

КЛАССИЧЕСКАЯ АДВЕКЦИЯ–ДИФфуЗИЯ В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ С КРУПНОМАСШТАБНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

П. С. Кондратенко^{a,b}, А. Л. Матвеев^a, Л. В. Матвеев^{a,b}*

*^a Институт проблем безопасного развития атомной энергетики
Российской академии наук
115191, Москва, Россия*

*^b Московский физико-технический институт
141700, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 20 марта 2025 г.,
после переработки 26 марта 2025 г.
Принята к публикации 26 марта 2025 г.

Построена асимптотическая теория переноса примеси для задачи адвекции–диффузии в анизотропных средах с крупномасштабными неоднородностями. Выражение для концентрации сведено к одномерным интегралам вдоль траектории концентрационного сигнала. Сама траектория определяется из обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка для касательной. Теория применима на расстояниях от основной области локализации примеси, значительно превышающих ее размер.

DOI: 10.31857/S0044451025060136

1. ВВЕДЕНИЕ

Существующие модели переноса примеси основаны на проведении подходящих процедур усреднения по малым и средним масштабам неоднородностей. При этом, если крупномасштабные неоднородности отсутствуют, то содержащиеся в модели характеристики среды не зависят от координат, и тогда концентрация примеси как функция координат и времени, как правило, описывается аналитическими выражениями [1–7]. Однако на практике помимо мелко- и среднемасштабных неоднородностей, определяющих выбор модели, среда обладает крупномасштабными неоднородностями, так что входящие в модель характеристики среды зависят от координат, и тогда решение задачи о переносе требует проведения трудоемких и времязатратных численных расчетов.

В работе [8] был впервые предложен асимптотический подход, применение которого для задач расчета концентрации примеси при переносе в средах с крупномасштабными неоднородностями позволяет существенно сократить объем и время вычислений. В данном подходе используется тот факт, что

на расстояниях, значительно превосходящих размер основной области локализации примеси, формирование концентрации обусловлено коротковолновой частью механизма переноса, и зависимость концентрации от расстояния представима в виде произведения убывающей экспоненты с показателем (квазиэйконалом), значительно большим единицы, и относительно медленно меняющегося предэкспоненциального множителя. Выражение для концентрации было сведено к однократным интегралам вдоль траектории концентрационного сигнала, которая определялась из вариационного принципа, приводящего к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка для единичного вектора касательной к траектории. Такой подход в теории процессов переноса по форме близок к приближению геометрической оптики в электродинамике [9] и квазиклассическому приближению в квантовой механике [10]. Отметим, что в работе [8] асимптотический подход был продемонстрирован на модели случайной адвекции, в которой реализуется супердиффузионный режим переноса. В дальнейшем [11–14], асимптотический подход был применен к задачам о классической диффузии в изотропной, анизотропной и резко контрастной среде, а также к задаче об адвекции–диффузии в изотропной среде.

* E-mail: kondrat@ibrae.ac.ru

В работе [15] установлено, что при переносе в пористой среде в дополнение к молекулярной диффузии в дисперсию примеси дают вклад мелкомасштабные пространственные флуктуации скорости просачивания влаги, причем данный вклад является анизотропным. Анизотропия соответствует типу легкая ось — вдоль скорости адвекции (средней скорости просачивания влаги). Продольная часть дисперсии, как правило, заметно превышает поперечную часть.

Отсюда возникает задача построения асимптотической теории переноса примеси на основе адвекции–диффузии в анизотропной среде с крупномасштабными неоднородностями. Именно этой задаче посвящена наша работа.

В разд. 2 сформулирована постановка задачи. Раздел 3 посвящен выводу формулы для квазиэikonала и уравнения для траектории квазилуча. В разд. 4 получено выражение для предэкспоненциального множителя. В разд. 5 дан вывод асимптотической формулы для концентрации в пространственно-временном представлении. В Заключении кратко подведены итоги работы.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Уравнение адвекции–диффузии в анизотропной среде имеет вид

$$\partial_t c(\mathbf{r}, t) + \partial_i (V^i c(\mathbf{r}, t) - D^{ij} \partial_j c(\mathbf{r}, t)) = 0, \quad (1)$$

где $\mathbf{r} = x^k$ — компоненты радиус-вектора, $k = 1, 2, 3$, $\partial_i = \partial/\partial x^i$, $D^{ij} = D^{ij}(\mathbf{r})$ — симметричный тензор дисперсии, $V^i = V^i(\mathbf{r})$ — поле скоростей адвекции. Далее мы будем придерживаться формализма криволинейной геометрии, используемого в общей теории относительности (см. [16]).

