ЖЭТФ, 2024, том 165, вып. 1, стр. 32–42

СПОНТАННОЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ РАССЕЯНИЕ В ДВУОСНЫХ НЕЛИНЕЙНО-ОПТИЧЕСКИХ КРИСТАЛЛАХ: ОСОБЕННОСТИ СОСТОЯНИЯ ПОЛЯРИЗАЦИИ ИЗЛУЧЕНИЯ

Д. Н. Фроловцев**[*]*, ***С. А. Магницкий

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Физический факультет
119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 6 сентября 2023 г.,
после переработки 23 сентября 2023 г.
Принята к публикации 25 сентября 2023 г.

Изложен последовательный анализ квантового состояния поляризации излучения спонтанного параметрического рассеяния (СПР) и рассмотрены особенности квантового состояния поляризации СПР в двуосных нелинейно-оптических кристаллах. Показано, что величина угла девиации поляризации СПР может превышать 15°, а угол между векторами **D** сигнальной и холостой волн — 30°. Также даны оценки искривления конуса, формируемого излучением СПР в двуосных кристаллах. Проанализировано влияние девиации поляризации СПР в неколлинеарном режиме на запутанность бифотонных состояний, генерируемых двухкристальной схемой, показано, что параметр сцепленности генерируемого квантового состояния может ухудшаться на 6%, и выявлены условия, при которых сцепленность может быть полностью восстановлена.

DOI: 10.31857/S0044451024010048

1. ВВЕДЕНИЕ

Спонтанное параметрическое рассеяние света [1] (СПР) — это эффект рождения пары фотонов в результате трехволнового взаимодействия в квадратично-нелинейной среде волны накачки и флуктуаций электромагнитного вакуума. При этом выполняются законы сохранения энергии и импульса, которые можно записать в виде

$$\begin{aligned} \hbar\omega_p &= \hbar\omega_s + \hbar\omega_i \\ \hbar\mathbf{k}_p &= \hbar\mathbf{k}_s + \hbar\mathbf{k}_i, \end{aligned} \qquad (1)$$

где $\omega_{p,s,i}$ и $\mathbf{k}_{p,s,i}$ — частота и волновой вектор волн накачки (p), сигнальной (s) и холостой (i) волн соответственно.

В случае СПР первого типа, который рассматривается в настоящей работе, накачка является волной одного типа, а сигнальная и холостая волны — другого типа. В одноосных кристаллах сигнальная и холостая волны являются либо *обыкновенными*, либо *необыкновенными*, а в двуосных кристаллах — либо *быстрыми*, либо *медленными*.

Эффект СПР занимает одно из центральных мест в современных квантово-оптических технологиях и исследованиях [2, 3]. Так, эффект СПР используется в метрологии для безэталонного определения квантовой эффективности [4] детекторов одиночных фотонов [5–7], на основе СПР разрабатываются методы измерения расстояний с точностью выше стандартного квантового предела [8]. Особое место СПР занимает в квантовых технологиях [9]. СПР-источники запутанных по поляризации фотонных пар являются «кирпичиками» для реализации многофотонных запутанных квантовых состояний. Таким способом впервые было получено состояние Гринбергера – Хорна – Цайлингера (ГХЦ) [10] трех поляризационно-запутанных фотонов, а в дальнейшем удалось получить максимально запутанное квантовое состояние 12 фотонов, каждый из которых находился в отдельной пространственной моде [11].

Одна из ключевых схем генерации поляризационно-запутанных фотонных пар — это двухкристальная схема [12], использующая

[*] E-mail: dfrolovtsev@gmail.com

СПР с первым типом синхронизма в неколлинеарном режиме. Неколлинеарный режим имеет преимущество по сравнению с коллинеарным режимом (например, при использовании в кристаллах с регулярной доменной структурой [13,14]) в том, что позволяет управлять частотной [15–17] и угловой [18, 19] степенями свободы квантового состояния за счет изменения угла рассеяния [20]. Также с использованием неколлинеарного режима получены квантовые состояния с большой степенью квантовой запутанности [21–23]. Однако в неколлинеарном режиме вопрос о направлении поляризации волны, в отличие от коллинеарного режима, становится нетривиальным.

В неколлинеарной геометрии СПР волновые векторы $\mathbf{k}_s$ и $\mathbf{k}_i$ не параллельны $\mathbf{k}_p$, и направление колебаний векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ сигнальной и холостой волн зависят от направления рассеяния, в чем и состоит явление девиации поляризации СПР. Если для «обычной» нелинейной оптики явление девиации поляризации не приводит к качественным изменениям в процессе параметрической генерации, то в случае СПР оно становится значимым при попытках построения двухкристальных схем с высокой степенью запутанности квантового поляризационного состояния [24,25]. Направление колебаний векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ в одноосных кристаллах исследовалось в литературе [26], однако для двуосных кристаллов, насколько нам известно, вопрос девиации поляризации СПР не изучался. Основное внимание было уделено численному решению уравнения Френеля и получению значения показателя преломления в двуосных кристаллах для расчета синхронизма генерации второй гармоники [27–29] и СПР [30]. Отметим, что интерес к двуосным кристаллам определяется тем, что в некоторых двуосных кристаллах значение эффективной нелинейности превосходит значение эффективной нелинейности в одноосных кристаллах. Например, в кристалле BiBO значение эффективной нелинейности в два раза выше (≈ 3.5 пм/В), чем в BBO (≈ 1.75 пм/В) [31] для вырожденного по частоте СПР с накачкой на длине волны 405 нм. Особую роль направление плоскости поляризации излучения СПР играет в новой области фантомной поляриметрии [32], в которой используются СПР-источники, работающие в неколлинеарном режиме [33,34]. Отклонение плоскости поляризации излучения в объектном плече в фантомном поляриметре приведет к систематической погрешности в определении угла азимута анизотропии исследуемого объекта.

Цель настоящей работы — получить выражение для девиации направления колебаний вектора $\mathbf{D}$ излучения СПР в двуосных кристаллах и определить степень влияния девиации поляризации на запутанность квантовых состояний, генерируемых двухкристальной схемой, использующей двуосные кристаллы.

В разд. 2 приведены выражения для направления колебаний векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ собственных волн в двулучепреломляющих кристаллах. Мы исходили из того, что направление колебаний вектора $\mathbf{D}$ собственной волны является полуосью эллипса-сечения эллипсоида волновых нормалей плоскостью, перпендикулярной вектору $\mathbf{k}$. Решение включает в себя как случай одноосных, так и случай двуосных кристаллов. В разд. 3 приведены выражения для квантового поляризационного состояния излучения СПР в коллинеарном и неколлинеарном режимах.

В разд. 4 даны численные оценки влияния девиации поляризации СПР в двухкристальной схеме для двуосного кристалла BiBO и сделано сравнение для случая одноосного кристалла BBO. Показано, что в двухкристальной схеме, использующей кристаллы BiBO, параметр сцепленности вследствие явления девиации поляризации ухудшается, и выявлены условия, при которых ухудшение сцепленности может быть полностью восстановлено. В разд. 5 подведены итоги работы.

2. ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА В ДВУОСНЫХ КРИСТАЛЛАХ

Для нахождения направления колебаний вектора $\mathbf{D}$ и определения величины показателя преломления будем использовать уравнение эллипсоида волновых нормалей [35–37]

$$\frac{X^2}{\varepsilon_x} + \frac{Y^2}{\varepsilon_y} + \frac{Z^2}{\varepsilon_z} = 1, \qquad (2)$$

где $\varepsilon_{x,y,z}$ — главные компоненты тензора диэлектрической проницаемости, $\{X, Y, Z\}$ — кристаллофизическая система координат, в которой тензор диэлектрической проницаемости имеет диагональный вид. Для нахождения направления колебаний вектора $\mathbf{D}$ требуется построить сечение эллипсоида волновых нормалей (2) плоскостью, проходящей через начало системы координат и перпендикулярной вектору $\mathbf{k} = \{k_X,\, k_Y,\, k_Z\}$. Сечением является эллипс, главные полуоси которого задают направление колебаний $\mathbf{D}$, а их длины равны значениям показателей преломления соответствующих волн.

Уравнение секущей плоскости имеет вид

$$(\mathbf{k},\, \mathbf{r}) = Xk_X + Yk_Y + Zk_Z = 0. \tag{3}$$

Проведем процедуру нахождения направления колебаний вектора $\mathbf{D}$ и показателей преломления с использованием афинного преобразования системы координат [38], в которой эллипсоид волновых нормалей будет иметь вид сферы единичного радиуса. Для этого сделаем следующую замену переменных $(X, Y, Z) \to (u, v, w)$:

$$\begin{gathered} u = X/\sqrt{\varepsilon_x}, v = Y/\sqrt{\varepsilon_y},\, w = Z/\sqrt{\varepsilon_z}, \\ u^2 + v^2 + w^2 = 1. \end{gathered} \tag{4}$$

При этом уравнение секущей плоскости в новой системе координат будет иметь вид

$$k_X\sqrt{\varepsilon}_x u + k_Y\sqrt{\varepsilon}_y v + k_Z\sqrt{\varepsilon}_z w = 0. \tag{5}$$

Вектор, перпендикулярный секущей плоскости, в новой системе координат можно записать в виде

$$\kappa = (k_X\sqrt{\varepsilon}_x,\, k_Y\sqrt{\varepsilon}_y,\, k_Z\sqrt{\varepsilon}_z) = (\kappa_u,\, \kappa_v,\, \kappa_w). \tag{6}$$

В случае $k_X^2 + k_Y^2 = 0$, $k_Z \neq 0$ в анизотропной среде могут распространяться две собственные волны с направлениями колебаний вектора $\mathbf{D}$ вдоль осей X и Y и с показателями преломления $\sqrt{\varepsilon}_x$ и $\sqrt{\varepsilon_y}$ соответственно.

Рассмотрим случай $k_X^2 + k_Y^2 \neq 0$. Найдем уравнение секущей фигуры в параметрическом виде. Для случая системы координат $\{u, v, w\}$ секущей фигурой будет окружность единичного радиуса, лежащая в плоскости, перпендикулярной к κ. Как нетрудно проверить прямой подстановкой, следующие два вектора перпендикулярны к κ и друг другу:

$$\begin{gathered} \mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{\kappa_u^2 + \kappa_v^2}} \begin{pmatrix} \kappa_v \\ -\kappa_u \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{e}_2 = \frac{[\kappa \times \mathbf{e}_1]}{|\kappa|} = \frac{1}{\sqrt{(\kappa_u^2 + \kappa_v^2)(\kappa_u^2 + \kappa_v^2 + \kappa_w^2)}} \times \\ \times \begin{pmatrix} \kappa_u\kappa_w \\ \kappa_v\kappa_w \\ -(\kappa_u^2 + \kappa_v^2) \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{7}$$

Таким образом, в системе координат $\{u, v, w\}$ уравнение секущей фигуры в параметрическом виде записывается как

$$\mathbf{r}_{\{u,v,w\}} = \mathbf{e}_1 \sin s + \mathbf{e}_2 \cos s, \tag{8}$$

где s — параметр, принимающий значения от 0 до 2π. В исходных обозначениях

$$\begin{gathered} \mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{k_X^2\varepsilon_x + k_Y^2\varepsilon_y}} \begin{pmatrix} k_Y\sqrt{\varepsilon_y} \\ -k_X\sqrt{\varepsilon_x} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{(k_X^2\varepsilon_x + k_Y^2\varepsilon_y)(k_X^2\varepsilon_x + k_Y^2\varepsilon_y + k_Z^2\varepsilon_z)}} \times \\ \times \begin{pmatrix} k_Xk_Z\sqrt{\varepsilon_x\varepsilon_z} \\ k_Yk_Z\sqrt{\varepsilon_y\varepsilon_z} \\ -(k_X^2\varepsilon_x + k_Y^2\varepsilon_y) \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{9}$$

После обратного преобразования координат $\{u, v, w\} \to \{X, Y, Z\}$, $\mathbf{e}_1 \to \mathbf{f}_1$, $\mathbf{e}_2 \to \mathbf{f}_2$ имеем

$$\begin{gathered} \mathbf{f}_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_x\varepsilon_y}{k_X^2\varepsilon_x + k_Y^2\varepsilon_y}} \begin{pmatrix} k_Y \\ -k_X \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{f}_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon_z}{(k_X^2\varepsilon_x + k_Y^2\varepsilon_y)(k_X^2\varepsilon_x + k_Y^2\varepsilon_y + k_Z^2\varepsilon_z)}} \times \\ \times \begin{pmatrix} k_Xk_Z\varepsilon_x \\ k_Yk_Z\varepsilon_y \\ -(k_X^2\varepsilon_x + k_Y^2\varepsilon_y) \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{10}$$

При этом уравнение эллипса, полученного в результате сечения эллипсоида Френеля плоскостью, перпендикулярной к $\mathbf{k}$, в системе координат $\{X, Y, Z\}$ имеет вид

$$\mathbf{r}(X, Y, Z) = \mathbf{f}_1 \cos s + \mathbf{f}_2 \sin s, \tag{11}$$

где s — параметр, принимающий значения от 0 до 2π. Направления его главных полуосей задают направление колебаний вектора $\mathbf{D}$, а длины полуосей равны соответствующим показателям преломления.

В одноосных кристаллах $\varepsilon_x = \varepsilon_y$, и $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = 0$, т. е. векторы $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$ являются полуосями эллипса и задают направления колебаний вектора $\mathbf{D}$, а их длины определяют показатели преломления. Отметим также, что вектор $\mathbf{f}_1$, определяющий направление колебаний вектора $\mathbf{D}$ и показатель преломления для обыкновенной волны, лежит в плоскости (XY). При этом его длина не зависит от направления $\mathbf{k}$, что совпадает с известным результатом для показателя преломления обыкновенной волны в двулучепреломляющих кристаллах.

