

# САМОЗАХВАТ ЛАЗЕРНОГО СВЕТА РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ

*В. Ф. Ковалев<sup>a,b\*</sup>, В. Ю. Быченков<sup>c,b\*\*</sup>*

<sup>a</sup> *Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук  
125047, Москва, Россия*

<sup>b</sup> *Всероссийский научно-исследовательский институт автоматики им. Н. Л. Духова  
127030, Москва, Россия*

<sup>c</sup> *Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук  
119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 31 января 2025 г.,  
после переработки 31 января 2025 г.  
Принята к публикации 10 марта 2025 г.

Релятивистский самозахват (РСЗ) электромагнитного пучка в плазме — многообещающий режим устойчивого каналированного распространения лазерного света, обеспечивающий эффективное ускорение электронов, подтверждаемое численным моделированием и рядом экспериментальных фактов. Однако из-за необоснованности или незавершенности предшествующих теорий условия согласования лазерно-плазменных параметров реализации РСЗ для произвольной мощности лазерного излучения пока не получили теоретического обоснования, что сдерживает необходимость соответствующих широкомасштабных экспериментальных исследований. Представленная здесь теория преодолевает эту проблему, описывая РСЗ при учете релятивистской нелинейности массы электрона и электронной кавитации в плазме, а также формулируя условия реализации РСЗ на количественном уровне. Развитый теоретико-аналитический подход применим для широкого, практически востребованного, диапазона лазерных мощностей (интенсивностей). Он значительно расширяет недавно предложенную ультрарелятивистскую теорию на случай лазерных пучков релятивистки умеренной интенсивности, когда лазерно-плазменное согласование для РСЗ существенно меняется.

DOI: 10.31857/S004445102506001X

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Для ускорительных и вторичных радиационно-ядерных приложений, основанных на взаимодействии мощных лазерных пучков/импульсов с прозрачной плазмой, критически важной является решение проблемы устойчивого нелинейного распространения волноводного типа релятивистски интенсивного лазерного света на расстояние, много большее рэлеевской длины. Только в этом случае удастся достичь желаемых характеристик ускоряемого лазерно-иницированными полями электронного пучка: высокой энергии, большого полного заряда, малой расходимости. Это необходимо для со-

здания эффективных радиационно-ядерных источников нового типа, основанных на лазерном ускорении электронов, для многочисленных приложений (см., например, [1]). Это радиационная биология с перспективой перехода к флеш-радиотерапии, ускорение ионов, использование мощных электронных пучков для задач нагретого плотного вещества (warm dense matter, WDM), активной ядерной гамма-флуоресценции для обнаружения скрытых ядерно-опасных элементов, источники вторичного электромагнитного излучения с уникальными характеристиками, например, полупериодные (униполярные) терагерцевые импульсы с максимально возможными напряженностями поля, рентгеновские сверхтонкие пучки на бетатронном эффекте для получения изображений, включая томографические, микронного разрешения с перспективой перехода в гамма-диапазон, гамма-пучки, тормозной природы с рекордным коэффициентом конверсии и пол-

\* E-mail: vfkvvfkv@gmail.com

\*\* E-mail: bychenkovvy@lebedev.ru

ностью оптический комптоновский гамма-источник сверхвысокой яркости, например, для сильно экранированной радиографии скрытых объектов в целях досмотра/безопасности, использование сверхкоротких гамма-импульсов для изучения сверхбыстрых процессов в глубине плотного вещества, фотоядерные процессы, протекающие при облучении вещества сильнооточными лазерно-ускоренными электронными пучками, генерация нейтронов, создание электрон-позитронной плазмы рекордной плотности, лазерное получение медицинских изотопов для ПЭТ (позитронная эмиссионная томография) или ОФЭКТ (однофотонная эмиссионная компьютерная томография) и запуск мезонных фабрик, реальность которых уже подтверждена экспериментом по фотоядерному получению пионов.

К настоящему времени накоплен большой экспериментальный материал по волноводному распространению лазерных пучков/импульсов релятивистской интенсивности. В первых экспериментах [2] с истекающей из сопла газовой струей, облучаемой суб-пикосекундным лазерным импульсом тераваттной мощности при релятивистски умеренной интенсивности лазера,  $a_0 = 2.1$  ( $a_0$  — стандартная безразмерная амплитуда лазерного поля), уже отмечалось, что устойчивое каналирование реализуется при определенной фокусировке на струю относительно среза сопла, что отвечало определенной плотности струи. Это было первым экспериментальным подтверждением необходимости согласования размера пятна фокусировки при заданной интенсивности достаточно длинного лазерного импульса,  $120\lambda$  ( $\lambda$  — длина волны лазерного излучения), с плотностью образующейся плазмы, которая естественно уменьшалась с увеличением расстояния от сопла, составляя оптимальную величину  $\approx 10^{20} \text{ см}^{-3}$ . При этом регистрировалось хорошо выраженное каналированное распространение лазерного импульса с установившимся диаметром.

Формирование квазистационарного лазерно-плазменного канала, в условиях определенного согласования лазерно-плазменных параметров, для лазерных пучков малой (не релятивистской) интенсивности получило свое обоснование еще на заре становления нового научного направления — нелинейной оптики, в пионерских работах [3–5]. Тогда такой режим самофокусировки и получил название самозахвата оптического пучка. Спустя 40 лет подобное каналированное распространение ультракороткого лазерного импульса ультракороткой длительности и ультрарелятивистской интенсивности было обнаружено в численных расчетах с

использованием PIC (particle-in-cell) моделирования [6] в виде уединенной плазменной каверны с полностью эвакуированными электронами и лазерным импульсом в ее головной части. Авторы назвали такое распространение импульса режимом пузыря (bubble в [6]). Аналогичная лазерно-плазменная структура для импульса большей длительности с каналированно распространяющейся каверной, полностью заполненной лазерным светом, была обнаружена позднее, в работе [7], и в отличие от пузыря [6] была названа лазерной пулей (laser bullet в [8]). Тогда же [8] стало понятно, что физическая сущность таких образований аналогична самозахвату слабых импульсов [3–5], но в условиях сильной релятивистской нелинейности лазерно-плазменного взаимодействия. Поэтому образование таких уединенных структур было названо релятивистским самозахватом (РСЗ) лазерного света [8], предельные реализации которого проявляются как режимы пузыря [6] или лазерной пули [7, 8].

Формирование стабильного волноводного канала, в котором на расстояние, много большее рэлеевской длины, распространяется лазерная пуля, является определяющим для эффективного ускорения электронов и получения достаточно большого полного заряда ускоренных частиц. Сообразующиеся с этим недавние исследования [9–11] подтверждают соответствие полученных результатов выявленным в [8] свойствам РСЗ, демонстрируя расширяющийся устойчивый интерес к обсуждаемому режиму распространения лазерных импульсов, прежде всего, благодаря эффективности последнего для различных радиационно-ядерных приложений.

Из анализа большого числа экспериментов по ускорению [12] был установлен факт уменьшения размера фокального пятна с увеличением необходимой, для эффективного ускорения электронов, плотности плазмы для широкого диапазона размеров пятна (3–50 мкм) и электронных плотностей ( $10^{18}$ – $10^{20} \text{ см}^{-3}$ ). Устойчивое каналирование лазерных импульсов отмечается и для современных короткоимпульсных (фемтосекундных) лазеров мощностью в сотни ТВт. Например, благодаря этому в экспериментах по лазерному ускорению регистрировались электронные пучки, ускоренные до энергий, превосходящих 1 ГэВ, с зарядом до 0.3 нКл при фокусировке 110 ТВт [13] и 240 ТВт [14] лазерных импульсов на газовую плазму с плотностью  $\gtrsim 10^{18} \text{ см}^{-3}$  в FWHM-пятно порядка 10 мкм.

Проведенное в последние годы численное 3D-моделирование, подтвержденное результатами различных групп, показало, что волноводный ре-

жим распространения релятивистских лазерных импульсов — релятивистский самозахват, подобно самозахвату нерелятивистских лазерных пучков, характеризуется согласованием поперечного размера  $D$  каверны, в которой локализовано лазерное излучение, с плотностью плазмы и мощностью лазерного импульса (см., например, [7, 14–18]). В настоящее время с некоторой долей неопределенности принимается, что такое согласование может быть качественно представлено в виде следующего соотношения:

$$D \simeq \alpha \frac{c}{\omega_p} \sqrt{a_0} = \alpha \frac{c}{\omega} \sqrt{a_0 \frac{n_c}{n_{e0}}} \propto I_0^{1/4} n_{e0}^{-1/2}, \quad (1)$$

имеющего место в сильно релятивистском случае,  $a_0 \gg 1$ , где  $\omega_p$  — электронная плазменная частота,  $n_c$  — критическая плотность плазмы,  $\alpha$  — численный коэффициент порядка единицы, который может различаться от одного численного моделирования к другому. Таким образом, для заданных значений интенсивности лазерного поля ( $I_0$ ) и электронной плотности плазмы ( $n_{e0}$ ) стабильному распространению света отвечает определенный диаметр каверны (1).

Очевидно, что теоретическое обоснование соотношения (1) было крайне востребовано уже с конца 1990-х годов, со времени начала проведения экспериментов по нелинейному распространению релятивистски интенсивных лазерных импульсов в плазме. Однако теоретический подход на основе решения нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) [19], включающего основные физические релятивистские нелинейности, не подтверждал скейлинг (1), демонстрируя существенно более медленное увеличение диаметра канала с ростом амплитуды лазерного поля. До недавнего времени такой подход был единственной «прозрачной» теорией с очевидными основными нелинейностями, и это вносило дополнительную интригу — может ли адекватная теория преодолеть такое разногласие. И только сейчас появилось убедительное аналитическое доказательство скейлинга (1), представленное в нашей работе [20] для ультрарелятивистского предела по интенсивности лазерного пучка,  $a_0 \gg \gg 1$ , или, что то же самое, на языке лазерной мощности  $P$ , захваченной в канал,  $P/P_{cr} \gg 1$ , где  $P_{cr}$  — критическая для самозахвата мощность. Отметим также, что авторы работы [21] на основе численных моделей НУШ и РСЗ с использованием мощности вместо амплитуды лазерного поля для лазерно-плазменного самосогласования (1) пришли к скейлингу

$$D(\omega_p/c) \propto (P/P_{cr})^{1/4.383}.$$

Если сравнить его с аналитически полученным в [20]  $(P/P_{cr})^{1/6}$ , естественно возникают вопросы: является ли этот результат неточным или он ограничен по диапазону мощности. Ответы на эти вопросы до сих пор не даны и, очевидно, должны быть получены.

Следующим шагом в развитии теории [20] является обобщение полученного условия реализации РСЗ в ультрарелятивистском пределе на случай произвольной амплитуды (мощности) лазерного пучка. Этому посвящена настоящая работа. Она содержит 6 разделов. Раздел 2 посвящен формулировке исходных уравнений теории, используемых для описания пространственной волноводной структуры стационарного циркулярно поляризованного лазерного пучка в модели НУШ с релятивистской нелинейностью, описывающей релятивистское утяжеление электронов и электронную кавитацию. В разд. 3 эти уравнения анализируются для наиболее простой математической модели плоского (щелевого) пучка, для которого решение для лазерно-плазменного канала может быть записано в аналитическом виде. Такое упрощение закладывает понимание РСЗ в более сложной цилиндрической геометрии и может служить качественной проверкой результатов последней, анализируемой в разд. 4, где нахождение решения выполнено как численно, так и приближенно аналитически. Из таких численных и приближенных аналитических решений, описывающих пространственную структуру лазерного пучка, найдены глобальные (интегральные) характеристики РСЗ, такие как полная мощность лазерного пучка и характерный поперечный размер светового канала для лазерных интенсивностей от нерелятивистских до ультрарелятивистских значений. Получены также распределения плотности электронов плазмы, позволяющие оценить характерный размер плазменной каверны и получить теоретико-аналитическое обобщение формулы (1). Раздел 5 посвящен обсуждению полученных результатов. Итоги исследования подведены в последнем разделе.

## 2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Строгое обоснование условия (1) можно получить из детального исследования аналитического самофокусировочного решения волноводного типа, названного самозахватом волнового пучка (см. [3–5]), которое получается из нелинейного уравнения Шредингера с релятивистской нелинейностью

$$2ik\partial_z E + \Delta_{\perp} E + k^2 \frac{\epsilon_2}{\epsilon_0} E = 0, \quad (2)$$

$$E(0, \mathbf{r}) = E(\mathbf{r}),$$

для медленно меняющейся в направлении распространения  $z$  комплексной амплитуды электрического поля  $E(z, \mathbf{r})$  электромагнитной (лазерной) волны с частотой  $\omega$ . Уравнение (2) соответствует квазиоптическому приближению, описывающему стационарную (по времени) структуру волнового пучка, где  $k = (\omega/c)\sqrt{\epsilon_0}$  — волновое число электромагнитной волны,  $\Delta_{\perp}$  — оператор Лапласа в плоскости  $\mathbf{r}_{\perp}$ , перпендикулярной оси пучка  $z$ ,  $\epsilon_0 = 1 - 4\pi e^2 n_{e0}/(m_e \omega^2)$  — линейная диэлектрическая проницаемость плазмы,  $\epsilon_2$  — действительная часть нелинейной диэлектрической проницаемости плазмы. Строгий подход с использованием (2) позволяет найти пространственные распределения комплексной амплитуды электрического поля для произвольного значения параметра релятивизма от нерелятивистских,  $a_0 \ll 1$ , до ультрарелятивистских,  $a_0 \gg 1$ , значений.

