

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ КЕЛЬВИНА – ГЕЛЬМГОЛЬЦА В НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИКЕ

*В. П. Рубан**

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау
Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 16 сентября 2023 г.

после переработки 7 октября 2023 г.

Принята к публикации 8 октября 2023 г.

Рассмотрено параксиальное распространение квазимонохроматической световой волны с двумя круговыми поляризациями в дефокусирующей Керровской среде с аномальной дисперсией внутри волновода кольцевого сечения. В режиме разделения фаз динамика подобна течению несмешивающихся жидкостей. При некоторых начальных условиях с относительным скольжением жидкостей вдоль границы их соприкосновения в системе развивается неустойчивость Кельвина – Гельмгольца в ее «квантовом» варианте. Численное моделирование соответствующих связанных нелинейных уравнений Шредингера показало формирование характерных структур на нелинейной стадии неустойчивости. Подобные структуры известны в теории бинарных бозе-конденсатов, но для оптики они предъявлены впервые.

DOI: 10.31857/S0044451024020147

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование нелинейных волн различной физической природы — это в первую очередь поиск возможных в данной системе когерентных структур. Пожалуй, наиболее известны такие долгоживущие объекты, как солитоны и вихри (см., например, [1–7]). Большой интерес представляют также структуры, образующиеся в результате развития различного рода неустойчивостей. Ярким примером является неустойчивость Кельвина – Гельмгольца (НКГ), имеющая место в жидких системах при наличии тангенциального разрыва в поле скорости. Относительно недавно был обнаружен квантовый аналог этой неустойчивости в сверхтекучем ^3He [8–11]. НКГ также известна для двухкомпонентных ультрахолодных газов (бозе-конденсатов) в режиме пространственного разделения фаз [12–14], где она теоретически изучалась наряду с другими аналогами классических гидродинамических неустойчивостей [15–20]. Пример бозе-конденсатов особенно интересен, поскольку в пределе нулевой температуры та-

кие разреженные системы хорошо описываются довольно простой и универсальной математической моделью — связанными нелинейными уравнениями Шредингера [21–27] (в физике холодных бозе-газов они называются уравнениями Гросса-Питаевского). В бинарном бозе-конденсате, помимо темных солитонов и квантованных вихрей в каждой из двух компонент, возможны еще доменные стенки, обусловленные доминированием перекрестного нелинейного взаимодействия. Доменная стенка обладает эффективным поверхностным натяжением [24, 28, 29], которое существенно участвует в динамике границы раздела на всех стадиях развития неустойчивости.

Как известно, связанные нелинейные уравнения Шредингера (НУШ) возникают при исследовании многих физических систем. В частности, они приближенно описывают распространение квазимонохроматической световой волны с двумя круговыми поляризациями в оптической среде с Керровской нелинейностью [30]. Возможная разница с бозе-конденсатами заключается в гиперболическом типе трехмерного дисперсионного оператора в случае нормальной оптической дисперсии. Но для аномальной дисперсии и дефокусирующей нелинейности уравнения параксиальной оптики математически эквивалентны двум связанным уравнениям Гросса – Питаевского, в которых развивается НКГ.

* E-mail: ruban@itp.ac.ru

Более того, при рассмотрении пространственно двумерных решений, как в работах [12–14], тип дисперсии формально не важен, поскольку отсутствует зависимость от соответствующей третьей координаты (если только не интересоваться динамикой малых трехмерных возмущений).

Надо сказать, что в нелинейной оптике также известны доменные стенки, разделяющие области с правой и левой круговыми поляризациями света [31–40], однако НКГ таких поверхностей раздела при наличии относительного сдвигового течения «световых жидкостей» до сих пор не рассматривалась. Подчеркнем, что речь здесь идет не о той первичной модуляционной неустойчивости пространственно однородных двухкомпонентных систем с доминирующим перекрестным отталкиванием [41–43], которая, собственно, и приводит к разделению фаз через формирование доменных стенок, а речь идет о возможной неустойчивости стационарной геометрической конфигурации уже имеющейся доменной стенки (аналог — неустойчивость темных солитонов в однокомпонентном НУШ [44, 45]). В этом смысле НКГ в системе связанных НУШ можно назвать вторичной. Целью настоящей работы является численная демонстрация развития такой неустойчивости в рамках модели, приближенно соответствующей параксиальному распространению нелинейной оптической волны в достаточно широком волноводе кольцевого сечения.

