

# АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СОЛИТОНОВ, ПОРОЖДАЕМЫХ ИЗ ИНТЕНСИВНОГО ВОЛНОВОГО ИМПУЛЬСА

*А. М. Камчатнов\**

*Институт спектроскопии Российской академии наук,  
108840, Москва, Троицк, Россия*

Поступила в редакцию 26 мая 2023 г.,

после переработки 1 июня 2023 г.

Принята к публикации 1 июня 2023 г.

Развита теория преобразования интенсивного начального волнового импульса в солитоны при асимптотически больших временах эволюции. Наш подход основан на том, что такое преобразование происходит через промежуточную стадию формирования и эволюции дисперсионных ударных волн, так что число нелинейных осцилляций в них оказывается равным числу солитонов в асимптотическом состоянии. С помощью теории интегрального инварианта Пуанкаре–Картана мы показываем, что это число осцилляций, равное классическому действию частицы, ассоциированной с волновым пакетом в окрестности малоамплитудного края дисперсионной ударной волны, остается постоянным при переносе течением, описываемым бездисперсионным пределом рассматриваемых нелинейных волновых уравнений. Это позволяет сформулировать обобщенное правило квантования Бора–Зоммерфельда, которое определяет набор «собственных значений», связанных с физическими параметрами солитонов в асимптотическом состоянии, в частности, с их скоростями. Теория не использует свойств полной интегрируемости нелинейных волновых уравнений, но воспроизводит соответствующие результаты и в этом случае. Аналитические результаты подтверждаются численными решениями нелинейных волновых уравнений.

DOI: 10.31857/S0044451023110159

EDN: PLMODU

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Если в нелинейной волновой системе возможно распространение солитонов, то во многих типичных ситуациях достаточно интенсивный начальный импульс эволюционирует в конечном счете в некоторое число  $N$  солитонов и относительно небольшое количество энергии трансформируется в линейные волны. Ввиду универсальности этого физического явления является важным уметь вычислять параметры образующихся солитонов по форме начального импульса. Эта задача легко решается в случае полностью интегрируемых нелинейных волновых уравнений (см., например, книги [1–3] и имеющиеся там ссылки). Каждое такое уравнение связано с некоторой линейной спектральной задачей,

в которой распределения волновых переменных играют роль «потенциалов». Хотя эти «потенциалы» изменяются со временем согласно рассматриваемым волновым уравнениям, спектр соответствующей линейной задачи остается постоянным и каждое дискретное собственное значение отвечает солитону в асимптотическом состоянии при  $t \rightarrow \infty$ . Следовательно, если мы найдем спектр линейной задачи для начальных распределений, то дискретные собственные значения дадут нам всю необходимую информацию о параметрах солитонов при асимптотически больших значениях  $t$ .

Эта теория существенно упрощается, если число солитонов в конечном состоянии велико,  $N \gg 1$ , а начальные распределения выражаются достаточно гладкими функциями, так что к линейной спектральной задаче может быть применен квазиклассический метод ВКБ. Например, уравнение Кортевега–де Фриза (КдФ) ассоциировано со стационарным уравнением Шредингера [4], так что хорошо известное правило квантования Бора–Зоммерфельда легко дает приближенные значения

\* E-mail: kamch@isan.troitsk.ru

собственных значений, через которые выражаются скорости солитонов и их амплитуды [5, 6]. Аналогичное правило квантования Бора–Зоммерфельда было получено в работах [7, 8] для спектральной задачи Захарова–Шабата, ассоциированной с нелинейным уравнением Шредингера (НУШ) [9]. Однако если рассматриваемое нелинейное волновое уравнение не является полностью интегрируемым, то такой прямой подход становится невозможным.