В данной работе проводятся теоретические исследования НУШ с релятивистской нелинейностью (2) для широко известного закона нелинейного преломления релятивистски интенсивного светового пучка, заданного следующей функцией  $\epsilon_2$  в (2):

$$\epsilon_2 = \epsilon_0 \frac{k_p^2}{k^2} \left( 1 - \frac{n_e}{\gamma n_{e0}} \right), \quad (3)$$

$$k_p = \left( \frac{4\pi e^2 n_{e0}}{m_e c^2} \right)^{1/2} \equiv \frac{\omega_p}{c}.$$

Здесь учтены два вклада: во-первых, это релятивистская нелинейность массы электрона, определяемая значением релятивистского фактора для циркулярно поляризованного аксиально-симметричного пучка в цилиндрической геометрии  $\gamma = \sqrt{1 + |E/E_{rel}|^2}$ , где  $E_{rel}^2 = (\omega c m_e / e)^2$ , и, во-вторых, пондеромоторная нелинейность, связанная с нелинейной деформацией электронной плотности  $n_e = n_{e0} N_e(\gamma)$ , пропорциональной  $\Delta_{\perp} \gamma$  (релятивистская стрикция). В наиболее распространенном и обсуждаемом здесь случае осесимметричного пучка комплексная амплитуда электрического поля пучка  $E$  зависит от координаты  $z$  вдоль оси пучка и поперечной координаты  $r_{\perp} = r$ , т.е.  $E = E(z, r)$ . Выделяя в  $E$  вещественные амплитуду,  $A(r)$ , и линейную по продольной координате фазу, т.е.  $E = A \exp(i\nu z/2)$ , получим уравнение, определяющее зависимость  $A$  от поперечной координаты:

$$\frac{\Delta_{\perp} a}{a} + 1 - \nu - \frac{N_e(\gamma)}{\gamma} = 0, \quad (4)$$

$$\Delta_{\perp} = \partial_{rr} + \frac{1}{r} \partial_r.$$

Здесь и ниже используются безразмерная поперечная координата  $r$ , нормированная на  $k_p^{-1}$ , безразмерная положительная постоянная распространения  $\nu > 0$ , нормированная на  $k_p^2/k$ , и стандартная безразмерная амплитуда поля  $a = eA/m_e \omega c$ , с помощью которой релятивистский фактор записывается как  $\gamma = \sqrt{1 + a^2}$ . Вид решения уравнения (4) существенным образом зависит от формы функции  $N_e(\gamma)$  и от постоянной распространения  $\nu < 1$ , которая определяет нелинейную фазовую скорость электромагнитной волны, т.е. зависит от амплитуды  $a_0$ .

В наиболее упрощенной модели для  $N_e$  используется следующее выражение [22–24]:

$$N_e = 1 + \Delta_{\perp} \gamma, \quad (5)$$

которое дополняется естественным условием неотрицательности электронной плотности,  $n_e \geq 0$ . Для самозахватных решений с монотонно убывающей с ростом  $r$  величиной  $\gamma$  это условие нарушается уже при умеренном релятивизме, когда максимальное значение  $\gamma$  на оси пучка  $\gamma_0 = \gamma(r = 0)$  превышает значение  $\gamma_0^{cyl} \approx 1.72$  для цилиндрического пучка. В условиях более сильной релятивистской стрикции,  $\gamma_0 > \gamma_0^{cyl}$ , когда условие  $n_e \geq 0$  оказывается нарушенным, по крайней мере в ограниченной области локализации пучка, требуется более аккуратное описание сильной деформации плотности, включая эффект электронной кавитации [25, 26]. Развитием модели (5) является дополнительное условие  $N_e = 0$  при нарушении неравенства  $n_e \geq 0$ . Для локализованного лазерного пучка с монотонным пространственным распределением интенсивности это означает формальное разбиение области существования решения на две подобласти, в одной из которых плотность электронов положительна,  $N_e = 1 + \Delta_{\perp} \gamma > 0$ , а в другой электроны полностью отсутствуют (зона полной кавитации) и  $N_e \equiv 0$  в (4). Этому соответствует выражение для нелинейной диэлектрической проницаемости в виде кусочно-гладкой функции, что приводит к необходимости строить решение искомой задачи кусочно-непрерывным способом, сшивая решения в различных областях, например, так, как это сделано в работах [27, 28]. При этом очевидным с физической точки зрения является дополнительное условие сохранения полного заряда, т.е. совпадение числа

электронов, «выдавленных» лазерным излучением из области кавитации, с числом электронов вне зоны кавитации. Анализ решения уравнения (4), отвечающего РСЗ лазерного пучка, обсуждается в двух следующих разделах.

### 3. САМОЗАХВАТ ЩЕЛЕВОГО ЛАЗЕРНОГО ПУЧКА

Рассматриваемый в этом разделе режим РСЗ для щелевого лазерного пучка представляет интерес в первую очередь для прогнозирования результатов численно-аналитического исследования РСЗ для цилиндрического пучка, приведенного в разд. 4. Достоинство этого анализа заключается в возможности записать решение нелинейного уравнения для электромагнитного поля пучка в явном, аналитическом виде, что существенно упрощает получение формул для характерного размера  $x_L$  лазерного пучка и его полной погонной мощности  $P_{pl}$ .

#### 3.1. Пространственная структура электрического поля щелевого пучка и плотности электронов

Исходным уравнением для анализа структуры электрического поля служит уравнение (4), в котором роль поперечной координаты играет  $x$  вместо  $r$ , а оператор Лапласа по поперечной координате меняется на  $\partial_{xx}$ . При этом мы по-прежнему будем использовать безразмерную амплитуду  $a$ , помня, однако, что для плоской геометрии величина  $a_{pl} = eA/\sqrt{2}m_e\omega c$  оказывается в  $\sqrt{2}$  раз меньше, чем для цилиндрической, а релятивистский фактор по-прежнему имеет вид  $\gamma = \sqrt{1 + a_{pl}^2}$  [25]. Соответственно, уравнение (4) переписывается в виде

$$(\partial_{xx}a_{pl})/a_{pl} + 1 - \nu - N_e(\gamma)/\gamma = 0. \quad (6)$$

Далее в этом разделе нижний индекс « $pl$ » у амплитуды  $a$  мы опускаем.

Рассмотрим вначале структуру самозахватных решений для щелевого пучка при наличии зоны полной кавитации, которая возникает уже при умеренном релятивизме, когда максимальное значение  $\gamma$  на оси пучка,  $\gamma = \gamma_0$ , превышает  $\gamma^{pl} = 2$ . Это означает, как уже отмечалось выше, что область существования решения формально разбивается на две под-области, в одной из которых плотность электронов положительна,  $N_e > 0$ , а в другой электроны отсутствуют (зона полной кавитации) и  $N_e \equiv 0$ .

В зоне полной кавитации, где  $N_e \equiv 0$ , для об-суждаемого здесь щелевого пучка локализованное в пространстве и симметричное относительно замены  $x \rightarrow -x$  решение уравнения (6) с максимумом амплитуды  $a$  на оси пучка в переменных  $\{\xi, \gamma\}$ , где в этом разделе  $\xi = \sqrt{2/(\Gamma + 1)}x$ , имеет вид<sup>1)</sup>

$$\gamma^2 = 1 + (\gamma_0^2 - 1) \cos^2 \xi, \quad 0 < \xi < \xi_{cav}. \quad (7)$$

В области, где нет полной кавитации,  $x > x_{cav}$ , при подстановке в (6) выражения (5) для  $N_e$  и использовании переменной  $\gamma = \text{ch } u$  уравнение (6) принимает вид

$$\begin{aligned} \partial_{\xi\xi} u + \text{sh } u [\text{ch } u - (\Gamma + 1)/2] &= 0, \\ u(\xi)|_{\xi \rightarrow \infty} = \partial_{\xi} u(\xi)|_{\xi \rightarrow \infty} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнение (8) имеет первый интеграл,

$$(\partial_{\xi} u)^2 + \text{ch}^2 u - (\Gamma + 1) \text{ch } u + \Gamma = 0, \quad (9)$$

с помощью которого решение уравнения (8) при  $\xi > \xi_{cav}$  записывается в форме

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\text{ch}^2 \Psi + \nu}{\text{ch}^2 \Psi - \nu}, \\ \Psi &= y - y_{cav} + \Psi_0, \quad y = \sqrt{\frac{\Gamma - 1}{2}} \xi, \\ \Psi_0 &= \text{Arcth} \left[ \sqrt{\frac{2}{\Gamma - 1}} \sqrt{\frac{\Gamma - \gamma_{cav}}{\gamma_{cav} + 1}} \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Полное решение уравнения (6) получается сращиванием на границе области полной кавитации  $x = x_{cav}$  аналитических решений (7) и (10) с соблюдением условия непрерывности решения и его производной, что дает два соотношения, определяющих связь  $\xi_{cav}$  и  $\gamma_0$  с  $\gamma_{cav}$  и  $\Gamma$ :

$$\begin{aligned} \text{tg } \xi_{cav} &= \gamma_{cav} \sqrt{(\Gamma - \gamma_{cav})/(\gamma_{cav} + 1)}, \\ \gamma_{cav}^2 - 1 &= (\gamma_0^2 - 1) \cos^2 \xi_{cav}. \end{aligned} \quad (11)$$

В качестве точки сшивки решений выбирается граница зоны полной кавитации, положение которой соответствует выполнению условия баланса для числа электронов, эвакуированных из канала во внешнюю область,

$$Q^{pl} \equiv 2 \int_0^{\infty} (N_e(\gamma) - 1) dx = 0. \quad (12)$$

<sup>1)</sup> Здесь и ниже в этом разделе, принимая во внимание симметрию решения, мы будем рассматривать только неотрицательные значения  $x$ .

При вычислении интеграла (12) удобно рассмотреть отдельно вклад от области полной кавитации, где  $N_e \equiv 0$ , и вклад от внешней области, где  $N_e$  определена формулой (5). Тогда из (12) с учетом (5) получается соотношение между координатой границы зоны полной кавитации и производной релятивистского фактора в этой же точке,

$$\{1 + (2/(\Gamma + 1))(1/\xi)\partial_\xi\gamma\}_{|\xi=\xi_{cav}} = 0.$$

Это условие дает дополнительное соотношение, связывающее  $\xi_{cav}$  с параметром  $\Gamma$  и  $\gamma_{cav}$ :

$$\xi_{cav} = \frac{2}{\Gamma + 1}(\gamma_{cav} - 1) \times \sqrt{(\gamma_{cav} + 1)(\Gamma - \gamma_{cav})}. \quad (13)$$

Комбинируя (11) и (13), перепишем формулы для  $\gamma_{cav}$ ,  $\Gamma$  и  $\gamma_0$  в виде функции только одной переменной  $\xi_{cav}$ :

$$\begin{aligned} \gamma_{cav} &= \frac{\text{tg } \xi_{cav}}{2 \text{tg } \xi_{cav} - \xi_{cav}} \left(1 + \sqrt{1 + \xi_{cav}(2 \text{tg } \xi_{cav} - \xi_{cav})}\right), \\ \Gamma &= \gamma_{cav} + (\gamma_{cav} + 1)\gamma_{cav}^{-2} \text{tg}^2 \xi_{cav}, \\ \gamma_0 &= \sqrt{1 + (\gamma_{cav}^2 - 1) \cos^{-2} \xi_{cav}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Отличие плоской геометрии от цилиндрической, обсуждаемой в разд. 4, проявляется в том, что для цилиндрического пучка аналитическое решение вне зоны полной кавитации отсутствует и соотношение между  $\Gamma$  и  $\xi_{cav}$  находится с помощью численного моделирования, в то время как в плоской геометрии формулы (14) позволяют легко построить зависимости  $\Gamma(\xi_{cav})$ ,  $\gamma(\xi_{cav})$  и  $a_0(\xi_{cav})$ , приведенные на рис. 1. Полученные формулы (7), (10) и (14) определяют пространственную структуру плоского щелевого релятивистского лазерного пучка в самозахватном режиме при умеренном и сильном релятивизме,  $\gamma_0 > 2$ . В заключение, используя (5), запишем выражение для вычисления плотности электронов  $N_e$ ,

$$N_e = \frac{\gamma}{\Gamma + 1} [-4\gamma^2 + 3(\Gamma + 1)\gamma - 2(\Gamma - 1)], \quad (15)$$

которое при наличии зоны полной кавитации следует применять совместно с (10). Построенные с использованием формул (7), (10), (14) и (15) графики пространственного распределения амплитуды электрического поля пучка  $a$  и плотности электронов  $N_e$  в зависимости от поперечной координаты  $x$  приведены на рис. 2 для сильного релятивизма ( $a_0^2 \gg 1$ ) и на рис. 3 для умеренного ( $3 < a_0^2 \lesssim 10$ ) релятивизма лазерного пучка.

