

О СКЕЙЛИНГОВЫХ СВОЙСТВАХ КВАЗИКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ПОТЕНЦИАЛОВ СИММЕТРИИ ВОСЬМОГО ПОРЯДКА

А. Я. Мальцев*

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 16 апреля 2025 г.,
после переработки 26 мая 2025 г.
Принята к публикации 26 мая 2025 г.

Мы рассматриваем специальный класс квазипериодических потенциалов, возникающих в физике фотонных систем и обладающих вращательной симметрией восьмого порядка. Мы интересуемся «скейлинговыми» свойствами таких потенциалов, а именно скоростью роста их замкнутых линий уровня при приближении к энергии, отвечающей (перколяционному) порогу протекания. Получение оценок на соответствующие скейлинговые индексы позволяет, в частности, провести некоторое сравнение таких потенциалов с различными моделями случайных потенциалов на плоскости.

DOI: 10.31857/S0044451025080115

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе мы рассмотрим линии уровня двумерных квазипериодических потенциалов с симметрией вращения восьмого порядка, представляющих значительный интерес в физике фотонных систем или систем ультрахолодных атомов (см., например, [1–5]). Потенциалы такого типа создаются стоячими электромагнитными волнами и представляются обычно конечным числом фурье-гармоник. Здесь мы будем рассматривать двумерные потенциалы $V(x, y)$, имеющие вид

$$V(\mathbf{r}) = V_0 \sum_{j=1}^4 \cos(\mathbf{G}_j \mathbf{r} - A_j), \quad (1)$$

где $\mathbf{G}_j$ представляют собой базисный вектор $\boldsymbol{\kappa} = (k, 0)$, повернутый на углы $0, 45^\circ, 90^\circ$ и 135° соответственно ($A_j \in [0, 360^\circ)$).

Потенциалы (1) представляют собой квазипериодические функции с четырьмя квазипериодами на плоскости, т.е. возникают как ограничения 4-периодической функции $F(\mathbf{z}) = F(z^1, z^2, z^3, z^4)$ в $\mathbb{R}^4$ при некотором аффинном вложении $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$. Лег-

ко видеть, что в качестве такой функции в нашем случае можно взять

$$F(\mathbf{z}) = V_0 (\cos z^1 + \cos z^2 + \cos z^3 + \cos z^4),$$

при этом вложения $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ задаются формулами

$$\mathbf{r} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{G}_1 \mathbf{r} - A_1 \\ \mathbf{G}_2 \mathbf{r} - A_2 \\ \mathbf{G}_3 \mathbf{r} - A_3 \\ \mathbf{G}_4 \mathbf{r} - A_4 \end{pmatrix}.$$

В действительности, как легко видеть, два из параметров сдвига $\mathbf{A}$ отвечают «тривиальным» сдвигам потенциала $V(\mathbf{r})$ в плоскости $\mathbb{R}^2$, и их естественно исключить из рассмотрения. Нам удобно будет ввести два периодических потенциала:

$$V_1(\mathbf{r}) = V_0 [\cos(\mathbf{G}_1 \mathbf{r}) + \cos(\mathbf{G}_3 \mathbf{r})] = V_0 (\cos x + \cos y)$$

и

$$V_2(\mathbf{r}) = V_0 [\cos(\mathbf{G}_2 \mathbf{r}) + \cos(\mathbf{G}_4 \mathbf{r})]$$

и рассматривать потенциалы

$$V(\mathbf{r}, \mathbf{a}) = V_1(\mathbf{r}) + V_2(\mathbf{r} - \mathbf{a}), \quad (2)$$

$$\mathbf{a} = (a^1, a^2) \in \mathbb{R}^2.$$

Оба потенциала, $V_1(\mathbf{r})$ и $V_2(\mathbf{r})$, обладают вращательной симметрией четвертого порядка, легко видеть также, что потенциал $V_2(\mathbf{r})$ представляет собой

* E-mail: maltsev@itp.ac.ru

потенциал $V_1(\mathbf{r})$, повернутый на 45° относительно начала координат.

Потенциал

$$V(\mathbf{r}, 0) = V_1(\mathbf{r}) + V_2(\mathbf{r})$$

обладает точной вращательной симметрией восьмого порядка и является квазипериодическим. Именно этот потенциал, в действительности, рассматривается наиболее часто в физике двумерных систем. Нам, однако, удобно будет рассматривать сразу все семейство квазипериодических потенциалов (2).

Нас будет интересовать геометрия линий уровня потенциалов $V(\mathbf{r}, \mathbf{a})$:

$$V(\mathbf{r}, \mathbf{a}) = \epsilon, \quad (3)$$

а также геометрия ограничиваемых ими областей $V(\mathbf{r}, \mathbf{a}) < \epsilon$ и $V(\mathbf{r}, \mathbf{a}) > \epsilon$.

Описание геометрии линий уровня квазипериодических функций на плоскости составляет содержание задачи Новикова, довольно глубоко исследованной к настоящему времени (см., например, [6–16]). Отметим также, что случай четырех квазипериодов был наиболее глубоко исследован в работах [15, 16].

Основу рассмотрения задачи Новикова составляет при этом исследование открытых (незамкнутых) линий уровня (3), во многом определяющих общую картину в $\mathbb{R}^2$. Можно сразу отметить, что открытые линии уровня (3) могут появляться в интервале энергий более узком, нежели полный интервал значений $[\epsilon_{\min}, \epsilon_{\max}]$ потенциала $V(\mathbf{r})$.

Особенностью квазипериодических потенциалов является то, что они в некотором смысле занимают промежуточное положение между периодическими и случайными потенциалами. Это, в частности, проявляется в том, что многие квазипериодические потенциалы имеют «топологически регулярные» открытые линии уровня.

Топологически регулярные открытые линии уровня (3) не являются периодическими, тем не менее, каждая такая линия уровня лежит в прямой полосе конечной ширины, проходя ее насквозь (рис. 1). Кроме того, топологически регулярные линии (3) являются устойчивыми по отношению к малым вариациям параметров потенциала и обычно возникают в некотором конечном интервале энергий $\epsilon \in [\epsilon_1, \epsilon_2]$. Можно видеть, таким образом, что потенциалы $V(x, y)$, обладающие топологически регулярными линиями уровня, в некотором смысле ближе к периодическим потенциалам, чем к случайным. Надо отметить, что возникновение

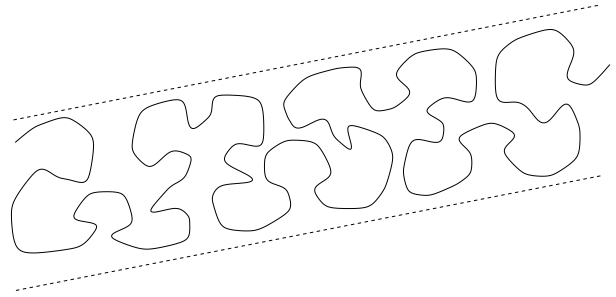


Рис. 1. «Топологически регулярная» линия уровня квазипериодического потенциала (схематично)

топологически регулярных линий уровня играет весьма важную роль при рассмотрении целого ряда вопросов, а потенциалы, имеющие такие линии уровня, часто отвечают довольно богатым множествам в пространстве параметров задачи (см., например, [7, 14–19, 21–23]). В частности, появление таких потенциалов является типичным также для многих важных семейств потенциалов с четырьмя квазипериодами (см. [15, 16, 23]).

Потенциалы (2), однако, не могут иметь топологически регулярных открытых линий уровня, что обусловлено наличием вращательной симметрии у потенциалов V_1 и V_2 . Как было также показано в [24], открытые линии уровня (3) могут возникать в этом случае лишь на единственном уровне ϵ_0 (для любого значения $\mathbf{a}$), что сближает такие потенциалы со случайными потенциалами на плоскости.

Открытые линии уровня квазипериодических потенциалов, не являющиеся топологически регулярными, имеют более сложную геометрию, блуждая по плоскости довольно сложным образом (рис. 2). Такие линии уровня мы будем называть «хаотическими». Многие аспекты геометрии хаотических линий уровня для потенциалов с тремя квазипериодами были изучены в работах [9, 12, 13, 25–43]. В частности, их поведение часто обладает «скейлинговыми» свойствами. Здесь можно отметить, что потенциалы с четырьмя квазипериодами могут иметь хаотические линии уровня еще более сложной геометрии.