Считаем, что жидкость в среде является несжимаемой,

$$\partial_i V^i = 0. \quad (2)$$

В начальный момент времени вся примесь расположена в начале координат,

$$c(\mathbf{r}, 0) = N\delta(\mathbf{r}). \quad (3)$$

Для решения задачи перейдем в представление Лапласа,

$$c_p(\mathbf{r}) = \int_0^\infty c(\mathbf{r}, t) e^{-pt} dt,$$

в котором уравнение (1) с учетом условий (2) и (3) принимает вид

$$pc_p(\mathbf{r}) + V^i \partial_i c_p(\mathbf{r}) - \partial_i (D^{ij} \partial_j c_p(\mathbf{r})) = N\delta(\mathbf{r}). \quad (4)$$

Нас будет интересовать концентрация на асимптотически далеких расстояниях от источника примеси, когда $r' \gg R(t)$, где $R(t)$ — размер основной области ее локализации в момент времени t , а r' — расстояние от этой области до точки наблюдения $\mathbf{r}$. Тогда решение уравнения (4) удобно представить в форме [10]

$$c_p(\mathbf{r}) = A_p(\mathbf{r}) e^{-\Gamma_p(\mathbf{r})}, \quad \Gamma_p(\mathbf{r}) \gg 1. \quad (5)$$

Благодаря неравенству $\Gamma_p(\mathbf{r}) \gg 1$ возникает малый параметр

$$\xi = (|\partial_i \Gamma_p(\mathbf{r})| \min(L, r'))^{-1}, \quad \xi \ll 1. \quad (6)$$

Решение уравнения (4), выполненное в следующих двух разделах, базируется на разложении по параметру ξ .

3. КВАЗИЭЙКОНАЛ

После подстановки выражения (5) в уравнение (4) в нулевом приближении по малому параметру ξ , определенному равенством (6), приходим к уравнению в частных производных первого порядка для квазиэikonала $\Gamma_p(\mathbf{r})$:

$$p - V^i \partial_i \Gamma_p - D^{ij} (\partial_i \Gamma_p) (\partial_j \Gamma_p) = 0. \quad (7)$$

После замены

$$\partial_i \Gamma_p = \partial_i \tilde{\Gamma}_p - \frac{1}{2} D_{ik} V^k \quad (8)$$

приходим к уравнению

$$\tilde{p} - D^{ij} (\partial_i \tilde{\Gamma}_p) (\partial_j \tilde{\Gamma}_p) = 0, \quad (9)$$

где

$$\tilde{p} = p + \frac{1}{4} D_{ik} V^i V^k,$$

а тензор D_{ij} удовлетворяет равенству

$$D_{ij} D^{jk} = \delta_i^k. \quad (10)$$

Введем 3-вектор $u^i(\mathbf{r})$, касательный к траектории $x^i(s)$ концентрационного сигнала:

$$u^i = g^{ik} \partial_k \tilde{\Gamma}_p, \quad (11)$$

где определим эффективную метрику в среде как

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k. \quad (12)$$

Компоненты метрического тензора выражаются через тензор диффузии:

$$g^{ik} = \frac{D^{ik}}{\tilde{p}}, \quad g_{ik} = \tilde{p} D_{ik}. \quad (13)$$

Согласно (9), (11), (13) имеют место соотношения

$$g_{ik}u^i u^k = 1, \quad u^i = \frac{dx^i}{ds}, \quad \partial_i \tilde{\Gamma}_p = g_{ik}u^k. \quad (14)$$

В этих обозначениях выражение для квазиэйконала имеет вид

$$\Gamma_p(\mathbf{r}) = \int_0^{\mathbf{r}} ds \left(1 - \frac{1}{2} D_{ik} u^i V^k \right). \quad (15)$$