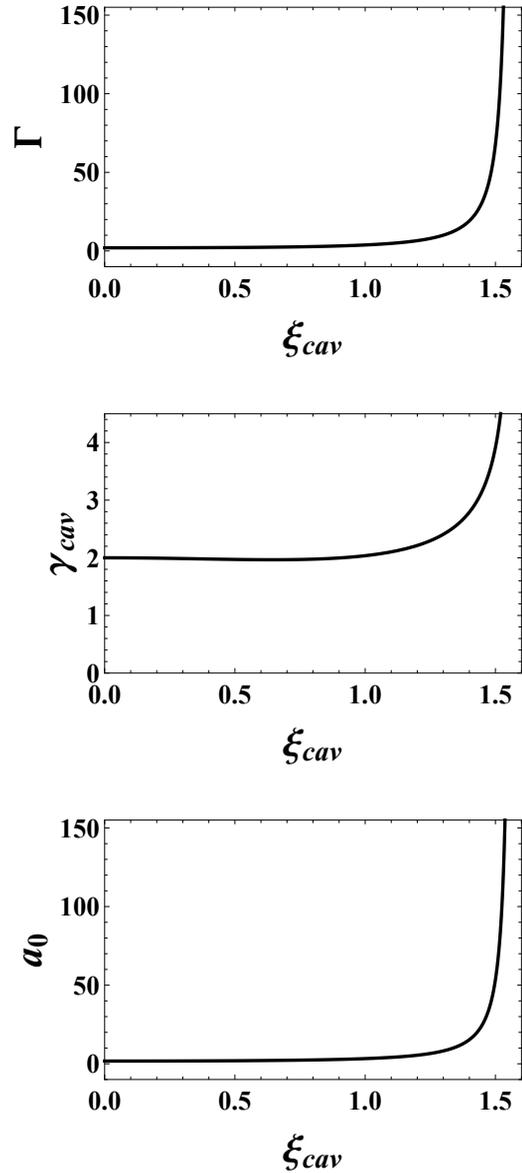


Рис. 1. Зависимости  $\Gamma$  (вверху),  $\gamma_{cav}$  (посередине) и  $a_0$  (внизу) от координаты  $\xi_{cav}$

В случае слабого релятивизма пучка,  $a_0^2 \leq 3$ , когда не существует области полной кавитации, пространственное распределение амплитуды электрического поля щелевого пучка по поперечной координате  $x$  находится решением уравнения (8) во всей области изменения поперечной координаты  $0 \leq \xi \leq \infty$  с дополнительным граничным условием равенства нулю производной  $\partial_\xi u$  на оси пучка  $x = 0$ , при этом значение функции  $u$  на оси пучка оказывается конечным и отличным от нуля, т. е.

$$u_0 = \text{Arcch } \gamma_0.$$

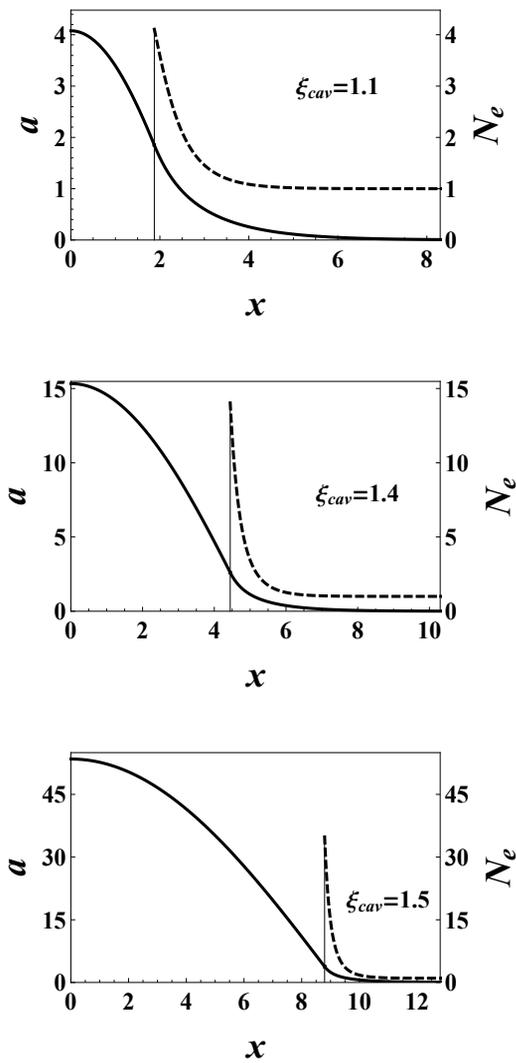


Рис. 2. Профили безразмерной амплитуды щелевого лазерного пучка  $a$  (сплошные кривые) и безразмерной плотности электронов плазмы  $N_e$  (штриховые) для различных значений  $\xi_{cav} = 1.1; 1.4; 1.5$

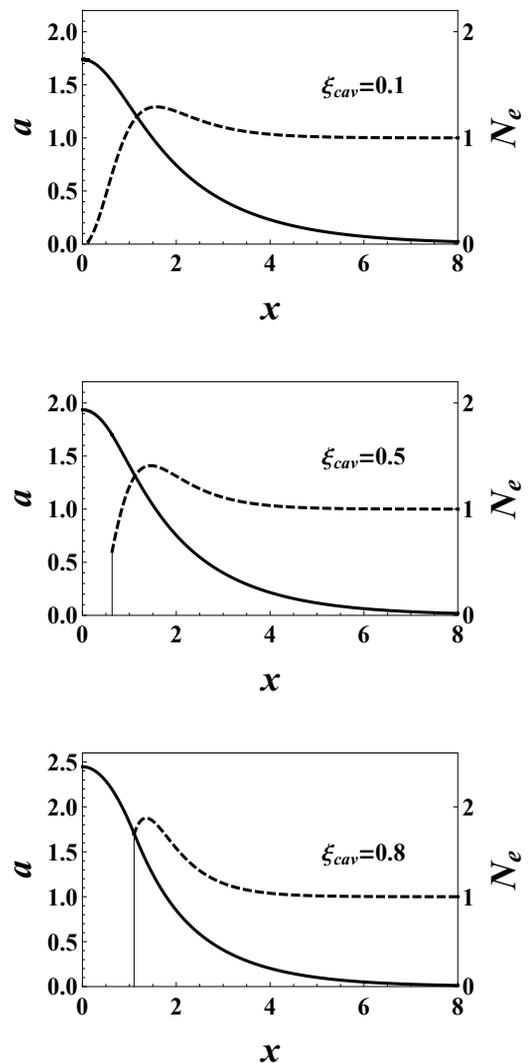


Рис. 3. Профили безразмерной амплитуды щелевого лазерного пучка  $a$  (сплошные кривые) и безразмерной плотности электронов плазмы  $N_e$  (штриховые) для различных значений  $\xi_{cav} = 0.1; 0.5; 0.8$

Проверка этого условия на выражении для первого интеграла (9) дает  $\gamma_0 = \Gamma$ . Таким образом, решение уравнения (8) для слабого и умеренного релятивизма,  $\gamma_0 \leq 2$ , имеет более простой вид (см., например, [29]), который следует из (10), если в нем положить  $\xi_{cav} = y_{cav} = 0$  и  $\Gamma = \gamma_0 = \gamma_{cav}$ :

$$\gamma = \frac{\text{ch}^2 y + \nu}{\text{ch}^2 y - \nu}, \tag{16}$$

$$y = x\sqrt{\nu}, \quad 0 \leq y \leq \infty.$$

Построенные с использованием формул (16) и (15) графики пространственного распределения ам-

плитуды электрического поля пучка  $a$  и плотности электронов  $N_e$  в зависимости от поперечной координаты  $x$  приведены на рис. 4 для слабого ( $a_0^2 \leq 3$ ) релятивизма пучка.

При исчезающе слабом релятивизме,  $\nu \ll 1$  и  $\gamma \rightarrow 1$ , решение (16) переходит в самозахватное (солитонное) решение Таланова [3] для среды с кубичной нелинейностью,  $a(x) = 2\sqrt{\nu}/\text{ch}(x\sqrt{\nu})$ , для которого характерный пространственный масштаб обратно пропорционален амплитуде солитона. С ростом релятивизма пучка прослеживается формирование пика электронной плотности на границе области локализации лазерного пучка.

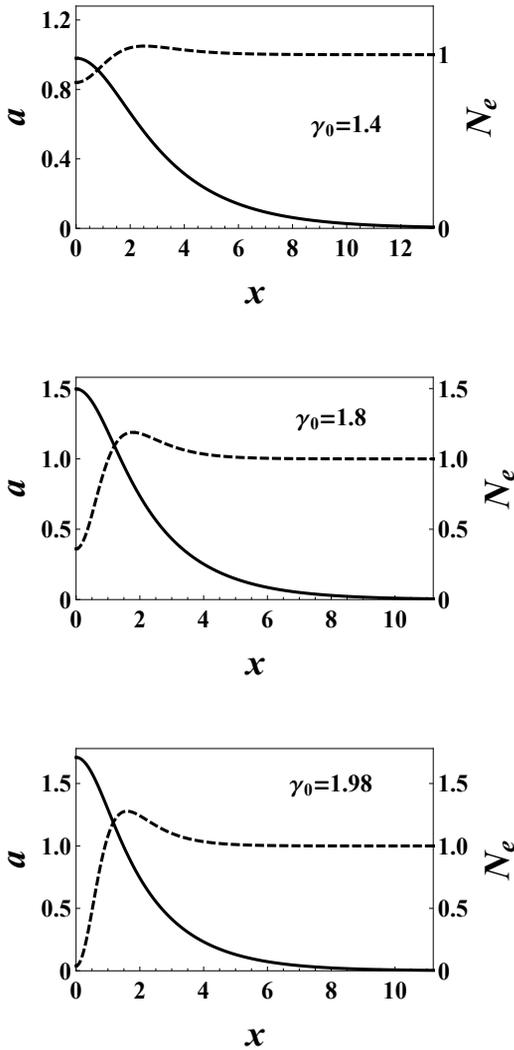


Рис. 4. Профили безразмерной амплитуды щелевого лазерного пучка  $a$  (сплошные кривые) и безразмерной плотности электронов плазмы  $N_e$  (штриховые) для различных значений  $\gamma_0 = 1.4; 1.8; 1.98$

### 3.2. Интегральные характеристики щелевого пучка

Полученные в разд. 3.1 формулы для пространственного распределения амплитуды  $a$  позволяют вычислить зависимость средней безразмерной полуширины лазерного пучка,  $x_L$ , и границы зоны полной кавитации,  $x_{cav}$ , от максимальной амплитуды лазерного поля и безразмерной мощности лазерного пучка. Для щелевого лазерного пучка безразмерная величина полной погонной мощности  $P_{pl}$  и средняя полуширина  $x_L$  определяются соотношениями

$$P_{pl} = 2 \int_0^\infty I dx, \quad x_L^2 = (2/P_{pl}) \int_0^\infty x^2 I dx, \quad (17)$$

где  $I = \gamma^2 - 1$  — безразмерная интенсивность лазерного пучка.

При умеренном и сильном релятивизме, при наличии зоны полной кавитации область интегрирования разбивается на две подобласти: от нуля до  $x_{cav}$  и от  $x_{cav}$  до бесконечности. Переходя затем от интегрирования по поперечной координате  $x$  к интегрированию по  $\xi$ , запишем выражения для полной мощности и квадрата полуширины самозахватного пучка в следующем виде:

$$P_{pl} = \sqrt{\frac{\Gamma + 1}{2}} p_0, \quad x_L^2 = \frac{\Gamma + 1}{2} \frac{p_2}{p_0}, \quad (18)$$

$$p_0 \equiv p_{0,in} + p_{0,out}, \quad p_2 \equiv p_{2,in} + p_{2,out},$$

$$p_{0,in} = 2 \int_0^{\xi_{cav}} (\gamma^2 - 1) d\xi, \quad p_{0,out} = 2 \int_{\xi_{cav}}^\infty (\gamma^2 - 1) d\xi,$$

$$p_{2,in} = 2 \int_0^{\xi_{cav}} \xi^2 (\gamma^2 - 1) d\xi, \quad p_{2,out} = 2 \int_{\xi_{cav}}^\infty \xi^2 (\gamma^2 - 1) d\xi.$$

Формулы (17), (18) применимы как при слабом, так и при сильном релятивизме, с учетом того, что в отсутствие области полной кавитации в (17) надо оставить лишь вклад от «внешней» области, т. е. полагать  $\xi_{cav} = 0$ . Что касается режима сильного релятивизма, то, используя решение (7) в области полной кавитации, формулы для  $p_{0,in}$  и  $p_{2,in}$  можно записать в виде

$$p_{0,in} = \frac{a_0^2}{2} (2\xi_{cav} + \sin(2\xi_{cav})), \quad a_0^2 \gg 1, \\ p_{2,in} = a_0^2 \left( \sin(2\xi_{cav}) \left( \frac{\xi_{cav}^2}{2} - \frac{1}{4} \right) + \frac{\xi_{cav}}{2} \cos(2\xi_{cav}) + \frac{\xi_{cav}^3}{3} \right). \quad (19)$$

Аналогичным образом, используя решение (10) вне области полной кавитации, можно получить формулы для  $p_{0,out}$  и  $p_{2,out}$ . При этом, если формула для  $p_{0,out}$  имеет простой вид,

$$p_{0,out} = 2\sqrt{2(\Gamma - 1)} - 2\sqrt{(\gamma_{cav} + 1)(\Gamma - \gamma_{cav})} + 2(\Gamma + 1) \left( \arcsin \sqrt{\frac{\Gamma - 1}{\Gamma + 1}} - \arcsin \sqrt{\frac{\Gamma - \gamma_{cav}}{\Gamma + 1}} \right), \quad (20)$$

