

ДВА ЭТАПА ФОРМИРОВАНИЯ СТРУКТУРЫ ВЕТВЛЕНИЯ ЛИСТВЕННОГО ДЕРЕВА

С. В. Григорьев ^{a,b*}, О. Д. Шнырков ^{a,b}, К. А. Пшеничный ^a, Е. Г. Яшина ^{a,b}

^a Петербургский институт ядерной физики им. Б. П. Константинова
Национального исследовательского центра «Курчатовский институт»
188300, Гатчина, Ленинградская обл., Россия

^b Санкт-Петербургский государственный университет
198504, Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 12 июля 2023 г.,
после переработки 27 августа 2023 г.
Принята к публикации 30 августа 2023 г.

Методом численного фурье-анализа исследованы фрактальные свойства при формировании структуры ветвления лиственных деревьев. Показано, что нижние уровни ветвления взрослых деревьев формируются, подчиняясь закону логарифмического фрактала в двумерном пространстве, согласно которому площадь поверхности нижней ветви равна сумме площадей поверхности ветвей после ее ветвления, т. е. выполняется закон сохранения площади при масштабировании. Строение веток на верхних уровнях ветвления подчиняется закону логарифмического фрактала в трехмерном пространстве, т. е. закону сохранения объема при масштабировании, что естественно, поскольку живая ткань занимает полностью молодую ветку, а не только ее поверхность. Предложена математическая модель, которая обобщает концепции логарифмического фрактала на поверхности для взрослых ветвей и логарифмического фрактала в объеме для молодых веток. Таким образом построена целостная фрактальная концепция роста и структуры ветвления лиственных деревьев.

DOI: 10.31857/S0044451024030131

1. ВВЕДЕНИЕ

Слово «фрактал» ввел в научную терминологию во второй половине двадцатого века Бенуа Мандельброт [1] и очень быстро концепция фрактального описания объектов получила свое развитие и применение в различных областях науки и техники [2, 3]. Понятие «фрактал» по своему значению очень близко к выражению «самоподобная фрагментированная система». Фракталы встречаются повсеместно, как в живой, так и в неживой природе: горные массивы, береговая линия моря, русла рек [3], молнии [4], процессы турбулентности [5], сосудистый узор в легких [6]. Само по себе изучение фракталов представляет огромный интерес, так как фрактальная концепция может быть использована в различных областях науки и техники, например, в медицине при моделировании различных процессов в организме человека и животных [6–9].

Биологические системы в процессе своей жизни часто развиваются по законам самоподобия и могут быть отнесены к фракталам [10–12]. Одним из бросающихся в глаза проявлений фрактальности в природе служат деревья. Леонардо да Винчи был первым, кто заметил и сформулировал закономерность в росте и ветвлении деревьев. Он вывел эмпирический закон ветвления дерева, отсылающий нас к годовой цикличности природы. Закон Леонардо гласит: на каждом уровне ветвления дерева суммарная площадь поперечного сечения всех ветвей одинакова и равна площади сечения ствола: $d_i^2 = k d_{i+1}^2$ где d — диаметр ветвей, k — число ветвей после ветвления [13]. Эта формулировка служит основой для описания структурных свойств во всех известных моделях дерева [14–21] и является настоящим фундаментом в компьютерном моделировании деревopodobных объектов [22, 23]. И хотя закономерность, отмеченная Леонардо, широко используется в теоретических моделях и аллометрических исследованиях [16–20], можно найти лишь несколько работ, с хорошей статистикой подтверждающих справедли-

* E-mail: grigoryev_sv@pnpi.nrcki.ru

вость этой закономерности. Более того, авторы обширного и глубокого обзора [21], анализируя существующие экспериментальные исследования [24–26], пришли к выводу, что «правило Леонардо да Винчи выполняется не во всех случаях». И действительно, как отмечается в многочисленных исследованиях, экспериментальное подтверждение этой закономерности требует от экспериментатора невероятных физических усилий и ловкости, если он решит измерить диаметр каждой ветви дерева, при этом не нанося ему какого-либо вреда. Фрактальная структура, как доминирующая особенность роста хвойных деревьев, подробно рассмотрена в работах [12, 27, 28] на примере ели.

В работе [29] было предложено использовать численный фурье-анализ изображений деревьев как неразрушающий метод изучения свойств самоподобия в их структуре. Было показано [29], что изображение (фотография) кроны некоторых видов лиственных деревьев, представляющее собой двумерную проекцию дерева на плоскость, принадлежит к особому классу фракталов — логарифмическим фракталам в двумерном пространстве. Можно сделать вывод, что для них выполняется закон сохранения площади боковой поверхности на разных уровнях ветвления, что, по-видимому, объясняется концентрацией проводящих клеток во флоэме (коре) и поверхностных слоях ксилемы (древесины). Экспериментальное свидетельство в подтверждение этой гипотезы было получено с помощью метода численного фурье-анализа при исследовании многих изображений различных лиственных деревьев (таких как дуб, береза, липа и т. д.) Изображения деревьев делались в холодное время года, после листопада. Исследование проводят численными методами, получают квадрат фурье-образа объекта — изотропное распределение интенсивности Фурье, которое после азимутального усреднения двумерной карты дает так называемую кривую рассеяния — зависимость интенсивности Фурье от обратной координаты. При исследовании изображений деревьев, помимо участка кривой рассеяния, соответствующей логарифмической фрактальной структуре, был обнаружен кроссовер в другой режим рассеяния в области больших переданных импульсов. На всех изображениях было обнаружено резкое замедление убывания интенсивности Фурье при больших переданных импульсах (малых масштабах на реальном изображении).

В настоящей статье мы исследуем природу этого кроссовера. Сделано предположение, которое и подтверждается экспериментом, что область боль-

ших переданных импульсов на кривой рассеяния соответствует таким областям малых масштабов на изображениях деревьев, где изображены молодые ветки. Так как молодые ветки целиком состоят из живой ткани, то в них жизнь распределена по всему объему, в отличие от взрослых ветвей, в которых живые клетки сосредоточены только на поверхности. В статье показано, что часть дерева, состоящая из взрослых ветвей, является логарифмическим фракталом, характеризующим поверхность дерева, т. е. подчиняется закону логарифмического фрактала в двумерном пространстве. В то же время часть дерева с молодыми ветками соответствует логарифмическому фракталу в трехмерном пространстве, что на изображении дерева (его проекции на плоскость) превращается в объект, описываемый как массовый двумерный фрактал с размерностью $D_f = 1.5–1.7$. Предложена модель ветвления дерева, которая обобщает концепции логарифмического фрактала на поверхности для взрослых ветвей и логарифмического фрактала в объеме для молодых веток. Таким образом, построена целостная фрактальная концепция роста и ветвления лиственных деревьев.

Работа организована следующим образом. В разд. 2 описана классификация фрактальных объектов, основанная на методах рассеяния проникающего излучения (трехмерный случай) или света (двумерный случай). В разд. 3 представлено исследование изображений деревьев разного возраста методом численного фурье-анализа. Рассмотрены изображения взрослых деревьев и их отдельных участков с молодыми ветками. В разд. 4 предложена двухступенчатая математическая модель, описывающая закон формирования структуры ветвления взрослого дерева. В разд. 5 представлены интересные следствия концепции самоподобия ветвей. В частности, показано, что экспериментальные данные для взрослого дерева совместно с гипотезой самоподобия ветвей гарантируют выполнение закона Леонардо да Винчи о строении дерева. При этом закон Леонардо не выполняется для молодых веток. В разд. 6 представлены выводы работы.

2. КЛАССИФИКАЦИЯ ФРАКТАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ

Основной характеристикой фрактальных объектов является их фрактальная размерность D_f (размерность Хаусдорфа – Безиковича). В отличие от топологической размерности объекта D_T , размерность Хаусдорфа – Безиковича D_f может быть как целой,

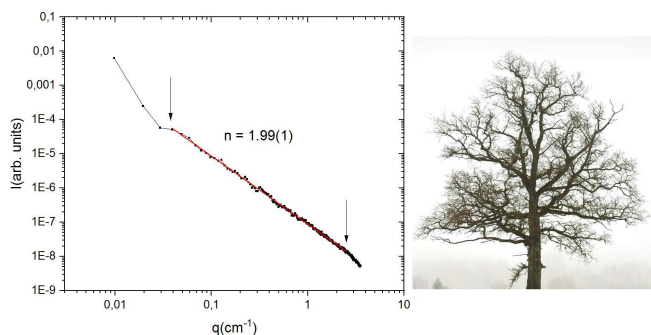


Рис. 1. Изображение старого дерева (дуба) — справа. Кривая рассеяния — слева, как результат фурье-анализа изображения: интенсивность в зависимости от импульса в двойном логарифмическом масштабе. В диапазоне импульсов от 10^{-2} до $5 \cdot 10^0 \text{ см}^{-1}$ кривая описывается зависимостью $Q^{-\nu}$ с $\nu = 1.99 \pm 0.01$

так и дробной. И $D_T \leq D_f \leq D_E$, это означает, что фрактальная размерность объекта за счет своей фрагментированности превосходит его топологическую размерность, но меньше, чем размерность евклидова пространства.