Однако в двуосных кристаллах, в которых все три главные компоненты тензора диэлектрической проницаемости не равны друг другу, $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) \neq 0$, и главные полуоси эллипса определяются выражением (11), $\mathbf{r}(s_{1,2,3,4})$ при значениях параметров

$$
\begin{aligned}
s_1 &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{|\mathbf{f}_1|^2 - |\mathbf{f}_2|^2}{(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)}, \\
s_2 &= s_1 + \pi/2, \\
s_{3,4} &= t_{1,2} + \pi,
\end{aligned}
\tag{12}
$$

при этом $\mathbf{r}(s_{3,4})$ и $\mathbf{r}(s_{1,2})$ соответственно равны по модулю и противоположно направлены.

Отметим, что в системе координат $\{X, Y, Z\}$ тензор ε_{ij} диагонализован и обратный к нему тензор ε_{ij}^{-1} имеет вид

$$
\varepsilon_{ij}^{-1} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z^{-1} \end{pmatrix}. \tag{13}
$$

Учитывая, что

$$
\mathbf{E} = \frac{\varepsilon_{ij}^{-1}}{\varepsilon_0}\mathbf{D},
$$

имея координаты вектора $\mathbf{D}$, нетрудно вычислить координаты вектора $\mathbf{E}$.

3. СОСТОЯНИЕ ПОЛЯРИЗАЦИИ ИЗЛУЧЕНИЯ СПР

3.1. Коллинеарный режим рассеяния

При синхронизме первого типа при равенстве частот сигнальной и холостой волн коллинеарный режим рассеяния соответствует так называемому *вырожденному* режиму, т.е. в результате СПР в одной и той же моде рождается два фотона [39]. Квантовое поляризационное состояние излучения СПР имеет вид

$$
|\psi\rangle = \mathbf{p}_{k_s}\left(\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}_{k_s}, \mathbf{k}_s)\right)^2/\sqrt{2}\,|\mathrm{vac}\rangle, \tag{14}
$$

где $\mathbf{p}_{k_s}$ — единичный вектор, соответствующий направлению колебаний вектора $\mathbf{D}$ излучения СПР, имеющего волновой вектор $\mathbf{k}_s$; $\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}_{k_s}, \mathbf{k}_s)$ — бозонный оператор рождения фотона в моде с поляризацией $\mathbf{p}_{k_s}$ и волновым вектором $\mathbf{k}_s$; $|\mathrm{vac}\rangle$ — вакуумное состояние электромагнитного поля. Для нахождения квантового поляризационного состояния СПР требуется определить лишь направление поляризации собственной волны, распространяющейся в двулучепреломляющем кристалле.

В коллинеарной геометрии СПР $\mathbf{k}_s = \mathbf{k}_i || \mathbf{k}_p$. Направление волнового вектора накачки $\mathbf{k}_p$ задается двумя кристаллографическими углами — полярным углом θ_p и азимутальным углом ϕ_p (рис. 1). Координаты вектора $\mathbf{k}_s$ в системе координат $\{X, Y, Z\}$

$$
\mathbf{k}_s = |\mathbf{k}_s| \begin{pmatrix} \sin\theta_p\cos\phi_p \\ \sin\theta_p\sin\phi_p \\ \cos\theta_p \end{pmatrix}. \tag{15}
$$

Векторы $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$ принимают значения

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{f}_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_x\varepsilon_y}{\cos^2\phi_p\varepsilon_x + \sin^2\phi_p\varepsilon_y}} \begin{pmatrix} \sin\phi_p \\ -\cos\phi_p \\ 0 \end{pmatrix}, \\
&\mathbf{f}_2 = (\varepsilon_z)^{1/2}\left(\varepsilon_x\cos^2\phi_p + \varepsilon_y\sin^2\phi_p\right)^{-1/2} \times \\
&\times\left(\varepsilon_x\cos^2\phi_p\sin^2\theta_p + \varepsilon_y\sin^2\phi_p\sin^2\theta_p + \varepsilon_z\cos^2\theta_p\right)^{-1/2} \times \\
&\times \begin{pmatrix} \cos\theta_p\cos\phi_p\varepsilon_x \\ \cos\theta_p\sin\phi_p\varepsilon_y \\ -\sin\theta_p(\cos^2\phi_p\varepsilon_x + \cos^2\phi_p\varepsilon_y) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Также перейдем в систему координат $\{x, y, z\}$, в которой ось z направлена вдоль вектора $\mathbf{k}$, ось x лежит в плоскости $(Z, \mathbf{k})$. Направление колебаний вектора $\mathbf{D}$ будет лежать в плоскости xy. Систему координат $\{xyz\}$ будем называть системой координат, связанной с накачкой. Преобразование системы координат $\{X, Y, Z\} \to \{x, y, z\}$ можно осуществить с помощью последовательности поворотов вокруг оси Z на угол ϕ_p и затем вокруг новой оси y' на угол θ_p. В результате матрица преобразования системы координат имеет вид

$$
\begin{aligned}
M &= R_y(-\theta_p)R_z(-\phi_p) = \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta_p\cos\phi_p & \cos\theta_p\sin\phi_p & -\sin\theta_p \\ -\sin\phi_p & \cos\phi_p & 0 \\ \cos\phi_p\sin\theta_p & \sin\theta_p\sin\phi_p & \cos\theta_p \end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{17}
$$

где

$$
R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}
$$

— матрица поворота вокруг оси y на угол θ, а

$$
R_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{18}
$$

— матрица поворота вокруг оси z на угол ϕ [40].

Векторы $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$ в этой системе координат записываются как

$$\mathbf{f}_1^{xyz} = \sqrt{\frac{\varepsilon_x\varepsilon_y}{\cos^2\phi_p\varepsilon_x + \sin^2\phi_p\varepsilon_y}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{19}$$

$$\mathbf{f}_2^{xyz} = (\varepsilon_z)^{1/2}\left(\varepsilon_x\cos^2\phi_p + \varepsilon_y\sin^2\phi_p\right)^{-1/2} \times$$
$$\times\left(\varepsilon_x\cos^2\phi_p\sin^2\theta_p + \varepsilon_y\sin^2\phi_p\sin^2\theta_p + \varepsilon_z\cos^2\theta_p\right)^{-1/2}\times$$
$$\times\begin{pmatrix} \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cos 2\phi_p \\ -\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cos\theta_p\cos 2\phi_p \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Если $\varepsilon_x \neq \varepsilon_y$, то для нахождения направления колебаний вектора $\mathbf{D}$ собственных волн в анизотропной среде нужно выражения для $\mathbf{f}_1^{xyz}$ и $\mathbf{f}_2^{xyz}$ из (19) подставить в (12) и получить значения параметров s_1 и s_2. При этом направления колебаний вектора $\mathbf{D}$, $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$, определяются выражениями

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \mathbf{f}_1^{xyz}\cos s_1 + \mathbf{f}_2^{xyz}\sin s_1, \\ \mathbf{p}_2 &= \mathbf{f}_1^{xyz}\cos s_2 + \mathbf{f}_2^{xyz}\sin s_2, \end{aligned} \tag{20}$$

а показатели преломления волн равны соответственно $|\mathbf{p}_1|$ и $|\mathbf{p}_2|$.