2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Заметим сразу же, что эволюционной переменной вместо времени t в оптике служит дистанция ζ вдоль оси волновода, а роль третьей «пространственной» координаты играет «запаздывающее» время

$$\tau = t - \zeta/v_{\text{gr}},$$

где v_{gr} — групповая скорость света в среде на заданной несущей частоте ω_0 . При сравнении с бозеконденсатами следует вместо ζ иметь в виду t , а вместо τ подразумевать z . В безразмерных переменных нелинейные уравнения Шредингера для медленных комплексных огибающих $A_{1,2}(x, y, \tau, \zeta)$ левой и правой круговых поляризаций световой волны имеют вид (см. [30–38])

$$i \frac{\partial A_{1,2}}{\partial \zeta} = \left[-\frac{1}{2} \Delta + U(x, y) + |A_{1,2}|^2 + g_{12} |A_{2,1}|^2 \right] A_{1,2}, \quad (1)$$

где

$$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_\tau^2$$

— трехмерный оператор Лапласа в «координатном» пространстве (x, y, τ) . В случае нормальной дисперсии знак перед ∂_τ^2 меняется на противоположный. Потенциал $U(x, y)$ определяется профилем диэлектрической проницаемости в поперечном сечении волновода. Параметр перекрестной фазовой модуляции g_{12} в типичном случае примерно равен 2, что соответствует режиму разделения фаз.

Напомним, на каких предположениях основана модель (1). Эта система выводится для слабонеоднородной среды, в которой фоновая диэлектрическая проницаемость является функцией частоты $\varepsilon(\omega)$, так что соответствующий закон дисперсии имеет вид

$$k(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)} \omega / c.$$

Интересующий нас диапазон аномальной дисперсии групповой скорости (где $k''(\omega) < 0$) находится обычно вблизи низкочастотного края окна прозрачности (в реальных веществах это часто инфракрасная область спектра; см., например, [46–48]). Из уравнений Максвелла следует, что в оптической волне электрическое поле $\mathbf{E}$ и поле электрической индукции $\mathbf{D}$ связаны уравнением

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2}. \quad (2)$$

Медленные комплексные огибающие $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ вводятся заменами

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &\approx \text{Re}[\mathbf{E} \exp(ik_0 \zeta - i\omega_0 t)], \\ \mathbf{D} &\approx \text{Re}[\mathbf{D} \exp(ik_0 \zeta - i\omega_0 t)], \end{aligned}$$

где $k_0 = k(\omega_0)$ — несущее волновое число. Предполагается слабонелинейная материальная зависимость Керровского типа

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &\approx \varepsilon(\omega_0 + i\partial_t) \mathbf{E} + \tilde{\varepsilon}(x, y) \mathbf{E} \\ &+ \alpha(\omega_0) |\mathbf{E}|^2 \mathbf{E} + \beta(\omega_0) (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E}^*, \end{aligned} \quad (3)$$

с оператором $\varepsilon(\omega_0 + i\partial_t)$, с пространственной неоднородностью $\tilde{\varepsilon}(x, y)$ и с отрицательными функциями α и β в дефокусирующем случае. Далее производится подстановка в (2), причем малая дивергенция электрического поля не учитывается. Возникающий в ходе преобразований линейный оператор $[k_0 - i\partial_\zeta]^2 - [k(\omega_0 + i\partial_t)]^2$ представляется в виде произведения суммы и разности, после чего разложение по степеням оператора ∂_t приводит к уравнению вида

$$2k_0[-i\partial_\zeta - ik'_0 \partial_t + k''_0 \partial_t^2 / 2] \mathbf{E} = s\{\mathbf{E}\}, \quad (4)$$

с правой частью, которая включает в себя поперечный лапласиан, нелинейность и пространственную

неоднородность. В конце вывода для перехода к скалярным функциям $A_{1,2}$ делается замена

$$\mathbf{E} \approx [(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y)A_1 + (\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y)A_2]/\sqrt{2}. \quad (5)$$

Масштабом для поперечных координат выбирается некоторый большой параметр R_0 . Пусть он будет порядка нескольких десятков длин волн, т.е. до одной сотни микрометров. Тогда на ширину доменной стенки с нормалью поперек пучка при интересующих нас интенсивностях волны $I_{1,2} \lesssim 10$ будет приходиться не менее десятка длин волн. Естественным масштабom для переменной τ является комбинация $k_0 R_0 \delta / \omega_0$, где безразмерный параметр

$$\delta = \omega_0 \sqrt{|k_0''|/k_0}$$

характеризует относительную величину дисперсии групповой скорости. С этой комбинацией связано условие $k_0 R_0 \delta \gg 2\pi$, обеспечивающее квазиоднохроматичность волны по переменной τ . Данное требование оказывается достаточно обременительным при малых δ , но мы будем предполагать, что, по крайней мере, $\delta \gtrsim 0.3$, и тогда на ширину доменной стенки с нормалью вдоль пучка придется не менее трех периодов волн. Продольная координата ζ измеряется в единицах $k_0 R_0^2$ (несколько сантиметров), а электрическое поле — в единицах

$$\frac{\sqrt{2\varepsilon(\omega_0)/|\alpha(\omega_0)|}}{k_0 R_0}.$$

Внешний потенциал тогда есть

$$U = -\frac{k_0^2 R_0^2 \tilde{\varepsilon}}{2\varepsilon(\omega_0)}.$$

В результате получаются обезразмеренные уравнения (1), причем

$$g_{12} = 1 + 2\frac{\beta(\omega_0)}{\alpha(\omega_0)}.$$

Для численного моделирования здесь использовался хорошо себя зарекомендовавший метод Фурье с расщепленным шагом по переменной ζ (split-step Fourier method) второго порядка аппроксимации. На предварительном этапе нежелательные жесткие степени свободы были «погашены» диссипативной процедурой «распространения в мнимом времени» (imaginary time propagation). Подробности такого подхода описаны в работах [38–40]. Вычислительная