Отметим еще одно обстоятельство. Как мы уже сказали, нам будет удобно рассматривать семейство потенциалов (2) целиком, сразу для всех значений $\mathbf{a}$. Значение ϵ_0 отвечает, в действительности, появлению открытых линий уровня $V(\mathbf{r}, \mathbf{a})$ хотя бы для некоторых значений $\mathbf{a}$ (возможно, не для всех). Согласно [22, 44], однако, в случае, когда открытые линии уровня возникают при $\epsilon = \epsilon_0$ не для

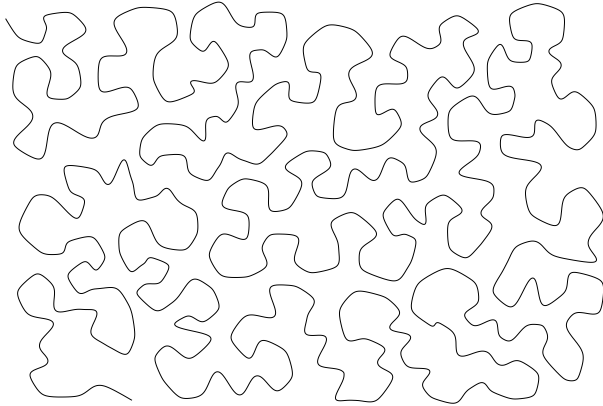


Рис. 2. «Хаотическая» линия уровня квазипериодического потенциала (схематично)

всех значений $\mathbf{a}$, все потенциалы $V(\mathbf{r}, \mathbf{a})$ должны содержать замкнутые линии уровня сколь угодно большого размера на уровне ϵ_0 . Можно видеть, таким образом, что максимальный радиус линий уровня $V(\mathbf{r}, \mathbf{a}) = \epsilon_0$, а также областей $V(\mathbf{r}, \mathbf{a}) < \epsilon_0$ и $V(\mathbf{r}, \mathbf{a}) > \epsilon_0$ в любом случае обращается в бесконечность. Приведенное замечание позволяет, в частности, рассматривать все потенциалы $V(\mathbf{r}, \mathbf{a})$ с одной точки зрения при рассмотрении систем конечного размера. Отметим также, что значения $\mathbf{a}$, отвечающие появлению открытых линий уровня $V(\mathbf{r}, \mathbf{a}) = \epsilon_0$, в любом случае образуют всюду плотное множество в пространстве всех значений $\mathbf{a}$.

Можно видеть, что описанное поведение линий уровня $V(\mathbf{r}, \mathbf{a})$ сближает эти потенциалы со случайными потенциалами на плоскости. В целом, семейства квазипериодических потенциалов, обладающих такими свойствами, можно рассматривать как некоторые модели случайных потенциалов, обладающих дальним порядком.

Для рассматриваемого нами семейства $V(\mathbf{r}, \mathbf{a})$ нетрудно показать также, что $\epsilon_0 = 0$. Действительно, возвращаясь к представлению (1), можно видеть, что преобразование

$$(A^1, A^2, A^3, A^4) \rightarrow (A^1 + \pi, A^2 + \pi, A^3 + \pi, A^4 + \pi)$$

отвечает замене $V(\mathbf{r}, \mathbf{a}) \rightarrow -V(\mathbf{r}, \mathbf{a})$.

Таким образом, если в семействе $V(\mathbf{r}, \mathbf{a})$ открытые линии уровня возникают при $\epsilon = \epsilon_0$, они также должны возникать при $\epsilon = -\epsilon_0$. Полагая, однако (согласно [24]), значение ϵ_0 единственным для всего семейства $V(\mathbf{r}, \mathbf{a})$, мы немедленно получаем $\epsilon_0 = 0$.

При $\epsilon \neq 0$ все линии уровня (3) являются замкнутыми. Их размеры на каждом уровне ϵ при этом ограничены одной константой $D(\epsilon)$, стремящейся к

бесконечности при $\epsilon \rightarrow 0$. Можно видеть также, что замкнутые линии уровня (3) имеют довольно простую форму и небольшие размеры вблизи значений ϵ_{min} и ϵ_{max} и могут значительно усложняться при приближении ϵ к уровню ϵ_0 . Размеры замкнутых линий уровня (3) для квазипериодических потенциалов обычно растут при приближении к соответствующим значениям энергии согласно некоторому степенному закону, отвечающему определенным «скейлинговым» свойствам потенциала.

В данной работе нас будет интересовать поведение константы $D(\epsilon)$ в пределе $\epsilon \rightarrow 0$. В частности, мы получим оценку

$$D(\epsilon) \leq \text{const} |\epsilon|^{-1}$$

для потенциалов рассматриваемого вида. Можно видеть, что приведенная оценка, вообще говоря, отличается от известных оценок в теории перколяции и случайных потенциалов (см., например, [45–48]), что снова указывает на некоторые различия между квазипериодическими и случайными потенциалами на плоскости. В работе [49] близкий (но менее точный) результат был получен для суперпозиции потенциалов, имеющих вращательную симметрию третьего порядка. Отметим при этом, что результат работы [49] относится к большинству рассматриваемых там потенциалов и имеет вид асимптотического соотношения, выполняющегося в достаточной близости к уровню ϵ_0 . Здесь мы подробно рассмотрим симметрии четвертого и восьмого порядков и получим более точные оценки для константы $D(\epsilon)$, пользуясь явным видом потенциалов $V(\mathbf{r}, \mathbf{a})$. Кроме того, особенности приближения потенциала $V(\mathbf{r})$ периодическими потенциалами (связанные с особой спецификой приближения числа $\sqrt{2}$ рациональными числами) позволяют, в действительности, получить довольно точные (численные) оценки для константы $D(\epsilon)$ фактически во всем интервале энергий. Представленные здесь результаты могут быть использованы, в частности, для описания областей локализации холодных атомов в потенциале $V(\mathbf{r})$ в зависимости от их энергии (или температуры), играющей важную роль при постановке экспериментов в этом потенциале.

В разд. 2 мы опишем некоторое более широкое семейство квазипериодических потенциалов, необходимое нам для исследования свойств потенциалов, приведенных выше. В разд. 3 мы приведем необходимые вычисления, позволяющие получить оценки «скейлинговых» параметров для потенциалов $V(\mathbf{r}, \mathbf{a})$.

2. РАСШИРЕННОЕ СЕМЕЙСТВО КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Как мы уже сказали, наибольший интерес обычно представляет потенциал $V(\mathbf{r}, \mathbf{0})$, обладающий точной вращательной симметрией восьмого порядка. Для его исследования, однако, нам понадобится более широкий класс потенциалов

$$V(\mathbf{r}, \alpha, \mathbf{a}) = V_1(\mathbf{r}) + V_2^\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{a}) \equiv \\ \equiv V_1(\mathbf{r}) + V_1(\pi_{-\alpha}[\mathbf{r} - \mathbf{a}]),$$

представляющий собой суперпозицию потенциала $V_1(\mathbf{r})$ и потенциала, получаемого из него поворотом на угол α относительно начала координат и сдвигом на вектор $\mathbf{a}$ в плоскости $\mathbb{R}^2$ (будем обозначать через $\pi_\alpha[\mathcal{F}]$ поворот любой фигуры $\mathcal{F}$ в $\mathbb{R}^2$ на угол α относительно начала координат).

Как легко видеть, все потенциалы $V(\mathbf{r}, \alpha, \mathbf{0})$ обладают точной вращательной симметрией четвертого порядка и являются квазипериодическими для углов α общего положения. В общем случае потенциалы $V(\mathbf{r}, \alpha, \mathbf{a})$ не обладают точной вращательной симметрией. Как следует из результатов [24], для углов α общего положения (не «магических»), открытые линии уровня потенциалов $V(\mathbf{r}, \alpha, \mathbf{a})$ могут также возникать лишь при единственном значении энергии ϵ_0 (в данном случае $\epsilon_0 = 0$).

