

# ВЛИЯНИЕ ФАЗЫ ИОНИЗИРУЮЩЕГО ПРЕДЕЛЬНО КОРОТКОГО ЛАЗЕРНОГО ИМПУЛЬСА НА ОБРАЗОВАНИЕ КВАНТОВЫХ ВИХРЕЙ В ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФОТОЭЛЕКТРОНА

*Н. В. Ларионов* \*

*Санкт-Петербургский государственный морской технический университет  
190121, Санкт-Петербург, Россия,  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
195251, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 7 октября 2023 г.,  
после переработки 3 ноября 2023 г.  
Принята к публикации 3 ноября 2023 г.

Теоретически исследуются квантовые вихри, образованные фотоэлектроном, полученным в результате надбарьерной ионизации двумерного атома водорода предельно коротким лазерным импульсом. Анализируется чувствительность квантовых вихрей к начальной фазе ионизирующего поля. Уточняются интерференционные эффекты, ответственные за появление вихрей. Для рассматриваемой модели обсуждается использование различных калибровок при описании взаимодействия электрона с полем.

DOI: 10.31857/S0044451024030027

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Появление источников электромагнитных импульсов с интенсивностью и длительностью сопоставимыми с соответствующими атомными значениями открыло возможности для исследования и управления состояниями одиночных атомов и молекул, а также их ансамблей. Такие возможности востребованы как в квантово-информационных приложениях, так и при исследовании новых режимов управления на атомарных масштабах [1–10].

Одним из нетривиальных эффектов при воздействии на атом лазерного импульса длительностью всего в несколько атомных единиц времени является появление вихревых структур в электронной плотности. Первое теоретическое предсказание таких структур было сделано в 2010 году в работе [11]. Позже в работах [12, 13] вихревые структуры были выявлены в распределении по импульсам для фотоэлектрона, вырванного в процессе ионизации атома гелия лазерным импульсом. Экспериментальное

подтверждение вихревых образований появилось в 2017 году в работе [14]. В этом эксперименте рассматривалась многофотонная ионизация атомов калия последовательностью фемтосекундных лазерных импульсов.

В настоящее время теоретические исследования подобных вихрей ведутся во многих научных группах [15–31]. Подходы к исследованию этих образований представлены как разработками оригинальных численных методов решения нестационарного уравнения Шредингера или эквивалентных ему уравнений квантовой гидродинамики (см., к примеру, [32]), так и отысканием асимптотических решений.

В работах [16–19] нами исследовались такие вихревые образования, как квантовые вихри [24], возникающие при надбарьерной ионизации двумерного водородоподобного атома сверхкоротким лазерным импульсом. Эти вихри проявляют себя как специфические неоднородности в пространственном распределении фотоэлектрона: центр вихря это нуль волновой функции, вокруг которого векторное поле скорости закручивается (отметим, что первый, кто связал появление нулей волновой функции с возникновением вихрей, был Дирак [33]).

Используя нестационарную теорию возмущений, мы получили аналитическое выражение для вол-

\* E-mail: larionov.nickolay@gmail.com

новой функции фотоэлектрона, которая позволила увидеть интерференционную природу вихрей и проанализировать их зависимость от некоторых параметров импульса. Результаты аналитического подхода подтвердились численными расчетами.

В упомянутых работах поле лазерного импульса моделировалось косинусоидальной зависимостью на временном интервале  $[0, T]$  ( $1 < T < 10$  отн. ед.), содержащем всего несколько периодов колебаний. При этом в моменты включения и выключения импульса всегда задавалось максимальное значение амплитуды, т.е. реализовывалась вариация предельного случая внезапного возмущения [34]. Другие вариации воздействия лазерного импульса исследованы не были.

В данной работе, оставаясь в рамках решений, полученных в [17–19], будет исследовано влияние начальной фазы поля импульса на образование квантовых вихрей.

Все вычисления будут проведены в импульсном пространстве. В частности, для идентификации квантовых вихрей в этом пространстве будет использован так называемый «симметричный» поток вероятности [19, 35], чувствительный к фазе волновой функции.

Также будет уделено внимание интерференционным эффектам, ответственным за образование квантовых вихрей: в распределении фотоэлектрона по импульсам выделим соответствующий интерференционный член.

Отдельно будет рассмотрен вопрос о выборе калибровки при нахождении приближенного решения уравнения Шредингера для рассматриваемой модели.

Статья построена следующим образом. В разд. 2 коротко приведен вывод волновой функции фотоэлектрона и обсуждены используемые приближения. Даны выражения для потоков вероятностей. В разд. 3 приведены результаты расчетов и их анализ. В разд. 4 обсуждается использование различных калибровок при описании взаимодействия электрона с полем. Последний раздел подытоживает проделанную работу.

В работе используется атомная система единиц:  $\hbar = 1$ ,  $m_e = 1$ ,  $e = 1$ .

## 2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Оператор Гамильтона  $\hat{H}$  двумерного атома водорода, взаимодействующего с полем лазера, имеет стандартный вид:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V} = \hat{H}_0 - \hat{\mathbf{d}}\mathbf{F}(t), \quad (1)$$

где  $\hat{H}_0$  — невозмущенный гамильтониан атома, а оператор взаимодействия  $\hat{V}$  записан в дипольном приближении, где  $\hat{\mathbf{d}} = -\hat{\mathbf{r}}$  — оператор дипольного момента атома и  $\mathbf{F}(t)$  — вектор напряженности электрического поля лазера.