то аналитические формулы для интеграла  $p_{2,out}$ ,

$$p_{2,out} = \left(\frac{8}{\Gamma - 1}\right)^{3/2} \int_{\Psi_0}^{\infty} d\Psi \frac{(\Psi + y_{cav} - \Psi_0)^2 \nu \text{ch}^2 \Psi}{(\text{ch}^2 \Psi - \nu)^2}, \quad (21)$$

представляют сложную длинную комбинацию логарифмических, тригонометрических и гиперболических функций и полилогарифмов. Поэтому для численных расчетов удобнее интегрирование по  $\xi$  заменить интегрированием по релятивистскому фактору  $\gamma$ , что дает еще одно представление для интеграла  $p_{2,out}$ ,

$$p_{2,out} = \frac{4}{\Gamma - 1} \int_1^{\gamma_{cav}} d\gamma \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\Gamma - \gamma}} \ln^2 \left| \frac{\sqrt{\gamma_{cav} - 1}}{\sqrt{\gamma - 1}} e^{y_{cav}} \times \frac{\sqrt{2(\Gamma - \gamma)} + \sqrt{(\Gamma - 1)(\gamma + 1)}}{\sqrt{2(\Gamma - \gamma_{cav})} + \sqrt{(\Gamma - 1)(\gamma_{cav} + 1)}} \right|. \quad (22)$$

Полученные формулы упрощаются в двух предельных случаях: во-первых, при сильном релятивизме лазерного пучка,  $a_0^2 \gg 1$ , когда основной вклад в интегралы  $p_0$  и  $p_2$  вносит область полной кавитации и вкладом  $p_{0,out}$  и  $p_{2,out}$  в  $p_0$  и  $p_2$  можно пренебречь, т.е. считать  $p_0 \approx p_{0,in}$  и  $p_2 \approx p_{2,in}$  из (19), и во-вторых, в обратном пределе при слабом и умеренном релятивизме,  $a_0^2 < 3$ , когда вклады, пропорциональные  $p_{0,in}$  и  $p_{2,in}$ , обращаются в нуль, формально это соответствует выбору  $\gamma_{cav} = \Gamma = \gamma_0$  и  $\xi_{cav} = y_{cav} = 0$  в (19), (20):

$$p_0 = 2\sqrt{2(\Gamma - 1)} + 2(\Gamma + 1) \arcsin \sqrt{\frac{\Gamma - 1}{\Gamma + 1}}, \quad \gamma < 2, \\ p_2 = \frac{4}{\Gamma - 1} \int_1^{\Gamma} d\gamma \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\Gamma - \gamma}} \times \ln^2 \left| \frac{\sqrt{2(\Gamma - \gamma)} + \sqrt{(\Gamma - 1)(\gamma + 1)}}{\sqrt{(\gamma - 1)(\Gamma + 1)}} \right|. \quad (23)$$

В пределе  $\Gamma \rightarrow 1$ , т.е. при малой интенсивности пучка  $a_0^2 \ll 1$ , из формул (17) и (23) следует простая связь между полной мощностью пучка  $P_{pl}$ , его амплитудой  $a_0$  и полушириной  $x_L$ :

$$x_L \approx \pi/\sqrt{3}a_0 \approx 4\pi/\sqrt{3}P_{pl}, \quad a_0^2 \ll 1. \quad (24)$$

Отсюда, в частности, следует соотношение, имеющее «наглядный» физический смысл,

$$P_{pl} \approx (4\sqrt{3}/\pi) a_0^2 x_L \approx 2.20532 a_0^2 x_L, \quad a_0^2 \ll 1. \quad (25)$$

Эти результаты также легко воспроизводятся при прямой подстановке в (17) солитонного решения Таганова [3], приведенного в конце разд. 3.1.

При  $a_0^2 \gg 1$ , в пределе  $\xi_{cav} \rightarrow \pi/2$  из (18) и (19) можно получить простые асимптотические соотношения между полушириной  $x_L$  лазерного пучка, максимальной амплитудой  $a_0$  его электрического поля и полной мощностью  $P_{pl}$  при сильном релятивизме лазерного пучка:

$$x_L \approx \sqrt{\frac{\pi^2 - 6}{6\pi}} a_0^{1/2} \approx \sqrt{\frac{\pi^2 - 6}{6\pi}} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{0.1} P_{pl}^{1/5}, \quad a_0^2 \gg 1. \quad (26)$$

Из этой цепочки равенств можно получить численный коэффициент в «эвристической» оценке  $P_{pl} \sim a_0^2 x_L$ , а именно,

$$P_{pl} \approx a_0^2 x_{cav} \approx \sqrt{\frac{3\pi^2}{\pi^2 - 6}} a_0^2 x_L \approx 2.766 a_0^2 x_L. \quad (27)$$

Исходя из формул (17)–(23), можно построить зависимости полуширины  $x_L$  лазерного пучка и границы зоны полной кавитации  $x_{cav}$  от его полной мощности  $P_{pl}$  и амплитуды на оси  $a_0$  в широком диапазоне их изменения. На рис. 5, 6 приведены графики этих зависимостей.

В размерных переменных нормированная на величину  $k_p$  погонная мощность плоского (щелевого) пучка записывается в виде

$$k_p^{-1} P^{pl} = \frac{m_e^2 c^5}{2\pi e^2} \frac{n_{cr}}{n_e} P_{pl} \approx 1.386 \frac{n_{cr}}{n_e} P_{pl} \text{ [ГВт]}. \quad (28)$$

Используя выражения для плотности (15), можно ввести понятие полуширины плазменного канала  $x_{pl}$ , которая определяется как конечное значение координаты  $x$  (отличной от  $x = \infty$ ), при которой плотность электронов равна невозмущенному значению  $N_{e,pl} = N_{e0} = 1$ . Подстановка  $N_{e,pl} = 1$  в (15) дает кубическое уравнение для величины  $\gamma(x_{pl}) \equiv \gamma_{pl}$ ,

$$\Gamma + 1 + 4\gamma_{pl}^3 - 3(\Gamma + 1)\gamma_{pl}^2 + 2(\Gamma - 1)\gamma_{pl} = 0, \quad (29)$$

а значит, с учетом (10) и (16), и значение  $x_{pl}$ . В пределе слабого релятивизма,  $\Gamma \rightarrow 1$ , можно записать простые асимптотические формулы для  $\gamma_{pl}$  и для квадрата полуширины плазменного канала  $x_{pl}^2$ :

$$\gamma_{pl,as} \approx 1 + \frac{2}{3}(\Gamma - 1), \quad x_{pl,as}^2 \approx \frac{1}{\Gamma - 1}. \quad (30)$$

Обратим внимание, что при  $\Gamma \rightarrow 1$  зависимости  $x_L$  и  $x_{pl}$  от  $\Gamma$ , согласно формулам (24) и (30), различаются только множителем  $(x_{pl}/x_L) \approx 0.7797$ , а при  $\Gamma \gg 1$  практически совпадают с границей области полной кавитации, определяемой формулами (13), (14).

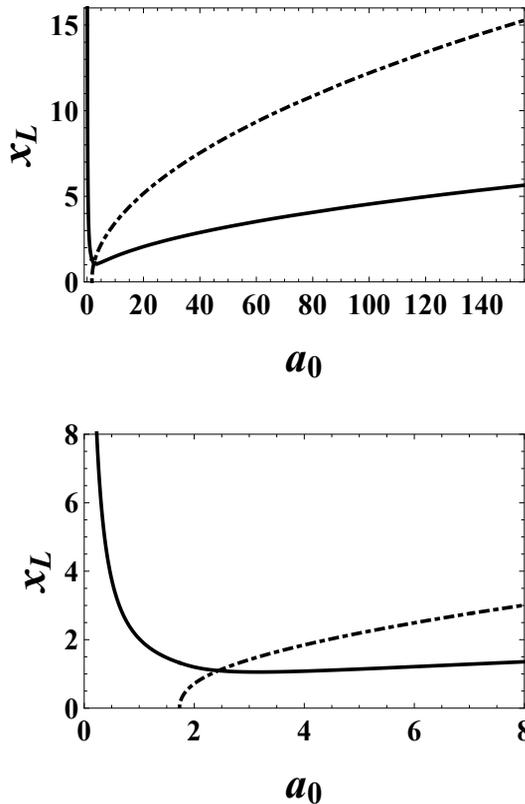


Рис. 5. Зависимости среднего радиуса лазерного пучка  $x_L$  (сплошная кривая) и границы области кавитации  $x_{cav}$  (штрихпунктирная кривая) от амплитуды лазерного поля на оси  $a_0$ . Нижний рисунок дает более детальную картину в области слабого релятивизма пучка

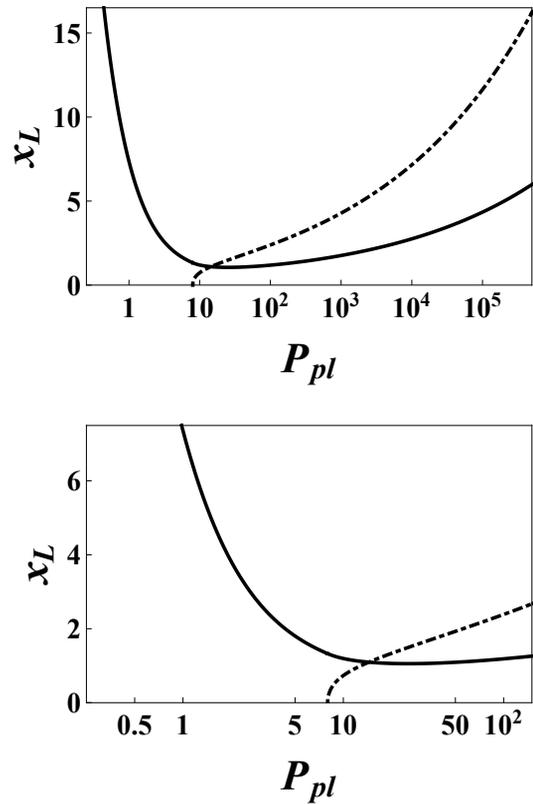


Рис. 6. Зависимости среднего радиуса лазерного пучка  $x_L$  (сплошная кривая) и границы области кавитации  $x_{cav}$  (штрихпунктирная кривая) от полной мощности лазерного пучка  $P_{pl}$ . Нижний рисунок дает более детальную картину в области слабого релятивизма пучка

#### 4. САМОЗАХВАТ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ЛАЗЕРНОГО ПУЧКА

Для релятивистского лазерного пучка реализация РСЗ подразумевает отыскание структуры электрического поля  $E$ , которая соответствовала бы локализованному по поперечной координате, т.е. по радиусу  $r$ , решению уравнения (4) для функции  $a(r)$ , монотонно убывающей,  $a \rightarrow 0$ , вместе со своей производной,  $\partial_r a \rightarrow 0$ , при  $r \rightarrow \infty$ . Раздел 4.1 посвящен получению такого типа решений для уравнения (4) в широком диапазоне значений  $a_0$ . В разд. 4.2 эти решения используются для получения аналитических формул для интегральных характеристик (мощности и среднего радиуса) лазерного пучка в режиме самозахвата.

##### 4.1. Пространственная структура электрического поля и плотности электронов

В зоне полной кавитации, где  $N_e \equiv 0$ , для обсуждаемого здесь цилиндрического пучка решение

уравнения (4), которое отвечает локализованному в пространстве распределению по поперечной координате амплитуды  $a$  с максимумом на оси пучка, имеет наиболее простой вид, когда вместо  $a$  используется релятивистский фактор  $\gamma$ :

$$\gamma^2 = 1 + (\gamma_0^2 - 1)J_0^2(\xi), \quad (31)$$

$$\xi = \sqrt{\frac{2}{\Gamma + 1}}r, \quad r < r_{cav}.$$

В (31) параметр  $\Gamma$  связан с  $\nu$  соотношением  $\Gamma = (1 + \nu)/(1 - \nu)$ .

В области, где нет полной кавитации,  $r > r_{cav}$ , при подстановке в (4) выражения (5) для  $N_e$  и использовании переменной  $\gamma = \text{ch } u$  уравнение (4) принимает вид

$$\partial_{\xi\xi} u + \frac{1}{\xi} \partial_{\xi} u + \text{sh } u \left[ \text{ch } u - \frac{\Gamma + 1}{2} \right] = 0. \quad (32)$$

Полное решение уравнения (4) получается сшивкой на границе области полной кавитации  $r = r_{cav}$

аналитического решения (31) (функций и их производных) с численным решением уравнения (32) (аналитическое решение в этой области отсутствует). В качестве точки сшивки решений используется граница, положение которой соответствует выполнению условия баланса для числа электронов, эвакуированных из канала во внешнюю область (ср. с (12)),

$$Q \equiv 2\pi \int_0^\infty (N_e(\gamma) - 1) r dr = 0. \quad (33)$$

При вычислении интеграла (33) удобно рассмотреть отдельно вклад от области полной кавитации, где  $N_e \equiv 0$ , и вклад от внешней области, где  $N_e$  определена формулой (5). Тогда, несмотря на то, что условие (33) формально записывается в виде интегрального соотношения (по поперечной координате) для пространственного распределения плотности электронов, оно сводится к локальному соотношению между координатой границы зоны полной кавитации и производной релятивистского фактора в этой же точке,

$$\left\{ 1 + \frac{4}{\Gamma + 1} \frac{1}{\xi} \partial_\xi \gamma \right\} \Big|_{\xi=\xi_{cav}} = 0.$$

Это условие дает дополнительное соотношение, связывающее параметр  $\Gamma$  со значениями  $\xi_{cav}$  и  $\gamma_{cav}$ :

$$\gamma_{cav} = ((\Gamma + 1)/8)(\xi_{cav} J_0(\xi_{cav})/J_1(\xi_{cav})) + \sqrt{1 + [((\Gamma + 1)/8)(\xi_{cav} J_0(\xi_{cav})/J_1(\xi_{cav}))]^2}. \quad (34)$$

Выбор из решений уравнения (32) только одного, отвечающего монотонному убыванию  $u(\xi)$  при  $\xi \rightarrow \infty$ , свидетельствует о том, что параметр  $\Gamma$  не может быть выбран произвольно, он связан с  $\xi_{cav}$  определенной зависимостью. Зависимости  $\Gamma$  и  $\gamma_{cav}$  от  $\xi_{cav}$ , полученные из численного решения уравнения (32) с последующим сращиванием с аналитическим решением (31) на границе области полной кавитации, представлены на рис. 7 в широком диапазоне изменения  $\xi_{cav}$  от нуля (т. е. от момента, когда возникает область полной кавитации) до максимальной величины  $\xi_0 \approx 2.49483$ , определяемой значением первого нуля функции Бесселя,  $J_0(\xi_0) = 0$ .