Для случая одноосных кристаллов выражения упрощаются. Положим

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_\perp, \quad \varepsilon_z = \varepsilon_{||}.$$

Отметим, что

$$(\mathbf{f}_1^{xyz}, \mathbf{f}_2^{xyz}) = 0,$$

а значит,

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{f}_1^{xyz}, \quad \mathbf{p}_2 = \mathbf{f}_2^{xyz}.$$

При этом

$$\begin{gathered} \mathbf{p}_1^u = \sqrt{\varepsilon_\perp}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{p}_2^u = \sqrt{\frac{\varepsilon_{||}\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\perp\sin^2\theta_p + \varepsilon_{||}\cos^2\theta_p}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{gathered} \tag{21}$$

т. е. получаем известные выражения для показателя преломления *обыкновенной* волны

$$n_o = \sqrt{\varepsilon_\perp}$$

и *необыкновенной* волны

$$n_e = (\sin^2\theta_p/\varepsilon_\perp + \cos^2\theta_p/\varepsilon_{||})^{-1/2}.$$

Для нахождения направления вектора $\mathbf{D}$ обычно вводят понятие главной плоскости — плоскости, содержащей оптическую ось кристалла (Z) и вектор $\mathbf{k}$. Как нетрудно видеть, вектор $\mathbf{D}$ обыкновенной волны $\mathbf{p}_1$ нормален к главной плоскости, а вектор $\mathbf{D}$ необыкновенной волны $\mathbf{p}_2$ лежит в главной плоскости.

Значение $\mathbf{p}_1$ или $\mathbf{p}_2$, которому соответствует большая величина показателя преломления, после нормировки на единичную длину и является искомым вектором $\mathbf{p}_{k_s}$ в (14).

3.2. Неколлинеарный режим рассеяния

В неколлинеарном режиме СПР фотоны рождаются в разных модах. Такой режим является невырожденным, и квантовое поляризационное состояние излучения СПР в приближении заданного поля плоской монохроматической накачки и бесконечно длинного кристалла [41] можно представить в виде

$$|\psi\rangle \propto \int_0^\pi d\phi f(\phi)\left|\mathbf{p}_s(\theta_s(\phi),\phi)\right\rangle \otimes \left|\mathbf{p}_i(\theta_i(\phi),\phi+\pi)\right\rangle. \tag{22}$$

Здесь $f(\phi)$ — функция, описывающая зависимость эффективности рассеяния от азимутального угла, $\left|\mathbf{p}_{s,i}\right\rangle$ — квантовое поляризационное состояние фотона в сигнальной (s) и холостой (i) модах, имеющее вид

$$\left|\mathbf{p}_{s,i}\right\rangle = \mathbf{p}_{k_{s,i}}(\theta_{s,i},\phi_{s,i})\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}_{k_{s,i}},\mathbf{k}_{s,i})\left|\mathrm{vac}\right\rangle, \tag{23}$$

где $\mathbf{p}_{k_{s,i}}(\theta_{s,i},\phi_{s,i})$ — единичный вектор, задающий направление колебаний вектора $\mathbf{D}$ излучения СПР, рассеянного под полярным углом $\theta_{s,i}$ и азимутальным углом $\phi_{s,i}$ (см. рис. 1), $\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}_{k_{s,i}},\mathbf{k}_{s,i})$ — бозонный оператор рождения фотона в моде с поляризацией $\mathbf{p}_{k_{s,i}}$ и волновым вектором $\mathbf{k}_{s,i}$. Индексы «s» и «i» отвечают сигнальной и холостой волнам соответственно.

Для нахождения направления колебаний вектора $\mathbf{D}$ излучения в сигнальной $\mathbf{p}_{k_s}$ и холостой $\mathbf{p}_{k_i}$ волнах в системе координат $\{XYZ\}$ достаточно найти координаты волновых векторов $\mathbf{k}_s$ и $\mathbf{k}_i$. Сделать это можно с помощью последовательности из четырех поворотов (рис. 1), совмещающих орт вдоль Z системы координат XYZ с единичным вектором, направленным вдоль $\mathbf{k}_{s,i}$:

$$\mathbf{k}_{s,i} = |\mathbf{k}_{s,i}|R_z(\phi_p)R_y(\theta_p)R_z(\phi_{s,i})R_y(\theta_{s,i})\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{24}$$

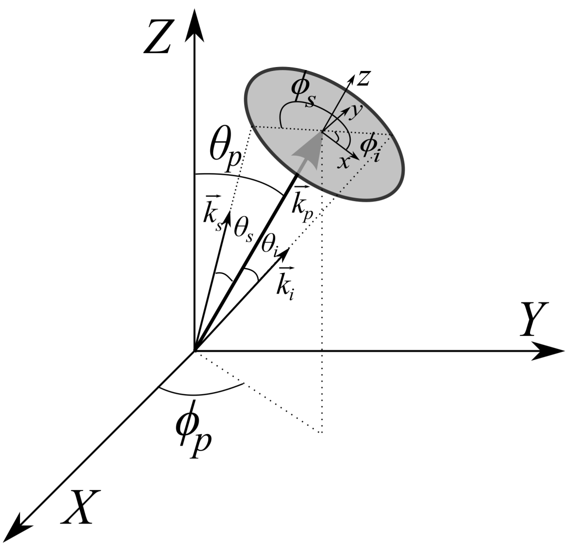

Рис. 1. Геометрия СПР относительно кристаллофизической системы координат $\{XYZ\}$ и системы координат $\{xyz\}$, связанной с накачкой

где R_y и R_z определены в (17), (18). Подставив (24) и (12) в (11) и взяв полуось с большей длиной, получим направление вектора $\mathbf{D}$ излучения СПР, необходимое для вычисления квантового состояния (22).

3.3. Численные расчеты

Согласно приведенным выше выражениям, осуществлен расчет направления вектора $\mathbf{D}$ в кристаллах BBO (β-борат бария) и BiBO (триборат висмута). Для расчетов использовались уравнения Селлмейера для BBO [42] и BiBO (с коррекцией на показатель преломления воздуха, см. [43]). Расчеты проводились для накачки на длине волны 405 нм, в вырожденном по частоте режиме. Рассматривались углы рассеяния 0, 3°, 10°, 17° и 30° снаружи кристалла, для двуосного кристалла BiBO угол рассеяния считался для $\phi_s = 0$. Для кристалла BiBO расчеты проведены для $\phi_p = 45°$ и $\phi_p = 90°$. Расчеты для одноосного кристалла BBO не зависят от угла ϕ_p в силу симметрии эллипсоида волновых нормалей. Соответствующие углы θ_p приведены в таблице. Проведен расчет угла девиации поляризации СПР $\gamma(\theta_{s,i}, \phi_{s,i})$, определяемого как угол между направлением колебаний вектора $\mathbf{D}$ излучения в неколлинеарном режиме и направлением колебаний вектора