Решение нестационарного уравнения Шредингера ищется в виде следующей суперпозиции:

$$|\Psi(t)\rangle = |\Psi_{1,0}^{(0)}\rangle e^{-iE_1 t} + \sum_m \int_0^\infty b_{k,m}(t) |\Psi_{k,m}^{(0)}\rangle e^{-iE_k t} k dk. \quad (2)$$

Здесь первое слагаемое соответствует основному (начальному) состоянию атома с энергией  $E_1 = -1/2$  [36, 37] (полагаем зарядовое число  $Z = 1/2$ ). Нижние индексы «1, 0» у вектора  $|\Psi_{1,0}^{(0)}\rangle$  указывают на главное квантовое число  $n = 1$  и проекцию момента  $m = 0$  на ось  $z$ . Второе слагаемое описывает состояние фотоэлектрона и представлено суперпозицией цилиндрических волн. Индексы у соответствующих векторов  $|\Psi_{k,m}^{(0)}\rangle$  характеризуют энергию фотоэлектрона

$$E_k = k^2/2 = (k_x^2 + k_y^2)/2$$

и проекцию момента  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Неизвестные амплитуды  $b_{k,m}(t)$ , такие что  $b_{k,m}(0) = 0, \forall k, m$ .

Запись искомого состояния в виде (2) аналогична записи, используемой в теории Келдыша [38, 39], за исключением того, что вместо волковских функций стоят цилиндрические волны. Такая запись подразумевает, что интенсивность лазерного поля должна быть меньше атомной, так чтобы вероятность ионизации атома была мала. Также подразумевает, что воздействие кулоновского потенциала остаточного иона на фотоэлектрон пренебрежимо мало.

Исследование квантовых вихрей в работе будем проводить в импульсном пространстве. Для этого спроецируем искомое состояние  $|\Psi(t)\rangle$  (2) на собственные векторы  $|\mathbf{k}\rangle$  оператора импульса  $\hat{\mathbf{k}}$ . Тогда, используя явный вид необходимых волновых функций [40]

$$\begin{aligned} \Psi_{1,0}^{(0)}(\mathbf{k}) &= \frac{2\Phi_0(\varphi_k)}{(k^2 + 1)^{3/2}}, \\ \Psi_{k',m}^{(0)}(\mathbf{k}) &= (-i)^{|m|} \frac{\delta(k' - k)}{k'} \Phi_m(\varphi_k), \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\Phi_m(\varphi_k) = \frac{e^{im\varphi_k}}{\sqrt{2\pi}},$$

$(k, \varphi_k)$  — полярные координаты импульса  $\mathbf{k}$ , получаем

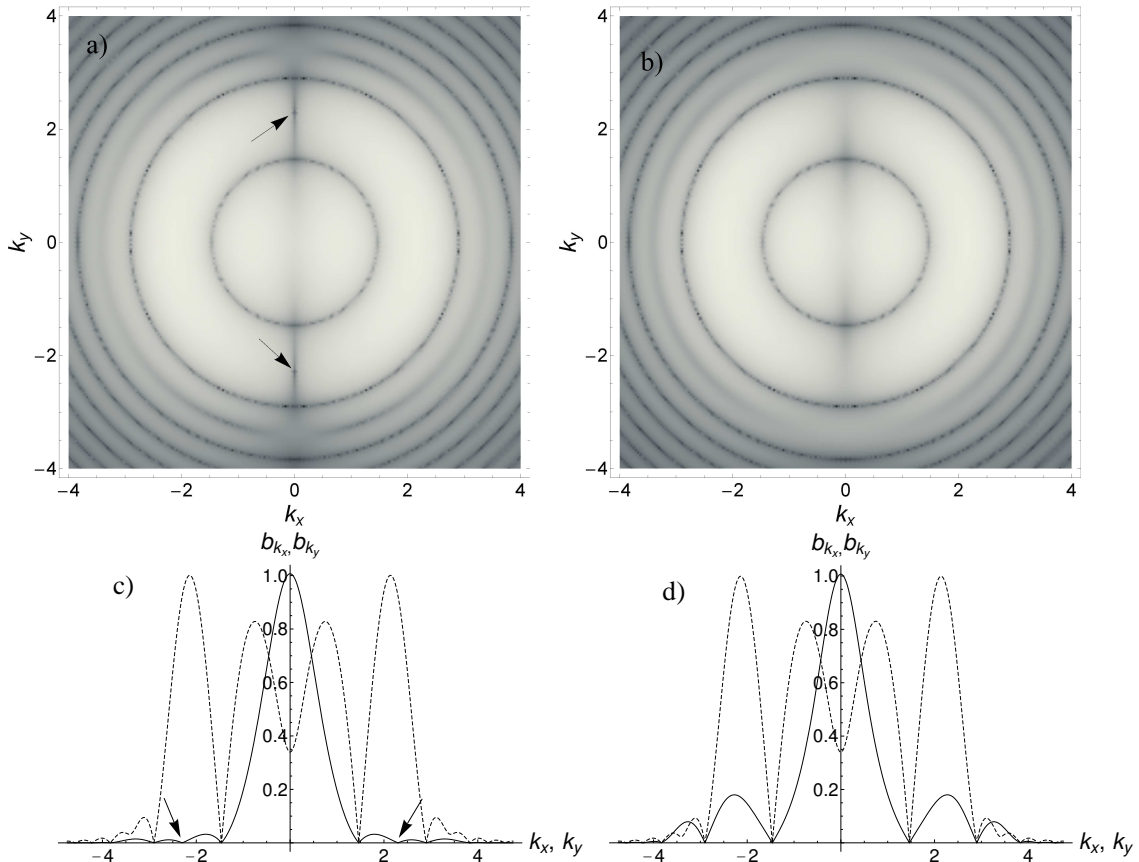


Рис. 1. *a* и *b* — Плотность распределения фотоэлектрона по импульсам  $\ln(\rho)$ . *c* и *d* — Зависимости абсолютных значений волновой функции  $b_{k_x}, b_{k_y}$  от компонент  $k_x, k_y$  соответственно. Параметры импульса:  $F_0 = 0.4, \omega = \pi, \alpha = 0, T = 4$