Интегрирование здесь происходит по траектории концентрационного сигнала, который находится из вариационного принципа — аналога принципа Ферма:

$$\delta \Gamma_p(\mathbf{r}) = 0. \quad (16)$$

Отсюда с учетом (8) получается уравнение для траектории:

$$g_{li} \frac{du^i}{ds} + \Gamma_{l,km} u^k u^m + \frac{1}{2} u^m \left[\frac{\partial(D_{mk}V^k)}{\partial x^l} - \frac{\partial(D_{lk}V^k)}{\partial x^m} \right] = 0. \quad (17)$$

Здесь $\Gamma_{i,km}$ — символы Кристоффеля (см. [16]), определенные равенством

$$\Gamma_{i,km} = \frac{1}{2} (\partial_k g_{mi} + \partial_m g_{ki} - \partial_i g_{km}). \quad (18)$$

Отметим, что при $D^{ik}(\mathbf{r}) \rightarrow D(\mathbf{r})\delta^{ik}$ уравнение (17) переходит в уравнение для концентрационного сигнала при адвекции-диффузии в изотропной среде [14], а при $V^i = 0$ — в соответствующее уравнение для диффузии в анизотропной среде [12].

4. ПРЕДЭКСПОНЕНТА

Подстановка выражения (5) в уравнение (4) приводит в первом порядке по малому параметру ξ к уравнению для предэкспоненты $A_p(\mathbf{r})$:

$$2g^{ij}(\partial_i A_p)(\partial_j \tilde{\Gamma}_p) + A_p(\partial_i g^{ij})(\partial_j \tilde{\Gamma}_p) + A_p g^{ij} \partial_i \partial_j \tilde{\Gamma}_p = 0. \quad (19)$$

С учетом (14) оно принимает вид

$$2 \frac{d \ln A_p}{ds} + \partial_i u^i = 0. \quad (20)$$

Его решение можно представить в форме

$$A_p(\mathbf{r}) = \frac{B_p}{\tilde{\Gamma}_p(\mathbf{r})} \exp(-H(\mathbf{r})), \quad (21)$$

где

$$H(\mathbf{r}) = \int_0^{\mathbf{r}} ds \left(\frac{1}{2} \partial_i u^i - \frac{1}{s} \right), \quad \tilde{\Gamma}_p(\mathbf{r}) = \int_0^{\mathbf{r}} ds. \quad (22)$$

Константу интегрирования B_p найдем, пользуясь тем, что на малых расстояниях от источника примеси, когда $r \ll L$, выражение для предэкспоненты должно переходить в свой эквивалент с постоянными характеристиками среды, равными своим значениям при $\mathbf{r} = 0$. Последний, $A_p(\mathbf{r})$, вычислен в Приложении. Из (22) имеем соотношения

$$H(\mathbf{r}) \ll 1, \quad \tilde{\Gamma}_p(\mathbf{r}) \cong \sqrt{D_{ik} x^i x^k}$$

при $r \ll L$.

Подставляя их в равенство (21) и приравнявая результат выражению (А.4), находим

$$B_p = \frac{N \sqrt{\tilde{p}(0)}}{4\pi \sqrt{D_0}}, \quad D_0 = \det(D^{ij}(0)). \quad (23)$$

5. КОНЦЕНТРАЦИЯ ПРИМЕСИ

Для того чтобы найти концентрацию примеси в координатно-временном представлении, необходимо подставить (15), (21), (23) в (5) и провести обратное преобразование Лапласа:

$$c(\mathbf{r}, t) = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} A_p(\mathbf{r}) \exp[pt - \Gamma_p(\mathbf{r})], \quad \text{Re } a > 0. \quad (24)$$

Поскольку $\Gamma_p(\mathbf{r}) \gg 1$, интеграл (24) вычисляется методом стационарной фазы, и тогда выражение для концентрации принимает вид

$$c(\mathbf{r}, t) = N \sqrt{\frac{\tilde{p}(0)}{D_0}} \frac{\exp[p_0 t - \Gamma_{p_0}(\mathbf{r}) - H_{p_0}(\mathbf{r})]}{\tilde{\Gamma}_{p_0}(\mathbf{r}) \sqrt{32\pi^3 |\Gamma_{p_0}^{(2)}(\mathbf{r})|}}, \quad (25)$$

где p_0 — значение переменной Лапласа в стационарной точке, которая находится из условия

$$\left. \frac{\partial \Gamma_p(\mathbf{r})}{\partial p} \right|_{p=p_0} = t, \quad (26)$$

а

$$\Gamma_{p_0}^{(2)}(\mathbf{r}) = \left. \frac{\partial^2 \Gamma_p(\mathbf{r})}{\partial p^2} \right|_{p=p_0} \quad (27)$$

— вторая производная квазиэйконала по переменной Лапласа при $p = p_0$.