Таблица 1. Параметры кристаллов, используемые при расчете. Расчеты проведены для кристаллов BBO и BiBO (с фиксированным значением $\phi_p = 45°$ и $\phi_p = 90°$) с различными значениями θ_p, соответствующими значениям угла рассеяния θ_s^{out} (0, 3°, 10°, 17° и 30°) снаружи кристалла при $\phi_s = 0$

	θ_s^{out}, град.	θ_p, град.	$\arccos s_1$, град.	$\arccos s_2$, град.
BBO	0	28.82	90.0	90.0
	3	29.24	86.8	86.8
	10	33.32	81.0	81.0
	17	41.15	78.6	78.6
	30	67.86	83.0	83.0
BiBO, $\phi_p = 45°$	0	141.39	90.0	90.0
	3	141.06	89.4	89.2
	10	137.74	88.4	86.8
	17	131.09	87.4	84.6
	30	104.84	88.8	87.5
BiBO, $\phi_p = 90°$	0	152.08	90	90
	3	151.71	88.5	88.5
	10	148.06	85.2	85.2
	17	141.05	82.8	82.8
	30	118.38	83.5	83.5

$\mathbf{D}$ волны того же типа с $\mathbf{k}_{s,i}||\mathbf{k_p}$ при тех же параметрах θ_p, ϕ_p и длине волны.

На рис. 2 показаны зависимости от азимутального направления рассеяния ϕ_s угла γ девиации поляризации СПР при переходе от коллинеарного режима к неколлинеарному и угла δ между векторами $\mathbf{D}$ сигнальной и холостой волн СПР. На рис. 2 видно, что значение угла девиации поляризации может принимать значения, превышающие 15°, при этом значение угла между векторами $\mathbf{D}$ сигнальной и холостой волн превышает 30°.

Отметим, что в одноосном кристалле BBO существуют направления ($\phi_s = 0$, 180°), при которых угол девиации поляризации равен нулю. Это связано с тем, что кристалл BBO — одноосный и отрицательный, вследствие чего генерируемые в результате СПР волны — обыкновенные. При указанных положениях направление векторов $\mathbf{D}$ перпендикулярно одной и той же главной плоскости. В двуосном кристалле BiBO, напротив, в неколлинеарном режиме направление вектора $\mathbf{D}$ не совпадает с направлением вектора $\mathbf{D}$ в коллинеарном режиме. Также от-

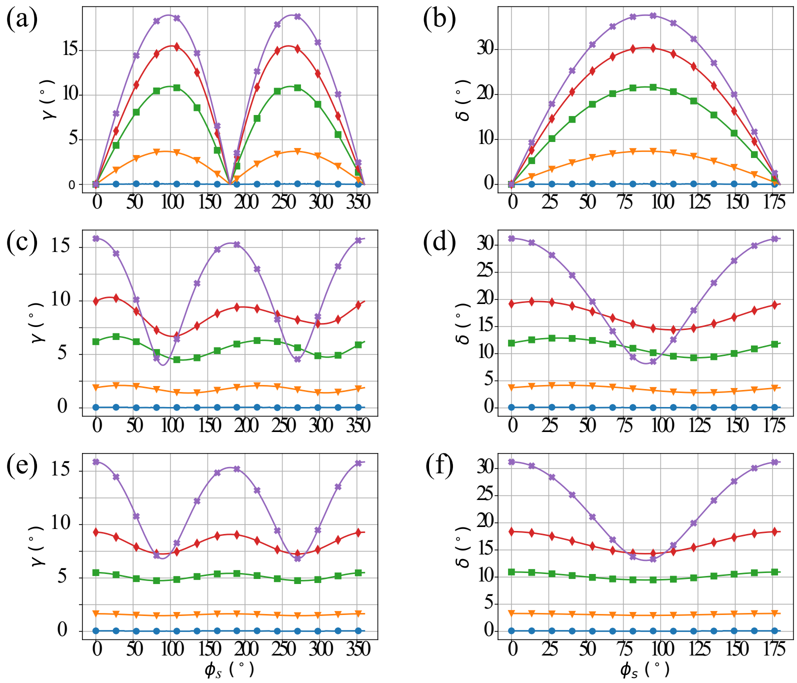

Рис. 2. a, c, e — Зависимости угла γ между вектором **D** излучения СПР в неколлинеарном и коллинеарном режимах от азимутального направления рассеяния ϕ_s; b, d, f — зависимости угла δ между векторами **D** сигнальной и холостой волн от азимутального направления рассеяния ϕ_s. Графики (a, b) — для кристалла BBO; (c, d) — для кристалла BiBO, $\phi_p = 45°$; (e, f) — для кристалла BiBO, $\phi_p = 90°$. Синие кружки, оранжевые треугольники, зеленые квадраты, красные ромбы и пурпурные крестики соответствуют углам рассеяния 0, $3°$, $10°$, $17°$ и $30°$ снаружи кристалла

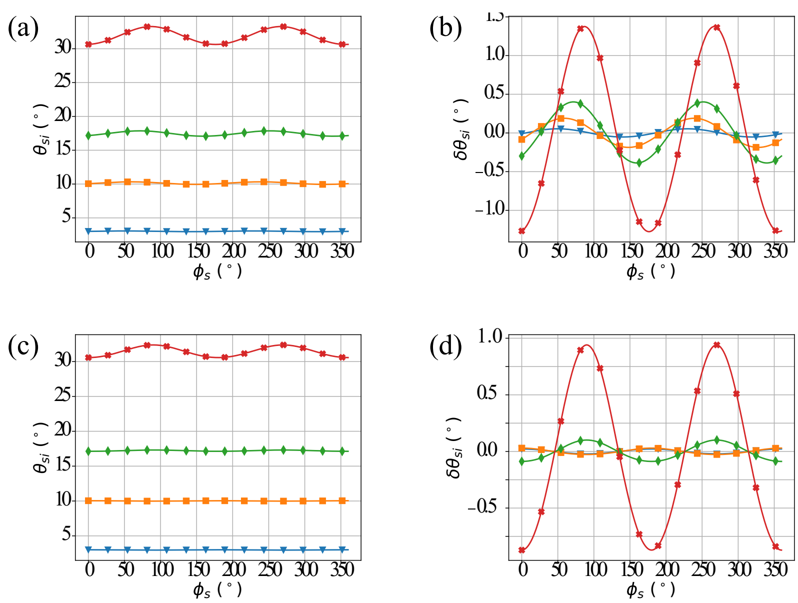

Рис. 3. a, c — Зависимости угла неколлинеарности (снаружи кристалла) от азимутального направления рассеяния ϕ_s; b, d — зависимости отклонения угла рассеяния от среднего значения по азимутальному направлению от азимутального направления рассеяния ϕ_s. Графики (a, b) — для кристалла BiBO, $\phi_p = 45°$; (c, d) — для кристалла BiBO, $\phi_p = 90°$. Синие треугольники, оранжевые квадраты, зеленые ромбы, красные крестики соответствуют углам рассеяния $3°$, $10°$, $17°$ и $30°$ снаружи кристалла (при $\phi_s = 0$)

метим, что графики для BBO и BiBO при $\phi_p = 90^\circ$ симметричны при $\phi_s \leftrightarrow 360^\circ - \phi_s$, что связано с симметричностью сечений эллипсоида волновых нормалей. При $\phi_p = 45^\circ$ эта симметрия теряется, что также сказывается и на симметрии направления вектора $\mathbf{D}$.