Для получения информации о фрактальной размерности объекта в трехмерном пространстве широко используется метод малоуглового рассеяния нейтронов и рентгеновского излучения [30–32]. С помощью этого метода фракталы в трехмерном пространстве были разделены на три класса: массовые (фрагментированность распределена по объему внутри объекта), поверхностные (фрагментированность сосредоточена на границе объекта) и логарифмические, когда поверхностный фрактал распространяется вглубь вещества, формируя промежуточный объект между поверхностным и объемным фракталами [33].

При описании фрактальных объектов следует различать и соотносить топологическую размерность единичного самоподобного элемента фрактала, фрактальную размерность всего объекта и евклидову размерность пространства. Так, например, плоские объекты в трехмерном пространстве ($D_E = 3$) и плоские объекты в двумерном пространстве ($D_E = 2$) — это физически разные объекты. Экспериментальное измерение фрактальной размерности «плоских» фракталов (в двумерном пространстве) можно осуществить с помощью рассеяния на них света, регистрируя на детекторе картину рассеяния — квадрата фурье-образа объекта [34–38]. Такой эксперимент можно смоделировать с помощью численного фурье-анализа, исследуя таким образом изображения различных фрактальных и нефрактальных объектов. С помощью этого метода фракталы в двумерном случае можно разделить

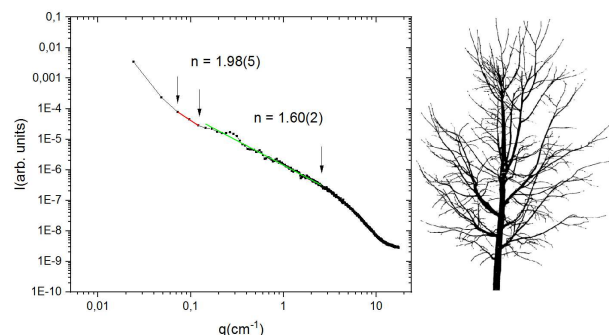


Рис. 2. Изображение молодого дерева (яблоня) — справа. Кривая рассеяния — слева, как результат фурье-анализа изображения: интенсивность в зависимости от импульса в двойном логарифмическом масштабе. В диапазоне импульсов от $2 \cdot 10^{-2}$ до 2 см^{-1} кривая описывается зависимостью $Q^{-\nu}$ с $\nu = 1.60 \pm 0.02$

(по аналогии с трехмерным пространством) на массовые, граничные и логарифмические [39, 40].

Особый интерес представляют логарифмические фракталы. В отличие от массовых и поверхностных (граничных) фракталов логарифмические фракталы хоть и самоподобны, но неоднородны, и, как следствие, описываются аддитивным законом масштабирования и иерархической структурой. При этом для логарифмических фракталов выполняется закон равенства количества вещества на каждом уровне их иерархии. Пример дерева, построенного по принципу Леонардо да Винчи, как логарифмического фрактала предложил в своей работе Индеку [39].

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ ДЕРЕВЬЕВ МЕТОДАМИ ЧИСЛЕННОГО ФУРЬЕ-АНАЛИЗА

При исследовании изображений фрактальных и нефрактальных объектов методами фурье-анализа получают так называемую кривую рассеяния в обратном, т. е. в фурье-пространстве. Эта зависимость интенсивности рассеяния от импульса имеет вероятностный характер и характеризует количество вещества в зависимости от размера. Детальное описание численного моделирования процесса рассеяния на фрактальных объектах с помощью фурье-анализа в двумерном пространстве представлено в работах [40–42].

Как показано в [29] и видно на примере рис. 1 и 2, при исследовании фотографий деревьев методами фурье-анализа кривые рассеяния можно разделить на три участка, каждый из которых демонстрирует свой характер убывания интенсивности с ростом импульса. В области малых импульсов наклон кривой рассеяния в двойном логарифмическом

масштабе близок к 2, что соответствует структуре логарифмического фрактала. Следующий участок характеризуется замедлением убывания интенсивности и наклон кривой рассеяния в двойном логарифмическом масштабе оказывается меньше 2. А в области больших переданных импульсов — снова быстрое убывание интенсивности с наклоном, близким к 3. Этот участок соответствует рассеянию на минимальном элементе изображения и большого интереса не представляет. Точка перехода от второго участка к третьему соотносится с размером минимального элемента изображения.

Если принять во внимание, что первый и второй участки кривой рассеяния в обратном пространстве соответствуют двум разным диапазонам линейных размеров рассеивающих объектов, то можно предположить, что кривая рассеяния на больших размерах (диапазон малых импульсов обратного пространства) обусловлена наличием больших, т. е. старых, ветвей дерева, а на малых размерах — наличием молодых веток. Для экспериментальной проверки гипотезы о существовании двух различных типов структуры ветвления листового дерева необходимо исследовать двумерные образы (фотографии) старых, взрослых и молодых деревьев. Необходимо отобрать изображения, разработать методологию исследования, получить кривые рассеяния методом численного фурье-анализа и, аппроксимируя кривые степенным законом, найти параметры масштабной инвариантности в соответствии с классификацией фрактальных объектов [40, 42]. Для этих исследований мы использовали программу fractal [43].

Критерии отбора изображений деревьев, пригодных для осуществления такого рода исследований, кажутся довольно простыми, но налагают некоторые ограничения на изучаемое дерево. Для достижения наилучшего контраста на изображении между наличием ветки и ее отсутствием необходимо делать снимок дерева без листьев на фоне светлого неба. Затем снимок превращается в черно-белый с максимальным контрастом, так что фон становится белым, а дерево черным. Снимок производится с расстояния в несколько десятков метров, так чтобы характерные расстояния внутри объекта были бы много меньше расстояния от объекта до места съемки. Этим достигается сохранение пропорций в размерах отдельных ветвей дерева на снимке. При таких критериях естественно, что в исследовании задействованы только отдельно стоящие деревья, а не деревья, растущие среди леса.

Информация об объемном трехмерном объекте (дереве) получена прямым фотографированием,

т. е. актом, в ходе которого трехмерный объект проецируется на двумерную плоскость. При таком проецировании хорошо различимо большинство ветвей и ствол дерева, т. е. ветви лишь в малой степени перекрываются друг с другом и со стволом. Таким образом, при фотографировании/проецировании дерева на плоскость не теряется информация о строении ветвей и сохраняются пропорции между ветвями (их размером и количеством) при изменении масштаба. Регистрируемым объектом является черное пятно определенного размера (в пикселях) на белом фоне.

Ветви или их части, растущие вдоль линии фотографирования (по оси проекции), не видны на снимке, не регистрируются, и поэтому не учитываются при анализе. При этом их количество подчиняется общему закону соответствия количества веток с изменением масштаба, поэтому фотография верно передает закон масштабирования, базируясь лишь на одном снимке (одной проекции). Отметим, что, изменив ракурс фотографирования, можно получить и проанализировать информацию о другой проекции дерева. С учетом того, что дерево имеет аксиальную симметрию, азимутально усредненный квадрат фурье-образа фотографий дерева с разных боковых ракурсов дает одинаковые кривые рассеяния, это и было подтверждено экспериментально.

Методология исследования этой работы нацелена на дифференциацию старых ветвей и молодых веток. Во-первых, мы отберем изображение взрослого дерева с большим количеством старых ветвей. Мы предполагаем, что именно старые ветви формируют на изображении двумерный логарифмический фрактал, который на кривой рассеяния соответствует участку с наклоном, близким к 2. Ожидается, что большое количество старых ветвей делает этот участок наиболее выраженным. Во-вторых, мы рассмотрим взрослое дерево в стадии активного роста, т. е. с большим количеством как старых ветвей, так и молодых веток, чтобы понять, как изменится кривая рассеяния, если молодых веток станет больше. В-третьих, чтобы убедиться, что именно молодые ветки взрослого дерева обуславливают отклонение от характерного закона рассеяния с наклоном, близким к 2, мы выделим фрагменты изображения взрослого дерева, которые будут включать в себя в основном молодые ветки и лишь немного старых ветвей, либо не включать старые ветви вовсе. В-четвертых, мы рассмотрим изображение молодого дерева, в котором отсутствуют старые ветви, а следовательно, должен отсутствовать участок на кривой рассеяния с наклоном, близким к 2.