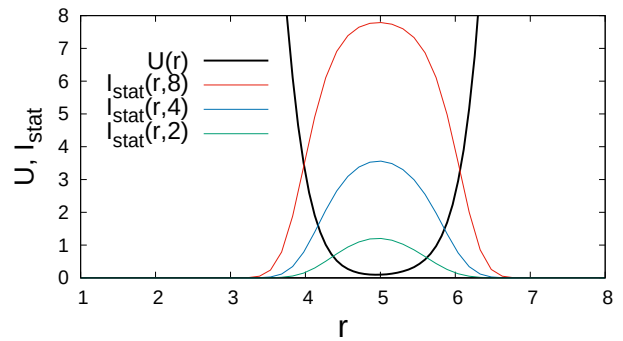


Рис. 1. Удобный для численного моделирования гладкий потенциал $U(r)$, примерно соответствующий волноводу кольцевого сечения с плоским дном и резкими стенками. Также показаны равновесные профили интенсивности волны для значений «химического потенциала» $\mu = 2, 4, 8$

область имела размеры $(6\pi) \times (6\pi) \times T_\tau$, с периодическими граничными условиями, причем период T_τ по переменной τ брался равным 24π либо 48π для разных численных экспериментов.

3. ГЕОМЕТРИЯ ЗАДАЧИ

Обратимся теперь к геометрическим характеристикам модели. В отличие от недавней работы [38], где рассматривались параболические потенциалы

$$U = (x^2 + \kappa^2 y^2)/2,$$

здесь мы сосредоточимся на волноводах кольцевого сечения с «плоским» дном и резкими стенками. Такие волноводы легче изготовить на практике, поскольку среда в них однородна. Но для численного моделирования выбранным методом (при разумном пространственном шаге решетки) годятся только достаточно гладкие потенциалы; поэтому мы будем аппроксимировать соответствующую глубокую прямоугольную яму лишь в качественном смысле, используя следующее выражение (см. соответствующий график на рис. 1):

$$U(r) = 27[2 + \text{th}(1.5(r^2/9 - 5.0)) - \text{th}(2.4(r^2/9 - 1.2))]. \quad (6)$$

Большой общий множитель здесь взят достаточно произвольно, лишь бы только он не требовал слишком мелкого шага по переменной ζ . В результате указанного выбора средний радиус волновода

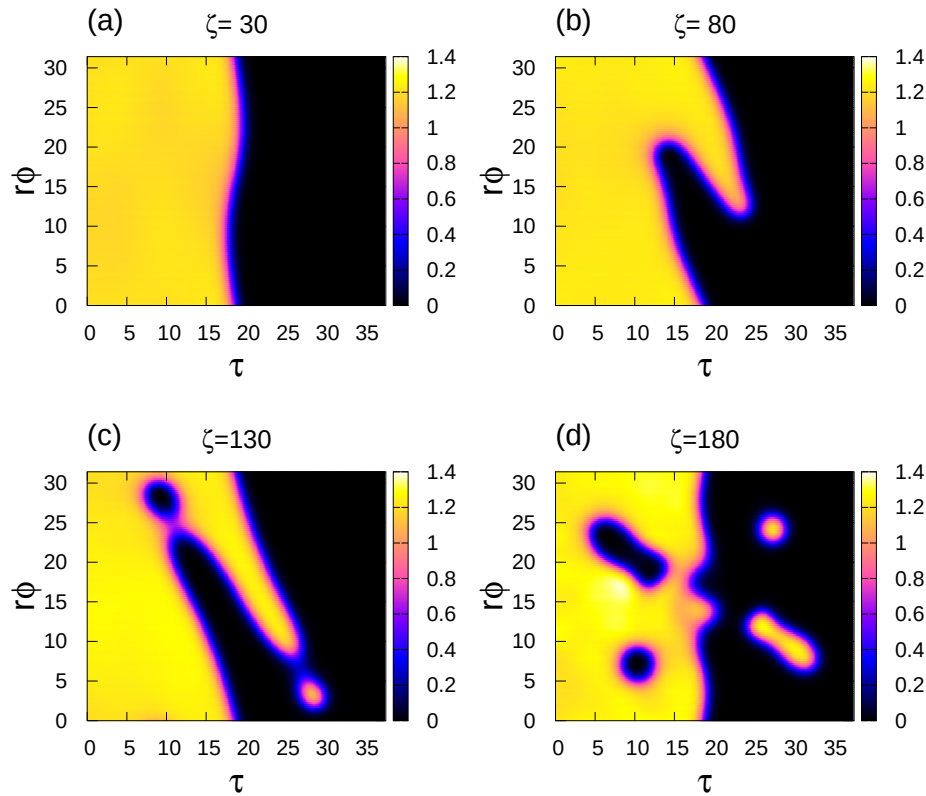


Рис. 2. Пример развития неустойчивости Кельвина–Гельмгольца при $Q = 2$ и небольшом уровне нелинейности $\mu = 2$. Показана интенсивность первой компоненты I_1 на цилиндре радиуса $r = 5$ для нескольких значений переменной ζ