В одноосном кристалле BBO излучение СПР является обыкновенной волной, и значение показателя преломления не зависит от направления рассеяния. Вследствие этого, условия фазового синхронизма означают, что излучение СПР формирует конус с постоянным углом раствора (углом неколлинеарности). Этот факт широко известен в литературе. Что касается двуосного кристалла BiBO, то показатель преломления для излучения СПР зависит от направления рассеяния, и, в принципе, угол рассеяния может зависеть от азимутального направления рассеяния. Соответствующих оценок в литературе сделано не было.

На рис. 3 показаны зависимости угла неколлинеарности (снаружи кристалла) от азимутального направления рассеяния для кристалла BiBO при $\phi_p = 45^\circ$ и $\phi_p = 90^\circ$. Из рис. 3 видно, что для углов рассеяния до 17° значение отклонения угла рассеяния сравнительно мало. В то же время при $\theta_s \approx 30^\circ$ угол рассеяния изменяется в пределах около 2°, причем для случая $\phi_p = 45^\circ$ отклонение немного больше, чем для $\phi_p = 90^\circ$. Так же, как и у направления вектора $\mathbf{D}$, при $\phi_p = 45^\circ$, в отличие от $\phi_p = 90^\circ$, отсутствует симметрия $\phi_s \leftrightarrow 360^\circ - \phi_s$.

4. ВЛИЯНИЕ ДЕВИАЦИИ ПОЛЯРИЗАЦИИ СПР НА ЗАПУТАННОСТЬ БИФОТОНОВ, ГЕНЕРИРУЕМЫХ В ДВУХКРИСТАЛЬНОЙ СХЕМЕ

Явление девиации поляризации в неколлинеарном режиме СПР приводит к ухудшению степени квантовой поляризационной запутанности фотонных пар. Одной из наиболее известных схем получения поляризационно-запутанных фотонных пар является так называемая двухкристальная схема (рис. 4), состоящая из двух последовательно расположенных одинаковых нелинейных кристаллов, ориентированных ортогонально. Падая на нелинейные кристаллы, накачка делится по поляризации: ее вертикальная составляющая в первом кристалле участвует в рождении фотонных пар, а горизонтальная — не участвует и проходит практически без взаимодействия, так как условия фазового синхронизма для данной компоненты не выполнены. Во втором кристалле, наоборот, горизонтальная

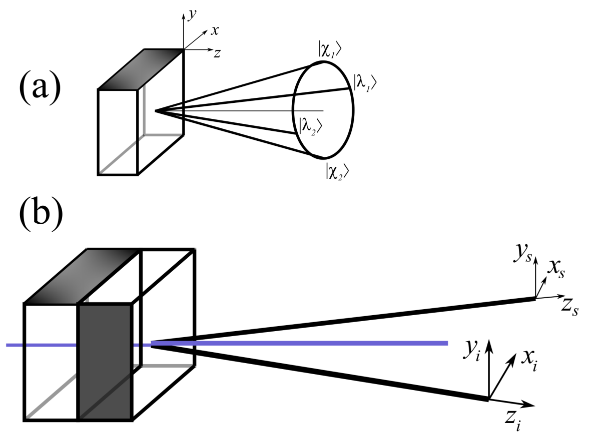

Рис. 4. a — Один из кристаллов двухкристальной схемы. Схематично показаны квантовые поляризационные состояния одиночных фотонов, соответствующие направлениям сбора в двухкристальной схеме. b — Оптическая схема источника — двухкристальная схема. Показано расположение скрещенных нелинейных кристаллов

составляющая участвует в рождении фотонной пары, а вертикальная составляющая накачки — нет. При этом квантовое состояние на выходе двухкристальной схемы в приближении плоских сигнальной, холостой волн и волны накачки имеет вид [44]

$$|\Psi\rangle \propto \cos æ\, |\lambda_1\rangle \otimes |\lambda_2\rangle + \sin æ e^{i\phi} \, |\chi_1\rangle \otimes |\chi_2\rangle \,, \quad (25)$$

где первое слагаемое — амплитуда квантового поляризационного состояния, генерируемого в первом нелинейном кристалле, а второе — в следующем нелинейном кристалле, ϕ — фаза между амплитудами, регулируемая с помощью эллиптичности поляризации накачки, $\otimes$ означает тензорное произведение, æ — параметр, описывающий долю квантового состояния, генерируемого в каждом из нелинейных кристаллов, в квантовом состоянии $|\Psi\rangle$. Состояние $|\lambda_1\rangle$ является поляризационным состоянием фотона в сигнальной моде, рассеянного под азимутальным углом $\phi_s = 0$, $|\lambda_2\rangle$ — поляризационное состояние фотона в холостой моде при $\phi_i = 180^\circ$, $|\chi_1\rangle$ — поляризационное состояние фотона в сигнальной моде при $\phi_s = 90^\circ$, $|\chi_2\rangle$ — поляризационное состояние фотона при $\phi_i = 270^\circ$. Зависимостью угла СПР $\theta_{s,i}$ от азимутального направления пренебрегается. Каждая амплитуда является произведением поляризационных состояний фотона в сигнальной и холостой модах соответственно. В лабораторном базисе для сигнального и холостого пучка состояния поляризации одиночного фотона имеют вид

$$
\begin{aligned}
&|\lambda_1\rangle = \begin{pmatrix} \cos\theta_1^s \\ \sin\theta_1^s \end{pmatrix}, \ |\lambda_2\rangle = \begin{pmatrix} \cos\theta_1^i \\ \sin\theta_1^i \end{pmatrix}, \\
&|\chi_1\rangle = \begin{pmatrix} \cos\theta_2^s \\ \sin\theta_2^s \end{pmatrix}, \ |\chi_2\rangle = \begin{pmatrix} \cos\theta_2^i \\ \sin\theta_2^i \end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{26}
$$

$\theta^{s,i}_{1,2}$ — значение угла между направлением вектора $\mathbf{D}$ и ортом $x_{s,i}$ в сигнальном и холостом пучках СПР. Индексы «1» и «2» отвечают излучению СПР, формирующемуся соответственно в первом и втором кристаллах схемы. Отметим, что поляризационное состояние каждого фотона описывается в двумерном комплексном гильбертовом пространстве, а поляризационное состояние фотонной пары — в пространстве размерностью 2×2. Для описания запутанности двухчастичной системы, состоящей из двумерных подсистем, существует целый набор метрик [45], таких как «Concurrence», «Tangle» (сцепленность), перепутывание формирования. Мы используем сцепленность , так как она наиболее чувствительна к изменению квантового состояния в области больших степеней квантовой запутанности [46]. Для чистого квантового состояния сцепленность можно выразить в виде [44]

$$
T(|\Psi\rangle) = |\langle\Psi|\,\hat\sigma_2 \otimes \hat\sigma_2\,|\Psi^*\rangle|\,, \tag{27}
$$

где $*$ означает комплексное сопряжение, а

$$
\hat\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{28}
$$

— матрица Паули. Сцепленность принимает значение 1 для максимально запутанного квантового состояния и 0 для факторизованного квантового состояния.