Для углов α общего положения и любых значений $\mathbf{a}$ значения $\epsilon < 0$ отвечают ситуации «типа A_- » для соответствующих потенциалов $V(\mathbf{r}, \alpha, \mathbf{a})$. А именно, множество $V(\mathbf{r}, \alpha, \mathbf{a}) > \epsilon$ имеет в этом случае единственную неограниченную компоненту в плоскости $\mathbb{R}^2$, в то время как все другие связные компоненты множеств $V(\mathbf{r}, \alpha, \mathbf{a}) > \epsilon$ и $V(\mathbf{r}, \alpha, \mathbf{a}) < \epsilon$ являются ограниченными (рис. 3).

Аналогично, при $\epsilon > 0$ квазипериодическим потенциалам $V(\mathbf{r}, \alpha, \mathbf{a})$ отвечает ситуация «типа A_+ ». А именно, множество $V(\mathbf{r}, \alpha, \mathbf{a}) < \epsilon$ имеет в этом случае единственную неограниченную компоненту в плоскости $\mathbb{R}^2$, в то время как все другие связные компоненты множеств $V(\mathbf{r}, \alpha, \mathbf{a}) < \epsilon$ и $V(\mathbf{r}, \alpha, \mathbf{a}) > \epsilon$ являются ограниченными (рис. 3).

Как хорошо известно, для специальных («магических») углов α потенциалы $V(\mathbf{r}, \alpha, \mathbf{a})$ являются периодическими (с большими периодами). Как также хорошо известно, «магические» углы α связаны при этом с целочисленными «пифагоровыми» тройками. Мы будем использовать максимально простое описание «магических» углов $\bar{\alpha}_{n,m}$, отвечающих периодическим потенциалам $V(\mathbf{r}, \alpha, \mathbf{a})$. А именно, мы определим «магический» угол $\bar{\alpha}_{n,m}$ как угол пово-

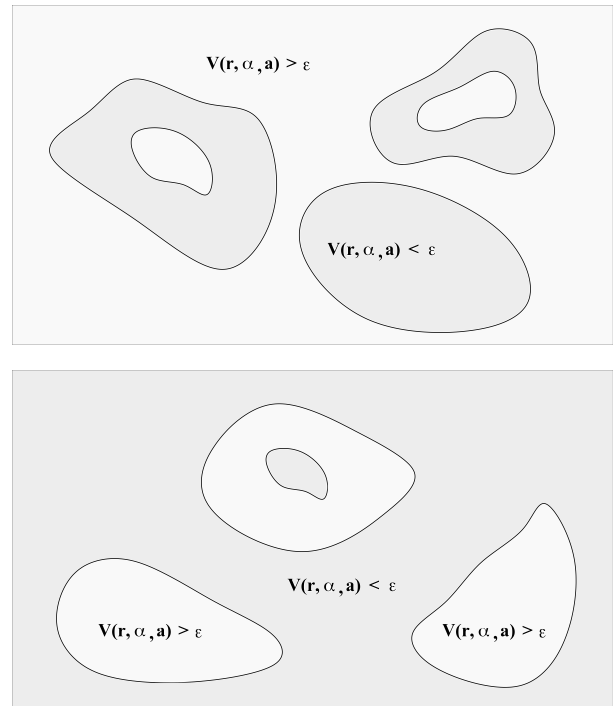


Рис. 3. Ситуации типа A_- и A_+ в плоскости $\mathbb{R}^2$ (схематично)

рота от вектора $(n, -m)$ к вектору (n, m) в стандартной целочисленной решетке (рис. 4).

Легко видеть, что в силу симметрии потенциала $V_1(\mathbf{r})$ мы можем ограничиться интервалом $\alpha \in (0, 90^\circ)$ и положить, таким образом, $0 < m < n$ для «магических» углов $\bar{\alpha}_{n,m}$. Нетрудно видеть также (см. рис. 4), что периодами потенциалов $V(\mathbf{r}, \bar{\alpha}_{n,m}, \mathbf{a})$ являются при этом векторы

$$\mathbf{b}_1 = \frac{2\pi}{k} \begin{pmatrix} m \\ -n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{b}_2 = \frac{2\pi}{k} \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Числа m и n предполагаются взаимно простыми, при этом векторы (4) являются наименьшими периодами потенциалов $V(\mathbf{r}, \bar{\alpha}_{n,m}, \mathbf{a})$, если m и n имеют разную четность. Если m и n оба нечетные, наименьшими периодами потенциалов $V(\mathbf{r}, \bar{\alpha}_{n,m}, \mathbf{a})$ являются векторы

$$\mathbf{b}'_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) \quad \text{и} \quad \mathbf{b}'_2 = \frac{1}{2}(-\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2),$$

имеющие длину

$$\frac{2\pi}{k} \sqrt{\frac{m^2 + n^2}{2}}.$$

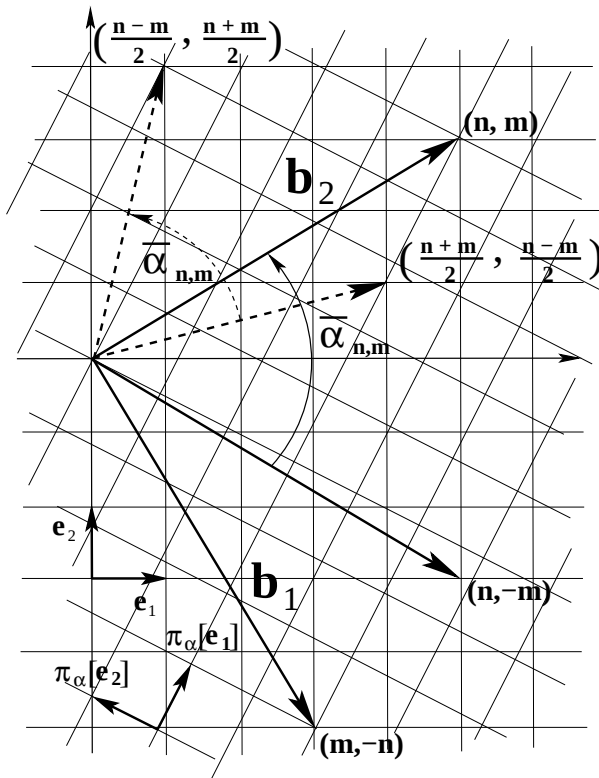


Рис. 4. Поворот от вектора $(n, -m)$ к вектору (n, m) , а также от вектора $(1/2)(n + m, n - m)$ к вектору $(1/2)(n - m, n + m)$ в целочисленной решетке

В последнем случае, как нетрудно проверить (см. рис. 4), угол $\bar{\alpha}_{n,m}$ является также углом поворота от целочисленного вектора

$$\left(\frac{n+m}{2}, \frac{n-m}{2} \right)$$

к вектору

$$\left(\frac{n-m}{2}, \frac{n+m}{2} \right).$$

Полагая

$$(m_0, n_0) = (m, n),$$

если m и n имеют различную четность, и

$$(m_0, n_0) = \left(\frac{m+n}{2}, \frac{m-n}{2} \right),$$

если m и n оба нечетные, мы можем использовать величину

$$\frac{2\pi}{k} \sqrt{m_0^2 + n_0^2}$$

в качестве длины минимальных периодов потенциалов $V(\mathbf{r}, \bar{\alpha}_{n,m}, \mathbf{a})$.

Для исследования свойств потенциала $V(\mathbf{r}, \mathbf{0}) = V(\mathbf{r}, 45^\circ, \mathbf{0})$ (а также всех $V(\mathbf{r}, \alpha, \mathbf{a})$)

мы будем использовать приближения этих потенциалов потенциалами $V(\mathbf{r}, \bar{\alpha}_{n,m}, \mathbf{a})$. Приближение квазипериодических потенциалов периодическими, конечно, возможно лишь в ограниченной области $\mathbb{R}^2$, при этом нам необходимо использовать приближения углов α «магическими» углами $\bar{\alpha}_{n,m}$.