При дифференцировании квазиэйконала $\Gamma_p(\mathbf{r})$ следует учитывать не только зависимость от переменной Лапласа самого подынтегрального выражения в (15), но и зависимость от нее траектории квазилуча. Однако при однократном дифференцировании по p вклад деформации контура отсутствует, так как траектория является экстремальной. Следовательно,

$$\frac{\partial \Gamma_p(\mathbf{r})}{\partial p} = \int_0^{\mathbf{r}} \frac{ds}{2\tilde{p}}. \quad (28)$$

Соответственно, уравнение (26) для p_0 приобретает следующий вид:

$$\int_0^{\mathbf{r}} \frac{ds}{2\tilde{p}} \Big|_{p=p_0} = t. \quad (29)$$

Перейдем к получению второй производной квазиэйконала по p . Аналогично [14] получим

$$\begin{aligned} \Gamma_p^{(2)}(\mathbf{r}) = & - \int_0^{\mathbf{r}} \frac{ds}{4\tilde{p}^2} + \\ & + \int_0^{\mathbf{r}} \frac{ds}{2\tilde{p}} \left(\frac{1}{2} u^m F_{lm} + g_{il} u^i u^m \partial_m (\ln \tilde{p}) - \partial_l (\ln \tilde{p}) \right) \frac{\partial \delta x^l}{\partial p}, \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$F_{lm} = \frac{\partial (D_{mk} V^k)}{\partial x^l} - \frac{\partial (D_{lk} V^k)}{\partial x^m}. \quad (31)$$

Входящая в (30) величина $\frac{\partial \delta x^m}{\partial p}$ определяется как

$$\frac{\partial \delta x^m}{\partial p} = \int_0^{\mathbf{r}} w^m(s') ds', \quad (32)$$

где

$$w^m(s) = \frac{\partial u^m}{\partial p}. \quad (33)$$

Уравнение для вектора w^m после дифференцирования уравнения (17) по переменной Лапласа выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} & g_{li} \frac{dw^i}{ds} + \frac{\partial g_{li}}{\partial p} \frac{du^i}{ds} + \\ & + 2G_{l,km} u^k w^m + \frac{\partial G_{l,km}}{\partial p} u^k u^m + \frac{1}{2} w^m F_{lm} = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Условием для исключения постоянной интегрирования является

$$\int_0^{\mathbf{r}} w^m ds = 0. \quad (35)$$

Оно вытекает из требования, чтобы при изменении переменной Лапласа конечные точки квазилуча, 0 и $\mathbf{r}$, оставались неизменными.

Подстановкой (32) в (30) получается окончательное выражение для $\frac{\partial^2 \Gamma_p(\mathbf{r})}{\partial p^2}$. Путем решения уравнений (17) и (34) с условием (35), а затем с помощью подстановки в соотношение (25) выражений (15), (22) и (30) в точке p_0 , которая находится из условия (29), приходим к окончательному выражению для концентрации в пространственно-временном представлении.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результатом работы является асимптотическая теория переноса примеси в анизотропной среде с крупномасштабными неоднородностями, когда механизмами переноса являются адвекция и диффузия. Концентрация примеси на расстояниях от основной области ее локализации, значительно больших размера этой области, представлена через интегралы вдоль линии, условно названной траекторией квазилуча. Сама траектория определяется из обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, являющегося аналогом уравнения геодезической в криволинейной геометрии.

Ожидается, что, в сравнении с прямыми численными расчетами переноса примеси в неоднородной анизотропной среде, вычисления, базирующиеся на представленной здесь асимптотической теории, потребуют значительно более короткого (на порядки величин) расчетного времени.