Анализ проведенных численных расчетов показывает, что в физически интересном широком диапазоне изменения амплитуды  $a_0 \lesssim 150$  эта зависимость представляется следующей функцией (коэф-

фициенты даны с точностью до пятого знака после запятой):

$$\begin{aligned} \Gamma &\approx b_1 + b_2 \xi_{cav}^{b_3} + b_4 \left( \frac{J_1(\xi_{cav})}{\xi_{cav} J_0(\xi_{cav})} \right)^{3/2}, \\ b_1 &= -0.514539, \quad b_2 = -0.326703, \\ b_3 &= 1.65224, \quad b_4 = 5.13104. \end{aligned} \quad (35)$$

Формулы (31), (34), (35) вместе с очевидным следствием решения (31) при  $\gamma = \gamma_{cav}$ ,

$$\gamma_{cav}^2 = 1 + (\gamma_0^2 - 1) J_0^2(\xi_{cav}), \quad (36)$$

определяют структуру электромагнитного поля пучка в зоне полной кавитации. При известной зависимости  $u(\xi)$  плотность электронов  $N_e$ , согласно (5), вычисляется по следующей формуле, которой можно пользоваться как при наличии зоны полной кавитации для сильных релятивистских пучков, так и для слабых пучков, когда такой зоны не существует:

$$N_e = \text{ch } u \left[ \text{ch } u + \frac{2}{\Gamma + 1} ((\partial_\xi u)^2 - \text{sh}^2 u) \right]. \quad (37)$$

Очевидно, что выражение для плотности (37) справедливо при всех  $0 \leq \xi < \infty$  в случае отсутствия зоны полной кавитации, при наличии такой зоны — только при  $\xi > \xi_{cav}$ , а в самой зоне кавитации  $N_e = 0$ .

Из вида кривой на нижнем рис. 7 следует, что величина  $\gamma_{cav}$  слабо меняется в широком диапазоне изменения  $\xi_{cav}$  от нуля до примерно  $\xi_{cav} \approx 1.7$ . Это позволяет записать приближенное аналитическое решение за границей области кавитации,  $\xi > \xi_{cav}$ , как решение линейного уравнения, получающегося из (32), если в нем пренебречь отличием  $\text{ch}(u)$  от единицы, а  $u$  от  $\text{sh}(u)$ . В результате приходим к аналитическим формулам, которые являются точными при  $\xi \leq \xi_{cav}$  и приближенными при  $\xi > \xi_{cav}$ , но имеют, однако, неплохую точность при  $\xi_{cav} \gtrsim 1$ :

$$\gamma^2 = 1 + (\gamma_{cav}^2 - 1) \begin{cases} \frac{J_0^2(\xi)}{J_0^2(\xi_{cav})}, & \xi \leq \xi_{cav}, \\ \frac{K_0^2(\sqrt{(\Gamma-1)/2}\xi)}{K_0^2(\sqrt{(\Gamma-1)/2}\xi_{cav})}, & \xi > \xi_{cav}. \end{cases} \quad (38)$$

Здесь связь  $\Gamma$  с  $\xi_{cav}$  и  $\gamma_{cav}$  определена приведенным выше соотношением (35) и результатами численного моделирования в виде зависимостей на рис. 7. Построенное таким образом приближенное при  $\xi > \xi_{cav}$  решение (38) сохраняет непрерывность

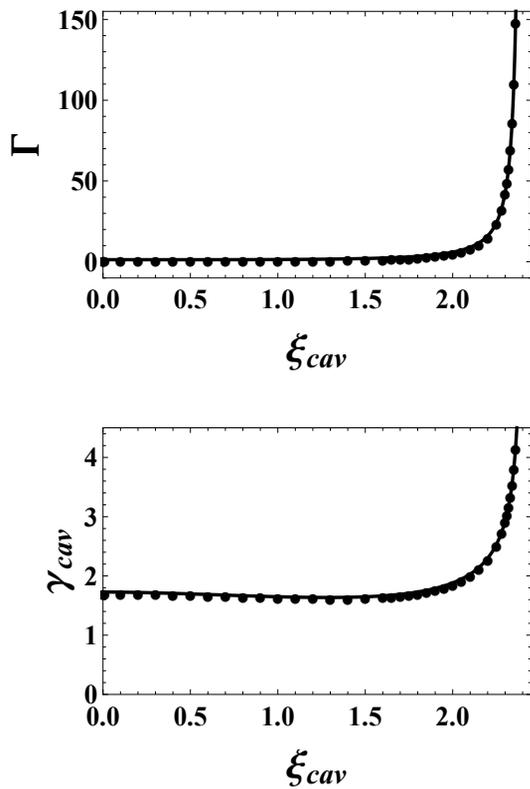


Рис. 7. Зависимости  $\Gamma$  (вверху) и  $\gamma_{cav}$  (внизу) от координаты  $\xi_{cav}$ . Черные кружки соответствуют численному решению уравнения (32), а сплошные кривые отвечают формулам (34) и (35)

амплитуды  $a(\xi)$  в точке  $\xi = \xi_{cav}$ , хотя ее производная  $\partial_\xi a(\xi)$  в этой точке испытывает скачок. Это наблюдается при сравнении графиков приближенного аналитического решения (38) и численного решения, представленных на рис. 8 сплошными кривыми для численного решения и штриховыми — для приближенного аналитического решения. Приведены зависимости безразмерной амплитуды цилиндрического лазерного пучка  $a = \sqrt{\gamma^2 - 1}$  от безразмерной поперечной координаты (радиуса)  $r$  при трех значениях координаты  $\xi_{cav}$  границы области кавитации, причем каждому выбранному значению  $\xi_{cav}$  соответствует определенное, совпадающее для цилиндрического пучка с величиной  $a_0$ , значение

$$a_0 \equiv a(\gamma = \gamma_0) = \sqrt{\gamma_{cav}^2 - 1} / J_0(\xi_{cav}).$$

Сравнение численного и приближенного аналитического пространственных распределений амплитуды электрического поля пучка показывает, что их отличие при  $r > r_{cav}$  не является слишком существенным, особенно для сильно релятивистских пучков, что позволяет использовать приближенное ре-

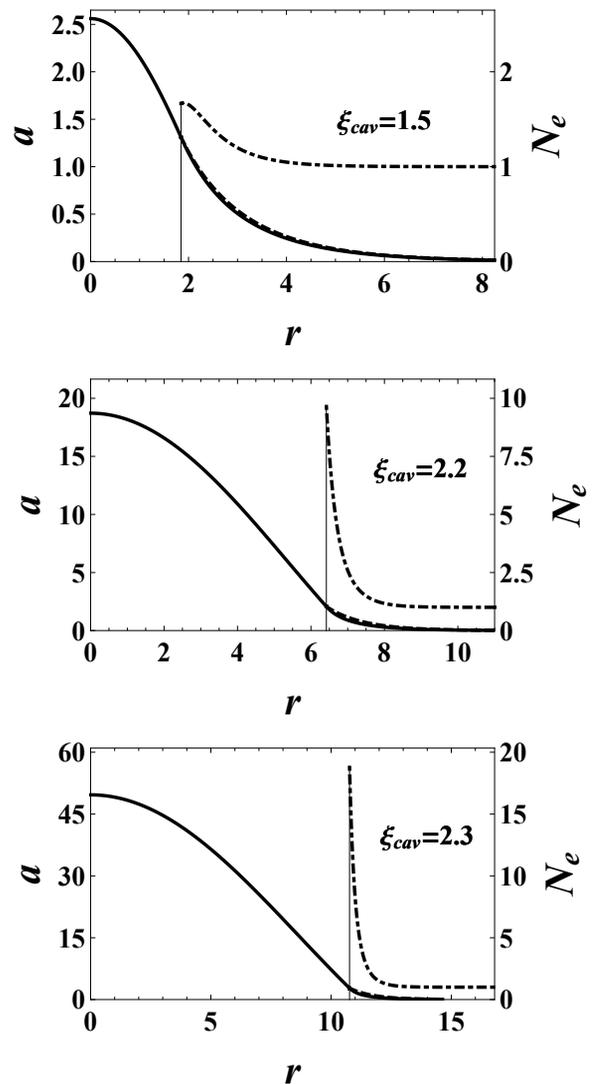


Рис. 8. Профили безразмерной амплитуды цилиндрического лазерного пучка  $a = \sqrt{\gamma^2 - 1}$  в режиме самозахвата (сплошные и штриховые кривые) и безразмерной плотности электронов плазмы  $N_e(r)$  (штрихпунктирные кривые) для различных значений  $\xi_{cav} = 1.5; 2.2; 2.3$

шение (38) для оценки интегральных характеристик РСЗ решения для цилиндрического пучка.

В случае слабого релятивизма цилиндрического пучка, когда не существует области полной кавитации, пространственное распределение амплитуды электрического поля пучка по поперечной координате находится решением уравнения (32) во всей области изменения поперечной координаты  $0 \leq \xi \leq \infty$  с граничными условиями равенства нулю производной  $\partial_\xi u$  на оси пучка  $r = 0$  и условием обращения  $u$  в нуль на бесконечности  $\xi \rightarrow \infty$ , при этом значение функции  $u$  на оси пучка оказывается конечным

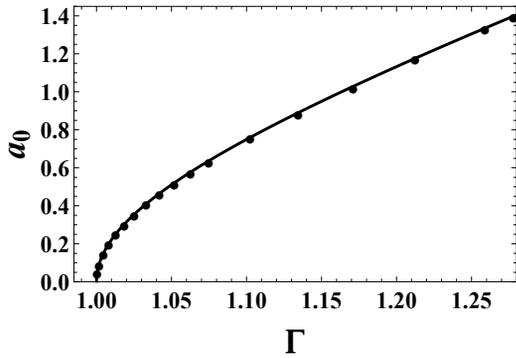


Рис. 9. Зависимость амплитуды электрического поля на оси пучка  $a_0$  от значения параметра  $\Gamma$ . Черным точкам отвечает результат численного решения уравнения (32), сплошная кривая соответствует формуле (39)

и отличным от нуля, т. е.  $u(0) = u_0 = \text{Arcch}(\gamma_0) \neq 0$ . Как и в случае сильного релятивизма, величина  $\Gamma$  не является произвольной при выбранном значении  $a_0 = \text{sh}(u_0)$  при  $\xi = 0$ . Связь  $\Gamma$  и  $a_0$  определена зависимостью, представленной на рис. 9 кривой  $a_0(\Gamma)$ , и хорошо аппроксимируется следующей функцией:

$$a_0 \approx a_1 \sqrt{(\Gamma - 1)(1 + a_2(\Gamma - 1))}, \quad (39)$$

$$a_1 = 2.19578, \quad a_2 = 1.65192.$$

Использование зависимости (39) позволяет для каждой выбранной величины  $a_0$  вычислить  $\Gamma$  и построить полную картину пространственного распределения амплитуды электрического поля пучка и плотности электронов плазмы, примеры которых приведены на рис. 10 для различных значений параметра  $u_0 = \text{Arcsh}(a_0)$  при слабом релятивизме  $a_0 \lesssim 1.39971$ .

Пределу очень слабого релятивизма,  $\Gamma \rightarrow 1$ , отвечает разложение гиперболических функций в уравнении (32) в ряд по степеням малых  $u \ll 1$  с удержанием кубичных по  $u$  вкладов. Уравнение (32) при этом после замены  $u = \sqrt{\Gamma - 1} V(y)$  переходит в уравнение для таунсова пучка [4]:

$$\begin{aligned} \partial_{yy} V + \frac{1}{y} \partial_y V - V + V^3 &= 0, \\ V(0) &= V_0, \end{aligned} \quad (40)$$

$$V(y)|_{y \rightarrow \infty} = \partial_y V(y)|_{y \rightarrow \infty} = \partial_y V(y)|_{y \rightarrow 0} = 0,$$

локализованное решение которого с максимумом на оси соответствует  $V_0 \approx 2.206201$ .