Чтобы найти более общий метод расчета параметров асимптотических солитонов, рассмотрим более детально процесс преобразования изначально гладкого импульса в последовательность солитонов. В этом процессе можно выделить три характерных стадии. На первой стадии импульс деформируется, оставаясь гладким, но его профиль на некоторых участках становится благодаря нелинейности более крутым. На этой стадии дисперсионными эффектами можно пренебречь, так что эволюция импульса с хорошей точностью подчиняется уравнениям бездисперсионного (гидродинамического) приближения. На второй стадии профиль становится настолько крутым, что импульс «опрокидывается» с образованием области нелинейных осцилляций благодаря росту дисперсионных эффектов в случае больших градиентов профиля. Такие расширяющиеся со временем области нелинейных осцилляций называются дисперсионными ударными волнами (ДУВ). Согласно подходу Гуревича и Пятаевского [10], они могут быть представлены в виде модулированных периодических решений нелинейных волновых уравнений, причем эволюция модуляционных параметров подчиняется уравнениям Уизема [11, 12]. В этом приближении ДУВ занимает конечную, расширяющуюся со временем, область пространства. На одном крае ДУВ постепенно формируются солитоны, а противоположный малоамплитудный край распространяется с некоторой групповой скоростью по гладкой части эволюционирующего импульса. Таким образом, на второй стадии трансформации гладкого импульса в солитоны волновая структура состоит из областей гладких распределений и расширяющихся ДУВ, которые постепенно распространяются на всю структуру. Число осцилляций в ДУВ увеличивается со временем вследствие разницы между фазовой и групповой скоростью на малоамплитудном крае [13]. На последней третьей стадии эволюции импульса изначально гладкого импульса конечной длины гладкие части в волновой структуре оказываются поглощенными ударными волнами и число осцилляций в них стабилизируется. Расстояние между солито-

нами постепенно растет, так что они превращаются при  $t \rightarrow \infty$  в отдельные импульсы с фиксированными параметрами. Для определения числа солитонов и их параметров следует рассмотреть подробнее процесс распространения малоамплитудного края ДУВ.

Пусть нелинейная волновая динамика описывается двумя переменными, которые мы для определенности будем называть «плотностью»  $\rho$  и «скоростью течения»  $u$ . Периодическое решение  $\rho = \rho(x, t), u = u(x, t)$  описывается периодическими функциями фазы  $\theta$ , которая в непромодулированном случае имеет вид  $\theta = kx - \omega t = k(x - Vt)$ , где  $V$  — фазовая скорость волны. В промодулированной волне волновое число  $k$  и частота  $\omega$  становятся медленными функциями  $x$  и  $t$ . Поскольку при медленной модуляции волна локально еще может рассматриваться в главном приближении как однородная, то локально волновое число и частота определяются формулами

$$k = \theta_x, \quad \omega = -\theta_t \tag{1}$$

для некоторой фазы  $\theta(x, t)$ , и тогда одно из модуляционных уравнений можно написать в виде закона сохранения числа волн [11, 12]

$$k_t + \omega_x = 0, \tag{2}$$

где  $k$  играет роль плотности волн, а  $\omega$  — их потока.

На малоамплитудном крае ДУВ мы имеем два различных масштаба длины: короткую длину волны  $\sim 2\pi/k$  и большой размер  $\sim l$  гладкого импульса с распределениями волновых переменных  $\rho_b(x, t), u_b(x, t)$ , по которым распространяется этот край. Поэтому мы можем написать

$$\rho(x, t) = \rho_b(x, t) + \rho'(x, t),$$

$$u(x, t) = u_b(x, t) + u'(x, t),$$

где гладкие функции  $\rho_b(x, t), u_b(x, t)$  подчиняются уравнениям бездисперсионного (гидродинамического) предела, которые могут быть получены пренебрежением членов с высокими производными от переменных, а малоамплитудные осцилляции  $\rho'(x, t), u'(x, t)$  описываются линейризованными уравнениями на гладком фоне. Ввиду малости длины волны  $\sim 2\pi/k$  фон в главном приближении может считаться постоянным, так что мы приходим к линейризованным уравнениям с постоянными коэффициентами, которые имеют решения в виде гармонических волн

$$\rho', u' \propto \exp[i(kx - \omega t)]$$

с неким законом дисперсии

$$\omega = \omega(k, \rho_b, u_b).$$

Слегка промодулированный пакет линейных волн на малоамплитудном крае ДУВ распространяется по медленно меняющемуся фону с тем же законом дисперсии, удовлетворяющим закону сохранения числа волн (2), но распределения  $\rho_b, u_b$  становятся в этом случае медленно меняющимися решениями  $\rho = \rho(x, t), u = u(x, t)$  бездисперсионных уравнений (см. [12]). В теории Гуревича–Питаевского [10] малоамплитудный край представлен линейным волновым пакетом и согласно (2) осцилляции входят в область ДУВ на малоамплитудном крае с потоком  $\omega$  с учетом сдвига Доплера из-за движения края с групповой скоростью

$$v_g = \frac{\partial \omega(k, \rho, u)}{\partial k}.$$

Поэтому число осцилляций в области ДУВ увеличивается со временем как (см. [13, 14])