примерно соответствует $r = 5.0$. Это значение будет в дальнейшем использоваться для визуализации волновой картины на «серединной» цилиндрической поверхности в пространстве (x, y, τ) при различных значениях дистанции распространения ζ .

Начальные условия в наших численных экспериментах задавали расположение доменной стенки примерно поперек оси волновода (ее нормаль — примерно вдоль оси). При этом «течения» обеих поляризаций имели азимутальный характер (с координатными множителями $\exp(iQ_{1,2}\phi)$, где ϕ — азимутальный угол, Q_1 и $Q_2 \neq Q_1$ — целые «квантовые» числа). Таким образом, система трехмерна, и потому аномальность дисперсии принципиально важна. Но разница внешнего $r + a/2$ и внутреннего $r - a/2$ радиусов волновода относительно мала (эффективно $a/r \approx 0.2\text{--}0.4$ в зависимости от «химического потенциала» волны, как это видно из профилей интенсивности на рис. 1). В такой геометрии система ведет себя примерно как пространственно двумерная (на цилиндре). Это способствует проявлению неустойчивости рассматриваемого типа, а так-

же немаловажно для визуализации численных результатов (см. рис. 2–6).

Надо сказать, что у системы (1) существуют также решения, не зависящие от τ , и там течение происходит в плоскости (x, y) . Нормаль к доменной стенке также лежит в указанной плоскости. С одной стороны, эти решения привлекательны тем, что для таких стационарных в физическом пространстве конфигураций снимается требование аномальности дисперсии. И вполне возможно, что трехмерные возмущения не проявили бы себя на достаточно длинной дистанции распространения. Но, с другой стороны, при конечных поперечных размерах образца возникает необходимость как-то зациклить оба стационарных течения, и тогда может встать проблема появления дополнительных поперечных неустойчивостей, обусловленных взаимодействием с поперечными границами. Существует и третий вариант стационарных течений со сдвигом вдоль границы соприкосновения световых «жидкостей» — когда движение с различными скоростями происходит вдоль оси волновода. Этот вариант описывается множителями

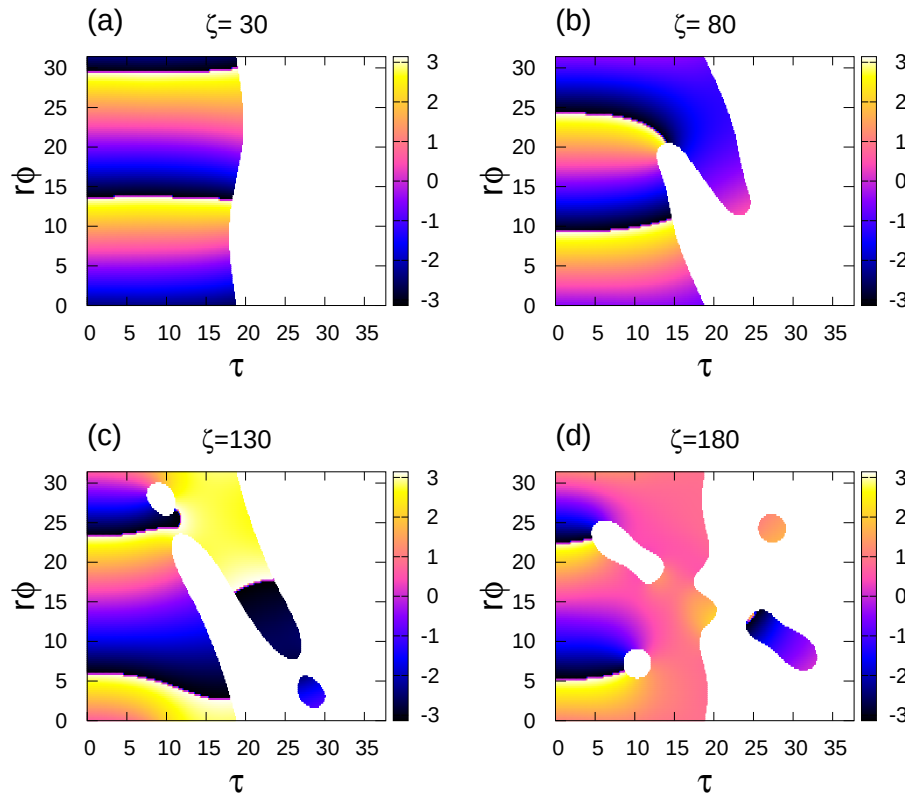


Рис. 3. Фаза Θ_1 первой компоненты на цилиндре радиуса $r = 5$, соответствующая рисунку 2. На каждой панели показана только та часть развертки цилиндра, где $I_1 > 0.4$