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{k}, t) &\equiv \langle \mathbf{k} | \Psi(t) \rangle = \\ &= \frac{2\Phi_0(\varphi_k)}{(k^2 + 1)^{3/2}} e^{-iE_1 t} + \\ &+ \sum_m b_{k,m}(t) (-i)^{|m|} \Phi_m(\varphi_k) e^{-iE_k t}. \end{aligned} \quad (4)$$

Далее, подставляя разложение (4) в уравнение Шредингера, получаем систему уравнений для нахождения неизвестных амплитуд  $b_{k,m}(t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_{k,m}(t)}{\partial t} &= \\ &= \frac{-i}{2} (F_-(t)\delta_{m,+1} + F_+(t)\delta_{m,-1}) \frac{6ke^{i\omega_{k1}t}}{(k^2 + 1)^{5/2}} + \\ &+ \frac{(-i)^{|m-1|-|m|}}{2} F_-(t) \left( \frac{\partial}{\partial k} - ikt - \frac{m-1}{k} \right) b_{k,m-1}(t) + \\ &+ \frac{(-i)^{|m+1|-|m|}}{2} F_+(t) \left( \frac{\partial}{\partial k} - ikt + \frac{m+1}{k} \right) b_{k,m+1}(t), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\omega_{k1} = (k^2 + 1)/2$  — частота перехода  $E_1 \rightarrow E_k$  и введено обозначение

$$F_{\pm}(t) = F_x(t) \pm iF_y(t).$$

При выводе (5) было использовано явное выражение для оператора взаимодействия в импульсном представлении:

$$\hat{V} = \mathbf{F}(t)i\nabla_k, \quad \nabla_k = \partial/\partial\mathbf{k}.$$

Отличие системы (5) от соответствующей системы уравнений, используемой нами ранее (см. [17–19]), состоит в учете произвольной поляризации поля  $\mathbf{F}(t)$ .

Решение системы (5) ищем в виде итерационного ряда

$$b_{k,m}(t) = \sum_{s=0}^{\infty} b_{km,10}^{(s)}(t),$$

где  $b_{km,10}^{(s)} \sim F^s$ , а добавленный нижний индекс «10» указывает на начальное связанное состояние электрона. Отсюда волновая функция фотоэлектрона во втором порядке теории возмущений равна

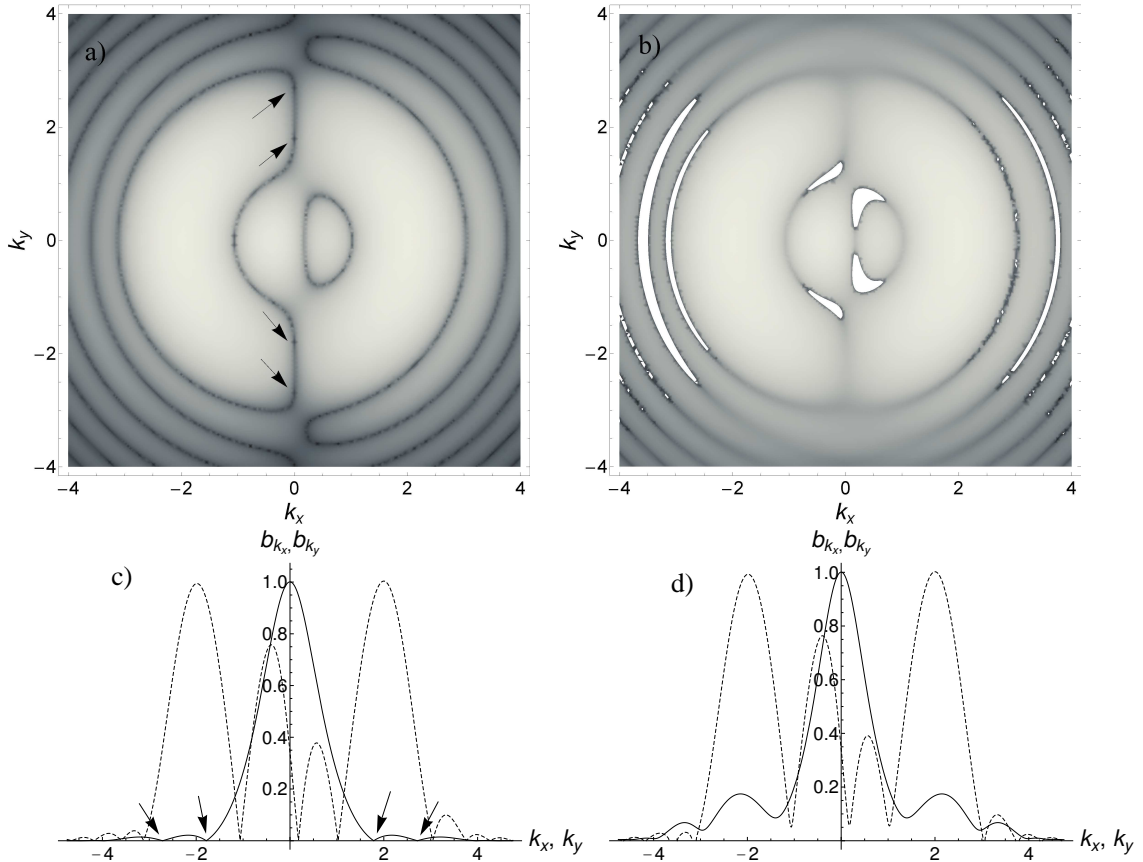


Рис. 2. *a* и *b* — Плотность распределения фотоэлектрона по импульсам  $\ln(\rho)$ . *c* и *d* — Зависимости абсолютных значений волновой функции  $b_{k_x}$ ,  $b_{k_y}$  от компонент  $k_x, k_y$  соответственно. Параметры импульса:  $F_0 = 0.4$ ,  $\omega = \pi$ ,  $\alpha = 0$ ,  $T = 3$

