

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ НЕЙТРАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ УДАРНЫХ ВОЛН В ГИДРОДИНАМИКЕ И ЕГО СЛЕДСТВИЯ

А. В. Конюхов*

Объединенный институт высоких температур Российской академии наук
125412, Москва, Россия

Поступила в редакцию 30 октября 2023 г.,
после переработки 16 декабря 2023 г.
Принята к публикации 17 декабря 2023 г.

Показано, что критерий Конторовича нейтральной устойчивости релятивистских ударных волн (релятивистский аналог критерия Дьякова–Конторовича в классической гидродинамике), после исключения производной вдоль ударной адиабаты Тауба–Гюгиони с использованием соотношений на релятивистском ударно-волновом разрыве, сводится к ограничению на изоэнтальпийную производную внутренней энергии по удельному объему в системе покоя: $p > -(\partial\varepsilon/\partial v)_w > p_0$. Полученная формулировка справедлива и в классической гидродинамике. Выведены следствия данной формулировки для ударных волн с однофазным и двухфазным конечными состояниями в среде с фазовым переходом первого рода. Показано влияние параметра Риделя и изохорной теплоемкости на реализуемость нейтрально устойчивых ударных волн. В модельной постановке задачи исследовано влияние локальной термодинамической неравновесности на затухание возмущений нейтрально устойчивой ударной волны.

DOI: 10.31857/S0044451024040138

1. ВВЕДЕНИЕ

Линейная теория устойчивости ударных волн в средах с произвольными термодинамическими свойствами выделяет диапазон параметров ударной волны, в котором в рамках анализа линеаризованной задачи для уравнений, описывающих эволюцию возмущений, последние не растут и не затухают. Поток энергии акустической составляющей вторичных волн в этом случае направлен от ударной волны в сторону ударно-сжатого вещества, т. е. ударная волна является источником вынужденного излучения звука, если имеет место нелинейная устойчивость, или спонтанного в противном случае. Для обозначения этого диапазона в литературе используются термины: неустойчивость Дьякова–Конторовича, спонтанное излучение звука ударной волной, нейтральная (в рамках линейной теории) устойчивость ударной волны. С выполнением условий нейтраль-

ной устойчивости связывают сложное поведение ударных волн, состоящее в аномально медленном затухании возмущений и связанной с этим неоднородностью параметров за ее фронтом.

Впервые анализ устойчивости нерелятивистской ударной волны к малым двумерным возмущениям в среде с произвольными термодинамическими свойствами был выполнен С. П. Дьяковым [1] с использованием метода нормальных мод и позднее уточнен В. М. Конторовичем [2]. В рамках проведенного исследования были получены критерии неустойчивости ударной волны, связывающие безразмерную производную вдоль ударной адиабаты $L = j^2(\partial V/\partial p)_H$, $j = \rho v$ — плотность потока массы через поверхность ударной волны, число Маха течения за фронтом ударной волны (M) и степень сжатия вещества в ударной волне:

$$L < -1 \quad \text{или} \quad L > 1 + 2M \quad (1)$$

(неустойчивость),

$$L > \frac{1 - M^2(1 + V_0/V)}{1 - M^2(1 - V_0/V)} \quad (2)$$

(нейтральная устойчивость).

* E-mail: konyukhov_av@mail.ru

Впоследствии эти условия были вновь получены на основе более общего математического подхода [3]. В работе Конторовича [4] анализ был обобщен на случай релятивистской гидродинамики и получена релятивистская формулировка критериев устойчивости, которые в нерелятивистском пределе переходят в (1), (2). В [5] введен релятивистский аналог параметра L и предложена формулировка критериев устойчивости ударной волны, полученных в [4], посредством этого параметра. До настоящего времени выполнение (2) фиксировалось для ударных волн в металлах [6–8], в условиях неравновесной ионизации в газах [9, 10], в реальном газе [11–13]. Установлено выполнение этого условия в горячей плазме углерода, кремния, алюминия, ниобия [14], в неадиабатических условиях при протекании реакций [15, 16]. В большинстве случаев реализация условия обнаруживалась в результате непосредственной проверки выполнения (2) на ударной адиабате.

Впервые на тот факт, что условие нейтральной устойчивости ударной волны, после исключения из него параметра L с использованием соотношений на ударно-волновом разрыве, существенно упрощается, было указано в [17] для случая нерелятивистской ударной волны. Позднее устойчивость релятивистских ударных волн в линейном приближении была повторно исследована в [18, 19] на основе метода, аналогичного [3]. Исследование корректности смешанной задачи для уравнений, описывающих эволюцию возмущений с использованием условия Лопатинского, привело к формулировке критерия нейтральной устойчивости ударной волны в виде ограничения на производные уравнения состояния. На основе полученных результатов был рассмотрен вопрос устойчивости ударных волн для некоторых уравнений состояния [11, 20]. Термодинамическая формулировка в виде ограничения на термодинамические производные обладает преимуществом непосредственной, без построения ударных адиабат для конкретного уравнения состояния, связи между термодинамическими свойствами среды и устойчивостью ударной волны и является удобным инструментом для анализа реализуемости нейтрально устойчивых ударных волн в рамках релятивистской и классической гидродинамики.

Изучению этой связи для сред с фазовыми переходами посвящена данная работа. В разд. 2 на основе результата Конторовича [4] получена эквивалентная термодинамическая формулировка критерия нейтральной устойчивости релятивистской ударной волны в виде ограничения на изоэнтальпийную производную внутренней энергии по удельному

объему. В разд. 3 даны примеры применения этого термодинамического критерия для оценки реализуемости нейтральной устойчивости ударных волн в средах с различными уравнениями состояния. В разд. 4 показано, что в термодинамической формулировке критерия нейтральной устойчивости ударных волн одинаково записывается в релятивистском и нерелятивистском случаях. В разд. 5 выведены следствия данной формулировки для ударных волн с однофазным и двухфазным конечными состояниями в среде с фазовым переходом первого рода. Показано влияние параметра Риделя и изохорной теплоемкости на реализуемость нейтрально устойчивых ударных волн. В разд. 6 в рамках модельной постановки задачи, которая опирается на результаты предыдущих разделов, показано влияние неравновесности внутренних степеней свободы молекул на затухание возмущений нейтрально устойчивой ударной волны.

2. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ НЕЙТРАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ УДАРНЫХ ВОЛН

Критерий нейтральной устойчивости релятивистской ударной волны в рамках специальной теории относительности впервые получен Конторовичем на основе исследования устойчивости методом нормальных мод. Результат представлен в системе отсчета, связанной с ударно-волновым разрывом, с использованием системы единиц, в которой скорость света равна 1. Критерий сформулирован в виде следующей цепочки неравенств [4]:

$$-\frac{1}{u_y^2} \left(1 + 2\gamma \frac{u_y}{c}\right) < \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_H < -\frac{1}{u_y^2} \frac{1 - M^2 - (1 + 2u_y^2) M^2 / (u_y^2 \alpha)}{1 - M^2 + M^2 / (u_y^2 \alpha)}. \quad (3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \gamma &= 1/\sqrt{1 - v^2}, \\ \alpha &= [h]/[p] - 2, \end{aligned}$$

где $[\cdot]$ обозначает скачок соответствующей величины на ударно-волновом разрыве; $u_y = \gamma v$ — компонента 4-вектора скорости, нормальная к поверхности ударной волны; v — соответствующая компонента гидродинамической скорости, $M = v/c$ — число Маха течения за фронтом ударной волны, c — скорость звука:

$$c^2 = (\partial p / \partial e)_S;$$

e — плотность внутренней энергии; p — давление; $h = e + p$ — плотность энтальпии; производная $(\partial h / \partial p)_H$ берется вдоль ударной адиабаты Тауба–Гюгонно [21]:

$$h_0^2 V_0^2 - h^2 V^2 + (p - p_0)(h_0 V_0^2 + h V^2) = 0, \quad (4)$$

где индекс «0» относится к состоянию перед ударной волной; V — удельный объем в связанной системе отсчета. В зависимости от рассматриваемой системы удельные величины приходятся на частицу, единицу барионного числа или единицу массы.

