 \right]. \quad (33)$$

При рассматриваемом в настоящей работе случае $h = 0$ в формулах (21), (26) и (31)–(33) следует положить $\varkappa = 1$. Из этих формул, решая систему (30) для $n = 1, 2, \dots, N$, находим величины f/g , $\partial f/\partial h$ и $\frac{g}{2} \partial f/\partial p$ численным методом. Соответствующие результаты представлены на рис. 1–3.

На рис. 1 изображена зависимость величин f/g и $\frac{g}{2} \partial f/\partial p$ от аргумента $\ln(1/g)$. Штрихпунктирная линия, параллельная оси абсцисс на уровне $1/\pi$ отвечает теоретическому результату — формула (14), а сплошная линия на уровне $1/\pi^2$ — формуле (16). Соответствующие численные результаты изображены символами в виде треугольников для f/g и крестиков для $\frac{g}{2} \partial f/\partial p$. По мере увеличения аргумента $\ln(1/g)$ численные результаты приближаются к теоретическим прямым и в точке $\ln(1/g_c)$ фактически с

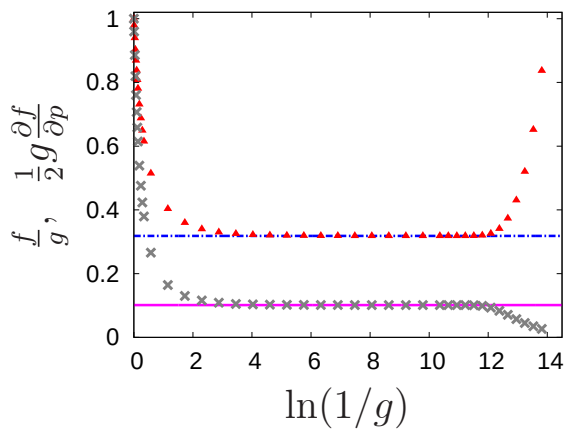


Рис. 1. Теоретические (штрихпунктирная (14) и сплошная (16) линии) и вычисленные методом мультипольного разложения (символы) зависимости от аргумента $\ln(1/g)$ величин f/g ($\blacktriangle$) и $\frac{1}{2}g \frac{\partial f}{\partial p}$ ($\times$) соответственно

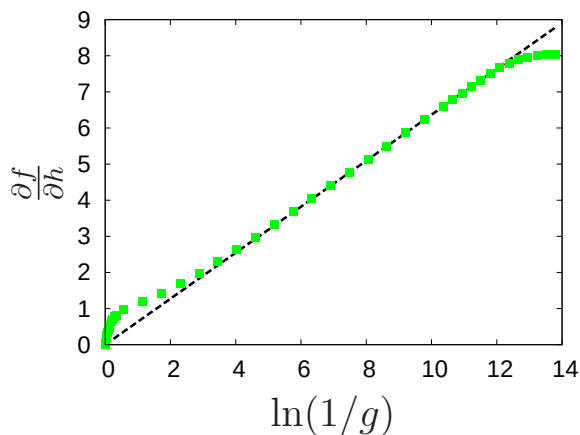


Рис. 2. Теоретическая (штриховая линия (15)) и вычисленная методом мультипольного разложения (символы) зависимости производной $\partial f/\partial h$ от аргумента $\ln(1/g)$

ними совпадают, так что g_c является границей критической области, распространяющейся вплоть до $g = 0$. При дальнейшем увеличении аргумента в точке $\ln(1/g_m)$ начинается отклонение численных результатов от теоретических прямых. Здесь g_m определяет границу численного метода, применимого в принципе при всех $g > g_m$.

На рис. 2 теоретический результат (15) для производной $\partial f/\partial h$ представлен в виде наклонной штриховой линии, а символами в виде квадратов представлены соответствующие численные данные. Из этого графика следуют те же выводы, что и из рис. 1.

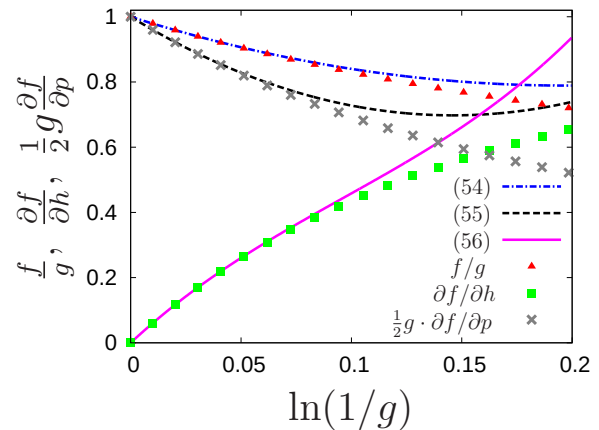


Рис. 3. Вычисленные методом мультипольного разложения (те же, что и на рис. 1, 2, но при малых значениях аргумента) зависимости функции f и ее производных (символы) от аргумента $\ln(1/g)$ в сравнении с аналитическими результатами (54)–(56) (линии)