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(\mathbf{k}, t) = & -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}b_{k1,10}^{(1)}(t)\cos(\varphi_k)e^{-iE_k t} + \\ & + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}b_{k0,10}^{(2)}(t)e^{-iE_k t} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}b_{k2,10}^{(2)}(t)\cos(2\varphi_k)e^{-iE_k t}, \end{aligned} \quad (6)$$

где тильда над  $\Psi$  указывает, что связанное состояние опущено, т.е. интерференцией между начальным и конечными состояниями электрона пренебрегается. Отметим, что в предыдущих наших работах [17, 18] использовалось обозначение

$$\tilde{\Psi}(\mathbf{k}, t) = b(\mathbf{k}, t)e^{-iE_k t}.$$

Также при записи (6) было учтено, что

$$b_{k1,10}^{(1)}(t) = b_{k-1,10}^{(1)}(t), \quad b_{k2,10}^{(2)}(t) = b_{k-2,10}^{(2)}(t).$$

Для наглядности выйдем явное выражение для плотности распределения фотоэлектрона по импульсам, которое понадобится нам при обсуждении интерференционных эффектов

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{k}, t) \equiv |\tilde{\Psi}(\mathbf{k}, t)|^2 = & \frac{1}{\pi}\{2\cos^2(\varphi_k)|b_{k1,10}^{(1)}(t)|^2 + \\ & + \frac{1}{2}|b_{k0,10}^{(2)}(t)|^2 + 2\cos^2(2\varphi_k)|b_{k2,10}^{(2)}(t)|^2 - \\ & - 2\text{Re}\left[ib_{k1,10}^{(1)}(t)b_{k0,10}^{(2)*}(t)\right]\cos(\varphi_k) + \\ & + 4\text{Re}\left[ib_{k1,10}^{(1)}(t)b_{k2,10}^{(2)*}(t)\right]\cos(\varphi_k)\cos(2\varphi_k) - \\ & - 2\text{Re}\left[b_{k0,10}^{(2)}(t)b_{k2,10}^{(2)*}(t)\right]\cos(2\varphi_k)\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\text{Re}[z]$  означает действительную часть  $z$ .

Теперь выйдем и обсудим преимущества так называемого [19, 35] «симметричного» потока вероятности

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{k}, t) = & -\frac{1}{2i}[\tilde{\Psi}^*(\mathbf{k}, t)\nabla_k\tilde{\Psi}(\mathbf{k}, t) - \\ & - \tilde{\Psi}(\mathbf{k}, t)\nabla_k\tilde{\Psi}^*(\mathbf{k}, t)]. \end{aligned} \quad (8)$$

Запишем найденную волновую функцию (6) в виде

$$\tilde{\Psi}(\mathbf{k}, t) = \sqrt{\rho(\mathbf{k}, t)}e^{-i\chi(\mathbf{k}, t)},$$

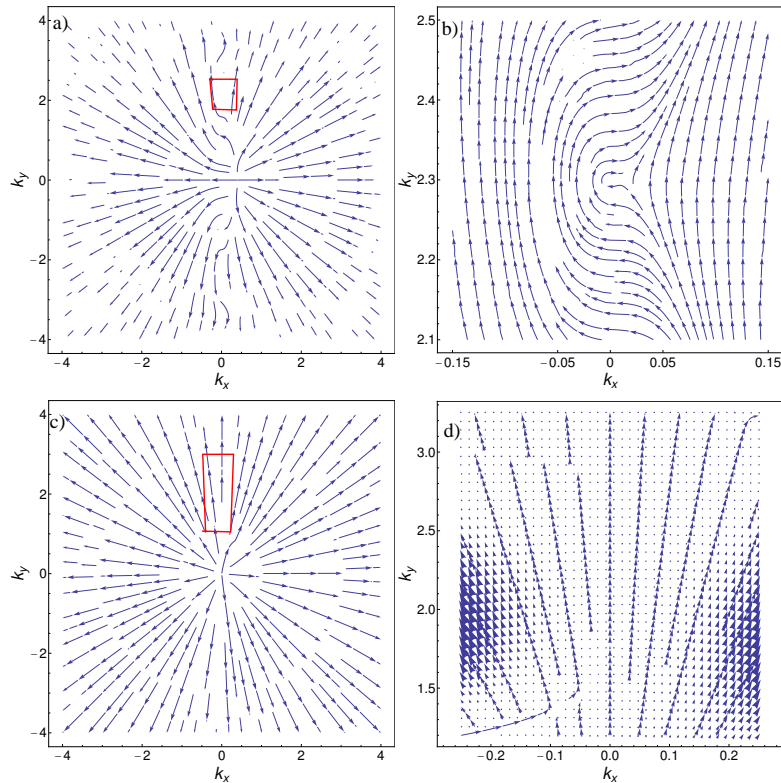


Рис. 3. Векторное поле для «симметричного» потока  $\bar{\mathbf{j}}$ .  $T = 4$  (a, b),  $T = 3$  (c, d). b, d — Увеличенные области векторного поля (красные прямоугольники), содержащие квантовые вихри

где  $\chi(\mathbf{k}, t)$  — фаза. Тогда, подставляя  $\tilde{\Psi}(\mathbf{k}, t)$  в (8), получаем

$$\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{k}, t) = -\rho(\mathbf{k}, t)\nabla_k\chi(\mathbf{k}, t).$$

Таким образом, поток  $\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{k}, t)$  чувствителен к фазе волновой функции  $\tilde{\Psi}(\mathbf{k}, t)$ , в то время как стандартный поток в импульсном пространстве дается выражением

$$\mathbf{j}(\mathbf{k}, t) = \mathbf{k}\rho(\mathbf{k}, t).$$

Также будем использовать нормированный «симметричный» поток

$$\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, t) = \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{k}, t)/\rho(\mathbf{k}, t) = -\nabla_k\chi(\mathbf{k}, t),$$

который будем называть полем скоростей.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЯ

Двумерный атом водорода облучается линейно поляризованным вдоль оси  $x$  лазерным импульсом, напряженность электрического поля которого имеет вид

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{e}_x F_0 \cos(\omega t - \alpha) [\theta(T - t) - \theta(-t)]. \quad (9)$$

где  $\mathbf{e}_x$  — единичный вектор в направлении оси  $x$ ,  $F_0$  — постоянная амплитуда,  $\omega$  — частота,  $\alpha$  — начальная фаза,  $\theta(t)$  — функция Хевисайда,  $T$  — длительность импульса.