Левое неравенство в (3) для определения границы нейтральной устойчивости ударной волны не существенно, поскольку участок неустойчивости

$$-\frac{1}{u_y^2} \left(1 + 2\gamma \frac{u_y}{c}\right) > \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_H, \quad (5)$$

соответствующий экспоненциальному росту возмущений, на ударной адиабате всегда перекрывается областью структурной неустойчивости или метастабильного поведения ударной волны. Интерес представляет правое неравенство, так как оно определяет границу области устойчивых ударных волн и области нейтральной устойчивости. Рассмотрим условия, которым должно удовлетворять уравнение состояния вещества, чтобы в нем были возможны ударные волны, отвечающие (3). Для этого преобразуем правое неравенство (3), исключив производную вдоль ударной адиабаты и скорость, с использованием соотношений на релятивистском ударно-волновом разрыве. Запишем это неравенство в эквивалентном виде

$$\frac{1 + u_y^2 q}{2(1 + u_y^2)} < \frac{1}{1 + (M^{-2} - 1)u_y^2 \alpha}, \quad (6)$$

где по определению

$$q = \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_H,$$

и преобразуем отдельно левую и правую части (6). Согласно (4) приращения плотности энергии, давления и удельного объема вдоль ударной адиабаты Тауба–Гюгонно связаны соотношением

$$\frac{X_0}{X} dp + \frac{[p] - h}{X} dX = de, \quad (7)$$

где $X \equiv hV^2$. Используя соотношение на ударно-волновом разрыве

$$\frac{X_0}{X} = u_y^{-2} \frac{[p]}{h} + 1, \quad (8)$$

тождество

$$v^2 = \frac{u_y^2}{1 + u_y^2}$$

и вводя обозначения

$$g = \frac{[p]}{h} - 1, \quad \bar{V}_p = \frac{h}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_e, \quad \bar{V}_e = \frac{h}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial e}\right)_p, \quad (9)$$

получим выражение для левой части (6):

$$\frac{1 + u_y^2 q}{2(1 + u_y^2)} = \frac{1 + g(\bar{V}_p v^2 - \bar{V}_e)}{1 + g(\bar{V}_p c^2 - \bar{V}_e)}. \quad (10)$$

Из соотношений на релятивистском ударно-волновом разрыве следует выражение для параметра α :

$$\alpha = \left(1 - \frac{[p]}{h}\right) / \left(u_y^2 + \frac{[p]}{h}\right). \quad (11)$$

С учетом (11) правая часть (6) приводится к виду

$$\frac{1}{1 + (M^{-2} - 1)u_y^2 \alpha} = \frac{1 + g(1 - v^2)}{1 + g(1 - c^2)}. \quad (12)$$

После подстановки преобразованных выражений (10) и (12) в (6) имеем

$$\frac{1 + g(\bar{V}_p v^2 - \bar{V}_e)}{1 + g(\bar{V}_p c^2 - \bar{V}_e)} < \frac{1 + g(1 - v^2)}{1 + g(1 - c^2)}. \quad (13)$$

Из соотношения для квадрата скорости звука

$$c^2 = -(1 + \bar{V}_e) / \bar{V}_p > 0,$$

ограничения на параметр g , которое следует из соотношений на ударно-волновом разрыве:

$$-1 < g < -1/2,$$

принципа причинности $c < 1$ и условия эволюционности ударно-волнового разрыва $v < c$ следует, что знаменатель правой части (13) положителен, а знак знаменателя левой части неравенства противоположен знаку \bar{V}_p . После приведения к общему знаменателю, деления на g , \bar{V}_p и $v^2 - c^2$, приходим к неравенству, эквивалентному (13),

$$[p] \left(1 - \bar{V}_e / \bar{V}_p\right) > hc^2. \quad (14)$$

С учетом тождества

$$1 - \bar{V}_e / \bar{V}_p = w_\varepsilon|_V,$$

где

$$w_\varepsilon|_V = \left(\frac{\partial w}{\partial \varepsilon}\right)_V,$$

$\varepsilon = Ve$ — внутренняя энергия, $w = \varepsilon + pV$ — энтальпия, (14) принимает вид

$$hc^2 - w_{\varepsilon|V}[p] < 0. \quad (15)$$

Условие (15) равносильно критерию нейтральной устойчивости ударной волны в формулировке Конторовича. Термодинамическое тождество

$$w_{\varepsilon|V}(\varepsilon_V|_w + p) = hc^2,$$

доказательство которого дано в Приложении, можно записать в виде

$$w_{\varepsilon|V}(G + [p]) = hc^2, \quad (16)$$

где

$$G = \varepsilon_V|_w + p_0.$$

Выразив производную $w_{\varepsilon|V}$ из (16), после подстановки в (15) получим эквивалентную запись условия нейтральной устойчивости ударной волны:

$$\frac{G}{G + [p]} hc^2 < 0, \quad (17)$$

из которой следует, что условие нейтральной устойчивости выполняется тогда и только тогда, когда параметр G заключен в диапазоне $-[p] < G < 0$, что равносильно ограничению на производную внутренней энергии:

$$p > -\varepsilon_V|_w > p_0. \quad (18)$$

Левое неравенство в (18) равносильно условию $w_{\varepsilon|V} > 0$, другая запись которого имеет вид $\Gamma > -1$, где

$$\Gamma = V p_T|_V / \varepsilon_T|_V$$

— параметр Грюнайзена. Невыполнение этого условия представляется экзотичным, хотя не противоречит законам термодинамики. В этих условиях силу критерия приобретает правое неравенство

$$-\varepsilon_V|_w > p_0, \quad (19)$$

которое чаще всего не выполняется и выполнение которого в ограниченной области фазовой диаграммы означает реализуемость нейтральной устойчивости ударных волн. Это условие выполняется при отрицательной производной в левой части (19) в первую очередь для ударных волн высокой интенсивности. Приведем ряд примеров.

3. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОГО КРИТЕРИЯ

Релятивистское уравнение состояния газа невзаимодействующих частиц [22],

$$w = \frac{K_3(1/(w - \varepsilon))}{K_2(1/(w - \varepsilon))}, \quad (20)$$

где K_2 и K_3 — модифицированные функции Бесселя второго рода второго и третьего порядка, не допускает выполнение (19) в силу того, что левая часть неравенства равна нулю. Аналогично уравнения состояния ультрарелятивистского газа, излучения, нерелятивистского идеального газа, а также любое калорическое уравнение состояния, связывающее энтальпию и внутреннюю энергию функциональной зависимостью вида $f(w, \varepsilon) = 0$, или в параметрической записи $pV = f(T)$, $\varepsilon = \varepsilon(T)$, допускают существование только устойчивых в рамках линейной теории [1–4] ударных волн. Одним из приложений релятивистской гидродинамики является моделирование ударного сжатия ядерной материи при столкновении релятивистских ядер в коллайдерах, приводящего к образованию кварк-глюонной плазмы и последующему ее расширению и адронизации. На этапе столкновения параметры кварк-глюонной плазмы оцениваются из соотношений на ударно-волновом разрыве, и вопрос устойчивости ударной волны поднимался в литературе, см., например, [23–25]. Калорическое уравнение состояния кварк-глюонной плазмы в рамках модели мешков (M.I.T. bag model, см. [26]), при выводе которого пренебрегается массой кварков, имеет вид

$$w = \frac{4}{3}(\varepsilon - BV), \quad (21)$$

где $B > 0$ — константа модели мешков. Следовательно, выполнение (3) для ударных волн с конечным состоянием в области фазовой диаграммы ядерного вещества, соответствующей кварк-глюонной плазме, невозможно, если влияние корректирующих поправок к (21) не превысит стабилизирующее влияние константы B .