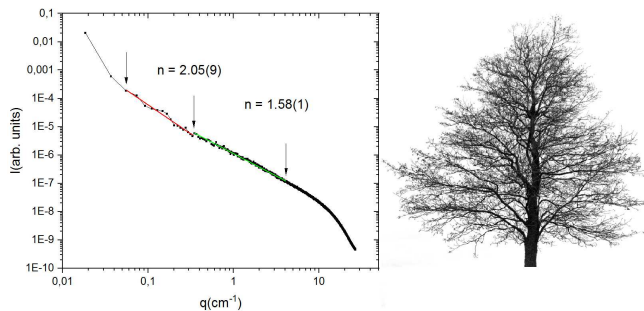


Рис. 3. Изображение взрослого (активно растущего) дерева (липа) — справа. Кривая рассеяния — слева, как результат фурье-анализа изображения: интенсивность в зависимости от импульса в двойном логарифмическом масштабе. В диапазоне импульсов от $5 \cdot 10^{-2}$ до $3 \cdot 10^{-1} \text{ см}^{-1}$ кривая описывается зависимостью $Q^{-\nu}$ с $\nu = 2.05 \pm 0.09$, а в диапазоне от $4 \cdot 10^{-1}$ до 4 см^{-1} — зависимостью $Q^{-\nu}$ с $\nu = 1.58 \pm 0.09$

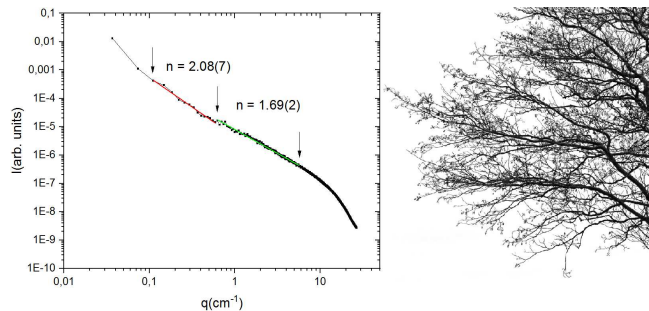


Рис. 4. Фрагмент изображения взрослого (активно растущего) дерева (липа), содержащего небольшое число «старых» ветвей — справа. Кривая рассеяния — слева: интенсивность в зависимости от импульса в двойном логарифмическом масштабе. В диапазоне импульсов от 10^{-1} до $6 \cdot 10^{-1} \text{ см}^{-1}$ кривая описывается зависимостью $Q^{-\nu}$ с $\nu = 2.08 \pm 0.07$, а в диапазоне от $6 \cdot 10^{-1}$ до 6 см^{-1} — зависимостью $Q^{-\nu}$ с $\nu = 1.69 \pm 0.02$.

На рис. 1 представлено изображение старого дерева (дуба) с небольшим текущим приростом, на котором основная масса веток — старые. В этом случае старого дерева кривая рассеяния описывается зависимостью $Q^{-\nu}$ с $\nu = 1.99 \pm 0.01$ в диапазоне импульсов от $4 \cdot 10^{-2}$ до 3 см^{-1} . Такая степенная зависимость соответствует логарифмической фрактальной структуре в очень большом (около двух порядков) диапазоне импульсов [29]. Этот диапазон переданных импульсов может быть конвертирован в диапазон средних расстояний в прямом пространстве от 2 до 150 см, что с учетом цилиндрической формы ветви приблизительно соответствует диапазону диаметров от 0.7 до 50 см и диапазону длин ветвей от 7 до 500 см. Здесь и далее мы предполагаем, что элементом самоподобия на изображении является прямоугольник со сторонами d (толщина ветви) и l (длина ветви). Для определенности примем, что отношение $l/d = 9$, а средний линейный размер r такого прямоугольника равен корню квадратному его площади: $r = \sqrt{S} = \sqrt{ld} = 3d = l/3$.

В случае же совсем молодого дерева (саженца яблони) участок с наклоном, близким к 2, практически отсутствует, а участок, соответствующий молодым веткам, занимает практически всю кривую рассеяния, которая на участке от $2 \cdot 10^{-1}$ до 2 см^{-1} имеет наклон $\nu = 1.60 \pm 0.02$ в двойном логарифмическом масштабе (рис. 2). Этот диапазон конвертируется в диапазон средних размеров от 3 до 30 см, что, например, в терминах длин ветвей соответствует размерам от 10 до 100 см.

В случае взрослого (активно растущего) дерева с большим числом молодых веток (рис. 3) участок, соответствующий двумерному логарифмическому

фракталу, занимает на кривой рассеяния значительно меньшую часть с наклоном $\nu = 2.05 \pm 0.09$ (один порядок) в диапазоне от $5 \cdot 10^{-2}$ до $3 \cdot 10^{-1} \text{ см}^{-1}$. Часть кривой рассеяния, соответствующая молодым веткам, имеет наклон в двойном логарифмическом масштабе $\nu = 1.58 \pm 0.09$ в диапазоне от $4 \cdot 10^{-1}$ до 4 см^{-1} . Точка перегиба в q -зависимости соответствует среднему расстоянию в 15 см, что в терминах толщины ветви конвертируется в 5 см, а в терминах длины ветви — в 50 см.

Исследование фрагментов изображения взрослого дерева (липа с рис. 3) показало, что чем меньше ветвей дерева остается во фрагменте, тем меньше становится длина участка кривой рассеяния, соответствующая двумерной логарифмической фрактальной структуре с наклоном, близким к 2. В случае, если на изображении присутствуют «старые» ветви дерева (рис. 4, справа), наблюдаем небольшой участок кривой с наклоном $\nu = 2.08 \pm 0.07$, соответствующий двумерному логарифмическому фракталу в диапазоне от 10^{-1} до $6 \cdot 10^{-1} \text{ см}^{-1}$. И в то же время на кривой в двойном логарифмическом масштабе наблюдается продолжительный участок с наклоном $\nu = 1.69 \pm 0.02$, соответствующий молодым веткам в диапазоне от $6 \cdot 10^{-1}$ до 6 см^{-1} (рис. 4, слева). Если на изображении присутствуют только молодые ветки (рис. 5, справа), то на кривой рассеяния отсутствует участок, соответствующий логарифмическому фракталу, а участок с наклоном $\nu = 1.46 \pm 0.03$, соответствующий структуре молодых веток, виден в диапазоне от $2 \cdot 10^{-1}$ до 4 см^{-1} (рис. 5).

Таким образом, можно сделать вывод, что именно «старые» ветви на изображении дерева описываются законом логарифмического фрактала с

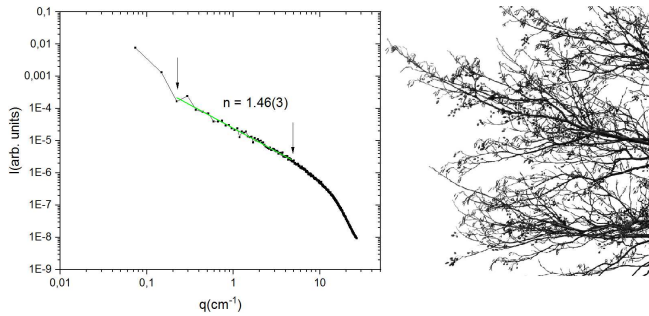


Рис. 5. Фрагмент изображения взрослого (активно растущего) дерева (липа), не содержащего «старых» ветвей — справа. Кривая рассеяния — слева: интенсивность в зависимости от импульса в двойном логарифмическом масштабе. В диапазоне импульсов от $2 \cdot 10^{-1}$ до 4 см^{-1} кривая описывается зависимостью $Q^{-\nu}$ с $\nu = 1.46 \pm 0.03$

Q^{-2} -зависимостью интенсивности рассеяния при фурье-анализе их изображения. При этом, как показано в работе [29], их организация подчиняется закону сохранения площади боковой поверхности, в то время как молодые ветки подчиняются иному закону, который при анализе двумерных изображений дает зависимость интенсивности от импульса в виде $Q^{-\nu}$ с $\nu = 1.60-1.70$. Немаловажно также отметить, что сама степенная зависимость предполагает реализацию гипотезы о самоподобии масштабируемых элементов — в данном случае ветвей дерева.

Возникает вопрос: можно ли соединить в единую модель две ступени роста дерева, столь ясно различающиеся в фурье-анализе, проведенном выше, и в чем сходство и различие двух разных ступеней? Ответ на этот вопрос мы сформулируем в разд. 4.

4. ДВУХСТУПЕНЧАТАЯ МОДЕЛЬ СТРУКТУРЫ ВЕТВЛЕНИЯ ДЕРЕВЬЕВ

В ботанике деревья определены как «жизненная форма древесных растений с единственной, отчетливо выраженной, многолетней, в разной степени одревесневшей, сохраняющейся в течение всей жизни, разветвленной главной осью — стволом» [44].

Условно ствол и ветки дерева радиально можно разделить на три основные части (слоя): луб (флоэма, живая часть коры), камбий, древесина (ксилема). Луб — самая наружная часть ствола, прилегает к внешней (омертвевшей) коре и состоит из живых клеток, луб участвует в транспорте продуктов фотосинтеза от листьев ко всем органам дерева. Камбий — основная производящая ткань дерева, камбий состоит из живых клеток, при этом наружная часть клеток становится лубом, а внутренняя — древесиной. Именно за счет камбия дерево и его ветви рас-

тут в толщину. Важно заметить, что луб и камбий довольно тонкие по сравнению со стволом дерева и имеют фиксированную толщину. Древесина образуется из внутренних клеток камбия и состоит из одревесневших клеток, которые не способны к делению, она занимает до 90% объема дерева. Внешняя часть древесины (заболонь) участвует в транспорте воды и минеральных веществ от корней вверх, в то время, как образующаяся у многих видов деревьев внутренняя часть (ядро) физиологически неактивна и выполняет лишь механическую функцию. Кроме ствола дерево характеризуется многократным ветвлением, кратность которого с каждым годом растет. Взрослые ветви по толщине имеют ту же структуру как и ствол и состоят из древесины, камбия и луба. Таким образом, ствол дерева, как и любую его ветвь, можно разделить на внутреннюю, частично «омертвевшую» часть — древесину и внешний слой, состоящий из живых клеток.