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{2\pi} \left| k \frac{\partial \omega}{\partial k} - \omega \right|. \quad (3)$$

Выражение в правой части совпадает с точностью до постоянного множителя с лагранжианом точечной частицы, ассоциированной с малоамплитудным краем ДУВ, если отождествить согласно известной оптико-механической аналогии (см., например, [15]) волновое число  $k$  и частоту  $\omega$  с импульсом и гамильтонианом частицы, соответственно. Тогда число  $N$  солитонов, образовавшихся из интенсивного начального импульса, равно механическому действию, произведенному ассоциированной с малоамплитудным краем частицей:

$$N = \frac{S}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int (k dx - \omega dt), \quad (4)$$

где  $dx = v_g dt$  и интегрирование происходит по всему пути частицы (пакета). Если начальные распределения  $\rho_0(x), u_0(x)$  соответствуют однонаправленному волновому распространению в виде простой волны, то между фоновыми распределениями  $\rho$  и  $u$  имеется функциональная зависимость, отвечающая постоянству одного из бездисперсионных римановых инвариантов [16]. В этом случае волновое число  $k$  является функцией локального значения  $\rho$  в точке нахождения пакета в данный момент времени:  $k = k(\rho)$ . Закон дисперсии  $\omega = \omega(k, \rho)$  также является функцией от  $\rho$ , где  $\rho = \rho(x, t)$  — решение уравнения Хопфа

$$\rho_t + V_0(\rho)\rho_x = 0, \quad (5)$$

к которому сводятся бездисперсионные уравнения для простой волны. В результате можно показать, что функция  $k = k(\rho)$  является решением уравнения

$$\frac{dk}{d\rho} = \frac{\partial \omega / \partial \rho}{V_0 - \partial \omega / \partial k} \quad (6)$$

с начальным условием

$$k(0) = 0, \quad (7)$$

предполагающим, что опрокидывание импульса происходит в точке с нулевой плотностью  $\rho = 0$ . Уравнение (6) было впервые получено в работе [17] в результате анализа уравнений Уизема для ДУВ в малоамплитудном пределе, а затем оно было выведено в [18, 19] из уравнений Гамильтона для движения линейных волновых пакетов вдоль фона в виде простой волны. Когда функция  $k = k(\rho)$  найдена, можно найти траекторию пакета  $x = x(t)$  малоамплитудного края, как это было показано в [20], а затем вычислить интеграл в уравнении (4) для частных примеров нелинейных волновых уравнений (см. [18, 21, 22]). Окончательный результат в этих частных случаях можно записать в форме

$$N = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k(\rho_0(x)) dx, \quad (8)$$

где  $\rho_0(x)$  — начальное распределение переменной  $\rho$ . Эта формула еще раньше была получена в работах [23, 24] на основе предположения, что решение уравнений Уизема можно продолжить на гладкую часть импульса таким образом, что полное число осцилляций в ДУВ и на гладкой части остается постоянным во время эволюции импульса. Обобщение этого правила на более общие решения  $k = k(\rho, \bar{q})$  уравнения (6), где  $\bar{q}$  — постоянная интегрирования, позволяет также найти параметры солитонов в асимптотическом состоянии [24]. Эта теория подтверждается численными решениями нелинейных волновых уравнений и экспериментальными результатами для импульсов, распространяющихся по струе жидкости, текущей в вязкой среде [25].