Пусть уравнение состояния вещества задано в параметрической форме

$$p = p(V, T), \quad \varepsilon = \varepsilon(V, T). \quad (22)$$

Перейдем в (19) от переменных (p, w) к переменным (V, T) . Такой переход является взаимно однозначным. В результате получим

$$(pV)_V|_T - \xi(VpV|_T + TpT|_V) > p_0, \quad (23)$$

$$\xi = \frac{1}{1 + \varepsilon_T|_V / (V p_T|_V)}.$$

Необходимое условие реализуемости нейтральной устойчивости, соответствующее пределу ударных волн бесконечной интенсивности, $(p_0 \rightarrow 0)$ в (23), может быть записано в виде

$$(pV)_{V|T} c_V > V p_T|_V \varepsilon_V|_T, \quad (24)$$

где

$$\varepsilon_V|_T = T p_T|_V - p, \quad c_V = \varepsilon_T|_V.$$

Следовательно, для среды с положительным параметром Грюнайзена, что является наиболее распространенным случаем для реальных сред, независимость внутренней энергии от объема $\varepsilon = \varepsilon(T)$ либо отрицательность производной $\varepsilon_V|_T < 0$ при $(pV)_{V|T} > 0$ означает безусловную (независимо от c_V) реализуемость нейтрально устойчивых ударных волн. В этом случае существует пороговая интенсивность ударной волны, выше которой критерий Дьякова–Конторовича выполняется. В оставшихся случаях реализуемость нейтральной устойчивости определяется величиной изохорной теплоемкости. И, напротив, если $(pV)_{V|T} < 0$, неотрицательность $\varepsilon_V|_T$ влечет безусловную устойчивость ударных волн в соответствии с этим критерием. На таких примерах мы видим, как свойство вынужденного или спонтанного излучения звука ударной волной одновременно с фактом ее нейтральной устойчивости в рамках линейной теории определяется по уравнению состояния без построения ударных адиабат и проверки критерия в его первоначальном виде.

4. НЕРЕЛЯТИВИСТСКИЙ ПРЕДЕЛ

Полученная в рамках более общей теории форма записи условия нейтральной устойчивости ударной волны (18) одинаково справедлива для релятивистских и нерелятивистских ударных волн. В качестве иллюстрации этого утверждения выведем ее непосредственно из (2). Приращения переменных вдоль ударной адиабаты

$$\varepsilon - \varepsilon_0 + \frac{1}{2}(p + p_0)(V - V_0) = 0 \quad (25)$$

связаны соотношением

$$\varepsilon_V|_p dV + \varepsilon_p|_V dp + \frac{V - V_0}{2} dp + \frac{p + p_0}{2} dV = 0, \quad (26)$$

которое с учетом выражения для скорости звука и соотношений на ударно-волновом разрыве приводит к следующему выражению для параметра Дьякова:

$$L = -1 + \frac{1 - M^2}{1 - \frac{1}{2}(p - p_0)/(p + \varepsilon_V|_p)}. \quad (27)$$

Так как, с другой стороны, (2) равносильно

$$L > -1 + \frac{1 - M^2}{\frac{1}{2}(1 - M^2(V - V_0)/V)}, \quad (28)$$

условие Дьякова–Конторовича можно записать в виде

$$\frac{1 - M^2}{1 - \frac{1}{2}(p - p_0)/(p + \varepsilon_V|_p)} > \frac{1 - M^2}{\frac{1}{2}(1 - M^2(V - V_0)/V)}. \quad (29)$$

$M < 1$, $V_0 > V$, следовательно, обе дроби положительны и условие принимает вид

$$M^2 \frac{V_0 - V}{V} > 1 - \frac{p - p_0}{p + \varepsilon_V|_p}. \quad (30)$$

С учетом тождеств

$$\frac{c^2}{V^2} = \frac{p + \varepsilon_V|_p}{\varepsilon_p|_V}, \quad M^2 = \frac{p - p_0}{V_0 - V} \frac{V^2}{c^2} \quad (31)$$

имеем

$$w_\varepsilon|_V [p] > c^2/V, \quad (32)$$

что является нерелятивистским аналогом (15). Используя нерелятивистский предел тождества (16)

$$w_\varepsilon|_V (G + [p]) = c^2/V, \quad (33)$$

имеем окончательно

$$p > -\varepsilon_V|_w > p_0.$$

Ожидаемо приходим к результату, полученному в рамках релятивистской гидродинамики. Метод нормальных мод и метод исследования корректности смешанной задачи для возмущений одинаково определяют границы устойчивости, соответственно, ограничения на производные уравнения состояния за фронтом нейтрально устойчивой ударной волны [11]

$$\frac{\rho}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_\varepsilon < 1, \quad 1 + \frac{1}{\rho \varepsilon_p|_V} > 0 \quad (34)$$

эквивалентны (18). Действительно, соотношения

$$-\varepsilon_V|_w = \frac{w_V|_\varepsilon}{w_\varepsilon|_V} = \frac{p + V p_V|_\varepsilon}{1 + V/\varepsilon_p|_V} > p_0,$$

$$p + \varepsilon_V|_w = \frac{h c^2}{w_\varepsilon|_V} = \frac{h c^2}{1 + V/\varepsilon_p|_V} > 0$$

показывают связь между (34) и (18). При этом (18) имеет простую термодинамическую трактовку: нейтрально устойчивые ударные волны возможны только в условиях, когда внутренняя энергия уменьшается при расширении в изэнтропийном процессе, а границами нейтральной устойчивости в пространстве термодинамических переменных являются линии уровня производной внутренней энергии по объему $\varepsilon_V|_w$.

5. НЕЙТРАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ УДАРНЫХ ВОЛН И ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД ПЕРВОГО РОДА

5.1. Двухфазные состояния за фронтом ударной волны

Для ударных волн с конечным состоянием в двухфазной области фазового перехода ($p = p_s(T)$ и $p_V|_T = 0$, где p_s — давление на линии насыщения) условие (24) принимает вид

$$\frac{c_V}{R} > \theta (\theta / (1 - I^{-1}) - 1) Z, \quad (35)$$

где

$$Z = \frac{pV}{RT}$$

— коэффициент сжимаемости,

$$\theta = \frac{d(\ln p_s)}{d(\ln T)}$$

— функция температуры, характеризующая наклон кривой фазового равновесия в плоскости переменных (p, T) , $I = p/p_0$ — перепад давления на фронте ударной волны. Необходимое условие реализуемости нейтрально устойчивых ударных волн, соответствующее пределу ударных волн бесконечной интенсивности, есть

$$\frac{c_V}{R} > \theta (\theta - 1) Z. \quad (36)$$

Из (36) следует безусловная (независимо от c_V) реализуемость нейтральной устойчивости сильных ударных волн при $0 < \theta < 1$. Ударная волна в этом случае является нейтрально устойчивой при перепаде давления на фронте $I > (1 - \theta)^{-1}$. В случае $\theta < 0$ и $\theta > 1$ реализуемость таких ударных волн определяется величиной изохорной теплоемкости. Фазовому переходу жидкость–газ для широкого круга веществ соответствует случай $\theta > 1$.