Как показано в [29], изображения структуры ветвления деревьев принадлежат к классу логарифмических фракталов на плоскости и для них выполняется закон сохранения площади боковой поверхности по мере ветвления. Этот вывод хорошо укладывается в описание дерева, жизнь которого сосредоточена на его поверхности, т. е. в лубе и камбии, а также в наружном слое ксилемы. Закон сохранения площади боковой поверхности на разных уровнях ветвления, являясь несомненно упрощенной математической моделью дерева, тем не менее связывает размерные параметры ветки i -го уровня ветвления и исходящих из нее k веток $(i + 1)$ -го уровня [29]:

$$d_i l_i = k d_{i+1} l_{i+1}. \tag{1}$$

Здесь d_i , l_i и d_{i+1} , l_{i+1} — диаметр поперечного сечения и длина i -й и $(i + 1)$ -й веток соответственно.

Развивая эту модель, учтем, что «живой» слой ветки имеет конечную толщину x , одинаковую (в первом приближении) на разных уровнях ветвления дерева. Тогда сохраняется не только площадь, но и объем поверхностного слоя, а закон сохранения перепишется в виде

$$x d_i l_i = k x d_{i+1} l_{i+1}. \tag{2}$$

Такая трансформация «закона сохранения» при масштабировании ничего не меняет с точки зрения математической модели, но имеет огромное значение для сути дела, поскольку она меняет саму концепцию, в которой теперь сохраняется объем живой материи на каждом уровне ветвления дерева.

Учет толщины поверхностного слоя открывает возможность ввести в математическую модель и

описать структурный переход от старых ветвей к молодым веткам. Для этого заметим, что концепция поверхностного «живого» слоя ветви работает, пока выполнено условие, что толщина этого слоя меньше, чем радиус поперечного сечения ветки ($x < d_{i+1}/2$). Это условие нарушается, когда толщина «живого» слоя становится равной радиусу поперечного сечения ветки, т. е. когда вся ветка состоит только из живых клеток. Это соответствует определению молодой ветки, внутри которой еще не появилась древесина. Таким образом, мы можем рассматривать, как два отдельных случая, строение старых ветвей, для которых $x < d/2$, и строение молодых веток, для которых $x_i = d_i/2$.

В первом случае x в правой и левой частях (2) сокращаются, получаем (1) и, следовательно, выполняется закон сохранения площади. Во втором случае выражение (2) принимает новый вид и обретает новый смысл:

$$x_i d_i l_i = k \cdot x_{i+1} d_{i+1} l_{i+1},$$

или

$$d_i^2 l_i = k d_{i+1}^2 l_{i+1}, \quad (3)$$

т. е. сохраняется объем веток, а не площадь их поверхности. Выражение (3) при условии самоподобия формы ветки на разных уровнях ветвления является математическим определением для логарифмического фрактала в трехмерном пространстве.

Таким образом, система молодых веток дерева образует трехмерный логарифмический фрактал, поскольку сохраняется объем веток на каждом уровне ветвления, а система взрослых ветвей — двумерный логарифмический фрактал, поскольку сохраняется их площадь поверхности. Именно этим можно объяснить наличие точки перехода от первого ко второму участку на кривой рассеяния, а также то, что длина участка кривой рассеяния, соответствующего двумерному логарифмическому фракталу, меняется в зависимости от возраста дерева и от числа матерых ветвей на изображении. Матерые ветви, в которых основную часть занимает древесина, образуют логарифмическую фрактальную структуру на фотографии дерева или на его поверхности, а молодые ветки образуют логарифмическую фрактальную структуру в объеме. Сама точка перехода определяется условием, когда толщина живого слоя становится равной радиусу ветки $x_i = d_i/2$. Интересно отметить, что такая двухступенчатая модель структуры ветвления дерева тем не менее подчиняется единому закону сохранения объема живого материала на каждом уровне ветвления, независимо от того, рассматриваем мы старые ветви или

молодые ветки. Другими словами, количество живых клеток на каждом уровне ветвления остается постоянным, хотя на старых ветвях оно распределено по поверхности ветви, а на молодых ветках — по всему их объему.

Предложенная выше модель находит экспериментальное подтверждение в части матерых и старых ветвей [29], однако гипотеза о трехмерном логарифмическом фрактале для описания структуры ветвления молодых веток еще требует своего подтверждения. Экспериментальные данные, приведенные выше, демонстрируют степенную зависимость с показателем $\nu = 1.60-1.70$, что подразумевает самоподобие ветвей на разных уровнях ветвления. Опираясь на гипотезу самоподобия (см. (4)) и закон сохранения объема при масштабировании (3), можно по крайней мере на качественном уровне показать, что проекция молодых веток дерева на двумерную плоскость представляет собой фрактал на плоскости с размерностью $D_f \approx 1.70$.

5. ГИПОТЕЗА САМОПОДОБИЯ ВЕТВЕЙ

Гипотеза самоподобия формы ветвей при масштабировании может быть сформулирована следующим образом. Единичная ветвь от точки ее ответвления от материнской ветви до точки ветвления на дочерние хорошо описывается цилиндром длиной l и диаметром d . Самоподобие единичного элемента (цилиндра) внутри всей конструкции дерева означает, что выполнены два условия:

$$d_i = \alpha d_{i+1}, \quad l_i = \alpha l_{i+1}, \quad (4)$$

т. е. длина и ширина ветки на следующем уровне ветвления уменьшается в одинаковое число раз α .

Если гипотеза самоподобия справедлива для старых ветвей и выполняется закон сохранения боковой площади ветвей при масштабировании (1), то легко показать, что из (1) и (4) следует, что $\alpha^2 = k$, где k — число дочерних ветвей. Отсюда получаем

$$d_i^2 = k d_{i+1}^2, \quad l_i^2 = k l_{i+1}^2. \quad (5)$$

Первое выражение в (5) является формулировкой закона Леонардо да Винчи для описания структуры дерева [13, 39]. Второе выражение является формулировкой для построения дерева Пифагора, для случая $k = 2$ [29, 45]. Как показано в [29, 39], и та, и другая конструкция являются логарифмическими фракталами в двумерном пространстве, как и смешанная конструкция, выраженная (1). Отметим, что старая (без учета молодых ветвей) часть дерева

в трехмерном пространстве не является логарифмическим фракталом, поскольку объем ветви нижнего уровня не равен сумме объемов ветвей верхнего уровня. Напротив,

$$d_i^2 l_i = k^{3/2} d_{i+1}^2 l_{i+1} \rightarrow V_i / k V_{i+1} = k^{1/2}, \quad (6)$$

т. е. объем ветви нижнего уровня в $k^{1/2}$ больше суммы объемов ветвей верхнего уровня.

Если гипотеза самоподобия справедлива для молодых веток и выполняется закон сохранения объема веток при масштабировании (3), то легко показать, что из (3) и (4) следует равенство $\alpha^3 = k$.

Интересно отметить, что первичным законом роста дерева является ветвление, заложенное в геноме, в то время как пропорции веток определяются факторами формирования ветки во время ее роста и, скорее всего, обусловлены внешними условиями и распределением ресурсной базы. Так что, задавая число $k = 2$ (что выполняется для большинства деревьев), можно уверенно предсказать, что длина и толщина дочерней ветки окажутся в $\sqrt[3]{2} \approx 1.26$ раз короче и тоньше материнской. Если же генетика дерева заставит ветвь поделиться на 3 дочерние ветви, то их длина и толщина окажутся в $\sqrt[3]{3} \approx 1.44$ раза меньше материнской. Интересно было бы проверить экспериментальным путем, какое из правил «работает».

Однако на фотографиях деревьев мы видим их проекцию на плоскость, т. е. площадь веток, а не их объем. Для того чтобы получить соотношение площадей i -й генерации S_i и $(i + 1)$ -й генерации S_{i+1} , необходимо перемножить первое и второе уравнения из системы (4):

$$d_i l_i = \alpha^2 d_{i+1} l_{i+1} \Leftrightarrow S_i = \sqrt[3]{k^2} S_{i+1}, \quad (7)$$

$$S_{i+1} = \frac{S_i}{\sqrt[3]{k^2}}.$$

То есть если суммарный объем веток каждой генерации сохраняется, то площадь поверхности ветки $(i + 1)$ -й (дочерней) генерации должна быть в $\sqrt[3]{k^2}$ раз меньше площади поверхности ветки i -й (материнской) генерации. Тогда площадь поверхности всех k веток $(i + 1)$ -й генерации будет в $\sqrt[3]{k}$ раз больше площади поверхности ветки i -й генерации:

$$k S_{i+1} = \sqrt[3]{k} S_i. \quad (8)$$

То есть на каждом уровне ветвления суммарная площадь поверхности веток будет увеличиваться в $\sqrt[3]{k}$ раз. Смоделируем эту ситуацию на примере логарифмического фрактала дерева Леонардо да Винчи в двумерном пространстве.