Очевидно, в общем случае такие приближения непосредственно связаны с приближениями величины $\tan(\alpha/2)$ рациональными дробями m/n . Учитывая соотношение $|\arctg' x| \leq 1$, легко видеть при этом, что из соотношения

$$\left| \tan \frac{\alpha}{2} - \frac{m}{n} \right| < \delta$$

всегда следует

$$\left| \alpha - 2 \arctg \frac{m}{n} \right| \equiv |\alpha - \bar{\alpha}_{n,m}| < 2\delta.$$

Для хороших приближений угла α углами $\bar{\alpha}_{n,m}$ и

$$\left| \tan \frac{\alpha}{2} - \frac{m}{n} \right| = \delta$$

можно также полагать с хорошей точностью

$$|\alpha - \bar{\alpha}_{n,m}| \simeq \frac{2\delta}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = 2\delta \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \delta (1 + \cos \alpha). \quad (5)$$

Потенциалы $V(\mathbf{r}, \alpha, \mathbf{a})$ удовлетворяют соотношениям

$$V(\mathbf{r}, \alpha, \mathbf{a} + \pi_\alpha [\mathbf{e}_{1,2}]) \equiv V(\mathbf{r}, \alpha, \mathbf{a}),$$

$$V(\mathbf{r}, \alpha, \mathbf{a} + \mathbf{e}_{1,2}) \equiv V(\mathbf{r} - \mathbf{e}_{1,2}, \alpha, \mathbf{a}),$$

где $\mathbf{e}_1 = (T, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, T)$ ($T = 2\pi/k$) — периоды потенциала $V_1(\mathbf{r})$.

Естественно поэтому ввести классы эквивалентных потенциалов, полагая

$$V(\mathbf{r}, \alpha, \mathbf{a}) \cong V(\mathbf{r}, \alpha, \mathbf{a} + \mathbf{a}_{pqij}),$$

где

$$\mathbf{a}_{pqij} = p\mathbf{e}_1 + q\mathbf{e}_2 + i\pi_\alpha [\mathbf{e}_1] + j\pi_\alpha [\mathbf{e}_2], \quad (6)$$

$$p, q, i, j \in \mathbb{Z}.$$

Очевидно, что эквивалентные потенциалы имеют идентичные линии уровня.

Для углов α общего положения векторы (6) образуют всюду плотное множество в пространстве параметров $\mathbf{a}$.

Для «магических» углов $\bar{\alpha}_{n,m}$ векторы (6) образуют (повернутую) квадратную решетку с шагом $T/\sqrt{m_0^2 + n_0^2}$.

В отличие от квазипериодических потенциалов $V(\mathbf{r}, \alpha, \mathbf{a})$ каждый из периодических потенциалов

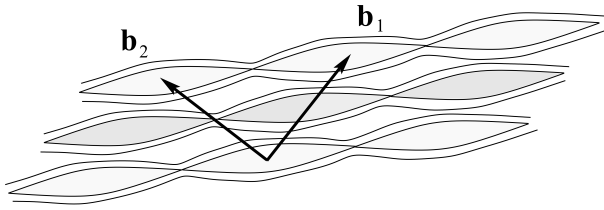


Рис. 5. Периодические открытые линии уровня потенциалов $V(\mathbf{r}, \bar{a}_{n,m}, \mathbf{a})$ (схематично)

$V(\mathbf{r}, \bar{a}_{n,m}, \mathbf{a})$ имеет свой собственный интервал открытых линий уровня $[-\epsilon_{n,m}(\mathbf{a}), \epsilon_{n,m}(\mathbf{a})]$, симметричный относительно значения $\epsilon_0 = 0$.

Несингулярные открытые линии уровня $V(\mathbf{r}, \bar{a}_{n,m}, \mathbf{a}) = \epsilon$ являются периодическими и имеют некоторое общее целочисленное направление в базисе $\{\mathbf{b}_1^{n,m}, \mathbf{b}_2^{n,m}\}$ или $\{\mathbf{b}_1'^{n,m}, \mathbf{b}_2'^{n,m}\}$ (рис. 5). Эти направления, однако, могут различаться для различных значений $\mathbf{a}$. Ситуации A_- и A_+ для таких потенциалов отвечают значениям $\epsilon < -\epsilon_{n,m}(\mathbf{a})$ и $\epsilon > \epsilon_{n,m}(\mathbf{a})$ соответственно.

Потенциалы $V(\mathbf{r}, \bar{a}_{n,m}, \mathbf{a})$, обладающие точной вращательной симметрией, очевидно, не могут иметь несингулярных периодических открытых линий уровня. Для таких потенциалов ситуации A_- и A_+ разделяются (симметричной) периодической «сингулярной сетью», возникающей на уровне $\epsilon_0 = 0$ (рис. 6).

При больших значениях n и m «сингулярная сеть» может обладать довольно сложной геометрией. В случае общего положения, однако, все такие сети эквивалентны сети, изображенной на рис. 6, с топологической точки зрения, а именно такая сеть содержит ровно две неэквивалентные седловые точки потенциала $V(\mathbf{r}, \bar{a}_{n,m}, \mathbf{a})$, а все ее «ячейки» обладают вращательной симметрией четвертого порядка. Кроме того, для размеров «ячеек» такой сети можно пользоваться формулой

$$T_{n,m} \leq D \leq \sqrt{2}T_{n,m}, \quad (7)$$

где $T_{n,m} = T \sqrt{m_0^2 + n_0^2}$ — длина минимальных периодов потенциала $V(\mathbf{r}, \bar{a}_{n,m}, \mathbf{a})$ (мы докажем этот факт более строго в Приложении).

Все потенциалы $V(\mathbf{r}, \bar{a}_{n,m}, \mathbf{0})$ обладают бесконечным числом центров симметрии четвертого порядка, находящихся в точках

$$\begin{aligned} & \frac{p-q}{2} \mathbf{b}_1^{n,m} + \frac{p+q}{2} \mathbf{b}_2^{n,m} \quad \text{или} \\ & \frac{p-q}{2} \mathbf{b}_1'^{n,m} + \frac{p+q}{2} \mathbf{b}_2'^{n,m}, \quad p, q \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (8)$$

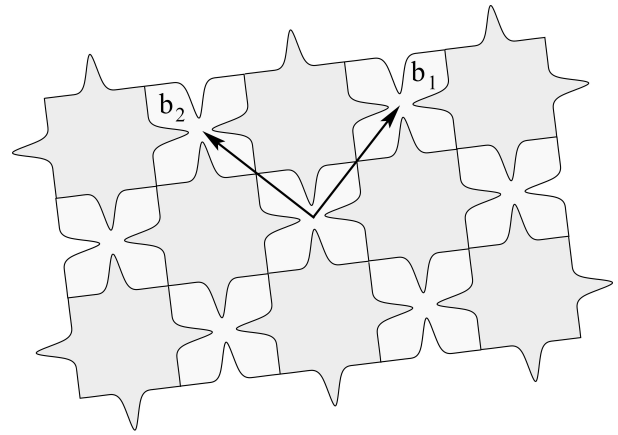


Рис. 6. «Сингулярная сеть», возникающая на уровне $V(\mathbf{r}, \bar{a}_{n,m}, \mathbf{a}) = 0$ у периодических потенциалов, обладающих точной вращательной симметрией (схематично)

Таковыми же центрами симметрии, очевидно, обладают также потенциалы

$$V\left(\mathbf{r}, \bar{a}_{n,m}, \pi \bar{a}_{n,m} \left[\frac{i-j}{2} \mathbf{e}_1 + \frac{i+j}{2} \mathbf{e}_2 \right]\right), \quad (9)$$

$$i, j \in \mathbb{Z}.$$

Через каждый центр симметрии (8) проходят четыре оси симметрии потенциала $V(\mathbf{r}, \bar{a}_{n,m}, \mathbf{0})$ (а также потенциалов (9)). Нетрудно видеть, что такие оси симметрии составляют с осью x углы

$$\frac{1}{2}\bar{a}_{n,m}, \quad \frac{1}{2}\bar{a}_{n,m} + 45^\circ, \quad \frac{1}{2}\bar{a}_{n,m} + 90^\circ, \quad \frac{1}{2}\bar{a}_{n,m} + 135^\circ.$$

Как нетрудно показать, аналогичными (сдвинутыми) множествами центров симметрии обладают все потенциалы $V(\mathbf{r}, \bar{a}_{n,m}, \mathbf{a})$, обладающие точной вращательной симметрией. В целом множество потенциалов $V(\mathbf{r}, \bar{a}_{n,m}, \mathbf{a})$, обладающих точной вращательной симметрией, задается потенциалами

$$V(\mathbf{r}, \bar{a}_{n,m}, \mathbf{a}'_{pqij}), \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{a}'_{pqij} = & \frac{p-q}{2} \mathbf{e}_1 + \frac{p+q}{2} \mathbf{e}_2 + \\ & + \frac{i-j}{2} \pi \bar{a}_{n,m} [\mathbf{e}_1] + \frac{i+j}{2} \pi \bar{a}_{n,m} [\mathbf{e}_2], \end{aligned} \quad (11)$$

$$p, q, i, j \in \mathbb{Z}.$$

Векторы (11) образуют квадратную решетку в пространстве параметров $\mathbf{a}$ с шагом $T/2\sqrt{m_0^2 + n_0^2}$.