Значение θ в критической точке является параметром подобия термодинамических свойств различных веществ (параметр Риделя, $\alpha = (d(\ln p)/d(\ln T))_c$) и в рамках закона соответственных состояний аппроксимируется зависимостью

$$\alpha = 4.919\omega + 5.811,$$

где ω — ацентрический фактор Питцера, что с учетом корреляции для сжимаемости

$$Z_c = 0.291 - 0.080\omega$$

дает

$$(\theta (\theta - 1) Z)_c \approx 8.135 + 12.97\omega.$$

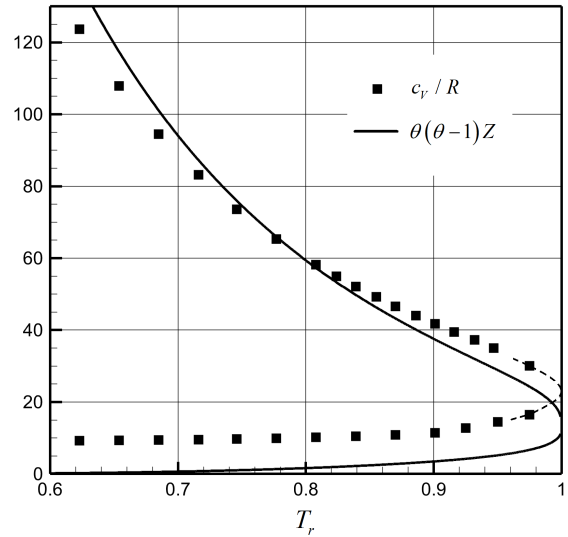


Рис. 1. Левая и правая части (36) для H_2O на границе двухфазной области в зависимости от приведенной температуры

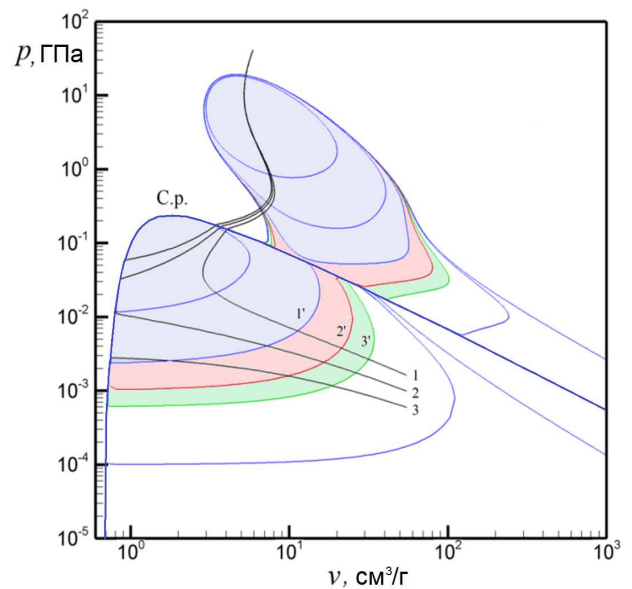


Рис. 2. Линии уровня $\epsilon_V|_w$ для магния, k' — граница нейтральной устойчивости $\partial\Omega^{(pk)}$, где p_k — начальное давление ударной адиабаты k , С.р. — критическая точка

На границе двухфазной области со стороны насыщенной жидкости и насыщенного пара правая часть (36) является функцией температуры. Эти зависимости, следующие из закона соответственных состояний для ацентрического фактора воды $\omega = 0.344$ [27], показаны на рис. 1, где также представлены данные о теплоемкости жидкой воды и пара на гра-

нице двухфазной области со стороны двухфазных состояний [28]. Правая и левая части (36) внутри двухфазной области на изотерме являются линейными функциями удельного объема, следовательно, выполнения неравенства на границах двухфазной области со стороны жидкости и газа достаточно, чтобы оно выполнялось во всех внутренних точках. Из рис. 1 следует, что (36) выполняется в околоритической области при температуре, превышающей приблизительно 0.78, при всех значениях удельного объема. При меньшей приведенной температуре появляются двухфазные состояния с преобладающей долей пара, для которых (36) не выполняется. Похожая картина имеет место и для других веществ. В [7] на основе широкодиапазонного уравнения состояния показана аналогичная картина нейтральной устойчивости ударных волн с конечным состоянием в двухфазной области металлов. На рис. 2 для широкодиапазонного уравнения состояния магния (см. [7]) показаны области нейтральной устойчивости ударных волн, построенные как линии уровня $\varepsilon_V|_w$. Обозначение k' соответствует границе области $\partial\Omega^{(p_k)}$, где p_k — начальное давление ударной адиабаты k . Каждая из показанных ударных адиабат имеет участки нейтральной устойчивости на пересечении с соответствующей областью $\Omega^{(p_k)}$ как в двухфазной, так и в однофазной области.

5.2. Однофазные состояния за фронтом ударной волны

Рассмотрим следствия (23) для ударных волн с конечным состоянием в однофазной области фазового перехода при положительном наклоне кривой фазового равновесия в критической точке $\theta_c > 0$. Из непрерывности $p_V|_T$ при переходе через критическую точку из двухфазной области в однофазную следует, что между бинодалью фазового перехода и кривой Бойля (определяемой условием $(pV)_V|_T = 0$) в переменных (V, p) выполняется $(pV)_V|_T > 0$. Из непрерывности производной $p_T|_V$ в критической точке (соотношение Планка–Гиббса $(p_T|_V)_c = (dp_s/dT)_c$, означающее, что в критической точке наклон линии насыщения в координатах (T, p) равен наклону критической изохоры) следует непрерывность $\varepsilon_V|_T$, а из тождества

$$(\partial(\varepsilon_V|_T)/\partial T)|_V = (\partial c_V/\partial V)|_T$$

— ограниченность ее производной по температуре. Заметим, что модели, в которых теплоемкость при постоянном объеме зависит только от температуры,

приводят к постоянству $\varepsilon_V|_T$ на изохоре. Следовательно, если наклон кривой фазового равновесия в плоскости переменных (T, p) заключен в интервале $0 < \theta_c < 1$, в окрестности критической точки со стороны однофазных состояний существует пересечение областей $(pV)_V|_T > 0$ и $\varepsilon_V|_T < 0$, соответствующее безусловной реализуемости (независимо от теплоемкости c_V) нейтральной устойчивости ударных волн.

Граница нейтральной устойчивости на (V, p) -диаграмме в этом случае расположена между кривой Бойля и кривой $\varepsilon_V|_T = 0$ и проходит через точки их пересечения, если такие имеются. Если наклон кривой фазового равновесия удовлетворяет условию $\theta_c > 1$, то в окрестности критической точки со стороны однофазных состояний выполняются условия $(pV)_V|_T > 0$ и $\varepsilon_V|_T > 0$. Фазовый переход жидкость–газ соответствует этому случаю. Пусть $\varepsilon_V|_T$ сохраняет знак во всей области над бинодалью, как это имеет место для рассмотренных ниже моделей реального газа. Тогда, в зависимости от величины изохорной теплоемкости, нейтральная устойчивость ударных волн возможна только для состояний за фронтом ударной волны, заключенных между бинодалью и кривой Бойля. Так как предел большой теплоемкости соответствует выполнению условия нейтральной устойчивости ударных волн для всех состояний между бинодалью и кривой Бойля, а предел низкой теплоемкости — его невыполнению (в этом пределе (23) принимает вид $-\varepsilon_V|_T > 0$), существует пороговое значение теплоемкости, при котором нейтрально устойчивые ударные волны становятся возможными. Оценим этот порог на основе термодинамического критерия нейтральной устойчивости ударных волн для некоторых моделей реального газа.