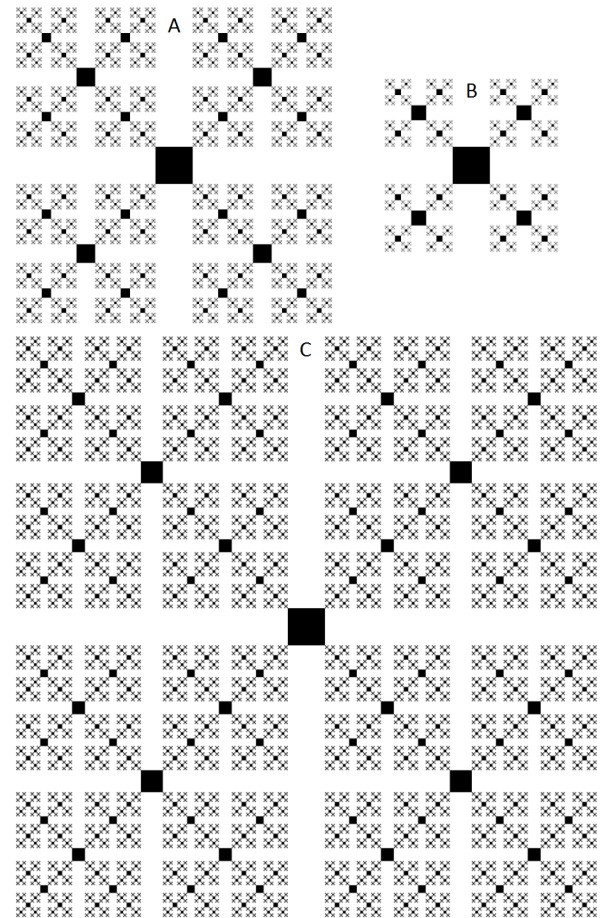


Рис. 6. Модель ветвления дерева Леонардо да Винчи на четыре ветви с условием сохранения площади (A). Модель ветвления дерева на четыре ветви с условием уменьшения площади (B). Модель ветвления дерева на четыре ветви с условием увеличения площади (C)

Объект, в котором на каждом уровне иерархии суммарная площадь элементов одинакова, при исследовании методом фурье-анализа дает кривую интенсивности, которая убывает по закону q^{-2} [29]. Чтобы проиллюстрировать, как меняется кривая интенсивности, если вместо закона сохранения площади мы используем «закон уменьшения» или «закон увеличения» площади, мы сгенерировали три объекта — три аналога дерева Леонардо да Винчи. (рис. 6). Первый (рис. 6A) — модель ветвления дерева на четыре ветви с условием сохранения площади, является логарифмическим фракталом. Процесс его построения следующий: мы берем квадрат и добавляем к его углам с внешней стороны четыре квадрата, длина сторон которых в два раза меньше стороны исходного квадрата. Соответственно, площадь каждого такого квадрата в четыре раза меньше площади исходного квадрата, а суммарная пло-

щадь всех четырех таких квадратов равна площади исходного квадрата. На следующем шаге мы повторяем этот процесс, выбирая в качестве исходных квадраты, добавленные на предыдущем шаге. Такой объект подчиняется закону равенства площади при масштабировании. Всего было сделано 8 таких итераций. Второй объект (рис. 6B) — модель ветвления дерева на четыре ветви с условием уменьшения площади, отличается тем, что сторона квадратов уменьшается не в 2 раза, а в 2.5 раз, а суммарная площадь этих квадратов меньше суммарной площади квадратов предыдущей генерации. При генерации третьего объекта (рис. 6C) — модели ветвления дерева на четыре ветви с условием увеличения площади, на каждом следующем шаге добавляются квадраты, стороны которых лишь в 1.7 раз меньше сторон квадратов, добавленных на предыдущем шаге, и суммарная площадь этих квадратов больше суммарной площади квадратов предыдущей генерации.

Результаты исследования методом фурье-анализа объектов, построенных на рис. 6, представлены на рис. 7. Для удобства сравнения показано произведение фурье-интенсивности и квадрата координаты, $I(q)q^2$, в зависимости от координаты q — так называемое представление Кратки. Такое представление выделяет зависимость q^{-2} , дополнительно подчеркивая особенности кривой. Так, в частности, произведение $I(q)q^2$ в интересующем нас диапазоне q теперь должно быть константой, что очень удобно для обнаружения в исследуемом объекте логарифмического фрактала. Однако произведение $I(q)q^2$ демонстрирует осциллирующий характер с ростом переданного импульса q . Осцилляции вызваны регулярной структурой объектов исследования. Они имеют квазипериодический характер в логарифмическом масштабе, что указывает на фрактальные свойства исследуемого объекта.

Показатель степени (наклон кривых в двойном логарифмическом масштабе) оказывается разным для различных объектов (рис. 7). Если площадь добавляемых генераций не меняется (рис. 6A), наклон кривой рассеяния равен $\nu = 1.99 \pm 0.04$. Если суммарная площадь добавляемой генерации уменьшается с уменьшением масштаба с фактором (4/6.25) на генерацию (рис. 6B), то наклон кривой рассеяния равен $\nu = 2.24 \pm 0.03$ (больше 2), а если площадь добавляемых генераций увеличивается с фактором (4/2.89) на генерацию (рис. 6C), то наклон кривой рассеяния равен $\nu = 1.68 \pm 0.06$ (меньше 2).

Таким образом, показано, что если суммарная площадь дочерних веток на изображении дерева больше в $\sqrt[3]{k}$, что является следствием сохранения

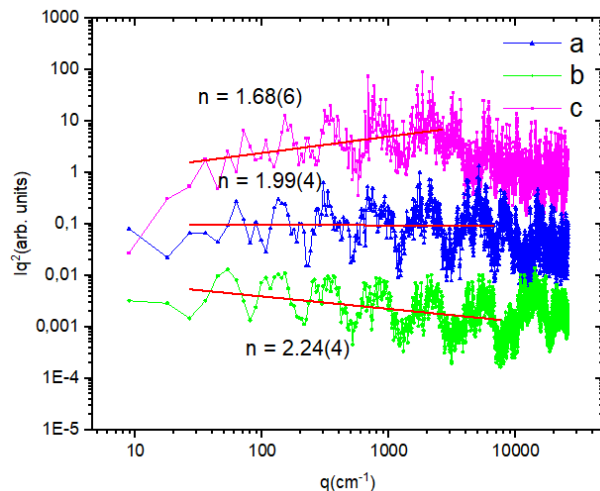


Рис. 7. Исследование построенных объектов методом численного фурье-анализа

суммарного объема веток на разных уровнях ветвления, то показатель степени кривой рассеяния оказывается меньше 2. То есть модель ветвления дерева с сохранением объема и с сохранением формы веток при ветвлении дает при исследовании их методом численного фурье-анализа результаты, схожие с результатами исследования фотографий молодых деревьев и фотографий молодых веток.

Интересно обсудить вопрос о превращении пропорций логарифмического фрактала в трехмерном пространстве для молодых веток в пропорции двумерного логарифмического фрактала для взрослых ветвей. На определенной стадии роста ветви такой процесс превращения должен быть существенным именно для ветвей (или части ветви) с характерными размерами, соответствующими точке перегиба при q_c в зависимости $I(q)$ на рис. 8–15 (см. Приложение). Эта точка перегиба q_c характеризует ветви диаметром от 3 до 6 см в зависимости от сорта дерева и, возможно, условий его роста. Очевидно, что по мере перехода ветви из одного режима роста в другой меняются именно пропорции ветви. Можно утверждать, что внутренняя часть ветвей или ствола должна подчиняться закону логарифмического фрактала в трехмерном пространстве, однако она гораздо меньше наружной части ствола, которая подчиняется закону логарифмического фрактала в двумерном пространстве. Учитывая логарифмическую шкалу, отложенную вдоль оси q (ось размеров), мы уверенно видим точку перегиба или перехода из одного режима в другой, хотя на линейной шкале этот переход выглядел бы более растянутым. Поэтому экспериментальные кривые в двойном логарифмическом масштабе демонстрируют бифрактальную картину рассеяния.

6. ВЫВОДЫ

Методом численного фурье-анализа исследованы фрактальные свойства при формировании структуры ветвления листовых деревьев. Показано, что кривая интенсивности в зависимости от координаты фурье-пространства $I(q) \sim q^{-\nu}$ имеет два участка с различными показателями степени ν и точку перегиба между ними. Для старых (крупных) ветвей при малых q показатель степени равен 2, что соответствует закону логарифмического фрактала в двумерном пространстве: площадь поверхности нижней ветви равна сумме площадей поверхности ветвей после ее ветвления, т. е. выполняется закон сохранения площади при масштабировании. Можно сделать вывод, что живая ткань старых (крупных) ветвей взрослых деревьев формируется только на их поверхности. Показатель степени кривой Фурье в области больших q равен $\nu = 1.6-1.7$ и обусловлен законом строения молодых веток, которые целиком состоят из живых биологических клеток, участвующих в росте дерева. В отличие от старых ветвей, жизнь в них сосредоточена во всем объеме ветки, а не только на поверхности. Сформулировано предположение, что в молодых ветках сохраняется не площадь поверхности, а их объем на разных уровнях ветвления. То есть строение веток на верхних уровнях ветвления подчиняется закону сохранения объема при масштабировании, что соответствует модели логарифмического фрактала в трехмерном пространстве. Предложена математическая модель, обобщающая концепции логарифмического фрактала на поверхности для взрослых ветвей и логарифмического фрактала в объеме для молодых веток, которая эквивалентна утверждению, что количество живых клеток на каждом уровне ветвления остается постоянным, хотя на старых ветвях оно распределено по поверхности ветви, а на молодых ветках — по всему их объему. Сконструированы численные модели двумерных изображений дерева, подчиняющегося закону сохранения объема в трехмерном пространстве (закон роста молодого дерева). Численный фурье-анализ моделей демонстрирует совпадение в пределах погрешности с результатами фурье-анализа, полученными для реальных деревьев. Таким образом, построена целостная фрактальная концепция роста и структуры ветвления отдельных листовых деревьев.