Сцепленность для квантового состояния (25) принимает значение

$$
T(|\Psi\rangle) = \frac{\sin^2 2æ\,(1-|s_1|^2)(1-|s_2|^2)}{1+\sin 2æ\,\mathrm{Re}(s_1 s_2 e^{i\phi})}, \tag{29}
$$

где

$$
s_{1,2} = \langle\lambda_{1,2}|\chi_{1,2}\rangle\,.
$$

Значение $T(|\Psi\rangle) = 1$, если $s_1 = s_2 = 0$, либо

$$
\begin{aligned}
&|s_1| = |s_2|, \\
&æ = \pi/4 + n\pi, \\
&\phi = \pi - \arg(s_1 s_2) + n\pi,
\end{aligned}
\tag{30}
$$

где n — целое число. Первое условие означает, что углы между векторами $\mathbf{D}$ $|\lambda_1\rangle$, $|\chi_1\rangle$ и $|\lambda_2\rangle$, $|\chi_2\rangle$ должны быть равны. Следующее условие означает, что модули амплитуд квантового состояния, соответствующие первому и второму кристаллу, должны быть равны. Третье условие говорит о том, что для получения квантового состояния с максимально возможной степенью запутанности необходимо задать оптимальное значение фазы между излучением, формируемым в первом и втором кристаллах схемы.

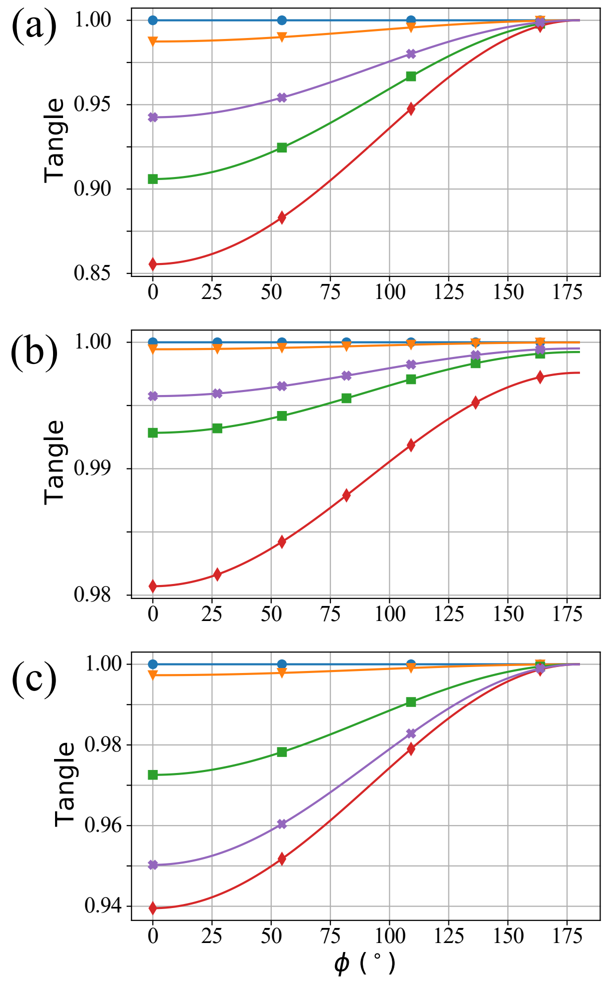

Рис. 5. Зависимости сцепленности (Tangle) от фазы ϕ для кристалла BBO (a), кристалла BiBO при $\phi_p = 45^\circ$ (b), кристалла BiBO при $\phi_p = 90^\circ$ (c). Синие кружки, оранжевые треугольники, зеленые квадраты, красные ромбы и пурпурные крестики соответствуют углам рассеяния 0, 3°, 10°, 17° и 30° снаружи кристалла. Соответствующие углы θ_p приведены в таблице

На рис. 5 представлены зависимости сцепленности от фазы ϕ для кристалла BBO и кристалла BiBO при $\phi_p = 45^\circ$ и $\phi_p = 90^\circ$. Вычисления проведены для углов рассеяния 0, 3°, 10°, 17° и 30°

снаружи кристалла. Из рис. 5 видно, что для кристалла BiBO при $\phi = 0$ при увеличении угла рассеяния от 0 до 30° сцепленность уменьшается с 1 до 0.85. При этом для двуосного кристалла BiBO при $\phi_p = 45°$ по мере увеличения угла рассеяния сцепленность уменьшается на меньшую величину (с 1 до 0.98). При $\phi_p = 90°$ уменьшение сцепленности более выражено по сравнению с $\phi_p = 45°$. В то же время при использовании кристаллов BBO и кристаллов BiBO с $\phi_p = 90°$ значение сцепленности может быть полностью восстановлено до значения 1 при $\phi = 180°$. При $\phi_p = 45°$ полного восстановления сцепленности не происходит. Это связано с тем, что из-за симметрии в кристалле BBO и кристалле BiBO $|s_1| = |s_2|$, а в кристалле BiBO при $\phi_p = 45°$ $|s_1| \neq |s_2|$ (см. таблицу).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе даны аналитические выражения для направления колебаний векторов **D** и **E** излучения, распространяющегося в одноосных и двуосных нелинейно-оптических кристаллах, а также значения показателя преломления. Полученные выражения использованы для вычисления значения угла девиации поляризации СПР γ, а также угла между поляризацией сигнальной и холостой волн δ в кристаллах BBO и BiBO. Показано, что значение γ может превышать 15°, а значение γ — 30°. Полученные оценки свидетельствуют о важности учета девиации поляризации СПР в неколлинеарном режиме при создании источников поляризационно-запутанных фотонных пар. Также учет девиации поляризации СПР требуется при расчете значения эффективной нелинейности в неколлинеарном СПР. Эти результаты также могут быть использованы при создании фантомных поляриметров, в которых систематическая ошибка из-за явления девиации поляризации устранена.

Впервые сделаны оценки для отклонения формы конуса СПР. Показано, что при угле рассеяния $\approx 30°$ при изменении азимутального направления угол рассеяния изменяется в пределах 2°. При этом при направлении $\phi_s = 0$; 180° угол рассеяния уменьшается, а при $\phi_s = 90°$; 270° угол рассеяния, наоборот, увеличивается. Это означает, что в двухкристальной схеме с большими углами рассеяния требуется оценка отклонения формы конуса СПР для того, чтобы излучение, генерируемое в двух последовательно расположенных нелинейных кристаллах, пространственно совпадало.