5.3. Влияние теплоемкости

Пусть состояние жидкости и газа описывается единым уравнением состояния $\varepsilon = \varepsilon(p, V)$, как в случае уравнения Ван дер Ваальса. Из (29) заключаем, что граница $\partial\Omega^{(p_0)}$ области нейтральной устойчивости проходит через точки пересечения прямой $p = p_0$ и границы гиперболичности, определяемой условием $c = 0$, где c — адиабатическая скорость звука. Эти точки расположены на плоскости (V, p) ниже спинодали и соответствуют термодинамически неустойчивым состояниям. Рассмотрим уравнение состояния общего вида:

$$p = r(V)RT - A(V), \quad (37)$$

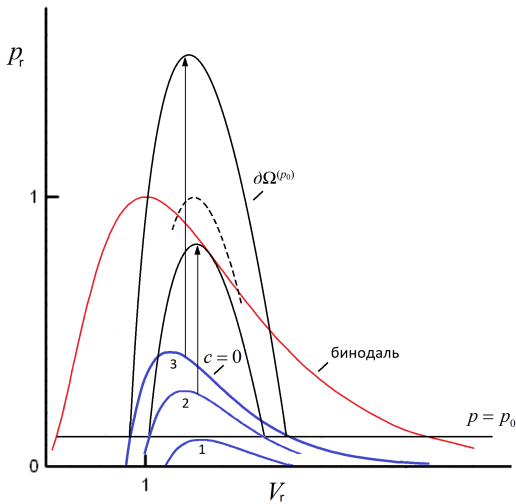


Рис. 3. Схема, показывающая зависимость области нейтральной устойчивости $\partial\Omega^{(p_0)}$ в реальных газах от изохорной теплоемкости. Кривые 1–3 — адиабатическая спиноподаль для трех значений теплоемкости $c_{V3} > c_{V2} > c_{V1}$. $\Omega^{(p_0)}$ для каждого значения c_V определяется неравенством (43)

где $r(V)$, $A(V)$ — функции удельного объема. Зависимость (37) обобщает уравнение состояния газа Ван дер Ваальса, второе уравнение Дитеричи, различные приближения модели твердых сфер, уточняющие функцию $r(V)$, и модели члена притяжения $A(V)$. Для оценки реализуемости нейтральной устойчивости ударной волны в однофазной области слабую температурную зависимость этого члена, которая учитывается в полуэмпирических уравнениях состояния, можно линеаризовать в окрестности бинодали. При известной зависимости изохорной теплоемкости от температуры вида $\varepsilon_T|_V = c_V(T)$ фундаментальное уравнение такого газа записывается в параметрической форме:

$$\begin{aligned} \varepsilon(V, T) &= \varepsilon_0 + \int_0^T c_V(t') dt' + \int_{\infty}^V A(v') dv', \\ s(V, T) &= s_0 + \int_0^T \frac{c_V(t')}{t'} dt' + R \int_{\infty}^V r(v') dv'. \end{aligned} \tag{38}$$

Квадрат адиабатической скорости звука в такой среде есть

$$\begin{aligned} c^2 &= V^2 \left(\left(\frac{rR}{c_V} - \frac{r'}{r} \right) (p + A) + A' \right), \\ r' &= dr/dV, \quad A' = dA/dV. \end{aligned} \tag{39}$$

Используя (39), выразим квадрат скорости звука через давление при $c = 0$, представив его как функцию объема $p|_{c=0} = \mathcal{H}(V, c_V)$:

$$c^2 = V^2 \left(\frac{rR}{c_V} - \frac{r'}{r} \right) (p - \mathcal{H}(V, c_V)), \tag{40}$$

$$\mathcal{H}(V, c_V) = -A' / \left(\frac{rR}{c_V} - \frac{r'}{r} \right) - A. \tag{41}$$

Для данной среды

$$e_p|_V = \frac{1}{V} \frac{\varepsilon_T|_V}{p_T|_V} = \frac{1}{rV} \frac{c_V}{R}. \tag{42}$$

Подстановка (40) и (42) в (32) приводит к условию нейтральной устойчивости ударной волны:

$$p - p_0 < \lambda (\mathcal{H}(V, c_V) - p_0), \tag{43}$$

$$\lambda = V \left(\frac{r'}{r} - \frac{R}{c_V} r \right) / \left(1 + V \frac{r'}{r} \right). \tag{44}$$

В случае газа с постоянной изохорной теплоемкостью кривая $p = \mathcal{H}(V, c_V)$ — адиабатическая спиноподаль. Граница области нейтральной устойчивости $\partial\Omega^{(p_0)}$ в плоскости переменных (V, p) , в соответствии с (43), есть образ адиабатической спиноподали при растяжении относительно прямой $p = p_0$ в направлении оси p с коэффициентом, зависящим от объема и теплоемкости. Это дает простую качественную картину положения области нейтральной устойчивости относительно бинодали, показанную на рис. 3, из которой следует, что если p_0 превышает максимум давления на адиабатической спиноподали (кривая 1), (18) не выполняется даже в области метастабильных и нестабильных состояний. При повышении теплоемкости адиабатическая спиноподаль смещается в область более высоких давлений и при некотором значении теплоемкости $\partial\Omega^{(p_0)}$ выходит в область термодинамически стабильных однофазных состояний (кривая 2). При дальнейшем увеличении теплоемкости становятся возможными сверхкритические давления за фронтом нейтрально устойчивой ударной волны (показана штриховой линией). При еще большей теплоемкости $\partial\Omega^{(p_0)}$ проходит через критическую точку фазового перехода и становятся возможными нейтрально устойчивые ударные волны со сверхкритической плотностью за фронтом ударной волны (кривая 3). Чтобы показать чувствительность пороговых значений теплоемкости к параметру θ_c , который согласно (36) играет важную роль в вопросе реализуемости нейтрально устойчивых ударных волн в околоскритической области, количественные оценки пороговых значений теплоемкости приведем для газов Ван дер Ва-

альса и Дитеричи. Согласно уравнению Ван дер Ваальса параметр подобия Риделя $\theta_c = 4$, в то время как для уравнения Дитеричи $\theta_c = 5$, что существенно ближе к экспериментальным значениям. Для газов Ван дер Ваальса и Дитеричи

$$r(V) = (V - b)^{-1}, \quad A(V) = \frac{a}{V^n},$$

и условие (43) имеет простой вид

$$\begin{aligned} p - p_0 &< \gamma \frac{V}{b} (\mathcal{H}(V, c_V) - p_0), \\ \mathcal{H}(V, c_V) &= \frac{a}{\gamma V^n} (n - \gamma - nb/V), \end{aligned} \quad (45)$$

где

$$\gamma = 1 + R/c_V.$$

Согласно (45) максимум давления на границе нейтральной устойчивости составляет

$$\max_{\partial\Omega^{(0)}}(p) = \frac{a}{b^n} \frac{(n - \gamma)^n (n - 1)^{n-1}}{n^{2n-1}}. \quad (46)$$

С учетом параметров критической точки

$$\begin{aligned} V_c &= \frac{n+1}{n-1} b, \quad p_c = \frac{a}{b^n} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n+1}, \quad \theta_c = \frac{2n}{n-1}, \\ \frac{RT_c}{p_c V_c} &= \frac{4n}{(n-1)(n+1)} \end{aligned}$$

максимум давления на $\partial\Omega^{(0)}$, отнесенный к давлению в критической точке, есть

$$\max_{\partial\Omega^{(0)}}(p/p_c) = \frac{(n - \gamma)^n (n + 1)^{n+1}}{(n - 1)^2 n^{2n-1}}. \quad (47)$$

Согласно (47) граница нейтральной устойчивости ударных волн выходит в область сверхкритических давлений при условии

$$\gamma < n - \frac{(n-1)^{2/n} n^{(2n-1)/n}}{(n+1)^{(n+1)/n}}, \quad (48)$$

что дает

$$\gamma < 2 - (2/3)^{3/2} \approx 1.455$$

для газа Ван дер Ваальса ($n = 2$) и

$$\gamma < 5/3(1 - 5^{2/5}/2^{18/5}) \approx 1.405$$

для газа Дитеричи ($n = 5/3$).

Условие достижения в нейтрально устойчивой ударной волне сверхкритических плотностей получим, подставив в (45) параметры критической точки

$$\gamma < \left(\frac{2n}{n-1} - \frac{n-1}{n+1} (1 - p_0) \right) / \left(p_0 + \frac{n+1}{n-1} \right). \quad (49)$$

Для уравнений состояния Ван дер Ваальса и Дитеричи имеем $\gamma < 1.222$ и $\gamma < 1.187$ соответственно. Следует отметить близость этих значений к условию реализуемости нейтрально устойчивых ударных волн с начальным состоянием в однофазной области. Согласно [13] реализация таких ударных волн становится возможной при $\gamma \approx 1.215$ и $\gamma \approx 1.199$ соответственно. Это условие отвечает касанию границы области нейтральной устойчивости $\partial\Omega^{(p_0)}$ ударной адиабатой с начальной точкой на бинодали фазового перехода при давлении p_0 .