Решетка (11) содержит решетку (6) и является «более плотной». В частности, для любого потенциала $V(\mathbf{r}, \bar{\alpha}_{n,m}, \mathbf{a})$ всегда найдется потенциал (10), такой что

$$|\mathbf{a} - \mathbf{a}'_{pqij}| \leq \frac{T}{2\sqrt{2(m_0^2 + n_0^2)}}.$$

Приведенное выше соотношение позволяет доказать также соотношения для величин $\epsilon_{n,m}(\mathbf{a})$:

$$\epsilon_{n,m}(\mathbf{a}) \leq \frac{\pi V_0}{\sqrt{m_0^2 + n_0^2}}$$

Действительно, пользуясь очевидным соотношением

$$|\nabla_{\mathbf{a}} V(\mathbf{r}, \alpha, \mathbf{a})| \leq \sqrt{2} k V_0, \quad (12)$$

получаем

$$\begin{aligned} |V(\mathbf{r}, \bar{\alpha}_{n,m}, \mathbf{a}) - V(\mathbf{r}, \bar{\alpha}_{n,m}, \mathbf{a}'_{pqij})| &\leq \\ &\leq \frac{\sqrt{2} k V_0 T}{2\sqrt{2(m_0^2 + n_0^2)}} = \frac{\pi V_0}{\sqrt{m_0^2 + n_0^2}}. \end{aligned}$$

Таким образом, для любого

$$\epsilon > \frac{\pi V_0}{\sqrt{m_0^2 + n_0^2}}$$

множество $V(\mathbf{r}, \bar{\alpha}_{n,m}, \mathbf{a}) > \epsilon$ содержится внутри множества $V(\mathbf{r}, \bar{\alpha}_{n,m}, \mathbf{a}'_{pqij}) > 0$.

Последнее множество, в свою очередь, имеет лишь ограниченные компоненты (лежащие внутри ячеек «сингулярной сети»), и, таким образом, для потенциала $V(\mathbf{r}, \bar{\alpha}_{n,m}, \mathbf{a})$ в этом случае имеет место ситуация типа A_+ .

Для значений

$$\epsilon < -\frac{\pi V_0}{\sqrt{m_0^2 + n_0^2}}$$

рассуждение совершенно аналогичное.

Отметим также, что для углов α общего положения (не «магических») потенциалы $V(\mathbf{r}, \alpha, \mathbf{a})$, обладающие точной вращательной симметрией четвертого порядка (с единственным центром симметрии), представляют всюду плотное множество среди всех потенциалов $V(\mathbf{r}, \alpha, \mathbf{a})$.

3. ПОТЕНЦИАЛ $V(\mathbf{r}, 45^\circ, \mathbf{0})$ И СВЯЗАННЫЕ С НИМ ПОТЕНЦИАЛЫ

Здесь мы рассмотрим более подробно потенциал $V(\mathbf{r}, 45^\circ, \mathbf{0})$, обладающий точной вращательной

симметрией восьмого порядка, а также связанные с ним потенциалы

$$V(\mathbf{r}, 45^\circ, \mathbf{a}), \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2.$$

Нам понадобится приближение потенциалов $V(\mathbf{r}, 45^\circ, \mathbf{a})$ периодическими потенциалами, что, как мы уже говорили, связано с приближениями величины $\operatorname{tg} 22.5^\circ = \sqrt{2} - 1$ рациональными дробями.

Величина $\sqrt{2} - 1$ имеет следующее разложение в непрерывную (цепную) дробь:

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

Последовательные редукции цепной дроби дают приближения $m^{(s)}/n^{(s)}$ для $\sqrt{2} - 1$, при этом можно показать, что

$$m^{(s+1)} = n^{(s)}, \quad n^{(s+1)} = m^{(s)} + 2n^{(s)},$$

так что

$$\frac{m^{(s)}}{n^{(s)}} \rightarrow \frac{m^{(s+1)}}{n^{(s+1)}} = \frac{n^{(s)}}{m^{(s)} + 2n^{(s)}}.$$

Полагая $m^{(1)} = 1$, $n^{(1)} = 2$, нетрудно видеть, что числа $m^{(s)}$ и $n^{(s)}$ являются взаимно простыми и имеют различную четность при любом s .

Мы можем записать также

$$\begin{pmatrix} m^{(s+1)} \\ n^{(s+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m^{(s)} \\ n^{(s)} \end{pmatrix}.$$

Собственные числа приведенной выше системы равны

$$\lambda_1 = 1 - \sqrt{2}, \quad \lambda_2 = 1 + \sqrt{2},$$

а собственные векторы можно выбрать в виде

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} + 1 \end{pmatrix}.$$

Мы имеем тогда

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} m^{(1)} \\ n^{(1)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} + 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

и

$$m^{(s)} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left((-1)^{s-1} (\sqrt{2}-1)^s + (\sqrt{2}+1)^s \right),$$

$$n^{(s)} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left((-1)^s (\sqrt{2} - 1)^{s+1} + (\sqrt{2} + 1)^{s+1} \right),$$

$$\frac{m^{(s)}}{n^{(s)}} = \frac{\sqrt{2} - 1 + (-1)^{s-1} (\sqrt{2} - 1)^{2s+1}}{1 + (-1)^s (\sqrt{2} - 1)^{2s+2}}.$$

Можно видеть, что (согласно общей теории) дроби $m^{(s)}/n^{(s)}$ с четными и нечетными s приближаются к $\sqrt{2} - 1$ «с разных сторон».

При больших значениях s можно положить с хорошей точностью

$$m^{(s)} \simeq \frac{(\sqrt{2} + 1)^s}{2\sqrt{2}}, \quad n^{(s)} \simeq \frac{(\sqrt{2} + 1)^{s+1}}{2\sqrt{2}},$$

$$\begin{aligned} \frac{m^{(s)}}{n^{(s)}} &\simeq (\sqrt{2} - 1) \times \\ &\times \left(1 + (-1)^{s-1} \left((\sqrt{2} - 1)^{2s} + (\sqrt{2} - 1)^{2s+2} \right) \right) = \\ &= (\sqrt{2} - 1) \left(1 + (-1)^{s-1} 2\sqrt{2} (\sqrt{2} - 1)^{2s+1} \right). \end{aligned}$$

При четных s мы имеем при этом строгое неравенство

$$\sqrt{2} - 1 > \frac{m^{(s)}}{n^{(s)}} > (\sqrt{2} - 1) \left[1 - 2\sqrt{2} (\sqrt{2} - 1)^{2s+1} \right].$$

Как мы уже отмечали, числа $m^{(s)}$ и $n^{(s)}$ имеют различную четность при любом s , поэтому длина минимального периода $T_{(s)}$ потенциалов

$$V(\mathbf{r}, \bar{\alpha}_{n^{(s)}, m^{(s)}}, \mathbf{a}) \equiv V(\mathbf{r}, \bar{\alpha}_{(s)}, \mathbf{a})$$

равна

$$\begin{aligned} T_{(s)} &= T \sqrt{(m^{(s)})^2 + (n^{(s)})^2} = \\ &= T \frac{(\sqrt{2} + 1)^s}{2\sqrt{2}} \sqrt{4 + 2\sqrt{2} + (\sqrt{2} - 1)^{4s} (4 - 2\sqrt{2})} = \\ &= T \frac{(\sqrt{2} + 1)^{s+1/2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} \sqrt{1 + (\sqrt{2} - 1)^{4s+2}}, \end{aligned}$$

и, таким образом, мы имеем при всех s

$$\begin{aligned} T \frac{(\sqrt{2} + 1)^{s+1/2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} &< T_{(s)} < \\ &< T \frac{(\sqrt{2} + 1)^{s+1/2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} + T \frac{(\sqrt{2} - 1)^{3s+3/2}}{2\sqrt{2}\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