Плотность распределения (7) и «симметричный» поток (8) (далее просто поток) будем рассматривать на временах  $t > T$ :

$$\rho = \rho(k_x, k_y, t > T), \quad \bar{\mathbf{j}} = (\bar{j}_x, \bar{j}_y),$$

где

$$\bar{j}_i = \bar{j}_i(k_x, k_y, t > T), \quad i = x, y.$$

#### 3.1. Интерференционный вклад

Вначале проверим, какой из интерференционных членов в выражении (7) отвечает за образование квантовых вихрей. Выберем параметры импульса близкие к тем, для которых ранее уже идентифицировались вихри [16, 17]:  $F_0 = 0.4$ ,  $\omega = \pi$ ,  $\alpha = 0$ ,  $T = 4$ .

На рис. 1 представлены графики плотности распределения фотоэлектрона по импульсам  $\rho$  (для более четкого отображения графики строятся для

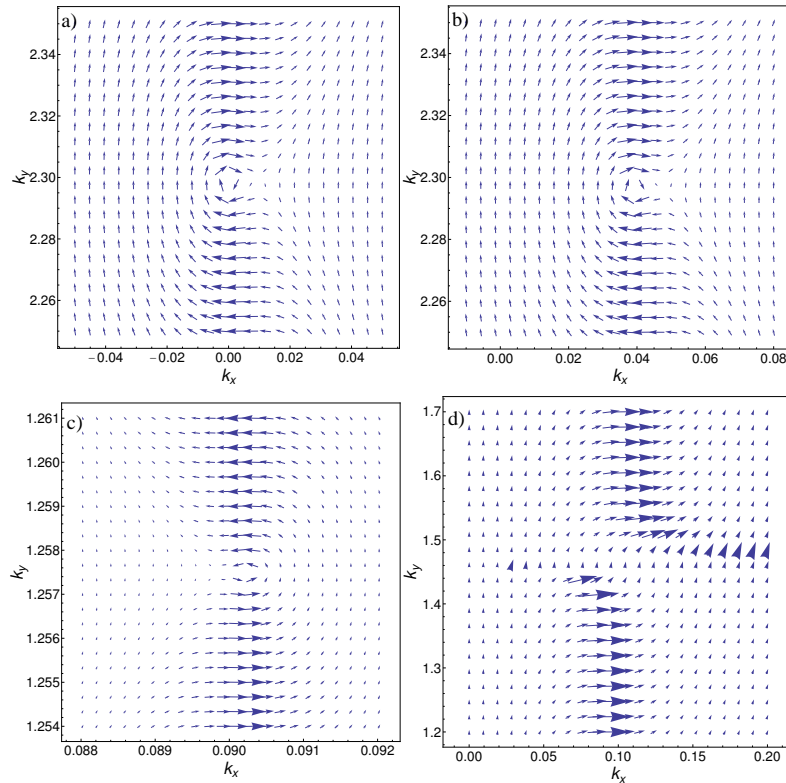


Рис. 4. Векторное поле для  $\bar{\nu}$ .  $\alpha = 0$  (a),  $\pi/10$  (b),  $\pi/3$  (c),  $\pi/2$  (d). Для всех графиков  $F_0 = 0.4$ ,  $\omega = \pi$ ,  $T = 4$

$\ln(\rho)$ ), а также нормированные на свои максимумы следующие зависимости модуля волновой функции:

$$b_{k_x} \equiv |\tilde{\Psi}(k_x, 0, t > T)|/|\tilde{\Psi}_{max}|,$$

$$b_{k_y} \equiv |\tilde{\Psi}(0, k_y, t > T)|/|\tilde{\Psi}_{max}|.$$

Для выбранных параметров импульса образуются два симметричных вихря с центрами в точках  $k_{x_0} = 0$ ,  $k_{y_0} = \pm\sqrt{2\pi-1} \approx \pm 2.3$  (указаны стрелками, рис. 1a,c). Теперь, сравнивая плотность  $\rho$  (7) с той же плотностью, но в которой отброшен один из трех интерференционных членов, находим, что за образование вихрей отвечает последнее слагаемое в (7). Это слагаемое описывает интерференцию состояний фотоэлектрона соответствующих цилиндрическим волнам с квантовыми числами  $m = 0, \pm 2$ . Эти состояния есть результат двухфотонного перехода через промежуточные состояния непрерывного спектра:

$$|\Psi_{1,m=0}^{(0)}\rangle \rightarrow \sum_k |\Psi_{k,m=\pm 1}^{(0)}\rangle \rightarrow |\Psi_{k,m=0,\pm 2}^{(0)}\rangle,$$

На рис. 1 b, d построены графики без учета этого интерференционного члена. Видно, что вихри отсутствуют.

Аналогичный результат по влиянию интерференционных членов можно получить и для других значений длительности импульса, к примеру, когда  $T$  нечетно и наблюдаются две пары симметричных вихрей [16, 17].