Целью настоящей работы является распространить этот подход на общий случай волновых импульсов, описываемых двумя переменными  $\rho(x, t), u(x, t)$  для систем, допускающих солитонное распространение волн. Мы будем исходить из того, что выражения (4) и (8) можно интерпретировать как частный случай сохранения интегрального инварианта Пуанкаре–Картана [26, 27] для механических систем с фазовым пространством  $(x, k)$  и

гамильтонианом  $\omega(k, x, t)$ . Однако в этом частном случае трубка траекторий, сохраняющих инвариант, определяется решениями гидродинамического уравнения (5), а не решениями уравнений Гамильтона нашей системы. В настоящей работе мы обобщим такое определение инварианта Пуанкаре–Картана на общий случай гидродинамических течений, в которых переменные  $\rho, u$  не связаны условием постоянства одного из римановых инвариантов, что приведет к следующему обобщению формулы (8):

$$N = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k(\rho_0(x), u_0(x), q_N) dx, \quad (9)$$

где  $\rho_0(x), u_0(x)$  — начальные распределения двух переменных, а  $q_N$  — постоянная интегрирования уравнений, определяющих функцию  $k = k(\rho, u)$  от двух переменных. Можно считать, что здесь  $q_N$  соответствует  $N$ -му солитону в асимптотическом распределении, и тогда нетрудно сопоставить любому  $n$ -му солитону в распределении соответствующее значение параметра  $q_n$ , определяемое обобщенным правилом квантования Бора–Зоммерфельда, т. е. мы приходим к распространению упомянутого выше метода работ [5–8] на не интегрируемые методом обратной задачи уравнения. Связь параметров  $q_n$  с такими физическими характеристиками солитонов как, например, их скорости, устанавливается с помощью замечания Стокса [28, 29] (см. также [18, 30, 31]), что линейные волны и экспоненциально малые хвосты солитонов подчиняются одним и тем же линеаризованным уравнениям, так что выражения для фазовой скорости волны и скорости солитона переходят одно в другое при замене  $k \leftrightarrow -i\tilde{k}$ , где  $\tilde{k}$  — обратная полуширина солитона.

Мы иллюстрируем развитую теорию ее применением к обобщенному нелинейному уравнению Шредингера (НУШ) и подтверждаем ее сравнением с численным расчетом.

## 2. ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ИНВАРИАНТ ПУАНКАРЕ–КАРТАНА И ПРАВИЛО КВАНТОВАНИЯ БОРА–ЗОММЕРФЕЛЬДА

Пусть бездисперсионные уравнения для фонового течения можно записать в форме уравнений газовой динамики

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad u_t + uu_x + \frac{c^2}{\rho} \rho_x = 0, \quad (10)$$

где  $c = c(\rho)$  — «скорость звука», связанная с плотностью  $\rho$  уравнением состояния  $p = p(\rho)$ ,  $c^2 = dp/d\rho$ ,

где  $p$  — давление. Характеристические скорости системы

$$v_+ = u + c, \quad v_- = u - c \quad (11)$$

соответствуют звуковым волнам, распространяющимся вверх и вниз по течению, имеющему скорость  $u$ . Уравнения (10) можно преобразовать к диагональной римановой форме

$$\frac{\partial r_+}{\partial t} + v_+ \frac{\partial r_+}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial r_-}{\partial t} + v_- \frac{\partial r_-}{\partial x} = 0, \quad (12)$$

для римановых инвариантов

$$r_{\pm} = \frac{u}{2} \pm \frac{1}{2} \int_0^{\rho} \frac{cd\rho}{\rho}. \quad (13)$$

Если мы подставим сюда функцию  $\rho = \rho(c)$ , то получим выражения для римановых инвариантов вида

$$r_{\pm} = \frac{u}{2} \pm \sigma(c), \quad \sigma(c) = \frac{1}{2} \int_0^c \frac{c}{\rho(c)} \frac{d\rho}{dc} dc, \quad (14)$$

так что можно использовать  $c$  в качестве волновой переменной вместо  $\rho$ . Если уравнения (12) решены, то физические переменные  $u, \rho, c$  выражаются через римановы инварианты формулами

$$u = r_+ + r_-, \quad \rho = \rho(r_+, r_-), \quad c = c(r_+, r_-). \quad (15)$$