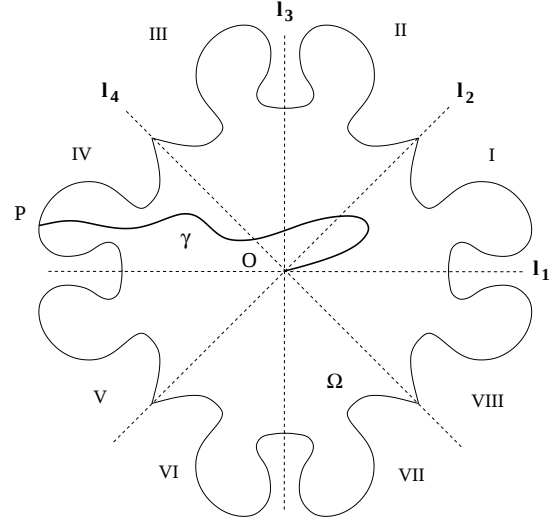


Рис. 7. Ячейка «сингулярной сети» потенциала $V(\mathbf{r}, \bar{\alpha}_{n,m}, \mathbf{a})$, обладающего точной вращательной симметрией (схематично)

Используя соотношение (5), мы можем положить с хорошей точностью при $s \gg 1$

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{(s)} - 45^\circ &\simeq \left(\frac{m^{(s)}}{n^{(s)}} - (\sqrt{2} - 1) \right) \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} \simeq \\ &\simeq (-1)^{s-1} 2\sqrt{2} (\sqrt{2} - 1)^{2s+2} \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} = \\ &= (-1)^{s-1} 2 (\sqrt{2} - 1)^{2s+1}. \end{aligned}$$

При этом для четных s мы имеем также строгое неравенство

$$-2 (\sqrt{2} - 1)^{2s+1} < \bar{\alpha}_{(s)} - 45^\circ < 0.$$

Аналогично с очень хорошей точностью при больших s можно написать

$$|\bar{\alpha}_{(s)} - 45^\circ| \sqrt{2} T_{(s)} \simeq \sqrt{2\sqrt{2}} T (\sqrt{2} - 1)^{s+1/2}.$$

Приведенные выше соотношения позволяют провести оценки скорости роста размеров замкнутых линий уровня потенциалов $V(\mathbf{r}, 45^\circ, \mathbf{a})$ при приближении ϵ к нулевому значению. Как мы уже отмечали, потенциалы, эквивалентные потенциалу $V(\mathbf{r}, 45^\circ, \mathbf{0})$, отвечают всюду плотному множеству среди всех $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$, естественно поэтому не выделять здесь специально потенциал $V(\mathbf{r}, 45^\circ, \mathbf{0})$ и рассматривать сразу все семейство $V(\mathbf{r}, 45^\circ, \mathbf{a})$.

Из приведенных выше соотношений, в действительности, вытекает существование последовательности значений

$$\begin{aligned}\epsilon_{(s)} &= \sqrt{2}kV_0 |\bar{\alpha}_{(s)} - 45^\circ| \sqrt{2}T_{(s)} + \\ &+ \frac{\sqrt{2}kV_0 T}{2\sqrt{2((m^{(s)})^2 + (n^{(s)})^2)}} \simeq \\ &\simeq 2^{9/4}\pi V_0 (\sqrt{2} - 1)^{s+1/2} + \frac{\pi V_0 \sqrt{2\sqrt{2}}}{(\sqrt{2} + 1)^{s+1/2}} = \\ &= \pi V_0 (2^{9/4} + 2^{3/4}) (\sqrt{2} - 1)^{s+1/2},\end{aligned}$$

таких что для любого $|\epsilon| > \epsilon_{(s)}$ размер линий уровня

$$V(\mathbf{r}, 45^\circ, \mathbf{a}) = \epsilon \quad (13)$$

не превышает

$$\begin{aligned}\sqrt{2}T_{(s)} &\simeq T2^{-1/4} (\sqrt{2} + 1)^{s+1/2} \simeq \\ &\simeq \pi V_0 T (4 + \sqrt{2}) \epsilon_{(s)}^{-1}.\end{aligned}$$

Действительно, пусть, например, $\epsilon < -\epsilon_{(s)}$ и множество (13) содержит связную компоненту, проходящую через некоторую точку (x_0, y_0) . Рассмотрим потенциал $\tilde{V}_{(x_0, y_0)}^{(s)}(\mathbf{r}, \mathbf{a})$, образованный суперпозицией потенциала $V_1(\mathbf{r})$ и потенциала $V_2(\mathbf{r})$, повернутого на угол $\delta\alpha_{(s)} = \bar{\alpha}_{(s)} - 45^\circ$ относительно точки (x_0, y_0) . Очевидно

$$\tilde{V}_{(x_0, y_0)}^{(s)}(\mathbf{r}, \mathbf{a}) = V(\mathbf{r}, \bar{\alpha}_{(s)}, \mathbf{a}') \quad (14)$$

для некоторого $\mathbf{a}'$.

При этом в круге радиуса $\sqrt{2}T_{(s)}$ с центром (x_0, y_0) мы, очевидно, имеем для исходного потенциала $V(\mathbf{r}, 45^\circ, \mathbf{a})$:

$$\begin{aligned}|V(\mathbf{r}, 45^\circ, \mathbf{a}) - \tilde{V}_{(x_0, y_0)}^{(s)}(\mathbf{r}, \mathbf{a})| &\leq \\ &\leq \sqrt{2}kV_0 |\bar{\alpha}_{(s)} - 45^\circ| \sqrt{2}T_{(s)}.\end{aligned}$$

Согласно сказанному нами выше, для потенциала (14) при этом существует потенциал

$$\hat{V}_{(x_0, y_0)}^{(s)}(\mathbf{r}, \mathbf{a}) = V(\mathbf{r}, \bar{\alpha}_{(s)}, \mathbf{a}''),$$

обладающий точной вращательной симметрией (четвертого порядка) и такой, что

$$|\mathbf{a}' - \mathbf{a}''| \leq \frac{T}{2\sqrt{2((m^{(s)})^2 + (n^{(s)})^2)}}.$$

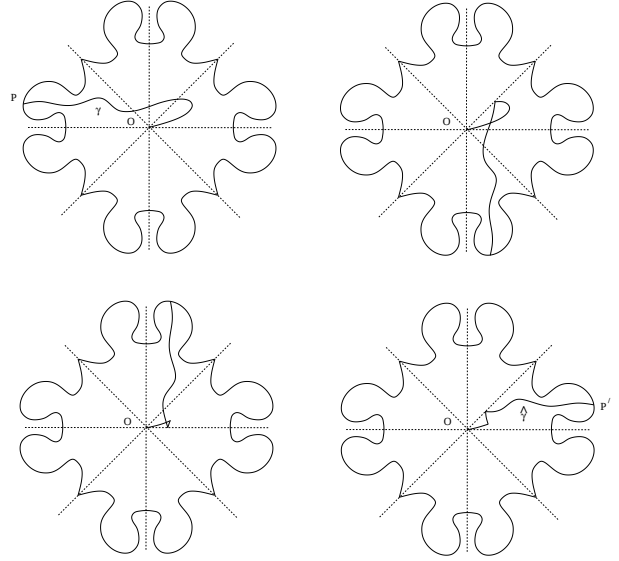


Рис. 8. Кривая $\hat{\gamma}$ в области Ω

Пользуясь соотношением (12), мы тогда можем также написать

$$\begin{aligned}|\tilde{V}_{(x_0, y_0)}^{(s)}(\mathbf{r}, \mathbf{a}) - \hat{V}_{(x_0, y_0)}^{(s)}(\mathbf{r}, \mathbf{a})| &\leq \\ &\leq \sqrt{2}kV_0 \frac{T}{2\sqrt{2((m^{(s)})^2 + (n^{(s)})^2)}}\end{aligned}$$