На рис. 2 для  $T = 3$  (остальные параметры такие же, как на рис. 1), построены  $\rho$  и  $b_{k_x}$ ,  $b_{k_y}$ . Исключение последнего интерференционного слагаемого в (7) приводит к исчезновению вихрей (рис. 2 b, d), центры которых даются координатами  $k_{x_0} = 0$ ,  $k_{y_0} = \pm\sqrt{4\pi/3-1} \approx \pm 1.78$ ,  $k_{x_0} = 0$ ,  $k_{y_0} = \pm\sqrt{8\pi/3-1} \approx \pm 2.71$  (рис. 2 a, c).

### 3.2. «Симметричный» поток $\bar{\mathbf{j}}$

Как показано в [19], квантовые вихри в импульсном пространстве удобно идентифицировать с помощью «симметричного» потока (8). На рис. 3 для двух рассмотренных выше длительностей импульса  $T = 3, 4$  построено векторное поле  $\bar{\mathbf{j}} = (\bar{j}_x, \bar{j}_y)$ .

На рис. 3a,c видно, что в обоих случаях поле  $\bar{\mathbf{j}}$  расходится из центра и на больших масштабах это расхождение близко к радиальному. Однако в области, где наблюдаются квантовые вихри, линии тока

искривляются (выделено красными прямоугольниками). На рис. 3*b,d* эти области увеличены.

Для одиночного изолированного вихря, который имеет место при  $T = 4$ , отчетливо видно наличие вращательной компоненты поля вокруг центра вихря (см. также [19]). Для случая  $T = 3$  такой красивой картины нет, но видна область слома линий тока. Именно вдоль этой узкой области (светлая дуга), как это было показано нами ранее (см. рис. 4 в [16]), и локализуются два вихря.

### 3.3. Чувствительность квантовых вихрей к начальной фазе поля

На рис. 4 представлено векторное поле скоростей  $\tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{j}_x/\rho, \tilde{j}_y/\rho)$  для четырех случаев:  $\alpha = 0$  (a),  $\pi/10$  (b),  $\pi/3$  (c),  $\pi/2$  (d). Остальные параметры импульса такие же, как на рис. 1.

Видно, что при увеличении фазы вихрь смещается. Для  $\alpha$  близких к  $\pi/2$  характерное вихревое поведение поля  $\tilde{\mathbf{v}}$  наблюдается в существенно более узком интервале значений  $k_x$ , нежели чем в случае, когда  $\alpha = 0$ . Для синусоидальной зависимости, т. е. когда включение и выключение импульса перестают быть внезапными, идентифицировать вихрь уже не удается.

На рис. 5 построена зависимость модуля волновой функции  $b_{k_y, min} \equiv |\tilde{\Psi}(k_{x, min}; k_y, t > T)|$  от  $k_y$  при разных значениях проекции  $k_{x, min}$  соответствующих локальному минимуму  $\tilde{\Psi}$ . На графике видно смещение центра вихря при увеличении фазы  $\alpha$ .

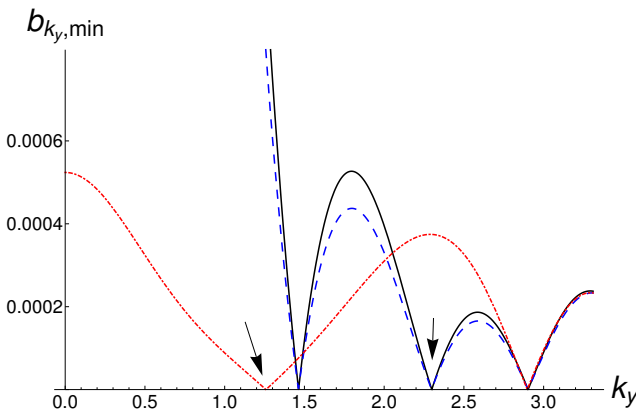


Рис. 5. Зависимость модуля волновой функции  $b_{k_y, min}$  от проекции  $k_y$  вблизи центра вихря:  $\alpha = 0$ ,  $k_{x, min} = 0$  — сплошная линия,  $\alpha = \pi/10$ ,  $k_{x, min} \approx 0.04$  — штрихи,  $\alpha = \pi/3$ ,  $k_{x, min} \approx 0.09$  — штрихпунктир. Для всех графиков  $F_0 = 0.4$ ,  $\omega = \pi$ ,  $T = 4$

Важно отметить, что строгий нуль найденной волновой функции  $\tilde{\Psi}$  (6), указывающий на центр

вихря, имеет место только при  $\alpha = 0$ . Для других рассмотренных  $\alpha \neq 0$  соответствующие значения  $k_{x, min}$  характеризуют локальные минимумы, при этом  $b_{k_y, min} \neq 0$ .

### 4. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОНА С ПОЛЕМ В «КАЛИБРОВКЕ СКОРОСТИ»

Как известно, точные решения уравнения Шредингера, полученные в двух разных калибровках — в «калибровке длины» и в «калибровке скорости», дают одинаковые предсказания для вероятностей переходов в атомных системах. Конечно, это имеет место только в том случае, когда нерелятивистская система взаимодействует с той частью мод электромагнитного поля, длина волны которых существенно превышает размер системы (см., например, [41]).

В случае же приближенных решений, найденных, к примеру, с использованием теории возмущений, результаты, полученные в разных калибровках, не обязаны совпадать [38]. Поэтому представляет интерес рассмотреть решаемую здесь задачу в «калибровке скорости».