$\exp(iv_{1,2}\tau)$ и, таким образом, соответствует некоторой разнице в средней частоте левой и правой поляризации. Для этой конфигурации сечение волновода не обязательно должно быть кольцевым. Первый и третий варианты представляются равно перспективными. В данной работе мы сосредоточимся на азимутальных течениях.

Классическая формула гласит, что инкремент неустойчивости Кельвина–Гельмгольца равен

$$\Gamma(k) = k \sqrt{\frac{v^2}{4} - k \frac{\sigma}{2\rho}},$$

где k — волновое число, σ — коэффициент поверхностного натяжения, ρ — плотность жидкости, одинаковая по обе стороны от границы раздела, v — разница скоростей для невозмущенного течения. Из этой формулы можно извлечь полезную информацию и для нашего случая. Действительно, при достаточно больших значениях «химического потенциала» μ плотность «жидкостей» $\rho = I \approx \mu$, эффективный коэффициент поверхностного натяжения доменной стенки можно оценить как $\sigma \propto \mu^{3/2}$ [28], скорость относительного дви-

жения $v \approx (Q_1 - Q_2)/r$, а основное волновое число $k = 1/r$. В результате имеем оценочную формулу

$$\Gamma \approx \frac{1}{r} \sqrt{\frac{(Q_1 - Q_2)^2}{4r^2} - C \frac{\sqrt{\mu}}{r}}, \quad (7)$$

где C — коэффициент порядка единицы. Применимость этой формулы требует также малости относительной скорости v по сравнению со «скоростью звука» $s \sim \sqrt{\mu}$. При соблюдении данного условия развитие неустойчивости должно происходить по сценарию, определяемому отношением двух слагаемых под знаком корня (подразумевается достаточно большой продольный интервал $T_\tau/2$ между соседними доменными стенками). Из формулы (7), в частности, следует, что при фиксированных r и $(Q_1 - Q_2)$ существенное увеличение интенсивности волны должно приводить к полному подавлению неустойчивости. Такой эффект действительно наблюдался в численных экспериментах. Например, с $Q_1 = -Q_2 = 2$ при $\mu = 8$ и $\mu = 10$ неустойчивость развивалась, тогда как при $\mu = 12$ она уже отсутствовала.