В случае однонаправленного распространения фонового импульса мы имеем дело с простой волной, в которой один из инвариантов Римана постоянен. Пусть импульс распространяется в положительном направлении оси  $x$  по покоящейся среде, характеризуемой постоянными значениями

$$\rho = \rho_R, \quad c = c_R, \quad u = u_R = 0.$$

Тогда вдоль такого импульса переменные  $u$  и  $c$  связаны соотношением

$$u/2 - \sigma(c) = -\sigma(c_R),$$

так что имеется функциональная зависимость  $c = c(u)$  и все переменные можно выразить через  $u$ , в частности

$$r_+ = u + \sigma(c_R), \quad v_+ = u + c(u) \equiv V_0(u).$$

Следовательно, второе уравнение (12) удовлетворяется тождественно, а первое сводится к уравнению Хопфа

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V_0(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (16)$$

Нас интересует распространение малоамплитудного края ДУВ, которое мы отождествляем с движением точечной частицы с координатой  $x(t)$  и импульсом  $k(t)$ , удовлетворяющими уравнениям Гамильтона

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial k}, \quad \frac{dk}{dt} = -\frac{\partial \omega}{\partial x}. \quad (17)$$

В обычных ситуациях гамильтониан (закон дисперсии)  $\omega$  зависит от  $k, x, t$ :  $\omega = \omega(k, x, t)$ . Следуя отличному учебнику [32], мы определяем в расширенном фазовом пространстве  $(x, k, t)$  произвольную замкнутую кривую

$$C_0 = \{x = x_0(\eta), k = k_0(\eta), t = t_0(\eta) \mid 0 \leq \eta \leq 1\}, \quad (18)$$

где точки, отвечающие  $\eta = 0$  и  $\eta = 1$ , совпадают друг с другом. Вдоль этой кривой можно вычислить интеграл

$$I_0 = \oint_{C_0} (k\delta x - \omega\delta t), \quad (19)$$

где  $\delta x$  и  $\delta t$  обозначают дифференциалы функций  $x = x_0(\eta)$ ,  $t = t_0(\eta)$  в точках контура  $C_0$ . Определим теперь поток в фазовом пространстве уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = Q(k, x, t), \quad \frac{dk}{dt} = P(k, x, t), \quad (20)$$

и когда решения этих уравнений пересекают контур  $C_0$ , мы получаем трубку траекторий

$$x = x(t, \eta), \quad k = k(t, \eta), \quad (21)$$

где  $x(t_0(\eta), \eta) = x_0(\eta)$ ,  $k(t_0(\eta), \eta) = k_0(\eta)$ . Если взять другую функцию  $t = t_1(\eta)$ , то мы получим другой контур

$$C_1 = \{x = x_1(\eta) = x(t_1(\eta), \eta), k = k_1(\eta) = k(t_1(\eta), \eta), t = t_1(\eta) \mid 0 \leq \eta \leq 1\} \quad (22)$$

и новое значение интеграла (19),

$$I_1 = \oint_{C_1} (k\delta x - \omega\delta t), \quad (23)$$

взятого теперь вдоль контура  $C_1$ , окружающего трубку траекторий, образованных течением (21). Можно спросить, для каких уравнений (20) и соответствующих потоков (21) интегралы (19) и (23) равны друг другу при любом выборе контура  $C_1$ . Как было показано в книгах [26, 27, 32], это условие выполняется, если

$$Q = \frac{\partial \omega}{\partial k}, \quad P = -\frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad (24)$$

т.е. поток определяется теми же уравнениями Гамильтона (17). Таким образом, инвариантность интеграла Пуанкаре–Картана

$$I = \oint_C (k\delta x - \omega\delta t) \quad (25)$$

означает, что поток (20) гамильтонов.

Теперь мы посмотрим на инвариантность интеграла (25) с несколько другой точки зрения. Как было указано во Введении, нас интересует инвариантность такого рода интегралов относительно потоков, генерируемых гидродинамическими уравнениями (10) или (16). В этом случае гамильтониан  $\omega$  зависит от  $x$  и  $t$  только через посредство решений  $\rho = \rho(x, t)$ ,  $u = u(x, t)$  этих уравнений, т.е.