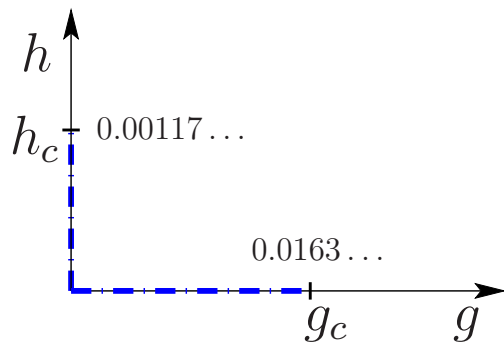


Рис. 4. Установленные границы критической области вдоль координатных осей

На рис. 3 представлены такие же, как и на рис. 1, 2, функции в области малых значений аргумента $\ln(1/g)$. Сравнение с аналитическими результатами (54)–(56) показывает их применимость при $\ln(1/g) \leq 0.07$.

До сих пор интервал от $\ln(1/g_c)$ до $\ln(1/g_m)$ определялся как участок логарифмической масштабной прямой, на котором с приемлемой точностью визуально совпадают теоретические и численные результаты. Для того чтобы превратить это определение в количественное, условимся, что на этом участке численные результаты отличаются от теоретических не более, чем на 1%. Из этого условия следует, что $\ln(1/g_c) \simeq 4.11$, так что $g_c \simeq 0.016377$. Из данных работы [10] аналогичным образом находим $h_c \simeq 0.001175$. На рис. 4 схематически изображена

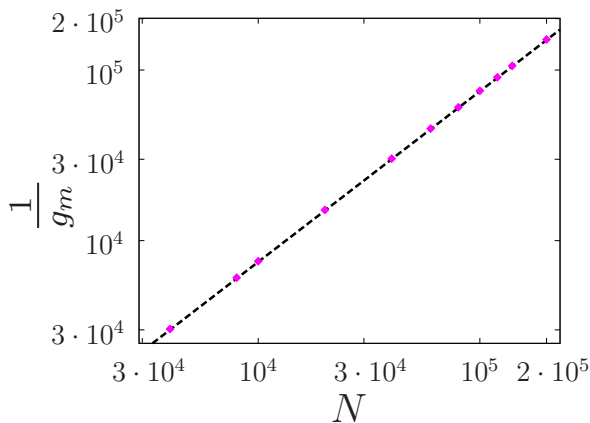


Рис. 5. Зависимость предела применимости мультипольного разложения — величины $1/g_m$ — от размера подсистемы N (символы). Для сравнения штриховой линией построена зависимость $0.75N$

граница критической области, расположенной вдоль координатных осей.

Найденные значения границ являются приближенными, и для их уточнения необходимо заметно, в несколько раз, увеличить длину участка совпадения, где численные и теоретические результаты практически сливаются. Однако эта задача наталкивается на серьезные трудности. Дело в том, что при решении системы уравнений (18) для использования формул (26)–(28) необходимо ограничиться подсистемой переменных ξ_n или η_n с $n \leq N$, где N — достаточно большое число. Выбор N обусловлен близостью модели к точке фазового перехода и заданной точностью вычислений. Определим предел применимости мультипольного разложения как значение параметра g_m , при котором отклонение от результатов бинарного приближения равно 1%. На рис. 5 предел применимости мультипольного разложения, $1/g_m$, построен как функция размера подсистемы N . Там же для сравнения построена линия $0.75N$. Последовательное увеличение при расчетах размера N показывает, что при $N > 1000$ появляется граница критической области g_c и затем предел применимости g_m метода мультипольного разложения. При дальнейшем увеличении размера подсистемы N величина g_c остается неизменно, а $g_m = g_m(N)$ в согласии с рис. 5 меняется по закону

$$\frac{1}{g_m} \simeq 0.75 N. \quad (34)$$

Использованной в настоящей работе подсистеме размера $N = 200000$ отвечает величина $g_m \simeq 6.6 \cdot 10^{-6}$, что согласуется с формулой (34).