Полученные оценки согласуются с общей тенденцией, вытекающей из (24) и непрерывности θ при переходе через критическую точку: чем выше значение параметра подобия Риделя для фазового перехода, тем выше пороговые значения изохорной теплоемкости, при которых реализуются нейтрально устойчивые ударные волны. Поскольку экспериментальные значения параметра Риделя ($\theta_c \approx 5.8$) превышают значения для уравнения Дитеричи ($\theta_c = 5$) и уравнения Ван дер Ваальса ($\theta_c = 4$), для реальных веществ можно ожидать еще более жестких ограничений, чем дают эти модели. В этом случае теплоемкости поступательных и вращательных степеней свободы молекул недостаточно для реализации нейтрально устойчивых ударных волн с конечным состоянием в однофазной области. Необходимо наличие термодинамических факторов, связанных с возбуждением внутренних степеней свободы, что привело бы к повышению теплоемкости или иных термодинамических факторов (поправок на неидеальность), приводящих к уменьшению величины изэнтальпийной производной внутренней энергии по удельному объему.

Модели сред, в которых до настоящего времени рядом авторов констатировалось выполнение условия нейтральной устойчивости ударных волн, дают представление о таких факторах. Для нейтрально устойчивых ударных волн с конечным состоянием в двухфазной области фазовой диаграммы таким фактором являются фазовые превращения. И здесь мы сталкиваемся со следующей проблемой.

Линейная теория устойчивости ударных волн с использованием метода нормальных мод или в рамках исследования корректности смешанной задачи для возмущений рассматривает ударную волну как поверхность разрыва, за которой выполняются условия локального термодинамического равновесия. В то же время факторы, которые приводят к выполнению условия нейтральной устойчивости, такие как возбуждение внутренних степеней свободы молекул, фазовые переходы в многофазной среде, иониза-

ция с установлением равновесия между электронной и ионной подсистемой и т. д., предполагают, что к узкой градиентной зоне с преимущественно вязкой структурой, которую можно рассматривать как ударно-волновой разрыв, примыкает протяженная зона релаксации среды к термодинамическому равновесию. При этом на вязком скачке в приближении замороженности процессов релаксации условие нейтральной устойчивости не выполняется. Ожидается, что взаимодействие ударно-волнового разрыва с зоной релаксации приведет к тем свойствам длинноволновых двумерных возмущений, которые предсказывает линейная теория, а именно: изменение закона затухания возмущений ударной волны по сравнению с тем случаем, когда ударная волна устойчива в линейном приближении; вынужденное (или спонтанное) излучение звука ударной волной. Здесь мы сошлемся на результат недавних работ [29, 30], в которых для ударной волны, удовлетворяющей условию (2), выполнен линейный анализ устойчивости с учетом релаксационной структуры и показано, что взаимодействие ударной волны и примыкающей к ней зоны релаксации согласуется с выводом классической теории об излучении звука ударной волной.

Вместе с тем линейный анализ не позволяет определить факт устойчивости или неустойчивости ударной волны при выполнении условия Дьякова–Конторовича и определить закон затухания (или роста) возмущений, который в этом случае определяется нелинейными членами разложения по амплитуде возмущений. Фактически выполнение этого условия просто сигнализирует о смене закона затухания возмущений по сравнению с устойчивой в рамках линейной теории ударной волной. Поэтому в следующем разделе мы рассмотрим влияние неравновесности внутренних степеней свободы на скорость затухания возмущений в рамках нелинейной задачи.

6. ВЛИЯНИЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЙ НЕРАВНОВЕСНОСТИ

В качестве простой модели нейтрально устойчивой ударной волны рассматривается ударная волна с конечным состоянием в однофазной околоритической области фазового перехода жидкость–газ в газе с уравнением состояния

$$\begin{aligned}
 p(\rho, T) &= \frac{\rho RT}{1 - b\rho} - a\rho^2, \\
 \varepsilon(\rho, T) &= c_V^0 T - a\rho + N \frac{R\Theta}{e^{\Theta/T} - 1},
 \end{aligned}
 \tag{50}$$

где характеристическая температура Θ одинакова для N гармонических осцилляторов, приходящихся на одну частицу. Считается, что при изменении температуры система приходит в равновесие в течение характерного времени τ . Модельная кинетика постулировалась в виде

$$\tau d\Upsilon/dt = \Upsilon^{eq} - \Upsilon,$$

где

$$\Upsilon^{-1} = c_V^0/R + N \frac{\Theta/T}{e^{\Theta/T} - 1}. \tag{51}$$

Приведенная к безразмерному виду с использованием параметров критической точки фазового перехода система, описывающая течение такого газа, есть

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0, \\
 \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + \mathbf{I} p) &= 0, \\
 \frac{\partial (e + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2)}{\partial t} + \nabla \cdot ((e + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 + p) \mathbf{v}) &= 0, \\
 p &= \frac{\Upsilon(e + 3\rho^2)}{1 - \rho/3} - 3\rho^2, \\
 \frac{\partial \rho \Upsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \Upsilon) &= \rho \tau^{-1} (\Upsilon^{eq}(p, \rho) - \Upsilon), \\
 \Upsilon^{eq}(p, \rho) &= \left(c_V^0/R + \frac{N}{x(e^{1/x} - 1)} \right)^{-1}, \\
 x &= \frac{(p + 3\rho^2)(\rho^{-1} - 1/3)}{(3/8)\Theta},
 \end{aligned}
 \tag{52}$$

где $e = \rho\varepsilon$ — плотность внутренней энергии, \mathbf{v} — вектор скорости. Для данной системы рассматривается задача об эволюции начального периодического возмущения фронта нейтрально устойчивой ударной волны.

Течение рассматривается в пространственной области

$$(x, y) \in [-l, L] \times [0, \Lambda]$$

в системе отсчета, в которой невозмущенная ударная волна неподвижна. Начальное возмущение задано искривлением формы ударно-волнового разрыва

$$x = f(y),$$

где

$$f(y) = (1/5)\Lambda \cos(\pi y/\Lambda),$$

Λ — полупериод возмущения. Начальные данные, соответствующие нейтрально устойчивой ударной волне:

$$\begin{aligned}
 (p, V) &= (0.1, 20) \quad \text{при } x < f(y); \\
 p &= 1.2 \quad \text{при } x > f(y).
 \end{aligned}$$

Оставшиеся параметры определялись из соотношений на невозмущенном ударно-волновом разрыве в условиях равновесия внутренних степеней свободы $\Upsilon = \Upsilon^{eq}$.

На границах $y = 0$ и $y = \Lambda$ заданы условия симметрии. Условие на участке границы $x = -l$ фиксирует параметры течения перед ударной волной, на удаленной границе при $x = L$ ставились неотражающие граничные условия.

Выбирались следующие параметры модели, обеспечивающие выполнение условия нейтральной устойчивости ударной волны при заданных параметрах начального состояния и конечного давления:

$$c_V^0/R = 3/2, \quad N = 12, \quad \Theta = 3.$$

Затухание возмущений ударной волны определяется зависимостью от времени усредненных пульсаций давления на контуре C за ее фронтом. Контур усреднения расположен в зоне релаксации за ударно-волновым разрывом с постоянным смещением относительно его текущего положения, см. рис. 4. На рис. 5 показаны результаты расчета для трех значений полуширины зоны релаксации Δ , определяемой как расстояние от ударно-волнового разрыва, на котором разность $\Upsilon - \Upsilon^{eq}$ уменьшается в два раза по сравнению с максимальным значением. Масштаб времени t_Λ — время, за которое ударная волна проходит расстояние, равное половине пространственного периода возмущения Λ . Представленные расчеты показывают изменение характера затухания возмущений в зависимости от соотношения ширины зоны релаксации и пространственного периода возмущения. При $\Delta/\Lambda = 0.3$ наблюдается закон затухания, близкий к экспоненциальному, характерному для устойчивых ударных волн. При $\Delta/\Lambda = 0.005$ закон затухания изменяется на более слабый, который можно аппроксимировать степенной зависимостью.