Финансирование. Работа поддержана Российским научным фондом (грант № 20-12-00188).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для демонстрации общности закона масштабирования структуры деревьев мы представляем серию изображений различных деревьев и фурье-анализ этих изображений. Все они имеют одинаковый вид кривых с перегибом, характеризующим двухэтапную структуру формирования ветвей листового дерева. Для больших масштабов (взрослых ветвей) показатель степени для всех приведенных ниже изображений близок или в пределах ошибки равен $\nu_1 = 2.00$, а для малых масштабов (молодых веток) показатель оказался меньше 2 и приближается к $\nu_2 \approx 1.6-1.8$. Во всех случаях точка перегиба $q_c \approx 0.3 \text{ см}^{-1}$, что соответствует линейному среднему размеру $r_c = 20 \text{ см}$. При этом средний линейный размер прямоугольного элемента $r_c = \sqrt{l_c d_c} = 20 \text{ см}$ соответствует толщине ветки $d_c = 6.6 \text{ см}$ и ее длине $l_c = 60 \text{ см}$. То есть ветки с размерами меньшими, чем d_c и l_c , описываются одним законом масштабирования, а ветви с размерами большими, чем d_c и l_c , — другим. Структура больших ветвей описывается законом логарифмического фрактала в двумерном пространстве изображения дерева — законом сохранения площади при масштабировании. Структура малых веток описывается законом логарифмического фрактала в трехмерном пространстве, который при проекции на двумерную плоскость имитирует зависимость для классического фрактала с $\nu_2 = 1.6-1.8$.

На рис. 8 представлены изображение ивы и кривая фурье-интенсивности в зависимости от импульса в двойном логарифмическом масштабе с показателями степени для больших ветвей $\nu_1 = 1.92(3)$ в диапазоне координат обратного пространства от $6 \cdot 10^{-2}$ до $5 \cdot 10^{-1} \text{ см}^{-1}$ и для малых веток $\nu_2 = 1.77(1)$ в диапазоне от $5 \cdot 10^{-1}$ до 4 см^{-1} . Точка перегиба $q_c = 5 \cdot 10^{-1} \text{ см}^{-1}$ соответствует среднему расстоянию в 12 см, что в терминах толщины ветви конвертируется в 4 см, а в терминах длины ветви — в 36 см. Таким образом, структура ветвей длиной от 36 до 300 см (толщиной от 4 до 30 см) описывается структурой логарифмического фрактала в двумерном пространстве. А структура ветвей длиной от 4.5 до 36 см (толщиной от 0.5 до 4 см) описывается структурой логарифмического фрактала в трехмерном пространстве.

На рис. 9 представлены изображение липы и кривая фурье-интенсивности в зависимости от импульса в двойном логарифмическом масштабе с показателями степени для больших ветвей $\nu_1 = 2.04 \pm 0.07$ в диапазоне координат обратного пространства от

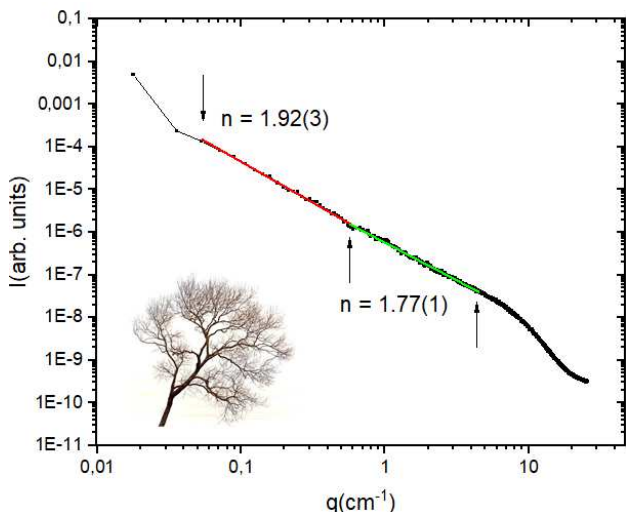


Рис. 8. Исследование изображения ивы методом численного фурье-анализа

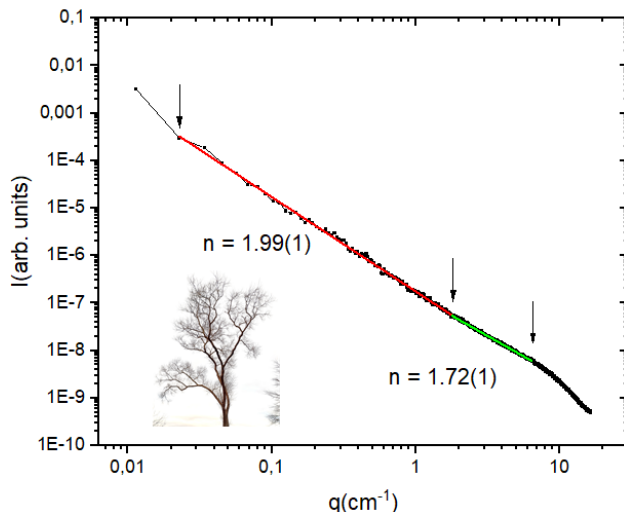


Рис. 10. Исследование изображения яблони методом численного фурье-анализа

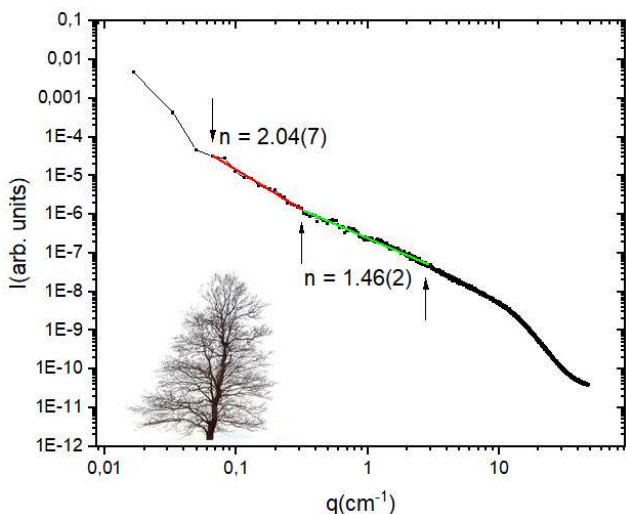


Рис. 9. Исследование изображения липы методом численного фурье-анализа

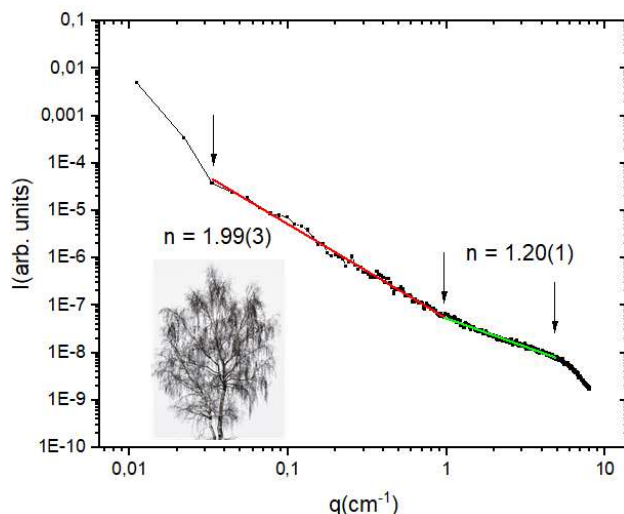


Рис. 11. Исследование изображения березы методом численного фурье-анализа

$6 \cdot 10^{-2}$ до $3 \cdot 10^{-1} \text{ см}^{-1}$ и для малых веток $\nu_2 = 1.74(1)$ в диапазоне от $3 \cdot 10^{-1}$ до 3 см^{-1} . Точка перегиба $q_c = 3 \cdot 10^{-1} \text{ см}^{-1}$ соответствует среднему расстоянию в 20 см, что в терминах толщины ветви конвертируется в 6.6 см, а в терминах длины ветви — в 60 см. Таким образом, структура ветвей длиной от 60 до 300 см (толщиной от 6.6 до 30 см) описывается структурой логарифмического фрактала в двумерном пространстве. А структура ветвей длиной от 6 до 60 см (толщиной от 0.6 до 6 см) описывается структурой логарифмического фрактала в трехмерном пространстве.