Выпишем соответствующий оператор возмущения

$$\hat{V} = \frac{1}{c} \mathbf{A}(t) \hat{\mathbf{p}} + \frac{1}{2c^2} \mathbf{A}^2(t), \quad (10)$$

где векторный потенциал

$$\mathbf{A}(t) = -ce_x \int_0^t F_x(t') dt',$$

$$F_x(t) = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{F}(t),$$

(см. (9)). Взяв искомую волновую функцию в виде (2) и проделывая те же манипуляции, что и в случае с «калибровкой длины», получаем следующие уравнения для неизвестных амплитуд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_{k, m}(t)}{\partial t} = & \frac{A_x(t)}{2c} (\delta_{m, +1} + \delta_{m, -1}) \frac{2ke^{i\omega_{k1}t}}{(k^2 + 1)^{3/2}} - \\ & - (i)^{|m|+1-|m-1|} \frac{A_x(t)}{2c} k \cdot b_{k, m-1}(t) - \\ & - (i)^{|m|+1-|m+1|} \frac{A_x(t)}{2c} k \cdot b_{k, m+1}(t) - \\ & - i \frac{A_x^2(t)}{2c^2} b_{k, m}(t) - \\ & - i \frac{A_x^2(t)}{c^2} \delta_{m, 0} \frac{e^{i\omega_{k1}t}}{(k^2 + 1)^{3/2}}. \quad (11) \end{aligned}$$

Видно, что система (11) имеет более простой вид по сравнению с системой (5), полученной в «калибровке длины»: отсутствуют производные по  $k$ , т. е. эти

уравнения относительно просты для численных вычислений.

Как показали предварительные расчеты, применение теории возмущений к системе (11), вплоть до второго порядка включительно, позволяет обнаружить квантовые вихри, исследованные в данной работе. Результаты, получающиеся в двух разных калибровках, близки друг другу. Имеющиеся небольшие расхождения не затрагивают основные выводы работы и могут быть исследованы отдельно.

Отметим, что при получении (11) использовались те же базисные функции невозмущенной задачи, что и при выводе системы (5). Такой выбор оправдан сделанным в работе приближением внезапного включения и выключения возмущения [42].

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье теоретически исследовалось влияние начальной фазы ионизирующего предельно короткого лазерного импульса на образование квантовых вихрей. Показано, что варьирование фазы может приводить как к локализованному вихрю с хорошо определяемым центром, так и к «размазанной» вихревой структуре. При этом важным аспектом здесь является реализация предельного случая внезапного возмущения, представляющего собой разновидность «встряски» типа «включения» [34].

Выделен интерференционный вклад в плотности распределения фотоэлектрона, отвечающий за образование вихрей. Этот вклад обусловлен интерференцией состояний фотоэлектрона, образованных при двухфотонном переходе через промежуточные состояния непрерывного спектра.

Подтверждена возможность идентификации квантовых вихрей в импульсном пространстве с помощью «симметричного» потока (8). В отличие от работы [19], в которой рассмотрен случай четного  $T$ , в данной работе также исследован случай нечетного  $T$ , когда появляются две пары квантовых вихрей.

Проведено обсуждение выбора калибровки при описании взаимодействия электрона с полем.

Уравнения для амплитуд вероятностей в «калибровке скорости» (11) имеют более простой вид, чем в случае «калибровки длины» (5) и относительно просты для численных расчетов. Обнаруженные небольшие различия между результатами предварительных вычислений, полученными в разных калибровках, не сказываются на основных выводах статьи.

**Благодарности.** Автор выражает свою признательность С. В. Божокину за ценные замечания и обсуждения полученных автором результатов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. K. Misawa, *Adv. Phys. X* **1**, 544 (2016), DOI: 10.1080/23746149.2016.1221327.
2. Hongxia Qi, Zhenzhong Lian, Dehou Fei, Zhou Chen, and Zhan Hu, *Adv. Phys. X* **6**(1), 1 (2021), DOI: 10.1080/23746149.2021.1949390.
3. T. Brixner, G. Krampert, T. Pfeifer, R. Selle, G. Gerber, M. Wollenhaupt, O. Graefe, C. Horn, D. Liese, and T. Baumert, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 208301 (2004), DOI: 10.1103/PhysRevLett.92.208301.
4. A. A. Andreev and K. Y. Platonov, *Bull. Lebedev Phys. Inst.* **50**, S1029 (2023), DOI: 10.3103/S1068335623210030.
5. Н. Н. Розанов, *Опт. и спектр.* **124**, 75 (2018), DOI: 10.21883/OS.2018.01.45361.174-17.
6. Р. М. Архипов, П. А. Белов, М. В. Архипов, А. В. Пахомов, Н. Н. Розанов, *КЭ* **52**, 610 (2022), EDN: SJZCBY.
7. Р. М. Архипов, М. В. Архипов, И. Бабушкин, А. В. Пахомов, Н. Н. Розанов, *Письма в ЖЭТФ* **114**, 298 (2021), DOI: 10.31857/S123456782117002X.
8. Р. М. Архипов, М. В. Архипов, А. В. Пахомов, Н. Н. Розанов, *Опт. и спектр.* **128**, 106 (2020), DOI: 10.21883/OS.2020.01.48845.257-19.
9. М. К. Есеев, В. И. Матвеев, Д. Н. Макаров, *Письма в ЖЭТФ* **114**, 444 (2021), DOI: 10.31857/S1234567821190034.
10. Д. Н. Макаров, В. И. Матвеев, *Письма в ЖЭТФ* **103**, 851 (2016), DOI: 10.7868/S0370274X16120043.
11. S. Y. Ovchinnikov, J. Sternberg, J. Macek, T.-G. Lee, and D. R. Schultz, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 203005 (2010), DOI:10.1103/PhysRevLett.105.203005.
12. J. M. Ngoko Djiokap, S. X. Hu, L. B. Madsen, N. L. Manakov, A. V. Meremianin, and A. F. Starace, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 113004 (2015), DOI:10.1103/PhysRevLett.115.113004.
13. J. M. Ngoko Djiokap, A. V. Meremianin, N. L. Manakov, S. X. Hu, L. B. Madsen, and A. F. Starace, *Phys. Rev. A* **94**, 013408 (2016), DOI: 10.1103/PhysRevA.94.013408.