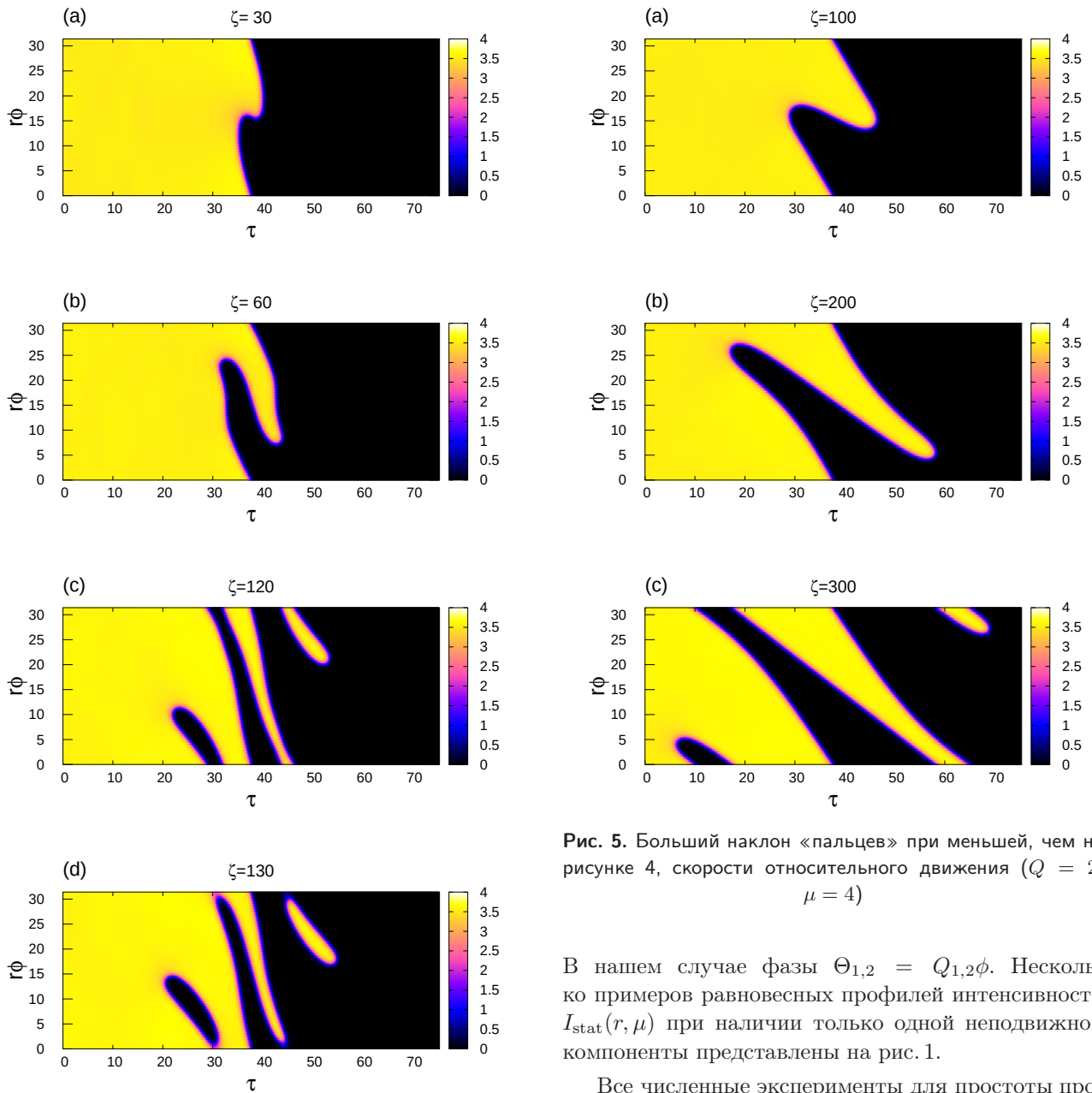


Рис. 4. Формирование длинных «пальцев» на промежуточной стадии неустойчивости при $Q = 3$, $\mu = 4$.

4. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

Надо сказать, что каждая стационарная по переменной ζ конфигурация характеризуется двумя «химическими потенциалами», μ_1 и μ_2 . При этом

$$A_{1,2} = \sqrt{I_{1,2}(x, y, \tau)} \exp(i\Theta_{1,2}(x, y, \tau) - i\mu_{1,2}\zeta).$$

Рис. 5. Большой наклон «пальцев» при меньшей, чем на рисунке 4, скорости относительного движения ($Q = 2$, $\mu = 4$)

В нашем случае фазы $\Theta_{1,2} = Q_{1,2}\phi$. Несколько примеров равновесных профилей интенсивности $I_{\text{stat}}(r, \mu)$ при наличии только одной неподвижной компоненты представлены на рис. 1.

Все численные эксперименты для простоты проводились с симметричными начальными условиями, так что $Q_1 = -Q_2 = Q$, а $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Поэтому на каждой панели из рис. 2-6 представлена только половина развертки цилиндра. В частности, на рис. 2 показано, как при $Q = 2$, $\mu = 2$ небольшое синусоидальное возмущение границы раздела в результате неустойчивости трансформируется в структуру, по форме напоминающую силуэт человеческого пальца. Затем от кончика «пальца» отделяется капля, внутри которой «сидит» вихрь противоположной компоненты, как это следует из рис. 3, на котором показаны соответствующие распределения фазы. Еще далее в каждой компоненте отделяется