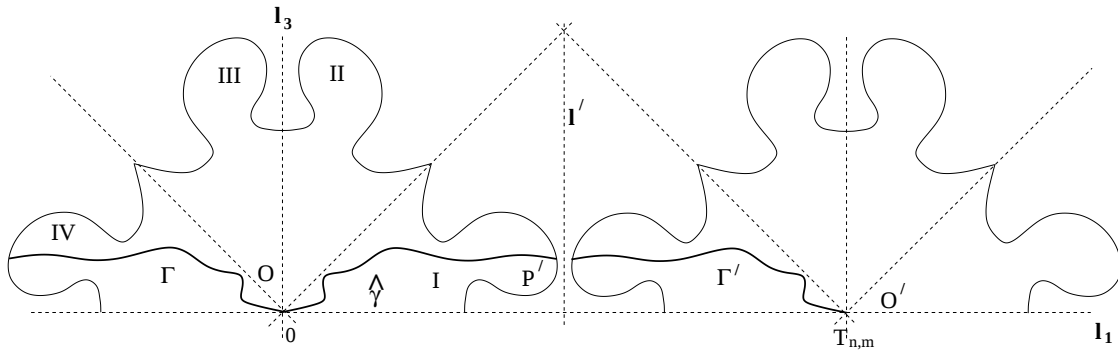
и, соответственно, в круге радиуса $\sqrt{2}T_{(s)}$ с центром (x_0, y_0)

$$\begin{aligned}|V(\mathbf{r}, 45^\circ, \mathbf{a}) - \hat{V}_{(x_0, y_0)}^{(s)}(\mathbf{r}, \mathbf{a})| &\leq \\ &\leq \sqrt{2}kV_0 |\bar{\alpha}_{(s)} - 45^\circ| \sqrt{2}T_{(s)} + \\ &+ \frac{\sqrt{2}kV_0 T}{2\sqrt{2((m^{(s)})^2 + (n^{(s)})^2)}}.\end{aligned}$$

Можно видеть, таким образом, что при $\epsilon < -\epsilon_{(s)}$ связная компонента (13), проходящая через (x_0, y_0) , в круге радиуса $\sqrt{2}T_{(s)}$ с центром (x_0, y_0) лежит также в области

$$\hat{V}_{(x_0, y_0)}^{(s)}(\mathbf{r}, \mathbf{a}) < 0.$$

Таким образом, рассматриваемая нами компонента (13) целиком содержится в одной из ячеек «сингулярной сети» потенциала $\hat{V}_{(x_0, y_0)}^{(s)}(\mathbf{r}, \mathbf{a})$, что и накладывает ограничение $D \leq \sqrt{2}T_{(s)}$ на ее максимальный размер. Нетрудно видеть, что при тех же предположениях мы имеем то же самое ограничение также на размеры областей $V(\mathbf{r}, 45^\circ, \mathbf{a}) < \epsilon$

Рис. 9. Кривые $\hat{\gamma}$, Γ и Γ' в плоскости $\mathbb{R}^2$

(рассуждения в случае $\epsilon > \epsilon_{(s)}$ аналогичны приведенным выше).

Разбивая полный интервал энергий на интервалы $[-\epsilon_{(s)}, -\epsilon_{(s+1)}]$, $[\epsilon_{(s+1)}, \epsilon_{(s)}]$ и учитывая, что в каждом из интервалов

$$|\epsilon| \leq \epsilon_{(s)} \simeq (\sqrt{2} + 1) \epsilon_{(s+1)},$$

мы можем записать также общую оценку

$$D(\epsilon) \leq \pi V_0 T (4 + \sqrt{2}) (\sqrt{2} + 1) \epsilon^{-1} \quad (15)$$

для размеров линий уровня (13) вблизи нулевого значения ϵ ($\epsilon \ll V_0$).

В заключение отметим, что потенциалы $V(\mathbf{r}, 45^\circ, \mathbf{a})$ представляют особый интерес во многих экспериментальных исследованиях двумерных систем. Это обстоятельство, в частности, обусловлено наличием вращательной симметрии восьмого порядка у всюду плотного подмножества потенциалов этого семейства.

Вместе с тем более общие потенциалы $V(\mathbf{r}, \alpha, \mathbf{a})$ также обладают многими интересными свойствами и могут быть выделены среди потенциалов, задаваемых суперпозициями периодических потенциалов на плоскости. В частности, такие потенциалы также не могут иметь топологически регулярных открытых линий уровня, что может представлять определенную важность с экспериментальной точки зрения. Как мы также уже отмечали, открытые линии уровня потенциалов $V(\mathbf{r}, \alpha, \mathbf{a})$ (для не «магических» углов α) могут возникать лишь при $\epsilon = 0$, в то время как размеры связанных линий уровня ограничены определенной константой $D(\epsilon)$ при любом ϵ .

Многие свойства потенциалов $V(\mathbf{r}, \alpha, \mathbf{a})$ сближают их со случайными потенциалами на плоскости, при этом, как и потенциалы $V(\mathbf{r}, 45^\circ, \mathbf{a})$, они имеют

свои отличия. В частности, одним из таких отличий является более медленный рост размеров замкнутых линий уровня при приближении к $\epsilon = 0$, как и для потенциалов $V(\mathbf{r}, 45^\circ, \mathbf{a})$.

Анализ поведения линий уровня потенциалов $V(\mathbf{r}, \alpha, \mathbf{a})$ вблизи $\epsilon = 0$ во многом повторяет аналогичные рассуждения для потенциалов $V(\mathbf{r}, 45^\circ, \mathbf{a})$. Отметим лишь одну особенность, которая может возникать в самом общем случае, а именно: приближение $\tan 45^\circ$ рациональными дробями имеет довольно «регулярный» вид, что, в частности, позволяет вывести общую оценку (15). Для большинства углов α (множество полной меры в пространстве углов) такие приближения обладают похожими свойствами, что позволяет получить для них оценки, близкие к (15). Некоторые $\tan \alpha$, однако, приближаются числами $m^{(s)}/n^{(s)}$ «слишком хорошо», при этом числа $m^{(s)}$ и $n^{(s)}$ растут «слишком быстро». Как следствие, общая оценка (15) для них может отсутствовать, а величина $D(\epsilon)$ может иметь ярко выраженный «каскадный» рост. Отметим при этом, что множество соответствующих α обладает нулевой мерой.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрены «скейлинговые» свойства, а именно, параметры скорости роста линий уровня и областей $V(\mathbf{r}) < \epsilon$ (или $V(\mathbf{r}) > \epsilon$) вблизи порога протекания для специального класса квазипериодических потенциалов, обладающих вращательной симметрией восьмого порядка. При исследовании было использовано вспомогательное «расширенное» семейство квазипериодических потенциалов, а также множество «магических» углов, возникающих в этом семействе. Исследование «скейлинговых» свойств потенциалов $V(\mathbf{r})$ позволяет при этом отметить некоторые их сходства и различия в

сравнении с разными моделями случайных потенциалов на плоскости. В действительности, многими похожими свойствами обладают также квазипериодические потенциалы «расширенного» семейства, что позволяет рассматривать их также в качестве интересной модели случайных потенциалов, обладающих дальним порядком.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь мы докажем соотношение (7) для диаметра ячеек «сингулярной сети» потенциалов $V(\mathbf{r}, \bar{\alpha}_{n,m}, \mathbf{a})$, обладающих точной вращательной симметрией четвертого порядка.

Как мы уже сказали, будем предполагать, что сингулярные сети $V(\mathbf{r}, \bar{\alpha}_{n,m}, \mathbf{a})$ являются сетями общего положения с топологической точки зрения. Каждую из ячеек такой сети мы будем считать односвязной областью Ω (игнорируя возможные замкнутые линии уровня внутри нее), обладающей вращательной симметрией четвертого порядка, а также отражательной симметрией потенциала $V(\mathbf{r}, \bar{\alpha}_{n,m}, \mathbf{a})$.

На границе Ω расположены четыре седловые точки потенциала $V(\mathbf{r}, \bar{\alpha}_{n,m}, \mathbf{a})$, представляющие две пары эквивалентных (различающихся сдвигом на период $V(\mathbf{r}, \bar{\alpha}_{n,m}, \mathbf{a})$) седловых особых точек (рис. 6). Нетрудно видеть, что расстояние между диаметрально противоположными (эквивалентными) седловыми точками на границе Ω при этом равно $T_{n,m}$, так что мы в любом случае имеем соотношение $D \geq T_{n,m}$.

Через центр Ω проходят четыре оси симметрии $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4$, разделяющие $\mathbb{R}^2$ на восемь секторов (октантов) I – VIII (рис. 7). Пусть $\gamma \subset \Omega$ — некоторая кривая, соединяющая центр области Ω с наиболее удаленной от него точкой P , лежащей на границе Ω (рис. 7). Очевидно, при этом $D = 2|OP|$.