Для промежуточного случая умеренного релятивизма, когда область полной кавитации уже существует, но пока еще мала,  $0 < \xi_{cav} \lesssim 1$ , так что аналитическое приближение в (38) при  $\xi > \xi_{cav}$  дает су-

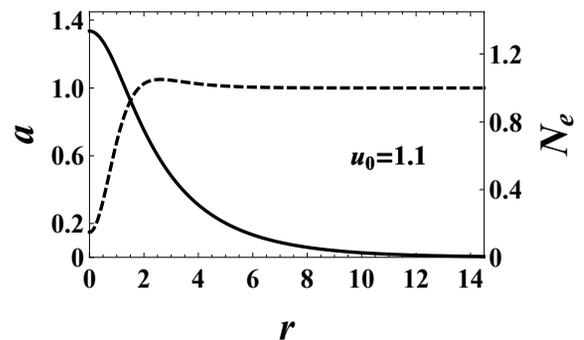
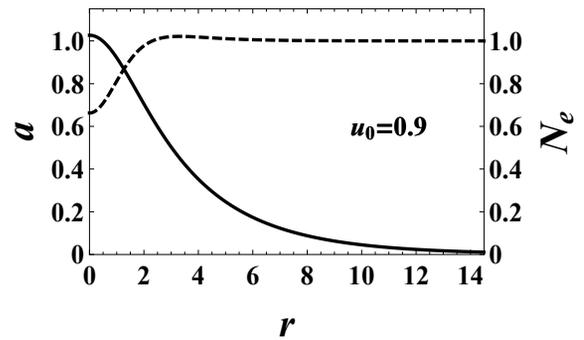
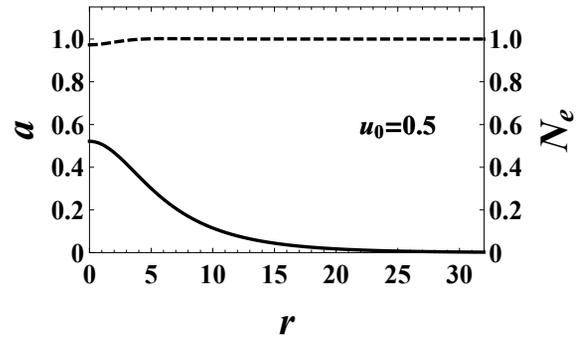


Рис. 10. Пространственные распределения амплитуды электрического поля пучка (сплошные линии) и плотности электронов плазмы (штриховые линии) для различных значений параметра  $u_0 = \text{Arcsh}(a_0)$  при отсутствии области полной кавитации (слабый релятивизм)

щественное отличие от точного (численного) решения, хотя формулы (34) и (35) по-прежнему применимы, пространственное распределение амплитуды электрического поля пучка и плотности электронов плазмы приведены на рис. 11.

#### 4.2. Интегральные характеристики

Полученные в предыдущем разделе формулы для пространственного распределения амплитуды  $a$  позволяют вычислить зависимости среднего безразмерного радиуса лазерного пучка,  $r_L$ , и безразмер-

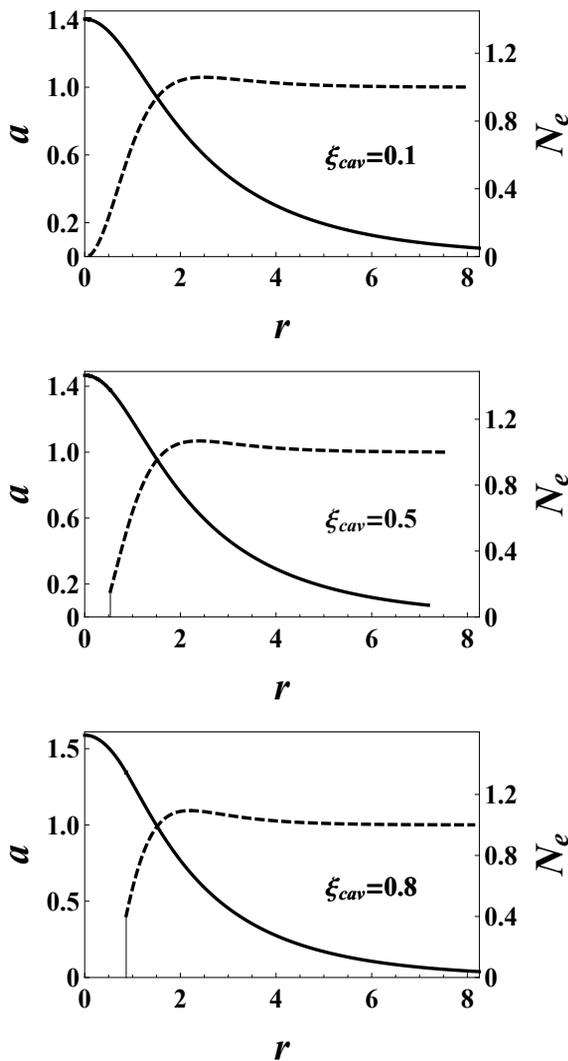


Рис. 11. Пространственные распределения амплитуды электрического поля пучка в режиме самозахвата (сплошные кривые) и плотности электронов плазмы (штриховые кривые) для различных значений  $\xi_{cav} = 0.1; 0.5; 0.8$  (умеренный релятивизм)

ного радиуса канала кавитации,  $r_{cav}$ , от максимальной амплитуды лазерного поля и безразмерной мощности лазерного пучка. Для цилиндрического лазерного пучка безразмерная величина полной мощности  $P$  и средний радиус  $r_L$  определяются соотношениями

$$\begin{aligned}
 P &= 2\pi \int_0^\infty r I dr, \\
 r_L^2 &= (2\pi/P) \int_0^\infty r^3 I dr,
 \end{aligned}
 \tag{41}$$

где  $I = \gamma^2 - 1$  — безразмерная интенсивность лазерного пучка. Очевидно, что значения интегралов в (41) существенным образом зависят от формы подынтегральной функции, которая, в свою очередь, задается максимальным значением амплитуды лазерного поля  $a_0$ . При умеренном и сильном релятивизме, в режиме РСЗ с образованием зоны полной кавитации, область интегрирования разбивается на две подобласти: от нуля до  $r_{cav}$  и от  $r_{cav}$  до бесконечности. Переходя затем от интегрирования по поперечной координате  $r$  к интегрированию по  $\xi$ , запишем выражения для полной мощности и квадрата радиуса самозахватного пучка в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 P &= \pi(\Gamma + 1)p_1, \\
 r_L^2 &= \frac{\Gamma + 1}{2} \frac{p_3}{p_1},
 \end{aligned}
 \tag{42}$$

$$\begin{aligned}
 p_1 &\equiv p_{1,in} + p_{1,out}, \quad p_3 \equiv p_{3,in} + p_{3,out}, \\
 p_{1,in} &= \int_0^{\xi_{cav}} \xi(\gamma^2 - 1) d\xi, \quad p_{1,out} = \int_{\xi_{cav}}^\infty \xi(\gamma^2 - 1) d\xi, \\
 p_{3,in} &= \int_0^{\xi_{cav}} \xi^3(\gamma^2 - 1) d\xi, \quad p_{3,out} = \int_{\xi_{cav}}^\infty \xi^3(\gamma^2 - 1) d\xi.
 \end{aligned}$$

Формулы (41), (42) применимы как при слабом, так и при сильном релятивизме. Для вычисления полной мощности и среднего радиуса лазерного пучка при слабом релятивизме также можно использовать формулы (41) и (42), понимая, однако, что в отсутствие области полной кавитации в (41) надо оставить лишь вклад от «внешней» области, т. е. полагать  $\xi_{cav} = 0$ . Что касается режима сильного релятивизма, то с учетом решения (31) в области полной кавитации формулы для  $p_{1,in}$  и  $p_{3,in}$  записываются в виде

$$\begin{aligned}
 p_{1,in} &= (\xi_{cav}^2/2)(\gamma_{cav}^2 - 1) \left( 1 + \frac{J_1^2(\xi_{cav})}{J_0^2(\xi_{cav})} \right), \\
 p_{3,in} &= (\xi_{cav}^2/6)(\gamma_{cav}^2 - 1) \left[ \xi_{cav}^2 \left( 1 + \frac{J_1^2(\xi_{cav})}{J_0^2(\xi_{cav})} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \frac{J_1(\xi_{cav})}{J_0(\xi_{cav})} \left( \xi_{cav} - \frac{J_1(\xi_{cav})}{J_0(\xi_{cav})} \right) \right].
 \end{aligned}
 \tag{43}$$

Для «моментов»  $p_{1,out}$  и  $p_{3,out}$  нельзя записать точные аналитические формулы, поэтому приходится либо довольствоваться результатами численного

интегрирования, либо использовать приближенные аналитические формулы (38), что дает следующие приближенные аналитические выражения для  $p_{1,out}$  и  $p_{3,out}$ :

$$\begin{aligned}
 p_{1,out}^{an} &= (\xi_{cav}^2/2)(\gamma_{cav}^2 - 1) \left( -1 + \frac{K_1^2(\zeta_{cav})}{K_0^2(\zeta_{cav})} \right), \\
 p_{3,out}^{an} &= (\xi_{cav}^4/6)(\gamma_{cav}^2 - 1) \left[ -1 + \frac{K_1^2(\zeta_{cav})}{K_0^2(\zeta_{cav})} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{\zeta_{cav}^2} \frac{K_1(\zeta_{cav})}{K_0(\zeta_{cav})} \left( \frac{K_1(\zeta_{cav})}{K_0(\zeta_{cav})} + \zeta_{cav} \right) \right], \\
 \zeta_{cav} &= \xi_{cav} \sqrt{(\Gamma - 1)/2}.
 \end{aligned}
 \tag{44}$$

Подстановка в формулы (42)–(44) вместо  $\gamma_{cav}$  и  $\Gamma$  приближенных аналитических выражений (34) и (35) позволяет аналитически получить приближенные зависимости  $r_L$  и  $r_{cav}$  от  $a_0$  и  $P$ .

В случае сильно релятивистского пучка определяющий вклад в величину полной мощности и  $r_L$  дает область полной кавитации. Это обстоятельство позволяет в пределе  $a_0 \gg 1$  из аналитических выражений (42) и (43), с учетом (34), (35), получить простые асимптотические зависимости, коэффициенты в которых указаны с точностью до пятого знака после запятой:

$$\begin{aligned}
 r_L &\approx 1.1016p^{1/6}, & r_L &\approx 0.737882a_0^{1/2}, \\
 r_{cav} &\approx 2.35907p^{1/6}, & r_{cav} &\approx 1.58016a_0^{1/2}, \\
 a_{cav} &\approx 0.70821a_0^{1/3}, & r_{cav}/r_L &\approx 2.14149.
 \end{aligned}
 \tag{45}$$

В формулах (45) и ниже, на рис. 13 и 14 используется перенормированная величина мощности пучка,

$$p = P/P_{min}, \text{ где } P_{min} = P(a_0 \rightarrow 0) \approx 23.4018,$$

так что в размерных переменных мощность цилиндрического пучка дается формулой

$$P^{cyl} \approx 16.31(n_c/n_{e0})p \text{ [ГВт]},$$

а величина  $a_{cav} = a(r_{cav})$  задает значение безразмерной амплитуды лазерного поля на границе области кавитации. Предел  $p \rightarrow 1$  соответствует критической мощности  $P_{cr} = P^{cyl}(p \rightarrow 1)$  цилиндрического лазерного пучка.

Из асимптотических формул (45) следует, что отношение радиуса плазменной каверны и характерного радиуса лазерного пучка составляет примерно  $r_{cav}/r_L \approx 2.14$ . С использованием приведенных выше формул нетрудно показать, что зависимость радиуса плазменной каверны от мощности сильно релятивистского пучка может получиться из наглядной оценки  $p \sim a_0^2 r_{cav}^2$  (численный коэффициент

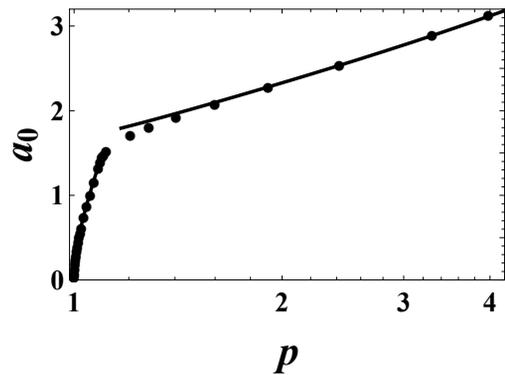
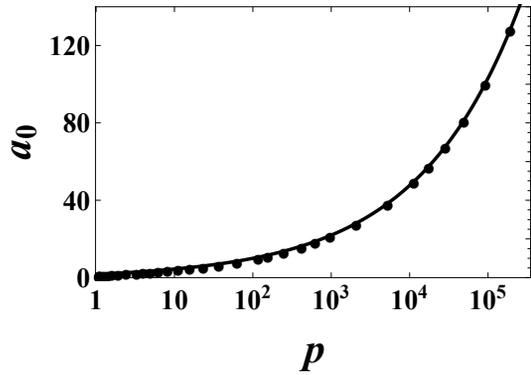


Рис. 12. Зависимости амплитуды лазерного поля на оси  $a_0$  от безразмерной мощности  $p$ . Нижний рисунок дает более детальную картину в области слабого релятивизма пучка

пропорциональности в этой формуле приблизительно равен 0.84), в которой надо использовать связь  $a_0$  с  $r_{cav}$ .