На рис.10 представлены изображение яблони и кривая фурье-интенсивности в зависимости от импульса в двойном логарифмическом масштабе с показателями степени для больших ветвей $\nu_1 = 1.99 \pm 0.01$ в диапазоне координат обратного

пространства от $2 \cdot 10^{-2}$ до 1.5 см^{-1} и для малых веток $\nu_2 = 1.72 \pm 0.01$ в диапазоне от 1.5 до 6 см^{-1} . Точка перегиба $q_c = 1.5 \text{ см}^{-1}$ соответствует среднему расстоянию в 4 см, что в терминах толщины ветви конвертируется в 1.3 см, а в терминах длины ветви — в 12 см. Таким образом, структура ветвей длиной от 12 до 1000 см (толщиной от 1.3 до 100 см) описывается структурой логарифмического фрактала в двумерном пространстве. А структура ветвей длиной от 3 до 12 см (толщиной от 0.3 до 1.3 см) описывается структурой логарифмического фрактала в трехмерном пространстве.

На рис.11 представлены изображение березы и кривая фурье-интенсивности в зависимости от импульса в двойном логарифмическом масштабе с показателями степени для больших ветвей $\nu_1 = 1.99 \pm 0.03$ в диапазоне координат обратного

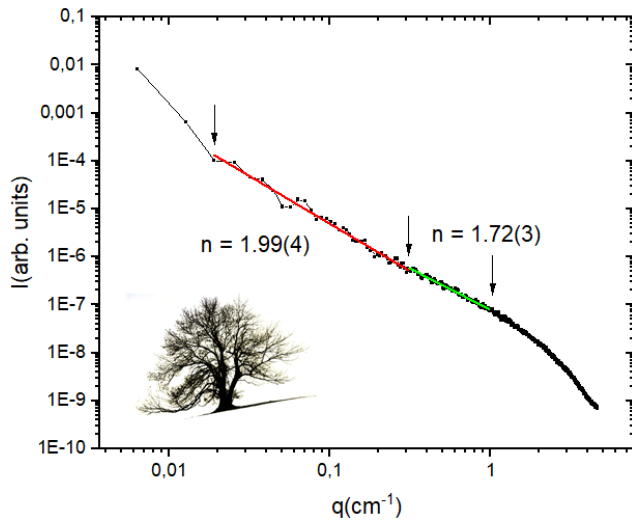


Рис. 12. Исследование изображения дуба методом численного фурье-анализа

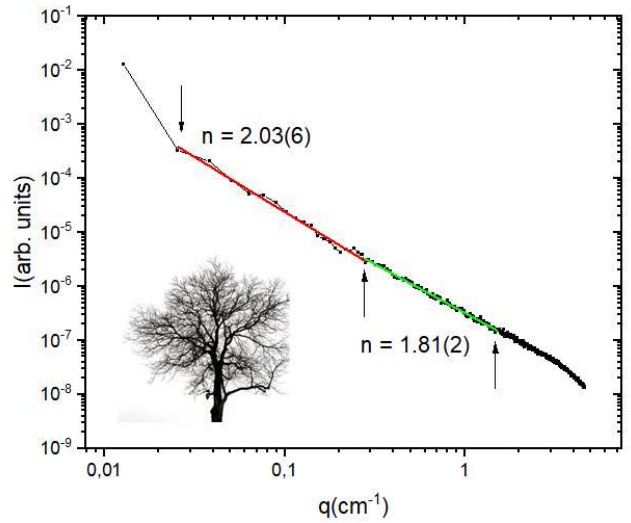


Рис. 14. Исследование изображения дерева неустановленной породы методом численного фурье-анализа

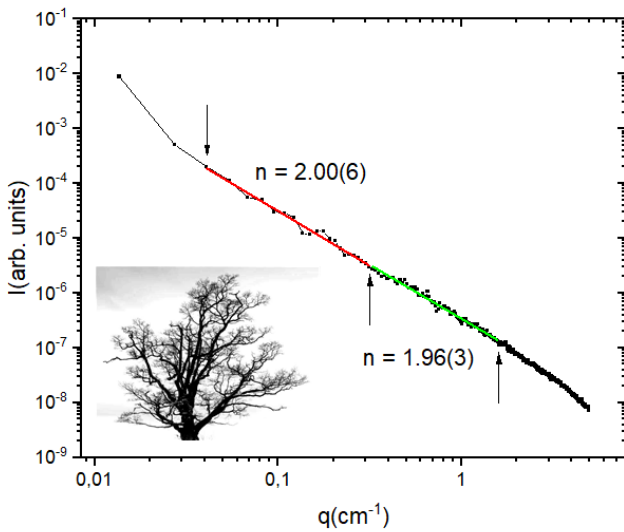


Рис. 13. Исследование изображения еще одного дуба методом численного фурье-анализа

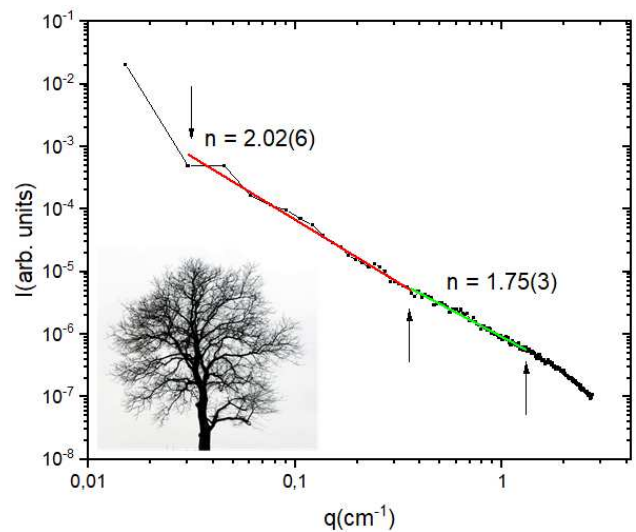


Рис. 15. Исследование изображения дерева той же неустановленной породы методом численного фурье-анализа

пространства от $3 \cdot 10^{-2}$ до 1 см^{-1} и для малых веток $\nu_2 = 1.20 \pm 0.01$ в диапазоне от 1 до 6 см^{-1} . Точка перегиба $q_c = 1 \text{ см}^{-1}$ соответствует среднему расстоянию в 6 см, что в терминах толщины ветви конвертируется в 2 см, а в терминах длины ветви — в 18 см. Таким образом, структура ветвей длиной от 18 до 600 см (толщиной от 2 до 60 см) описывается структурой логарифмического фрактала в двумерном пространстве. А структура ветвей длиной от 3 до 18 см (толщиной от 0.3 до 2 см) описывается структурой логарифмического фрактала в трехмерном пространстве.

На рис.12 представлены изображение дуба и кривая фурье-интенсивности в зависимости от импульса в двойном логарифмическом масшта-

бе с показателями степени для больших ветвей $\nu_1 = 1.99 \pm 0.04$ в диапазоне координат обратного пространства от $2 \cdot 10^{-2}$ до $3 \cdot 10^{-1} \text{ см}^{-1}$ и для малых веток $\nu_2 = 1.72 \pm 0.03$ в диапазоне от $3 \cdot 10^{-1}$ до 1 см^{-1} . Точка перегиба $q_c = 3 \cdot 10^{-1} \text{ см}^{-1}$ соответствует среднему расстоянию в 20 см, что в терминах толщины ветви конвертируется в 6.6 см, а в терминах длины ветви — в 60 см. Таким образом, структура ветвей длиной от 60 до 900 см (толщиной от 6.6 до 100 см) описывается структурой логарифмического фрактала в двумерном пространстве. А структура ветвей длиной от 18 до 60 см (толщиной от 2 до 6.6 см) описывается структурой логарифмического фрактала в трехмерном пространстве.

На рис.13 представлены изображение другого дуба и кривая фурье-интенсивности в зависимости от импульса в двойном логарифмическом масштабе с показателями степени для больших ветвей $\nu_1 = 2.00 \pm 0.06$ в диапазоне координат обратного пространства от $4 \cdot 10^{-2}$ до $3 \cdot 10^{-1} \text{ см}^{-1}$ и для малых веток $\nu_2 = 1.96 \pm 0.03$ в диапазоне от $3 \cdot 10^{-1}$ до 1.5 см^{-1} . Точка перегиба $q_c = 3 \cdot 10^{-1} \text{ см}^{-1}$ соответствует среднему расстоянию в 20 см, что в терминах толщины ветви конвертируется в 6.6 см, а в терминах длины ветви — в 60 см. Таким образом, структура ветвей длиной от 60 до 600 см (толщиной от 6.6 до 60 см) описывается структурой логарифмического фрактала в двумерном пространстве. А структура ветвей длиной от 12 до 60 см (толщиной от 1.3 до 6.6 см) описывается структурой логарифмического фрактала в трехмерном пространстве.

На рис.14 представлены изображение дерева неустановленной породы и кривая фурье-интенсивности в зависимости от импульса в двойном логарифмическом масштабе с показателями степени для больших ветвей $\nu_1 = 2.03 \pm 0.06$ в диапазоне координат обратного пространства от $2 \cdot 10^{-2}$ до $3 \cdot 10^{-1} \text{ см}^{-1}$ и для малых веток $\nu_2 = 1.81 \pm 0.02$ в диапазоне от $3 \cdot 10^{-1}$ до 1.5 см^{-1} . Точка перегиба $q_c = 3 \cdot 10^{-1} \text{ см}^{-1}$ соответствует среднему расстоянию в 20 см, что в терминах толщины ветви конвертируется в 6.6 см, а в терминах длины ветви — в 60 см. Таким образом, структура ветвей длиной от 60 до 600 см (толщиной от 6.6 до 60 см) описывается структурой логарифмического фрактала в двумерном пространстве. А структура ветвей длиной от 12 до 60 см (толщиной от 1.3 до 6.6 см) описывается структурой логарифмического фрактала в трехмерном пространстве.