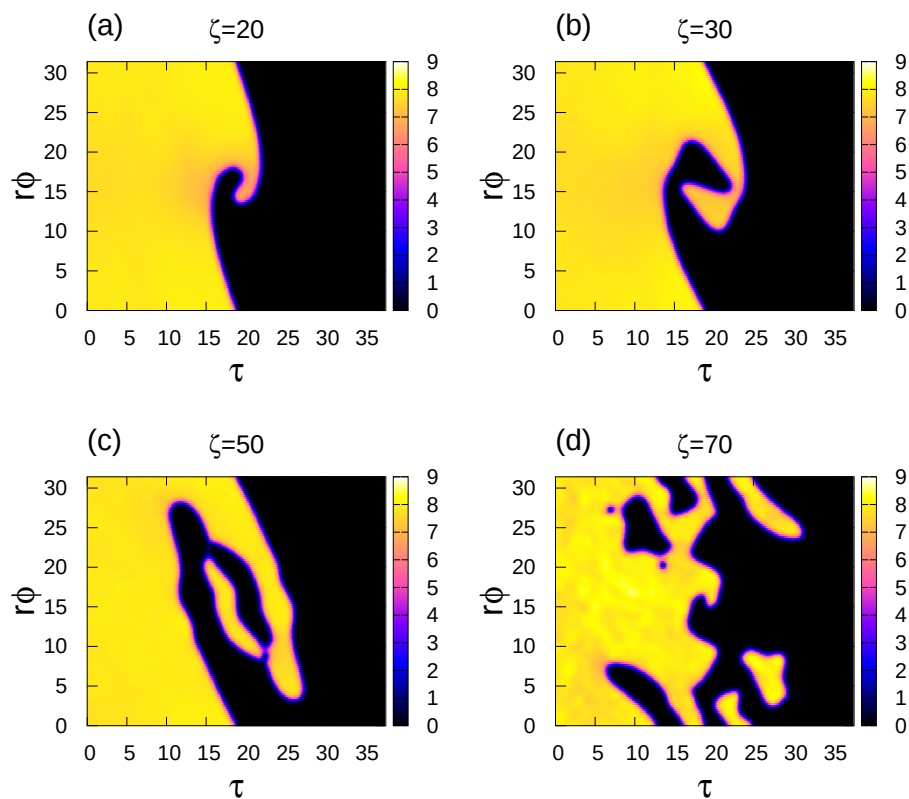


Рис. 6. Пример развития неустойчивости Кельвина–Гельмгольца с образованием спиральной структуры на промежуточной стадии при $Q = 5$, $\mu = 8$

и вторая подобная капля. Рисунок 4 демонстрирует, что «палец» может вытягиваться довольно сильно, прежде чем произойдет его разрыв и отделение капли. Угол наклона таких «пальцев» на цилиндре по отношению к азимутальному направлению тем больше, чем меньше относительная скорость (параметр Q), как это видно из сравнения рис. 5 с рис. 4. Наконец, рис. 6 показывает, что при большой относительной скорости ($Q = 5$) и интенсивности волны ($\mu = 8$) в начале нелинейной стадии неустойчивости граница как бы стремится закрутиться в спиральную структуру, то есть неустойчивость развивается по почти классическому сценарию. Но при достижении пространственного масштаба порядка толщины доменной стенки $w \sim 1/\sqrt{\mu}$ динамика переходит в «квантовый» режим с отделением капель и квантованных вихрей.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в данной работе теоретически обоснована принципиальная возможность наблюдения неустойчивости Кельвина–Гельмгольца в дефокусирующей Керровской оптической среде с ано-

мальной дисперсией групповой скорости. Проведенное трехмерное численное моделирование дало конфигурации, качественно похожие на двумерные структуры, полученные в работах [12–14] для идеализированной модели бинарного бозе-конденсата в безграничном пространстве. Очевидно, что наши трехмерные результаты в равной мере относятся и к бозе-конденсатам, помещенным в цилиндрический удерживающий потенциал с глубоким минимумом на конечном значении радиальной координаты. Но для холодных газов подобные потенциалы пока что остаются малореалистичными, тогда как с точки зрения оптики нет ничего необычного в протяженном по времени пучке света, распространяющемся по волноводу заданного сечения. С практической точки зрения преимущество рассмотренных здесь оптических структур являются также их не столь малые пространственные размеры в сравнении с бозе-конденсатами, не говоря уже об отсутствии экстремальных температурных ограничений.

Нами была использована простейшая модель, в которой не учитываются дисперсионные поправки более высоких порядков. В реальности параметр δ

может быть настолько малым, что (при не слишком больших значениях произведения $k_0 R_0$) отклонения от квадратичной дисперсии окажут заметное влияние. Однако, как показали дополнительные численные эксперименты (их результаты здесь не представлены), учет относительно малой дисперсии третьего порядка хоть и несколько искажает картину развития неустойчивости, но в качественном отношении не портит ее на достаточно большой дистанции.

Финансирование. Работа выполнена в рамках госзадания 0029-2021-0003.