В случае слабого релятивизма,  $\Gamma - 1 \ll 1$ , сравнение решения уравнения (40) с результатами численного расчета показывает, что при замене  $u$  на  $V$  при малой, но отличной от нуля разности  $\Gamma - 1 \neq 0$  зависимость  $V(y)$  от  $\Gamma$  оказывается слабой. Это позволяет записать следующие соотношения для амплитуды электрического поля пучка  $a_0$  на оси и его полной мощности  $p$ :

$$\begin{aligned}
 a_0 &= V_0 \sqrt{(\Gamma - 1)(1 + (V_0^2/3)(\Gamma - 1))}, \\
 p &= 1 + 0.321734(\Gamma - 1),
 \end{aligned}
 \tag{46}$$

во всем диапазоне изменения  $\Gamma \leq 1.2778175$ . Здесь численный коэффициент в формуле для  $p$  находится из сравнения с численным расчетом, а формула для  $a_0$  совпадает с разложением  $a_0 = \text{sh } u_0$  в ряд по степеням  $u_0$  с удержанием первых двух вкладов. При этом коэффициенты  $V_0$  и  $V_0^2/3$  в формуле (46) для  $a_0$  практически совпадают с коэффициентами в аналитическом представлении (39).

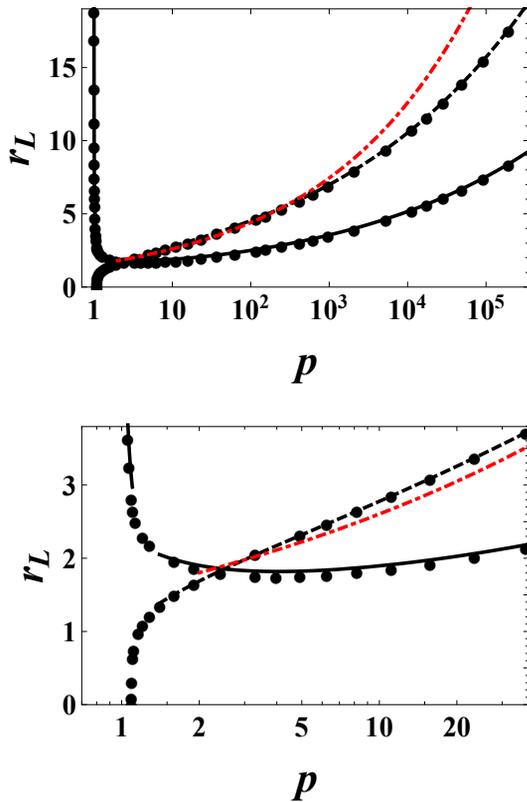


Рис. 13. Зависимости среднего радиуса лазерного пучка  $r_L$  и границы области кавитации  $r_{cav}$  от мощности лазерного пучка  $p$ . Нижний рисунок дает более детальную картину в области слабого релятивизма пучка

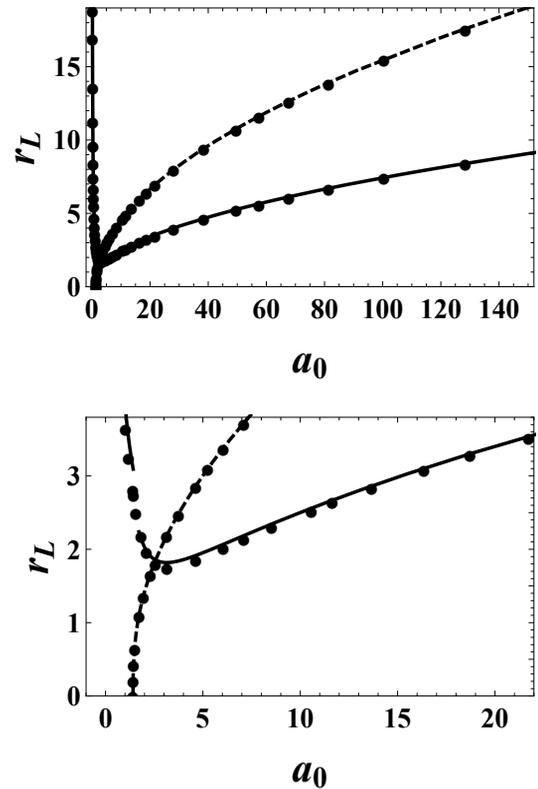


Рис. 14. Зависимости среднего радиуса лазерного пучка  $r_L$  и границы области кавитации  $r_{cav}$  от амплитуды лазерного поля на оси  $a_0$ . Нижний рисунок дает более детальную картину в области слабого релятивизма пучка

Используя решение уравнения (40), нетрудно записать следующие простые формулы для радиуса  $r_L$  лазерного пучка в зависимости от  $\Gamma$ :

$$r_L \approx 1.09004 \sqrt{(\Gamma + 1)/(\Gamma - 1)}, \quad (47)$$

или, с учетом (46), от амплитуды  $a_0$  или от полной мощности  $p$ :

$$r_L \approx 1.09004 \frac{V_0}{a_0} \left( \frac{a_0^2}{V_0^2} + 1 + \sqrt{1 + (4/3)a_0^2} \right)^{1/2}, \quad (48)$$

$$r_L \approx 1.09004 \sqrt{p - 0.356532} / \sqrt{p - 1}.$$

В пределе  $a_0 \ll 1$  и  $p - 1 \ll 1$  из (48) следуют асимптотические оценки, аналогичные (45), но только в области ультраслабого релятивизма:

$$r_L \approx 3.40097/a_0, \quad r_L \approx 0.874391/\sqrt{p - 1}. \quad (49)$$

На рис. 12 приведены построенные с использованием численного моделирования и аналитических формул (40)–(44), (46) кривые зависимости

безразмерной амплитуды  $a_0$  лазерного пучка на оси от его безразмерной мощности  $p$ . Черные кружки соответствуют результатам численного моделирования, сплошные кривые — результат использования приближенного аналитического решения (42)–(44) и (46). Построенные с использованием формул (41)–(44) и (48) зависимости  $r_L$  и  $r_{cav}$  от безразмерной мощности пучка  $p$  и от безразмерной амплитуды  $a_0$  лазерного пучка на оси приведены на рис. 13 и 14. Черные кружки соответствуют результатам численного моделирования, сплошные кривые — результат использования приближенного аналитического решения (43) и (44), штриховые кривые обозначают границу  $r_{cav}$ , задаваемую формулами (31) и (35). Красные штрихпунктирные кривые на рис. 13 соответствуют результатам численного моделирования из работы [21]  $\propto p^{1/4}$ .<sup>383</sup> Таким образом, различие между нашими результатами и [21] составляет не более 10% в области  $1.1 < p < 300$ , но становится значительным при больших мощностях, которые представляют основной интерес для современных мощных лазеров.

Диапазон изменения мощности лазерного пучка на рис. 13, 14 в размерных переменных лежит в пределах от  $P_{cr}$  до примерно  $5 \cdot 10^3 (n_c/n_{e0})$  ТВт. При этом радиус лазерного пучка для верхней границы диапазона изменения мощности пучка оказывается приблизительно равным  $1.6 \sqrt{n_c/n_{e0}} \lambda_0$  мкм, где  $\lambda_0$  [мкм] — длина волны лазерного излучения.

При наличии сформированного канала плотности плазмы, когда есть область полной кавитации, можно определить ширину плазменного канала как значение координаты  $r_{pl}$ , при котором плотность электронов  $N_e$  совпадает со значением невозмущенной плотности  $N_{e,0} = 1$ . Тогда, подставляя  $N_e = 1$  в левую часть уравнения (37) и решая его численно совместно с исходным уравнением (32), получим величину  $u_{pl}(\Gamma)$ , а значит, и  $\gamma_{pl}(\Gamma) = \text{ch}(u_{pl})$ . Используя  $\gamma_{pl}$  совместно с решением исходного уравнения (32), приходим к искомой зависимости радиуса плазменного канала  $r_{pl}$  от величины  $a_0$ . Такой сложный алгоритм нужен лишь при умеренном релятивизме, поскольку с ростом интенсивности лазерного пучка уже при  $\xi_{cav} \gtrsim 1$ , и тем более при больших  $a_0$ , точка  $N_e(r_{cav}) = 1$  расположена на фронте скачка плотности, т. е. радиус плазменного канала совпадает с границей зоны полной кавитации.

В пределе слабого релятивизма,  $\Gamma \rightarrow 1$ , когда в формуле (37) используются разложения гиперболических функций в ряд по степеням малых  $u \ll 1$  с удержанием кубичных по  $u$  вкладов и при учете решения уравнения (40), для ширины плазменного канала получается простая формула

$$r_{pl} \approx 0.432979 \sqrt{\frac{(p - 0.356532)(1 + 2.5214(p - 1))}{p - 1}}, \quad (50)$$

из которой при  $p \rightarrow 1$  следует асимптотическая оценка

$$r_{pl} \approx 0.410045 / \sqrt{p - 1}, \quad (51)$$

совпадающая с (50) на верхней границе интервала  $0 < p \lesssim 1.08901$  области режима без кавитации. Из (51) видно, что ширина плазменного канала  $r_{pl}$  (50) только множителем отличается от радиуса лазерного пучка  $r_L$  (49).

## 5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Данная работа посвящена теоретическому исследованию условия реализации режима самозахвата при учете релятивистской нелинейности массы электрона и электронной кавитации в плазме. В отличие от исследованного ранее ультрарелятивистского

предела [20], предложенная в данной статье теория применима для широкого диапазона лазерных интенсивностей: от релятивистски умеренной до ультрарелятивистской. Это позволяет сопрячь формулы, определяющие условия РСЗ, как для малых, слабо релятивистских, так и для больших, ультрарелятивистских, интенсивностей. В пределе малых интенсивностей пучка условия самозахвата (формулы (24) и (49)) согласуются с соотношениями, которые следуют из аналитического решения Таланова [3] (для плоской геометрии) и численного решения Таунса с соавторами [4] (для цилиндрической геометрии). Для произвольных, не малых интенсивностей лазерного пучка условия согласования следуют из формул (42)–(44) и кривых на рис. 13, 14 для цилиндрической геометрии и из формул (18)–(20), (22) и кривых на рис. 5, 6 для плоской геометрии. При сильной, ультрарелятивистской нелинейности условия согласования представлены асимптотическими формулами (26) для плоской геометрии и формулами (45) для цилиндрической геометрии. Сравнительно простую универсальную формулу для оценки условия согласования можно получить из интерполяционных соотношений при сопряжении слабо-релятивистской и ультрарелятивистской асимптотик для  $r_L(p)$ , например, (49) и (45) в цилиндрической геометрии. Это сопряжение можно получить путем сложения асимптотики для  $r_L(p)$  из (45) при  $p \gg 1$ , предварительно умножив ее на функцию сглаживания  $f(p, k) = (p - 1)^k / p^k$ , с асимптотикой  $r_L(p)$  (49) при  $p \rightarrow 1$ , т. е. интерполяция сводится к «поправке» ультрарелятивистского вклада в области умеренных интенсивностей,

$$r_L \approx \alpha_{L,p} f(p, 1/3) p^{(1/6)} + \beta_{L,p} / \sqrt{p - 1}, \quad (52)$$

$$\alpha_{L,p} \approx 1.1016, \quad \beta_{L,p} \approx 0.874391,$$

что дает при  $k = 1/3$  очень хороший результат, представленный на рис. 15.

Аналогичным образом, используя асимптотики (45), (50), из (52) можно построить интерполяционную формулу для радиуса плазменного (плотностного) канала  $r_{pl}$ , если заменить в ней  $\alpha_{L,p}$  и  $\beta_{L,p}$  на  $\alpha_{pl,p}$  и  $\beta_{pl,p}$ :

$$r_{pl} \approx \alpha_{pl,p} f(p, 1) p^{(1/6)} + \beta_{pl,p} / \sqrt{p - 1}, \quad (53)$$

$$\alpha_{pl,p} \approx 2.35907, \quad \beta_{pl,p} \approx 0.410045.$$

Достоинством формул (52) и (53) является их простота и универсальность, поскольку они применимы как для  $r_L$ , так и для  $r_{pl}$ , хотя отличие интерполяционных кривых от результатов численного моделирования может достигать порядка 10% в области

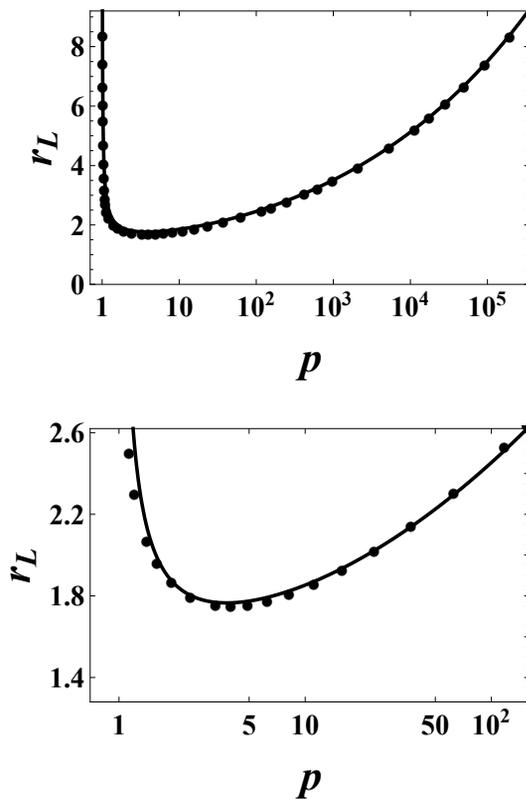


Рис. 15. Интерполяционная кривая для среднего радиуса лазерного пучка  $r_L$  как функции мощности лазерного пучка, построенная по формулам (52) (верхний рисунок). Нижний рисунок — детализация в области умеренного релятивизма. Черные точки — результат численного моделирования