На рис. 15 представлены изображение дерева той же неустановленной породы, кривая фурье-интенсивности в зависимости от импульса в двойном логарифмическом масштабе с показателями степени для больших ветвей $\nu_1 = 2.02 \pm 0.06$ в диапазоне координат обратного пространства от $3 \cdot 10^{-2}$ до $3 \cdot 10^{-1} \text{ см}^{-1}$ и для малых веток $\nu_2 = 1.75 \pm 0.03$ в диапазоне от $3 \cdot 10^{-1}$ до 1.5 см^{-1} . Точка перегиба $q_c = 3 \cdot 10^{-1} \text{ см}^{-1}$ соответствует среднему расстоянию в 20 см, что в терминах толщины ветви конвертируется в 6.6 см, а в терминах длины ветви — в 60 см. Таким образом, структура ветвей длиной от 60 до 900 см (толщиной от 6.6 до 90 см) описывается структурой логарифмического фрактала в двумерном пространстве. А структура ветвей длиной от 12 до 60 см (толщиной от 1.3 до 6.6 см) описывается структурой логарифмического фрактала в трехмерном пространстве.

ЛИТЕРАТУРА

1. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, New York (1983).
2. H. O. Peitgen and P. H. Richter, *The Beauty of Fractals*, Springer, Berlin (1986).
3. Е. Федер, *Фракталы*, Мир, Москва (1991).
4. В. К. Балханов, Ю. Б. Башкуев, *Моделирование разрядов молнии фрактальной геометрией*, ЖТФ **82**, 126 (2012).
5. А. Г. Бершадский, *Фрактальная структура турбулентных вихрей*, ЖЭТФ **96**, 625 (1989).
6. *Fractals in Biology and Medicine*, ed. by T. F. Nonnenmacher, G. A. Losa, and E. R. Weibel, Birkhäuser Verlag, Basel (1994).
7. *Fractals in Biology and Medicine*, Vol. II, ed. by G. Losa, T. F. Nonnenmacher, D. Merlini, and E. R. Weibel, Birkhäuser Verlag, Basel (1998).
8. *Fractals in Biology and Medicine*, Vol. III, ed. by G. Losa, D. Merlini, T. F. Nonnenmacher, and E. R. Weibel, Birkhäuser Verlag, Basel (2002).
9. *Fractals in Biology and Medicine*, Vol. VI, ed. by G. Losa, D. Merlini, T. F. Nonnenmacher, and E. R. Weibel, Birkhäuser Verlag, Basel (2005).
10. L. S. Liebovitch, *Fractals and Chaos Simplified for the Life Sciences*, Oxford Univ. Press, New York (1998).
11. I. C. Andronache, H. Ahammer, H. F. Jelineck, D. Pep-tenatu, A.-M. Ciobotaru, C. C. Draghici, R. D. Pintilii, A. G. Simion, and C. Teodorescu, *Fractal Analysis for Studying the Evolution of Forests*, Chaos, Solitons and Fractals **91**, 310 (2016).
12. А. И. Гурцев, Ю. Л. Цельникер, *Фрактальная структура ветви дерева*, Сибирский экологический журнал **4**, 431 (1999).
13. J. P. Richter and R. C. Bell, *The Notebooks of Leonardo da Vinci*, Dover, New York (1970).
14. K. Shinozaki, K. Yoda, K. Hozumi, and T. Kira, *A Quantitative Analysis of Plant Form—the Pipe Model Theory I. Basic Analyses*, Jpn. J. Ecol. **14**, 97 (1964).
15. Th. A. McMahon and R. E. Kronauer, *J. Theor. Biol.* **59**, 443 (1976).
16. G. B. West, J. H. Brown, and B. J. Enquist, *A General Model for the Origin of Allometric Scaling Laws in Biology*, Science **276**, 122 (1997).

17. G. B. West, J. H. Brown, and B. J. Enquist, *The Fourth Dimension of Life: Fractal Geometry and Allometric Scaling of Organisms*, Science **284**, 1677 (1999).
18. G. B. West, B. J. Enquist, and J. H. Brown, *A General Quantitative Theory of Forest Structure and Dynamics*, PNAS **106**, 7040 (2009).
19. F. Simini, T. Anfodillo, M. Carrer, J. R. Banavar, and A. Maritan, *Self-Similarity and Scaling in Forest Communities*, PNAS **107**, 7658 (2010).
20. L. Kocillari, M. E. Olson, S. Suweis et al., *The Widened Pipe Model of Plant Hydraulic Evolution*, PNAS **118**, e2100314118 (2021).
21. R. Lehnebach, R. Beyer, V. Letort, and P. Heuret, *The Pipe Model Theory Half a Century on: a Review*, Annals of Botany **121**, 773 (2018).
22. C. Eloy, *Leonardo's Rule, Self-Similarity, and Wind-Induced Stresses in Trees*, Phys. Rev. Lett. **107**, 258101 (2011).
23. R. Minamino and M. Tatenno, *Tree Branching: Leonardo da Vinci's Rule versus Biomechanical Models*, PLoS One **9**, e93535 (2014).
24. E. Nikinmaa, *Analyses of the Growth of Scots Pine: Matching Structure with Function*, Acta Forestalia Fennica **235**, 7681 (1992).
25. K. Sone, K. Noguchi, and I. Terashima, *Dependency of Branch Diameter Growth in Young Acer Trees on Light Availability and Shoot Elongation*, Tree Physiology **25**, 39 (2005).
26. K. Sone, A. A. Suzuki, S. Miyazawa, K. Noguchi, and T. Terashima, *Maintenance Mechanisms of the Pipe Model Relationship and Leonardo da Vinci's Rule in the Branching Architecture of Acer Rufinerve Trees*, J. Plant Res. **122**, 41 (2009).
27. Ю. Л. Цельникер, *Структура кроны ели*, Лесоведение **4**, 35 (1994).
28. Ю. Л. Цельникер, М. Д. Корзухин, Б. Б. Зейде, *Морфологические и физиологические исследования кроны деревьев*, Мир Урании, Москва (2000).
29. S. V. Grigoriev, O. D. Shnyrkov, P. M. Pustovoyt, E. G. Iashina, and K. A. Pshenichnyi, *Experimental Evidence for Logarithmic Fractal Structure of Botanical Trees*, Phys. Rev. E **105**, 044412 (2022).
30. H. D. Bale and P. W. Schmidt, Phys. Rev. Lett. **53**, 596 (1984).
31. J. Teixeira, *Small-Angle Scattering by Fractal Systems*, J. Appl. Crystallogr. **21**, 781 (1988).
32. Po-zen Wong and A. J. Bray, *Porod Scattering from Fractal Surfaces*, Phys. Rev. Lett. **60**, 1344 (1988).
33. Е. Г. Яшина, С. В. Григорьев, *Малогоугольное рассеяние нейтронов на фрактальных объектах*, Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования **9**, 5 (2017).
34. R. Zwiggelaar and C. R. Bull, *Optical Determination of Fractal Dimensions Using Fourier Transforms*, Opt. Engin. **34**, 1325 (1995).
35. D. A. Zimnyakov and V. V. Tuchin, *Fractality of Speckle Intensity Fluctuations*, Appl. Opt. **35**, 4325 (1996).
36. C. Allain and M. Cloitre, *Optical Diffraction on Fractals*, Phys. Rev. B **33**, 3566 (1986).
37. Дж. Гудмен, *Введение в фурье-оптику*, Мир, Москва (1970).
38. А. Н. Матвеев, *Оптика*, Высшая школа, Москва (1985).
39. J. O. Indekeu and G. Flerackers, *Logarithmic Fractals and Hierarchical Deposition of Debris*, Physica A **261**, 294 (1998).
40. П. М. Пустовойт, Е. Г. Яшина, К. А. Пшеничный, С. В. Григорьев, *Классификация фрактальных и нефрактальных объектов в пространстве двух измерений*, Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования **12**, 3 (2020).
41. А. А. Зинчик, Я. Б. Музыченко, А. В. Смирнов, С. К. Стафеев, *Расчет фрактальной размерности регулярных фракталов по картине дифракции в дальней зоне*, Научно-техн. вестник СПбГУ ИТМО **60**, 17 (2009).
42. С. В. Григорьев, О. Д. Шнырков, К. А. Пшеничный, П. М. Пустовойт, Е. Г. Яшина, *Модель фрактальной организации хроматина в двумерном пространстве*, ЖЭТФ **163**, 428 (2023).
43. <https://github.com/tre3k/fractal>
44. И. Г. Серебряков, *Экологическая морфология растений. Жизненные формы покрытосеменных и хвойных*, Высшая школа, Москва (1962).
45. L. Teia, *Anatomy of the Pythagoras' Tree*, Australian Senior Mat. J. **30**, 38 (2016).