Отметим, что формализм криволинейной геометрии, используемый в нашей работе, вполне применим также для описания процессов адвекции–диффузии на кривых поверхностях. В этом случае будем иметь дело с двумерным криволинейным пространством.

Наряду с геологическими средами, областью приложения нашей теории может быть замагниченная плазма.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В этом разделе мы получим выражение для концентрации примеси в представлении Лапласа $\tilde{c}_p(\mathbf{r})$, которое удовлетворяет уравнению (1) с начальным условием (3) при независимых от координат тензоре диффузии и скорости адвекции, равных своим значениям при $r = 0$.

Переход в представление Фурье – Лапласа сводит задачу к алгебраическому выражению:

$$\tilde{c}_{pk} = \frac{N}{p + iV^j(0)k_j + D^{jm}(0)k_jk_m}. \quad (\text{A.1})$$

Отсюда после замены

$$k_i = q_i - \frac{i}{2}D_{ik}(0)V^k(0)$$

получаем

$$\begin{aligned} \tilde{c}_p(\mathbf{r}) = \exp \left[\frac{1}{2}D_{mn}(0)x^nV^m(0) \right] \times \\ \times \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{N \exp(iq_jx^j)}{\tilde{p}(0) + D^{jk}q_jq_k}, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

где

$$\tilde{p}(0) = p + \frac{1}{4}D_{jk}(0)V^j(0)V^k(0).$$

Интеграл в (A.2) при переходе $\tilde{p}(0) \rightarrow p$ совпадает с вычисленной в [12] концентрацией примеси при переносе посредством анизотропной диффузии в однородной среде в отсутствие адвекции. Воспользовавшись этим результатом, из (A.2) находим

$$\tilde{c}_p(\mathbf{r}) = \frac{N \exp \left[\frac{1}{2}D_{mn}(0)x^nV^m(0) - \sqrt{\tilde{p}(0)D_{ik}x^ix^k} \right]}{4\pi \sqrt{\det[D^{ij}(0)]D_{mn}(0)x^mx^n}}. \quad (\text{A.3})$$

Отсюда получается предэкспоненциальное выражение для концентрации в представлении Лапласа в задаче об адвекции–диффузии в однородной анизотропной среде:

$$\tilde{A}_p(\mathbf{r}) = \frac{N}{4\pi \sqrt{\det[D^{ij}(0)]D_{mn}(0)x^mx^n}}. \quad (\text{A.4})$$

ЛИТЕРАТУРА

1. A. M. Dykhne, I. L. Dranikov, P. S. Kondratenko, and L. V. Matveev, Phys. Rev. E **72**, 061104 (2005).

2. L. Bolshov, P. Kondratenko, L. Matveev, and K. Pruess, Vadose Zone J. **26**, 1152 (2008).

3. O. A. Dvoretckaya and P. S. Kondratenko, Phys. Rev. E **79**, 041128 (2009).

4. О. А. Дворецкая, П. С. Кондратенко, Л. В. Матвеев, ЖЭТФ **137**, 67 (2010).

5. P. S. Kondratenko and L. V. Matveev, Phys. Rev. E **83**, 021106 (2011).

6. L. A. Bolshov, P. S. Kondratenko, and L. V. Matveev, Phys. Rev. E **84**, 041140 (2011).

7. Л. А. Большов, П. С. Кондратенко, Л. В. Матвеев, УФН **189**, 691 (2019).

8. П. С. Кондратенко, Письма в ЖЭТФ **106**, 581 (2017).

9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Физматлит, Москва (2005), с. 421.

10. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика: нерелятивистская теория*, Физматлит, Москва (2004), с. 208.

11. П. С. Кондратенко, А. Л. Матвеев, ЖЭТФ **157**, 701 (2021).

12. П. С. Кондратенко, А. Л. Матвеев, Ю. Н. Обухов, ЖЭТФ **159**, 719 (2021).

13. П. С. Кондратенко, А. Л. Матвеев, ЖЭТФ **159**, 724 (2021).

14. П. С. Кондратенко, А. В. Мухаряпова, ЖЭТФ **162**, 737 (2022).

15. M. Sahimi, Rev. Mod. Phys. **65**, 1393 (1993).

16. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Физматлит, Москва (2003), с. 310.