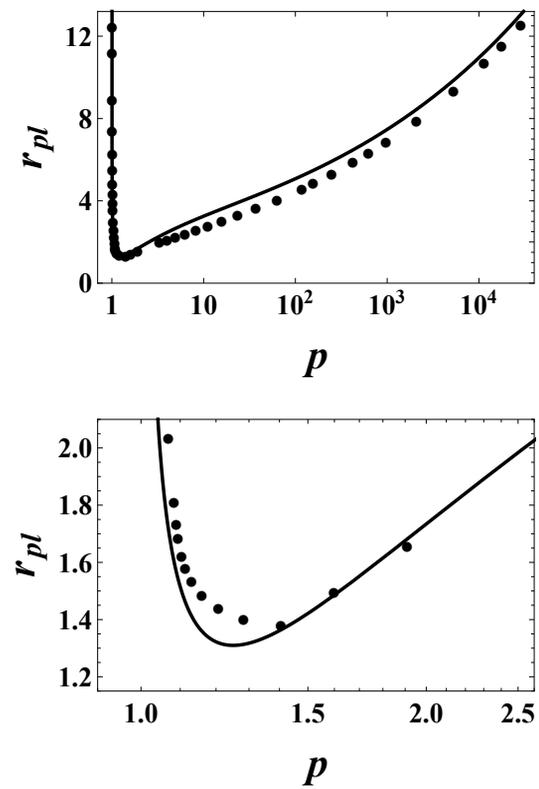


Рис. 16. Интерполяционная кривая для границы области плазменного канала  $r_{pl}$  как функции мощности лазерного пучка, построенная по формулам (53) (верхний рисунок). Нижний рисунок — детализация в области слабого релятивизма. Черные точки — результат численного моделирования

слабого и умеренного релятивизма, как следует из кривых на рис. 15, 16.

Наибольшее отличие проявляется для интерполяционной кривой  $r_{pl}(p)$ , однако это отличие монотонно убывает с ростом  $p$  по мере того, как асимптотическое значение  $r_{cav}$  стремится к своему пределу, задаваемому формулами (45).

Подобного типа интерполяцию можно построить и для зависимости радиуса лазерного пучка  $r_L$  от  $a_0$ :

$$\begin{aligned} r_L &\approx \alpha_{L,a_0} f(a_0) \sqrt{a_0} + \beta_{L,a_0} / a_0, \\ \alpha_{L,a_0} &\approx 0.737882, \quad \beta_{L,a_0} \approx 3.40097, \\ f(a_0) &= 1 - 1 / (1.60766 + 0.0150249 a_0^3). \end{aligned} \quad (54)$$

График интерполяционной кривой (54) вместе с результатами численного расчета представлен на рис. 17.

Существенным моментом предлагаемой теории является выбор адекватной модели для описания ре-

жима РСЗ лазерного пучка. В нашем подходе использовалась модель НУШ, в которой учитывается электронная нелинейность массы электрона и электронная кавитация в плазме, и при этом сохраняется полный заряд электронов [27]. Проведенное в [20] сравнение различных подходов показало, что именно такая модель для ультрарелятивистских интенсивностей лазера обеспечивает наилучшее согласование с результатами численного эксперимента. Здесь мы расширили пределы применимости теории на область произвольного релятивизма. Характерное для этой модели наличие скачка электронной плотности, отделяющее область полной кавитации от остальной плазмы, не является существенным при вычислении интегральных характеристик пучка, например, его полной мощности, хотя такое влияние разрыва плотности и может быть предметом дальнейших исследований, подобно тому, как это сделано в [30, 31].

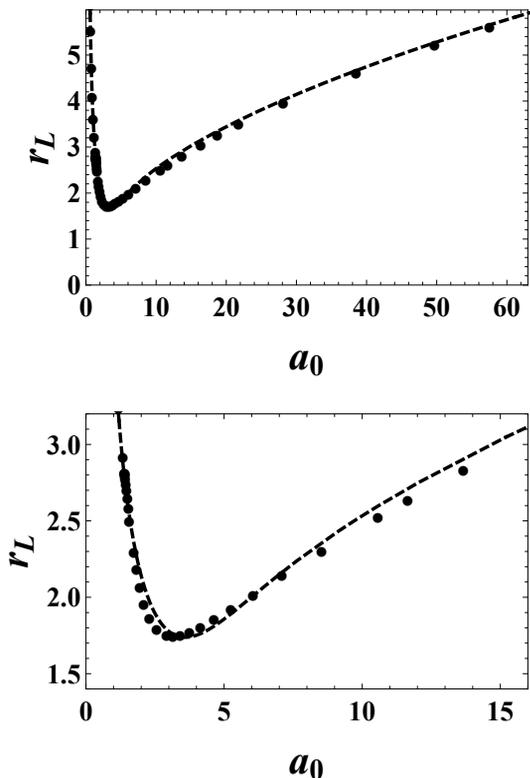


Рис. 17. Интерполяционная кривая (штриховая линия) для среднего радиуса лазерного пучка  $r_L$  как функции амплитуды электрического поля пучка на его оси, построенная по формулам (54) для широкого диапазона амплитуд  $a_0$  (верхний рисунок) и в области малых амплитуд (нижний рисунок). Черные точки — результат численного моделирования

### 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итог, отметим, что в работе получены аналитические формулы, характеризующие условие реализации РСЗ лазерного пучка в плазме в широком диапазоне интенсивностей лазерного пучка: от слабо релятивистских,  $a_0 \ll 1$ , до релятивистских,  $a_0 \sim 1$ , и ультрарелятивистских,  $a_0 \gg 1$ . Это позволяет охватить мощности всех имеющихся на сегодняшний день короткоимпульсных лазеров от субтераваттного до мульти-петаваттного уровня. Аналитически (для случая плоской геометрии) и приближенно аналитически (для цилиндрической геометрии), а также численно, как результат численного решения НУШ с релятивистской нелинейностью, получены лазерно-плазменные распределения, описывающие пространственную структуру светового пучка и плазменного канала в режиме РСЗ. Найдены глобальные (интегральные) характеристики РСЗ, в том числе полная мощность лазерного пуч-

ка и ее связь с максимальной амплитудой поля на оси канала. Установлена величина характерного поперечного размера светового канала в зависимости от мощности лазерного пучка и его максимальной интенсивности. Найдены радиальное распределение плотности электронов плазмы и характерный размер плазменной каверны. Полученные результаты впервые теоретически обосновывают согласование лазерно-плазменных параметров во всем диапазоне мощностей лазерного излучения, необходимое для реализации режима РСЗ, верифицируя результаты численного моделирования, накопленные к настоящему времени.

Важным итогом работы является достаточно простая, удобная для применений, количественная формула, определяющая связь поперечного размера плазменной каверны с мощностью  $P$  цилиндрического лазерного пучка и плотностью среды, которая, согласно (53), имеет вид

$$D \simeq 0.750915 \lambda \sqrt{\frac{n_c}{n_{e0}}} \times \left( \frac{0.173816 P_{cr}^{1/2}}{(P - P_{cr})^{1/2}} + \frac{P - P_{cr}}{P^{5/6} P_{cr}^{1/6}} \right), \quad (55)$$

где  $P_{cr} \simeq 16.3(n_c/n_{e0})$  ГВт — введенная выше критическая мощность для самофокусировки в форме РСЗ,  $\lambda$  — длина волны лазерного излучения. При этом следует учесть, что в развитой теории имеется ограничение сверху на мощность лазерного пучка, требующее, чтобы электроны из-за релятивизма оказывались не такими тяжелыми, как ионы, т.е. чтобы их релятивистская масса  $\gamma_0 m_e$  была мала по сравнению с массой иона. Это условие записывается как  $a_0 \ll (A/Z)(m_p/m)$ , где  $m_p$  — масса протона,  $Z$  и  $A$  — заряд иона и его массовое число, при этом следует учесть, что в экспериментах по лазерному ускорению  $Z \approx A/2$  (легкие ионы). Принимая во внимание следующую из (45) при больших  $p \gg 1$  связь  $a_0 \approx 2.23 p^{1/3}$ , приведенное неравенство, определяющее условие применимости теории, можно записать в виде  $2.23(P/P_{cr})^{1/3} \ll (A/Z)(m_p/m)$ . Для используемого в данной работе максимального значения величины  $a_0 \approx 150$  это условие выполняется с большим запасом, а значение  $p$ , отвечающее  $a_0 \approx 150$ , соответствует  $P/P_{cr} = p \approx 3 \cdot 10^5$ , что дает для использованного в статье максимального значения мощности  $P \approx 5(n_c/n_{e0})$  ПВт.

**Финансирование.** Работа выполнена при частичной поддержке научной программы Национального центра физики и математики (проект «Фи-

зика высоких плотностей энергии») и поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (в рамках Федеральной научнотехнической программы развития синхротронных и нейтронных исследований и исследовательской инфраструктуры). В. Ф. Ковалев благодарен также за частичную поддержку Министерством науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания для ИПМ им. М. В. Келдыша РАН.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. Ю. Быченков, Квант. электр. **54**, 265 (2024).
2. G. S. Sarkisov, V. Yu. Bychenkov, V. N. Novikov et al., Phys. Rev. E **59**, 7042 (1999).
3. В. И. Таланов, Изв. вузов. Радиофизика **7**, 564 (1964).
4. R. Y. Chiao, E. Garmire, and C. Townes, Phys. Rev. Lett. **13**, 479 (1964).
5. С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, Р. В. Хохлов, ЖЭТФ **50**, 1537 (1966).
6. A. Pukhov and J. Meyer-ter-Vehn, Appl. Phys. B **74** 355 (2002).
7. M. G. Lobok, A. V. Brantov, D. A. Gozhev, and V. Yu. Bychenkov, Plasma Phys. Control. Fusion Special Issue **60**, 0840101 (2018).
8. V. Yu. Bychenkov, M. G. Lobok, V. F. Kovalev, and A. V. Brantov, Plasma Phys. Control. Fusion **61**, 124004 (2019).
9. J. Gotzfried et al., Phys. Rev. X **10**, 041015 (2020).
10. R. Huang et al., Opt. Lett. **48**, 819 (2023).
11. R. Babjak et al., Phys. Rev. Lett. **132**, 125001 (2024).
12. S. P. D. Mangles, Proceedings of the 2014 CAS-CERN Accelerator School: Plasma Wake Acceleration, Geneva, Switzerland, ed. by B. Holzer, CERN-2016-001, CERN (2016).  
<http://dx.doi.org/10.5170/CERN-2016-001.289>
13. C. E. Clayton, J. E. Ralph, F. Albert et al., Phys. Rev. Lett. **105**, 105003 (2010).
14. K. Poder, J. C. Wood, N. C. Lopes et al., Phys. Rev. Lett. **132**, 195001 (2024).
15. M. G. Lobok, A. V. Brantov, and V. Yu. Bychenkov, Phys. Plasmas **26**, 123107 (2019).
16. S. Gordienko and A. Pukhov, Phys. Plasmas **12**, 0431091 (2005).
17. W. Lu, M. Tzoufras, C. Joshi et al., Phys. Rev. ST Accel. Beams **10**, 061301 (2007).
18. P. E. Masson-Laborde, M. Z. Mo, A. Ali et al., Phys. Plasmas **21**, 1231131 (2014).
19. M. D. Feit, A. M. Komashko, S. L. Musher, A. M. Rubenchik, and S. K. Turitsyn, Phys. Rev. E **57**, 7122 (1998).
20. В. Ю. Быченков, В. Ф. Ковалев, Письма в ЖЭТФ **120**, 346 (2024).
21. N. Naseri, W. Rozmus, and D. Pesme, Phys. Plasmas **23**, 287 (2016).
22. В. Ю. Быченков, В. Ф. Ковалев, Изв. вузов. Радиофизика **63**, 825 (2020).
23. G.-Z. Sun, E. Ott, Y. C. Lee, and P. Guzdar, Phys. Fluids **30**, 526 (1987).
24. T. Kurki-Suonio, P. J. Morrison, and T. Tajima, Phys. Rev. A **40**, 3230 (1989).
25. A. B. Borisov, A. V. Borovskiy, O. B. Shiryaev et al., Phys. Rev. A **45**, 5830 (1992).
26. А. Комашко, С. Мушер, А. Рубенчик, С. Турицын, М. Фейт, Письма в ЖЭТФ **62**, 849 (1995).
27. A. Kim, M. Tushentsov, F. Cattani et al., Phys. Rev. E **65**, 036416 (2002).
28. F. Cattani, A. Kim, D. Anderson, and M. Lisak, Phys. Rev. E **64**, 016412 (2001).
29. Т. Zh. Esirkeпов, F. F. Kamenets, S. V. Bulanov, and N. M. Naumova, Письма в ЖЭТФ **68**, 33 (1998).
30. А. В. Коржиманов, В. И. Еремин, А. В. Ким, М. Р. Тушенцов, ЖЭТФ **132**, 771 (2007).
31. A. V. Korzhimanov and A. V. Kim, Eur. Phys. J. D **55**, 287 (2009).