Изменение закона затухания по сравнению с устойчивой ударной волной является вполне ожидаемым для нейтрально устойчивых в рамках линейного анализа ударных волн. Стабилизирующее влияние конечной ширины зоны релаксации проявляется в большей степени для коротковолновых возмущений. Следует отметить, что это влияние является достаточно сильным: уже при отношении длины волны возмущения к характерной ширине зоны релаксации порядка 20 мы видим существенное изменение в скорости затухания возмущений.

Из расчетов, представленных на рис. 5, можно заключить, что в отношении скорости затуха-

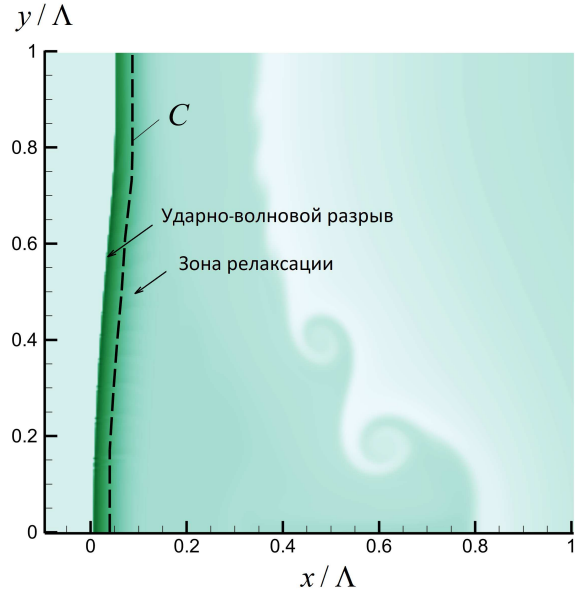


Рис. 4. Положение контура C , на котором вычисляются среднеквадратичные пульсации давления за фронтом ударной волны

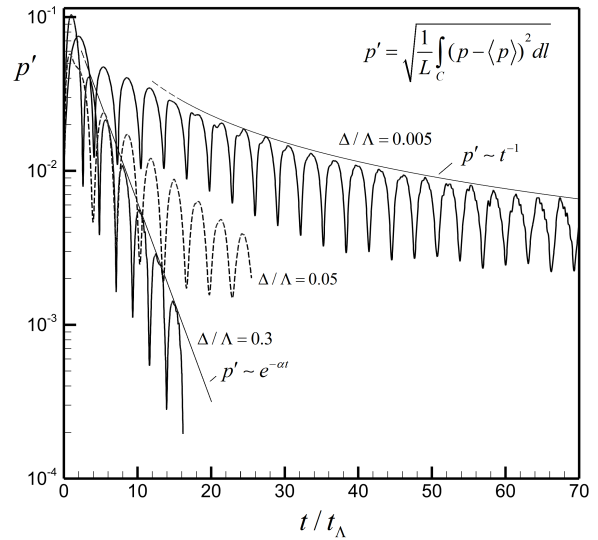


Рис. 5. Влияние зоны релаксации на затухание возмущений нейтрально устойчивой ударной волны; Λ — полупериод возмущения, Δ — полуширина зоны релаксации, t_Λ — время, за которое ударная волна проходит расстояние Λ

ния возмущений диапазон нейтральной устойчивости ударных волн остается выделенным при учете неравновесной структуры ударной волны. При этом практическая значимость будет определяться шириной релаксационной зоны и спектром возмущений в конкретной задаче.

Учет влияния структуры ударной волны, как известно, корректирует выводы линейной теории устойчивости ударных волн, рассматривающей ударную волну как поверхность разрыва. В частности, в диапазоне параметров (1), в котором линейная теория предсказывает развитие двумерной неустойчивости, вязкие ударные волны не реализуются, а сжатие вещества происходит в комбинированной волне [31–35]. В среде с фазовым переходом такая комбинированная волна сжатия может иметь двухволновую структуру, в которой предвестник соответствует сжатию вещества в исходной фазе, а следующая за ней ударная волна является волной фазового превращения. Теоретический пример дает ударное сжатие ядерной материи в условиях кварк-адронного фазового перехода [25]. Из термодинамической формулировки критерия нейтральной устойчивости (18) следует, что при распаде нейтрально устойчивой ударной волны вследствие структурной неустойчивости замыкающая ударная волна в комбинированной волне сжатия сохраняет свойство нейтральной устойчивости, если интенсивность предвестника не превышает порогового значения

$$\delta p < -(\varepsilon_V|_w + p_0).$$

В этом отношении влияние структурного фактора также является условным.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Термодинамическая формулировка критерия нейтральной устойчивости ударной волны совпадает для релятивистских и нерелятивистских ударных волн и сводится к простому условию на производную внутренней энергии по удельному объему при постоянной энтальпии: $p > -\varepsilon_V|_w > p_0$, где индекс «0» соответствует начальному состоянию. Такая формулировка критерия позволяет рассматривать реализуемость нейтрально устойчивых ударных волн в средах с различными термодинамическими свойствами отдельно от анализа ударных адиабат. В частности, определяющее влияние на реализуемость нейтрально устойчивых ударных волн в среде с фазовым переходом первого рода оказывает наклон кривой фазового равновесия в плоскости (p, T) . При значениях параметра Риделя $\theta_c = d(\ln p_s)/d(\ln T)$, характерных для фазового перехода жидкость–газ, выполнение условия нейтральной устойчивости для ударных волн с конечным состоянием в однофазной области требует высокой теплоемкости среды, превышающей теплоемкость идеального газа с учетом

вращательных и поступательных степеней свободы молекул. Результаты для модельного уравнения состояния, обобщающего уравнения состояния Ван дер Ваальса и Дитеричи, показали, что при увеличении параметра Риделя пороговое значение теплоемкости, при котором становится возможна нейтральная устойчивость ударных волн, увеличивается. Выполнению условия нейтральной устойчивости для ударных волн с конечным состоянием в двухфазной области фазового перехода жидкость–газ способствует высокая изохорная теплоемкость, обусловленная теплотой фазового перехода. Рассмотрение термодинамических факторов, которые приводят к выполнению условия нейтральной устойчивости ударных волн, на основе термодинамического критерия и по литературным данным о случаях его выполнения, говорит о том, что условие нейтральной устойчивости выполняется в результате влияния зоны релаксации среды к локальному термодинамическому равновесию за фронтом ударной волны, поскольку вязкий скачок с возбуждением поступательных и вращательных степеней свободы не удовлетворяет этому условию. В неравновесной зоне протекают процессы, уменьшающие величину изоэнтальпийной производной внутренней энергии по удельному объему. На основе простой модели релаксации внутренних степеней свободы молекул для ударной волны с конечным состоянием в окологримальной области фазового перехода жидкость–газ показано влияние зоны релаксации на скорость затухания возмущений ударной волны.