ЛИТЕРАТУРА

1. Y. Kivshar and G. P. Agrawal, *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals*, 1st ed., Academic Press, California, USA (2003).
2. B. A. Malomed, *Multidimensional Solitons*, AIP Publishing (online), Melville, N. Y. (2022), <https://doi.org/10.1063/9780735425118>
3. F. Baronio, S. Wabnitz, and Yu. Kodama, Phys. Rev. Lett. **116**, 173901 (2016).
4. P. G. Kevrekidis, D. J. Frantzeskakis, and R. Carretero-González, *The Defocusing Nonlinear Schrödinger Equation: From Dark Solitons to Vortices and Vortex Rings*, SIAM, Philadelphia (2015).
5. V. N. Serkin and A. Hasegawa, JETP Lett. **72**, 89 (2000).
6. С. К. Турицын, Н. Н. Розанов, И. А. Яруткина, А. Е. Беднякова, С. В. Фёдоров, О. В. Штырина, М. П. Федорук, УФН **186**, 713 (2016).
7. Н. А. Веретенков, Н. Н. Розанов, С. В. Федоров, УФН **192**, 143 (2022).
8. R. Blaauwgeers, V. Eltsov, G. Eska, A. Finne, R. P. Haley, M. Krusius, J. Ruohio, L. Skrbek, and G. Volovik, Phys. Rev. Lett. **89**, 155301 (2002).
9. G.E. Volovik, Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **75**, 491 (2002) [JETP Lett. **75**, 418 (2002)].
10. A. Finne, V. Eltsov, R. Hänninen, N. Kopnin, J. Kopu, M. Krusius, M. Tsubota, and G. Volovik, Rep. Progr. Phys. **69**, 3157 (2006).
11. V. Eltsov, A. Gordeev, and M. Krusius, Phys. Rev. B **99**, 054104 (2019).
12. H. Takeuchi, N. Suzuki, K. Kasamatsu, H. Saito, and M. Tsubota, Phys. Rev. B **81**, 094517 (2010).
13. N. Suzuki, H. Takeuchi, K. Kasamatsu, M. Tsubota, and H. Saito, Phys. Rev. A **82**, 063604 (2010).
14. H. Kokubo, K. Kasamatsu, and H. Takeuchi, Phys. Rev. A **104**, 023312 (2021).
15. K. Sasaki, N. Suzuki, D. Akamatsu, and H. Saito, Phys. Rev. A **80**, 063611 (2009).
16. S. Gautam and D. Angom, Phys. Rev. A **81**, 053616 (2010).
17. T. Kadokura, T. Aioi, K. Sasaki, T. Kishimoto, and H. Saito, Phys. Rev. A **85**, 013602 (2012).
18. K. Sasaki, N. Suzuki, and H. Saito, Phys. Rev. A **83**, 053606 (2011).
19. D. Kobayakov, V. Bychkov, E. Lundh, A. Bezett, and M. Marklund, Phys. Rev. A **86**, 023614 (2012).
20. D. K. Maity, K. Mukherjee, S. I. Mistakidis, S. Das, P. G. Kevrekidis, S. Majumder, and P. Schmelcher, Phys. Rev. A **102**, 033320 (2020).
21. Tin-Lun Ho and V. B. Shenoy, Phys. Rev. Lett. **77**, 3276 (1996).
22. H. Pu and N. P. Bigelow, Phys. Rev. Lett. **80**, 1130 (1998).
23. B. P. Anderson, P. C. Haljan, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, Phys. Rev. Lett. **85**, 2857 (2000).
24. S. Coen and M. Haelterman, Phys. Rev. Lett. **87**, 140401 (2001).
25. G. Modugno, M. Modugno, F. Riboli, G. Roati, and M. Inguscio, Phys. Rev. Lett. **89**, 190404 (2002).
26. E. Timmermans, Phys. Rev. Lett. **81**, 5718 (1998).
27. P. Ao and S. T. Chui, Phys. Rev. A **58**, 4836 (1998).
28. B. Van Schaeybroeck, Phys. Rev. A **78**, 023624 (2008).
29. K. Sasaki, N. Suzuki, and H. Saito, Phys. Rev. A **83**, 033602 (2011).
30. А. Л. Бепхоев, В. Е. Захаров, ЖЭТФ **58**, 903 (1970).
31. M. Haelterman and A. P. Sheppard, Phys. Rev. E **49**, 3389 (1994).

32. M. Haelterman and A. P. Sheppard, Phys. Rev. E **49**, 4512 (1994).
33. A. P. Sheppard and M. Haelterman, Opt. Lett. **19**, 859 (1994).
34. Yu. S. Kivshar and B. Luther-Davies, Phys. Rep. **298**, 81 (1998).
35. N. Dror, B. A. Malomed, and J. Zeng, Phys. Rev. E **84**, 046602 (2011).
36. A. H. Carlsson, J. N. Malmberg, D. Anderson, M. Lisak, E. A. Ostrovskaya, T. J. Alexander, and Yu. S. Kivshar, Opt. Lett. **25**, 660 (2000).
37. A. S. Desyatnikov, L. Torner, and Yu. S. Kivshar, Progress in Optics **47**, 291 (2005).
38. В. П. Рубан, Письма в ЖЭТФ **117**, 292 (2023).
39. В. П. Рубан, Письма в ЖЭТФ **117**, 590 (2023).
40. В. П. Рубан, ЖЭТФ **164**, 863 (2023).
41. G. P. Agrawal, Phys. Rev. Lett. **59**, 880 (1987).
42. Yu. S. Kivshar and D. E. Pelinovsky, Phys. Rep. **331**, 117 (2000).
43. Е. Е. Серебрянников, С. О. Коноров, А. А. Иванов, М. В. Федоров, М. В. Алфимов, А. М. Желтиков, ЖЭТФ **129**, 808 (2006).
44. Е. А. Кунецов, С. К. Турицын, ЖЭТФ **94**, 119 (1988).
45. В. А. Миронов, А. И. Смирнов, Л. А. Смирнов, ЖЭТФ **139**, 55 (2011).
46. X. Liu, B. Zhou, H. Guo, and M. Bache, Opt. Lett. **40**, 3798 (2015).
47. X. Liu and M. Bache, Opt. Lett. **40**, 4257 (2015).
48. Е. Д. Залозная, А. Е. Дормидонов, В. О. Компанец, С. В. Чекалин, В. П. Кандидов, Письма в ЖЭТФ **113**, 817 (2021).