Получено, что негативное влияние девиации поляризации на степень квантовой запутанности (сцепленность) в двухкристальной схеме при использовании двуосных кристаллов может быть улучшено с помощью выбора оптимального параметра ϕ, определяемого эллиптичностью поляризации накачки. При этом при $|s_1| = |s_2|$ можно достичь максимальной степени квантовой запутанности, а при $|s_1| \neq |s_2|$ сцепленность может быть восстановлена лишь частично. Этот результат позволит в будущем создавать источники поляризационно-запутанных фотонных пар со степенью запутанности, близкой к максимальной.

Благодарности. Авторы благодарят А. С. Чиркина за полезные обсуждения и неоценимую поддержку на всех этапах работы.

Финансирование. Работа выполнена за счет средств гранта Российского научного фонда (проект № 21-12-00155).

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Н. Клышко, Письма в ЖЭТФ **6**, 490 (1967) [D. N. Klyshko, JETP Lett. **6**, 490 (1967)].
2. C. Zhang et al., Adv. Quant. Technol. **4**, 2000132 (2021).
3. S. V. Vintskevich, D. A. Grigoriev, and M. V. Fedorov, Laser Phys. Lett. **16**, 065203 (2019).
4. G. Brida, M. Genovese, and M. Gramegna, Laser Phys. Lett. **3**, 115 (2005).
5. A. N. Penin and A. V. Sergienko, Appl. Opt. **30**, 3582 (1991).
6. П. П. Гостев, Д. П. Агапов, А. В. Демин, Измерительная техника **12**, 27 (2018) [P. P. Gostev, D. P. Agapov, A. V. Demin et al., Measurement Techniques **61**, 1166 (2019)].
7. P. A. Prudkovskii, P. A. Safronenkov, and G. Kh. Kitaeva, Opt. Lett. **47**, 4842 (2022).
8. J. Matthews, X.-Q. Zhou, H. Cable et al., NPJ Quant. Inf. **2**, 1 (2016).
9. C. Couteau, Contemp. Phys. **59**, 291 (2018).
10. D. Bouwmeester, J.-W. Pan, M. Daniell et al., Phys. Rev. Lett. **82**, 1345 (1999).
11. H.-S. Zhong, Y. Li, W. Li et al., Phys. Rev. Lett. **121**, 250505 (2018).
12. P.-G. Kwiat, E. Waks, and A. G. White, Phys. Rev. A **60**, R773 (1999).

13. C. E. Kuklewicz, M. Fiorentino, G. Messin et al., Phys. Rev. A **69**, 013807 (2004).

14. F. N. C. Wong, J. H. Shapiro, and T. Kim, Laser Phys. **16**, 1517 (2006).

15. M. Barbieri, C. Cinelli, F. de Martini et al., Laser Phys. **16**, 1439 (2006).

16. K. A. Kuznetsov, E. I. Malkova, and R. V. Zakharov, Phys. Rev. A **101**, 053843 (2020).

17. К. Г. Катамадзе, С. П. Кулик, ЖЭТФ **139**, 26 (2011) [K. G. Katamadze and S. P. Kulik, JETP **112**, 20 (2011)].

18. N. A. Borshchevskaya, F. Just, K. G. Katamadze et al., Laser Phys. Lett. **16**, 085207 (2019).

19. М. В. Чехова, О. А. Шумилкина, Письма в ЖЭТФ **91**, 718 (2010) [M. V. Chekhova and O. A. Shumilkina, JETP Lett. **91**, 649 (2010)].

20. R. Rangarajan, L. E. Vicent, A. B. U'Ren, and P. G. Kwiat, J. Mod. Opt. **58**, 318 (2011).

21. M. V. Fedorov, Phys. Rev. A **93**, 033830 (2016).

22. M. Reichert, H. Defienne, and J. W. Fleischer, Scientific Reports **8**, 7925 (2018).

23. F. Just, A. Cavanna, M. V. Chekhova, and G. Leuchs, New J. Phys. **15**, 083015 (2013).

24. D. N. Frolovtsev and S. A. Magnitskiy, Phys. Wave Phenomena **25**, 180 (2017).

25. D. N. Frolovtsev and S. A. Magnitskiy, EPJ Web of Conf. **220**, 03016 (2019).

26. A. Migdall, JOSA B **14**, 1093 (1997)

27. Д. Ю. Степанов, В. Д. Шигорин, Г. П. Шипуло, КЭ **11**, 1957 (1984) [D. Yu. Stepanov, V. D. Shigorin, and G. P. Shipulo, Sov. J. Quant. Electron. **14**, 1315 (1984)].

28. J. Q. Yao and T. S. Fahlen, J. Appl. Phys. **55**, 65 (1984).

29. N. Boeuf, D. A. Branning, I. Chaperot et al., Opt. Eng. **39**, 1016 (2000).

30. G.-W. Huo, T.-Y. Zhan, R.-G. Wan et al., Proc. SPIE **8333**, 261 (2012).

31. R. Akbari and Major, Laser Phys. **23**, 035401 (2013).

32. A. S. Chirkin, P. P. Gostev, D. P. Agapov, and S. A. Magnitskiy, Laser Phys. Lett. **15**, 115404 (2018).

33. S. A. Magnitskiy, D. P. Agapov, and A. S. Chirkin, Opt. Lett. **47**, 754 (2022).

34. Д. А. Балакин, А. В. Белинский, ЖЭТФ **160**, 35 (2021) [D. A. Balakin and A. V. Belinsky, JETP **133**, 26 (2021)].

35. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Гостехиздат, Москва (1957) [L. D. Landau et al., *Electrodynamics of Continuous Media* Vol. 8, Elsevier (2013)].

36. М. Борн, Э. Вольф, *Основы оптики*, Наука, Москва (1973) [M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*, Elsevier (2013)].

37. В. Г. Дмитриев, Л. В. Тарасов, *Прикладная нелинейная оптика*, Физматлит, Москва (2004) [V. G. Dmitriev and L. V. Tarasov, *Applied Nonlinear-Optics: Second-Harmonic Generators and Parametric Light-Generators*, Radio Sviaz, Moscow (1982)].

38. E. Kreuzig, *Advanced Engineering Mathematics*, Willey (1972).

39. Л. А. Кривицкий, С. П. Кулик, Г. А. Масленников, М. В. Чехова, КЭ **35**, 69 (2005) [L. A. Krivitskii, S. P. Kulik, G. A. Maslennikov, and M. V. Chekhova, Quant. Electron. **35**, 69 (2005)].

40. E. W. Weisstein, *Rotation Matrix*, Wolfram Research (2003).

41. Л. Мандель, Э. Вольф, *Оптическая когерентность и квантовая оптика*, Физматлит, Москва (2000) [L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics*, Cambridge University Press, Cambridge (1995)].

42. K. Kato, IEEE J. Quant. Electron. **22**, 1013 (1986).

43. H. Hellwig, J. Liebertz, and L. Bohatý, J. Appl. Phys. **88**, 240 (2000).

44. D. N. Frolovtsev and S. A. Magnitskiy, Proc. of ICLO, 1 (2020).

45. W. K. Wooters, Quant. Inf. Comput. **1**, 27 (2001).

46. N. A. Peters, T.-C. Wei, and P. G. Kwiat, Phys. Rev. A **70**, 052309 (2004).