С учетом равенства (34) получается следующее соотношение:

$$\ln \left[\frac{1}{g_m(N)} \right] - \ln \left[\frac{1}{g_m(N_0)} \right] = \ln \left(\frac{N}{N_0} \right), \quad (35)$$

где $N_0 = 200000$. Как следует из (35), увеличение размера подсистемы на порядок, $N = 10N_0$, сдвигает вправо границу $\ln(1/g_m)$ на величину $\ln(10) \simeq 2.3$ логарифмических единиц. Соответственно, при увеличении N в 10000 раз эта граница сдвинется на $4\ln(10) \simeq 9.2$ этих единиц, что сравнимо с начальной длиной (примерно 8 единиц) участка совпадения. Таким образом, удвоение длины этого участка требует использовать подсистему переменных ξ_n размера $N \simeq 10^9$. Быстрый рост размера N , необходимого для расчетов подсистемы, является главным препятствием при исследовании проводимости в области малых значений параметра g (как и h).

Тем не менее, несмотря на приближенный характер установленной границы критической области, имеется определенный интервал значений величины g , где с точностью до 1% наблюдается совпадение численных и аналитических результатов, что вместе с данными работы [10] подтверждает адекватность описания фазового перехода в исследуемой модели методом бинарного приближения.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе мультипольное разложение использовано для вычисления эффективной проводимости и ее производных для регулярной матрицы проводника с диэлектрическими включениями круглой формы в области фазового перехода металл–диэлектрик. Эти результаты сравнивались с аналитическими результатами. В интервале $6.6 \cdot 10^{-6} < g < 1.6 \cdot 10^{-2}$ наблюдалось совпадение полученных численных результатов с аналитическими из работы [9], что также подтверждает адекватность примененного ранее бинарного приближения. Граница интервала $g_c \simeq 1.6 \cdot 10^{-2}$ соответствует границе критической области по концентрации, расположенной при всех $g < g_c$, а $g_m \simeq 6.6 \cdot 10^{-6}$ — границе действия численного метода (для размера системы $N = 200000$) применимого при $g > g_m$. Наличие величины g_m (как и h_m) связано с конечностью подсистемы величин ξ_n , выбранной для конкретных расчетов. Продемонстрирована следующая зависимость границы применимости мультипольного разложения от размера системы N : $1/g_m \simeq 0.75N$. Таким образом, численные результаты, полученные в

предыдущей [10] и настоящей работах подтвердили справедливость аналитических результатов работы [9] и позволили установить границы критической области вдоль координатных осей g и h .

Финансирование. Исследование выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ (тема 122041400110-4).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Исследуемые численным методом в настоящей работе эффективные характеристики модели (проводимость и ее производные) при малых значениях аргумента $\ln(1/g)$ могут быть найдены в аналитическом виде. Как следует из определения (1) величины $g = \sqrt{1 - R^2/a^2}$, где $R^2/a^2 = c/c_0$, значению $g \rightarrow 1$ отвечает концентрация $c \ll 1$, что позволяет применить теорию возмущений для исследования системы (18). При $c \rightarrow 0$ значение $\xi_0 \rightarrow 1$. Представим величину ξ_0 в виде $\xi_0 = 1 + \delta\xi_0$ и выполним оценку $\delta\xi_0$ в степенях c при $c \ll 1$. В случае, когда второй компонент — диэлектрик, переменная $h = 0$ и $\varkappa = 1$. Соответственно, для коэффициентов S_{nm} системы уравнений (19) и уравнения (20) получаем

$$S_{nm} = \left(\frac{4c}{\pi}\right)^{n+m+1} Q_{nm} \propto c^{n+m+1}, \quad (36)$$

так как $\lambda = c/c_0$, $c_0 = \pi/4$ (см. (23)). Разделив каждое из уравнений (19) на ξ_0 , получаем

$$\frac{\xi_n}{\xi_0} + \sum_{m=1}^{\infty} S_{nm} \frac{\xi_m}{\xi_0} = -S_{0n}. \quad (37)$$

Отсюда в первом приближении по c находим

$$\xi_n = -S_{0n}\xi_0 + o(c^{n+1}) \propto c^{n+1}. \quad (38)$$

Подставив в уравнение (20) $\xi_0 = 1 + \delta\xi_0$, получаем

$$1 + \delta\xi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} S_{0n}\xi_n = 1, \quad (39)$$

откуда, с учетом (38), получаем оценку

$$\delta\xi_0 \propto (S_{01})^2 \propto c^4. \quad (40)$$

Отсюда следует, что выполняя разложение формулы (26) по степеням c с точностью до членов c^3 включительно мы можем считать $\xi_0 = 1$ и, таким образом, получаем

$$f(p, h) = 1 - 2c\varkappa + 2c^2\varkappa^2 - 2c^3\varkappa^3 + \dots \quad (41)$$