Финансирование. Работа поддержана министерством науки и высшего образования Российской Федерации (государственное задание № 075-01129-23-00).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Преобразуем правую часть термодинамического тождества

$$w_\varepsilon|_V \varepsilon_V|_w = -w_V|_\varepsilon \tag{53}$$

следующим образом:

$$\begin{aligned} -w_V|_\varepsilon &= -p - V p_V|_\varepsilon = \\ &= -p - V p_V|_S - V p_S|_V S_V|_\varepsilon = \\ &= -p - V p_V|_S - V \frac{pT|_V}{S_T|_V} S_V|_\varepsilon = \\ &= -p - V p_V|_S - V \frac{pT|_V}{\varepsilon T|_V} p = hc^2 - p w_\varepsilon|_V. \end{aligned}$$

После подстановки в (53) и перегруппировки

$$w_\varepsilon|_V(\varepsilon_V|_w + p) = hc^2, \quad (54)$$

где

$$w_\varepsilon|_V = 1 + \Gamma = 1 - \bar{V}_e/\bar{V}_p,$$

$\Gamma = Vp_\varepsilon|_V$ — параметр Грюнайзена, определение безразмерных параметров \bar{V}_e и \bar{V}_p дано в (9). В нерелятивистском пределе, $h \rightarrow \rho$, (54) принимает вид

$$w_\varepsilon|_V(\varepsilon_V|_w + p) = \rho c^2. \quad (55)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. S. P. D'yakov, *The Stability of Shockwaves: Investigation of the Problem of Stability of Shock Waves in Arbitrary Media*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **27**, 288 (1954).
2. V. M. Kontorovich, *Concerning the Stability of Shock Waves*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **33**, 1525 (1957).
3. J. J. Erpenbeck, *Stability of Step Shocks*, Phys. Fluids **5**, 1181 (1962); DOI:10.1063/1.1706503.
4. V. M. Kontorovich, *Stability of Shock Waves in Relativistic Hydrodynamics*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **34**, 186 (1958).
5. P. V. Tytarenko and V. I. Zhdanov, *Existence and Stability of Shock Waves in Relativistic Hydrodynamics with General Equation of State*, Phys. Lett. A **240**, 295 (1998); DOI:10.1016/S0375-9601(97)00973-0.
6. I. V. Lomonosov, V. E. Fortov, K. V. Khishchenko, and P. R. Levashov, *Shock Wave Stability in Metals*, AIP Conf. Proc. **505**, 85 (2000); DOI:10.1063/1.1303427.
7. I. V. Lomonosov, V. E. Fortov, K. V. Khishchenko, and P. R. Levashov, *Theoretical Investigation of Shock Wave Stability in Metals*, AIP Conf. Proc. **706**, 91 (2004); DOI:10.1063/1.1780191.
8. I. V. Lomonosov and N. A. Tahir, *Theoretical Investigation of Shock Wave Stability in Metals*, Appl. Phys. Lett. **92**, 101905 (2008).
9. M. Mond and I. M. Rutkevich, *Spontaneous Acoustic Emission from Strong Ionizing Shocks*, J. Fluid Mech. **275**, 121 (1994).
10. M. Mond and I. M. Rutkevich, *Spontaneous Acoustic Emission from Strong Shocks in Diatomic Gases*, J. Fluid Mech. **14**, 1468 (2002); DOI:10.1063/1.1458005.
11. G. Russo, *Some Remarks on the Stability of Shock Waves*, Meccanica **25**, 83 (1990); DOI:10.1007/BF01566206.
12. J. Bates and D. Montgomery, *The D'yakov-Kontorovich Instability of Shock Waves in Real Gases*, Phys. Rev. Lett. **84**, 1180 (2000); DOI:10.1103/PhysRevLett.84.1180.
13. A. V. Konyukhov, A. P. Likhachev, V. E. Fortov, S. I. Anisimov, and A. M. Oparin, *On the Neutral Stability of a Shock Wave in Real Media*, JETP Lett. **90**, 18 (2009); DOI:10.1134/S0021364009130050.
14. N. Wetta, J.-C. Pain, and O. Heuzé, *D'yakov-Kontorovitch Instability of Shock Waves in Hot Plasmas*, Phys. Rev. E **98**, 033205 (2018); DOI:10.1103/PhysRevE.98.033205.
15. C. Huete and M. Vera, *D'Yakov-Kontorovich Instability in Planar Reactive Shocks*, J. Fluid Mech. **879**, 54 (2019); DOI:10.1017/jfm.2019.942.
16. C. Huete, F. Cobos-Campos, E. Abdikamalov, and S. Bouquet, *Acoustic Stability of Nonadiabatic High-Energy-Density Shocks*, Phys. Rev. Fluids **5**, 113403 (2020); DOI:10.1103/PhysRevFluids.5.113403.
17. G. R. Fowles, *Stimulated and Spontaneous Emission of Acoustic Waves from Shock Fronts*, Phys. Fluids **24**, 220 (1981); DOI:10.1063/1.863369.
18. A. M. Anile and G. Russo, *Linear Stability for Plane Relativistic Shock Waves*, Phys. Fluids **30**, 1045 (1987); DOI:10.1063/1.866302.
19. G. Russo and A. M. Anile, *Stability Properties of Relativistic Shock Waves: Basic Results*, Phys. Fluids **30**, 2406 (1987).
20. G. Russo, *Stability Properties of Relativistic Shock Waves: Applications*, Astrophys. J. **334**, 707 (1988); DOI:10.1086/166872.
21. A. H. Taub, *Relativistic Rankine-Hugoniot Equations*, Phys. Rev. **74**, 328 (1948); DOI:10.1103/PhysRev.74.328.
22. J. L. Synge, *The Relativistic Gas*, Series in Physics, North-Holland Publ. Comp. (1957).
23. K. A. Bugaev and M. I. Gorenstein, *Relativistic Shocks in Baryonic Matter*, J. Phys. G: Nucl. Phys. **13**, 1231 (1987).
24. K. A. Bugaev, M. I. Gorenstein, B. Kämpfer, and V. I. Zhdanov, *Generalized Shock Adiabatics and Relativistic Nuclear Collisions*, Phys. Rev. D **40**, 2903 (1989); DOI:10.1103/PhysRevD.40.2903.

25. A. V. Konyukhov, A. P. Likhachev, and V. E. Fortov, *Behavior of Relativistic Shock Waves in Nuclear Matter*, High. Temp. **53**, 622 (2015); DOI:10.1134/S0018151X15050181.
26. J. Cleymans, R. V. Gavai, and E. Suhonen, *Quarks and Gluons at High Temperatures and Densities*, Phys. Rep. **130**, 217 (1986); DOI:10.1016/0370-1573(86)90169-9.
27. B. E. Poling, J. M. Prausnitz, and J. P. O'Connell, *Properties of Gases and Liquids*, McGraw-Hill Education (2001).
28. М. Д. Вайсман, *Термодинамика парожидкостных потоков*, Энергия. Ленинградское отделение, Москва (1977).
29. A. G. Kulikovskii, A. T. Il'ichev, A. P. Chugainova, and V. A. Shargatov, *On the Structure Stability of a Neutrally Stable Shock Wave in a Gas and on Spontaneous Emission of Perturbations*, J. Exp. Theor. Phys. **131**, 481 (2020); DOI:10.1134/S1063776120090186.
30. A. G. Kulikovskii, A. T. Il'ichev, A. P. Chugainova, and V. A. Shargatov, *Spontaneously Radiating Shock Waves*, Doklady Physics **64**, 293 (2019); DOI:10.1134/S1028335819070036.
31. C. S. Gardner, *Comment on Stability of Step Shocks*, Phys. Fluids **6**, 1366 (1963); DOI:10.1063/1.1706917.
32. N. M. Kuznetsov, *The Theory of Shock-Wave Stability*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **88**, 470 (1985).
33. N. M. Kuznetsov, *Stability of Shock Waves*, Sov. Phys. Usp. **32**, 993 (1989); DOI:10.1070/PU1989v032n11ABEH002777.
34. G. R. Fowles and A. F. P. Houwing, *Instabilities of Shock and Detonation Waves*, Phys. Fluids **27**, 1982 (1984); DOI:10.1063/1.864853.
35. A. V. Konyukhov, A. P. Likhachev, V. E. Fortov, S. I. Anisimov, and A. M. Oparin, *Stability and Ambiguous Representation of Shock Wave Discontinuity in Thermodynamically Nonideal Media*, JETP Lett. **90**, 25 (2009); DOI:10.1063/1.3295149.