Пусть без нарушения общности начальный вектор скорости на кривой γ лежит в октанте I. Используя отражения относительно осей симметрии, а также перестройки γ , мы можем построить кривую $\hat{\gamma}$, целиком лежащую в октанте I и соединяющую точку O с точкой $P' \in \partial\Omega$, такой что $|OP| = |OP'|$ (рис. 8). Легко видеть также, что малым шевелением кривую $\hat{\gamma}$ можно сделать гладкой кривой, все внутренние точки которой лежат внутри октанта I.

Либо ось $\mathbf{l}_1$ либо ось $\mathbf{l}_2$ должны содержать центр симметрии O' , получаемый из точки O сдвигом на минимальный период $\mathbf{T}$ потенциала

$V(\mathbf{r}, \bar{\alpha}_{n,m}, \mathbf{a})$. Пусть (без нарушения общности) это ось симметрии $\mathbf{l}_1$.

Рассмотрим кривую $\Gamma \subset \Omega$, получаемую из кривой $\hat{\gamma}$ отражением относительно оси $\mathbf{l}_3$ и лежащую в октанте IV. Сдвиг Γ на период $\mathbf{T}$ лежит в другой ячейке «сингулярной сети» $V(\mathbf{r}, \bar{\alpha}_{n,m}, \mathbf{a})$ и, таким образом, не должен пересекаться с $\hat{\gamma}$ во внутренних точках. Однако, поскольку $\Gamma' = \Gamma + \mathbf{T}$ является отражением $\hat{\gamma}$ относительно оси симметрии $\mathbf{l}'$ (рис. 9), это возможно лишь при

$$|OP'| \leq T_{n,m}/\sqrt{2}.$$

Мы получаем, таким образом,

$$D = 2|OP'| \leq \sqrt{2}T_{n,m}.$$

На рис. 6, например, при этом можно видеть, что приведенное соотношение является также точной верхней оценкой на величину D .

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Grynberg and C. Robilliard, Phys. Rep. **355**, 355 (2001).
2. G. Zito, B. Piccirillo, E. Santamato, A. Marino, V. Tkachenko, and G. Abbate, J. Opt. A **11**, 024007 (2009).
3. A. Jagannathan and M. Duneau, EPL **104**, 66003 (2014).
4. K. Viebahn, M. Sbroscia, E. Carter, Jr-Chiun Yu, and U. Schneider, Phys. Rev. Lett. **122**, 110404 (2019).
5. R. Gautier, H. Yao, and L. Sanchez-Palencia, Phys. Rev. Lett. **126**, 110401 (2021).
6. С. П. Новиков, УМН **37**, 3 (1982).
7. А. В. Зорич, УМН **39**, 235 (1984).
8. И. А. Дынников, УМН **47**, 161 (1992).
9. С. П. Царев, Частное сообщение (1992–1993).
10. И. А. Дынников, Математические заметки **53**, 57 (1993).
11. A. V. Zorich, *Asymptotic Flag of an Orientable Measured Foliation on a Surface*, Proc. «Geometric Study of Foliations» (Tokyo, November 1993), ed. by T. Mizutgi et al., World Scientific Pb. Co, Singapore (1994), p. 479.
12. I. A. Dynnikov, *Surfaces in 3-Torus: Geometry of Plane Sections*, Proc. of ECM2, BuDA (1996).

13. I. A. Dynnikov, *Semiclassical Motion of the Electron. A Proof of the Novikov Conjecture in General Position and Counterexamples. Solitons, Geometry, and Topology: On the Crossroad*, ed. by V. M. Buchstaber and S. P. Novikov, Translations of the AMS, Ser. 2, vol. 179, AMS, Providence, RI (1997), p. 45.
14. И. А. Дынников, УМН **54**, 21 (1999).
15. С. П. Новиков, УМН **54**, 147 (1999).
16. И. А. Дынников, С. П. Новиков, УМН **60**, 3 (2005).
17. С. П. Новиков, А. Я. Мальцев, Письма в ЖЭТФ **63**, 809 (1996).
18. С. П. Новиков, А. Я. Мальцев, УФН **168**, 249 (1998).
19. A. Ya. Maltsev and S. P. Novikov, Bull. Braz. Math. Soc. **34**, 171 (2003).
20. A. Ya. Maltsev and S. P. Novikov, J. Stat. Phys. **115**, 31 (2004).
21. А. Я. Мальцев, С. П. Новиков, УМН **74**, 149 (2019).
22. И. А. Дынников, А. Я. Мальцев, С. П. Новиков, УМН **77**, 109 (2022), arXiv:2306.11257.
23. A. Ya. Maltsev and S. P. Novikov, Ann. Phys. (N.Y.) **447**, 169039 (2022).
24. A. Ya. Maltsev, *On the Novikov Problem for Superposition of Periodic Potentials* (2024), arXiv:2409.09759.
25. A. V. Zorich, Annales de l'Institut Fourier **46**, 325 (1996).
26. A. Zorich, *On Hyperplane Sections of Periodic Surfaces. Solitons, Geometry, and Topology: On the Crossroad*, ed. by V. M. Buchstaber and S. P. Novikov, Translations of the AMS, Ser. 2, vol. 179, AMS, Providence, RI (1997), p. 173.
27. A. Zorich, Ergod. Theory Dyn. Syst. **17**, 14779 (1997).
28. A. Zorich, *How Do the Leaves of Closed 1-Form Wind Around a Surface, «Pseudoperiodic Topology»*, ed. by V. I. Arnold, M. Kontsevich, and A. Zorich, Translations of the AMS, Ser. 2, vol. 197, AMS, Providence, RI (1999), p. 135.
29. Р. Де Лео, УМН **55**, 181 (2000).
30. Р. Де Лео, УМН **58**, 197 (2003).
31. R. De Leo, Exp. Math. **15**, 109 (2006).
32. A. Zorich, *Flat Surfaces.*, in Collect. «Frontiers in Number Theory, Physics and Geometry. Vol. 1: On Random Matrices, Zeta Functions and Dynamical Systems»; Ecole De Physique des Houches, France, March 9-21 2003, ed. by P. Cartier; B. Julia; P. Moussa; P. Vanhove, Springer-Verlag, Berlin (2006), p. 439.
33. Р. Де Лео, И. А. Дынников, УМН **62**, 151 (2007).
34. И. Дынников, Тр. МИАН **263**, 72 (2008).
35. R. De Leo and I. A. Dynnikov, Geom. Dedicata **138**, 51 (2009).
36. A. Skripchenko, DCDS **32**, 643 (2012).
37. A. Skripchenko, Ann. Global Anal. Geom. **43**, 253 (2013).
38. I. Dynnikov and A. Skripchenko, *On Typical Leaves of a Measured Foliated 2-Complex of Thin Type, Topology, Geometry, Integrable Systems, and Mathematical Physics: Novikov's Seminar 2012-2014, Advances in the Mathematical Sciences*, ed. by V. M. Buchstaber, B. A. Dubrovin, and I. M. Krichever, Translations of the AMS, Ser. 2, vol. 234, AMS, Providence, RI (2014), p. 173.
39. I. Dynnikov and A. Skripchenko, Trans. Moscow Math. Soc. **762**, 287 (2015).
40. A. Avila, P. Hubert, and A. Skripchenko, Invent. Math. **206**, 109 (2016).
41. A. Avila, P. Hubert, and A. Skripchenko, Bull. Soc. Math. Fr. **144**, 539 (2016).
42. А. Я. Мальцев, С. П. Новиков, Тр. МИАН **302**, 296 (2018).
43. I. Dynnikov, P. Hubert, and A. Skripchenko, International Mathematics Research Notices (IMRN) (2022), 1-30 (Published online), arXiv:2011.15043.
44. А. Я. Мальцев, Тр. МИАН **325**, 175 (2024).
45. D. Stauffer, Phys. Rep. **54**, 1 (1979).
46. J. W. Essam, Rep. Prog. Phys. **43**, 833 (1980).
47. E. K. Riedel, Physica A **106**, 110 (1981).
48. S. A. Trugman, Phys. Rev. B **27**, 7539 (1983).
49. A. Ya. Maltsev, *On the Level Lines of Two-Layer Symmetric Potentials* (2025), arXiv:2501.15867.