14. D. Pengel, S. Kerbstadt, D. Johannmeyer, L. Englert, T. Bayer, and M. Wollenhaupt, *Phys. Rev. Lett.* **118**, 053003 (2017), DOI:10.1103/PhysRevLett.118.053003.
15. J. M. Ngoko Djiokap, S. X. Hu, L. B. Madsen, N. L. Manakov, A. V. Meremianin, and A. F. Starace, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 113004 (2015), DOI: 10.1103/PhysRevLett.115.113004.
16. С. Ю. Овчинников, Н. В. Ларионов, А. А. Смирновский, А. А. Шмидт, Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки **10**, 111 (2017), DOI: 10.18721/JPM.10409.
17. Н. В. Ларионов, С. Ю. Овчинников, А. А. Смирновский, А. А. Шмидт, ЖТФ **88**, 1621 (2018), DOI: 10.21883/JTF.2018.11.46621.177-18.
18. Н. В. Ларионов, Д. Н. Макаров, А. А. Смирновский, С. Ю. Овчинников, ЖЭТФ **156**, 1035 (2019), DOI: 10.1134/S0044451019120010.
19. Н. В. Ларионов, В. М. Молчановский, arXiv:2310.05937 [quant-ph], DOI: 10.48550/arXiv.2310.05937.
20. J. H. Chen, X. R. Xiao, S. F. Zhao, and L. Y. Peng, *Phys. Rev. A* **101**, 033409 (2020), DOI: 10.1103/PhysRevA.101.033409.
21. F. Cajiao Velez, J. Z. Kaminski, and K. Krajewska, *Phys. Rev. A* **101**, 053430 (2020), DOI: 10.1103/PhysRevA.101.053430.
22. F. Cajiao Velez, L. Geng, J. Z. Kaminski, L. Y. Peng, and K. Krajewska, *Phys. Rev. A* **102**, 043102 (2020), DOI: 10.1103/PhysRevA.102.043102.
23. L. Geng, F. Cajiao Velez, J. Z. Kaminski, L. Y. Peng, and K. Krajewska, *Phys. Rev. A* **102**, 043117 (2020), DOI: 10.1103/PhysRevA.102.043117.
24. L. Geng, F. Cajiao Velez, J. Z. Kaminski, L. Y. Peng, and K. Krajewska, *Phys. Rev. A* **104**, 033111 (2021), DOI: 10.1103/PhysRevA.104.033111.
25. A. S. Maxwell, G. S. J. Armstrong, M. F. Ciappina, E. Pisanty, Y. Kang, A. C. Brown, M. Lewenstein, and C. F. de Morisson Faria, *Faraday Discuss.* **228**, 394 (2021), DOI: 10.1039/D0FD00105H.
26. Y. Kang, E. Pisanty, M. Ciappina, M. Lewenstein, C. Figueira de Morisson Faria, and A.S. Maxwell, *Eur. Phys. J. D* **75**, 199 (2021), DOI: 10.1140/epjd/s10053-021-00214-4.
27. A. S. Maxwell, L. B. Madsen, and M. Lewenstein, *Nature Commun.* **13**, 4706 (2022), DOI: 10.1038/s41467-022-32128-z.
28. X. B. Planas, A. Ordonez, M. Lewenstein, and A. S. Maxwell, *Phys. Rev. Lett.* **129**, 233201 (2022), DOI: 10.1103/PhysRevLett.129.233201.
29. K. V. Bazarov and O. I. Tolstikhin, *Phys. Rev. A* **107**, 053114 (2023), DOI: 10.1103/PhysRevA.107.053114.
30. Rong-Rong Wang, Mao-Yun Ma, Liang-Cai Wen, Zhong Guan, Zeng-Qiang Yang, Zhi-Hong Jiao, Guo-Li Wang, and Song-Feng Zhao, *J. Opt. Soc. Am. B* **40**, 1749 (2023), DOI: 10.1364/JOSAB.483574.
31. G. M. Filippov, A. S. Sabirov, V. A. Aleksandrov, and A. V. Stepanov, *J. Surf. Investig.* **14**, 1228 (2020), DOI: 10.1134/S1027451020050262.
32. S. Y. Ovchinnikov, J. H. Macek, and D. R. Schultz, *Phys. Rev. A* **90**, 062713 (2014), DOI: 10.1103/PhysRevA.90.062713.
33. P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. A.* **133**, 60 (1931).
34. А. М. Дыхне, Г. Л. Юдин, УФН **125**, 377 (1978), DOI: 10.3367/UFNr.0125.197807a.0377.
35. R. F. Nalewajski, *J. Math. Chem.* **53**, 1966 (2015), DOI: 10.1007/s10910-015-0526-2.
36. B. Zaslav and M. E. Zandler, *Amer. J. Phys.* **35**, 1118 (1967), DOI: 10.1119/1.1973790.
37. X. L. Yang, S. H. Guo, F. T. Chan, K. W. Wong, and W. Y. Ching, *Phys. Rev. A* **43**, 1186 (1991), DOI: 10.1103/PhysRevA.43.1186.
38. М. В. Федоров, ЖЭТФ **149**, 522 (2016), EDN: VZSCXF.
39. А. М. Желтиков, УФН **187**, 1169 (2017), DOI: 10.3367/UFNe.2017.08.038198.
40. В.А. Диткин, А.П. Прудников, *Интегральные преобразования и операционное исчисление*, Физматгиз, Москва (1961).
41. В.В. Батыгин, И.Н. Топтыгин, *Современная электродинамика, часть 1. Микроскопическая теория: Учебное пособие*, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Москва–Ижевск (2005).
42. C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg, *Atom-Photon Interactions: Basic Processes and Applications*, John Wiley and Sons, Inc., New York (1992).