Для диэлектрического включения ($h = 0$, $\varkappa = 1$) в квадратичном по c приближении (с учетом соотношения $\partial/\partial p = -\partial/\partial c$) находим выражение

$$\frac{f(p, 0)}{g} = \frac{1}{g} (1 - 2c + 2c^2 + O(c^3)), \quad (42)$$

$$g \frac{\partial f(p, 0)}{\partial p} = 2g(1 - 2c + 3c^2 + O(c^3)), \quad (43)$$

а в кубическом по концентрации —

$$\left[\frac{\partial f(p, 0)}{\partial h} \right]_{h=0} = 4(c - 2c^2 + 3c^3 + O(c^4)). \quad (44)$$

Выразим величины (42)–(44) через аргумент $\ln(1/g)$, используемый на рис. 1 и 2. Положив

$$z = \ln \frac{1}{g}, \quad (45)$$

имеем

$$g = e^{-z}. \quad (46)$$

Отсюда, с использованием выражения для величины g из (23) через концентрацию c , получим

$$c = 2c_0 g \operatorname{sh} z. \quad (47)$$

Из (42) и (43) с учетом (47) находим

$$\frac{f(p, 0)}{g} \simeq \frac{1}{g} - 4c_0 \operatorname{sh} z + 8c_0^2 g (\operatorname{sh} z)^2, \quad (48)$$

$$\frac{1}{2} g \frac{\partial f(p, 0)}{\partial p} \simeq g - 4c_0 g^2 \operatorname{sh} z + 12c_0^2 g^3 (\operatorname{sh} z)^2. \quad (49)$$

Соответственно из (44) имеем

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial f(p, h)}{\partial h} \right]_{h=0} &\simeq \\ &\simeq 4 [2c_0 g \operatorname{sh} z - 8c_0^2 g^2 (\operatorname{sh} z)^2 + 24c_0^3 g^3 (\operatorname{sh} z)^3]. \end{aligned} \quad (50)$$

Разложение по степеням z в формулах (48)–(50) дает (с учетом $1/g = e^z \simeq 1 + z + \dots$)

$$\frac{f(p, 0)}{g} \simeq 1 - (4c_0 - 1)z + \left(8c_0^2 + \frac{1}{2}\right)z^2, \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} g \frac{\partial f(p, 0)}{\partial p} &\simeq 1 - (4c_0 + 1)z + \\ &+ \left(12c_0^2 + 8c_0 + \frac{1}{2}\right)z^2 \end{aligned} \quad (52)$$

в квадратичном приближении и

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial f(p, h)}{\partial h} \right]_{h=0} &\simeq 8c_0 \left[z - (4c_0 + 1)z^2 + \right. \\ &\left. + \left(12c_0^2 + 8c_0 + \frac{2}{3}\right)z^3 \right] \end{aligned} \quad (53)$$

в кубическом приближении. С учетом того, что $c_0 = \pi/4$, находим окончательно

$$\frac{f(p, 0)}{g} = 1 - (\pi - 1)z + \frac{1}{2}(1 + \pi^2)z^2, \quad (54)$$

$$\frac{1}{2}g \frac{\partial f(p, 0)}{\partial p} = 1 - (\pi + 1)z + \left(\frac{3}{4}\pi^2 + 2\pi + \frac{1}{2}\right)z^2, \quad (55)$$

$$\left[\frac{\partial f(p, h)}{\partial h}\right]_{h=0} = 2\pi \left[z - (\pi + 1)z^2 + \left(\frac{3}{4}\pi^2 + 2\pi + \frac{2}{3}\right)z^3\right]. \quad (56)$$

Здесь, согласно (45), аргумент $z = \ln(1/g)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lord Rayleigh, Phil. Mag. S. **34** (211), 481 (1892).
2. W. T. Perrins, D. R. McKenzie, and R. C. McPhedran, Proc. Roy. Soc. Lond. A **369**, 207 (1979).
3. R. C. McPhedran, Proc. Roy. Soc. Lond. A **408**, 31 (1986).
4. R. C. McPhedran and G. W. Milton, Proc. Roy. Soc. Lond. A **411**, 313 (1987).
5. R. C. McPhedran, L. Poladian, and G. W. Milton, Proc. Roy. Soc. Lond. A **415**, 185 (1988).
6. V. V. Mityushev and Z. Angew. Math. Mech. **77**, 115 (1997).
7. N. Rylko, J. Eng. Math. **38**, 1 (2000).
8. Y. A. Godin, J. Math. Phys. **53**, 063703 (2012).
9. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **161**, 358 (2022).
10. Б. Я. Балагуров, О. А. Васильев, ЖЭТФ **167**, 586 (2025).
11. *Справочник по специальным функциям* под ред. М. Абрамовица и И. Стиган, Наука, Москва (1979).