$$\omega = \omega(k, \rho, u), \quad (26)$$

а поток генерируется уравнением

$$\frac{dx}{dt} = u(x, t). \quad (27)$$

Тогда инвариантность интеграла (25) накладывает определенные условия на предполагаемую зависимость импульса (волнового числа)  $k$  от фоновых переменных

$$k = k(\rho, u). \quad (28)$$

Если условие инвариантности выполнено, то действие (4) может быть сведено к обобщенному правилу квантования Бора–Зоммерфельда (9), дающему необходимую информацию о параметрах солитонов в асимптотическом состоянии. Мы рассмотрим условие инвариантности интеграла (25) по отдельности для простых волн (16) и для общих решений уравнений (10),

### 2.1. Импульс в виде простой волны

В случае простой волны малоамплитудный край ДУВ распространяется по фону, описываемому единственной переменной  $u = u(x, t)$ , эволюция которой подчиняется уравнению Хопфа (16). Нам известен закон дисперсии  $\omega = \omega(k, u)$  линейных волн и мы ищем такую функцию  $k = k(u)$ , что интеграл Пуанкаре–Картана (25) имеет одно и то же значение для любого контура  $C$  вокруг трубки траекторий, генерируемых течением  $dx/dt = V_0(u)$ . Следуя книге [32], мы вводим координату  $\mu$  вдоль образующих трубки и предполагаем, что эта координата связана с потоком соотношениями

$$\frac{dx}{V_0(u)} = dt = \chi d\mu, \quad (29)$$



где  $\chi = \chi(t, x, k)$  — произвольная функция. Для фиксированного значения  $\mu = \text{const}$  мы получаем на каждой линии тока некую точку, которые все вместе образуют контур вокруг трубки. В результате интеграл (25), вообще говоря, становится функцией от  $\mu$ , но мы хотим найти такую функцию  $k = k(u)$ , что этот интеграл перестает зависеть от  $\mu$  при любом выборе функции  $\chi$ . Дифференцирование формулы (25) по  $\mu$  дает

$$dI = \oint \left\{ \left[ \frac{dk}{du} \delta x - \left( \frac{\partial \omega}{\partial k} \frac{dk}{du} + \frac{\partial \omega}{\partial u} \right) \delta t \right] \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) - \delta x \cdot dx + \delta \omega \cdot dt \right\} = 0, \quad (30)$$

где мы проинтегрировали члены  $k d\delta x - \omega d\delta t$  по частям вокруг замкнутого контура. Теперь мы представляем

$$dx = V_0 \chi d\mu, \quad dt = \chi d\mu$$

и получаем после простых преобразований с учетом уравнения (16) выражение

$$\oint \left[ \left( \frac{\partial \omega}{\partial k} - V_0 \right) \frac{dk}{du} + \frac{\partial \omega}{\partial u} \right] \chi \left( \frac{\partial u}{\partial t} \delta t + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x \right) = 0.$$

Этот интеграл должен обращаться в нуль при любом выборе  $\chi$ , так что мы получаем уравнение

$$\frac{dk}{du} = \frac{\partial \omega / \partial u}{V_0(u) - \partial \omega / \partial k}. \quad (32)$$

Как уже было указано выше, это уравнение было получено ранее из анализа уравнений Уизема для малоамплитудного края ДУВ в [17] и из уравнений Гамильтона для движения волновых пакетов вдоль фоновой простой волны в [18, 19]. Представленный здесь вывод дает новую информацию о сохранении интеграла Пуанкаре–Картана (25) фоновым течением простой волны.

Предположим теперь, что мы нашли такое решение

$$k = k(u, \bar{q}), \quad (33)$$

( $\bar{q}$  — постоянная интегрирования) уравнения (32), что контур  $C$  отвечает пройденному дважды пути малоамплитудного края, распространяющемуся согласно уравнениям Гамильтона (17) с отрицательным импульсом  $k$  в одном направлении и с положительным импульсом в другом. Тогда мы можем определить «число колебаний»

$$N(\bar{q}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{C(\bar{q})} (k \delta x - \omega \delta t) \quad (34)$$

в ДУВ, отвечающее этому значению  $\bar{q}$  (дополнительный множитель  $1/2$  по сравнению с формулой (4) введен из-за двукратного прохождения пути края по замкнутому контуру). Это число  $N(\bar{q})$  остается тем же самым, когда мы деформируем контур к начальному состоянию при  $t = 0$  ( $\delta t = 0$ ):

$$N(\bar{q}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{C_0(\bar{q})} k \delta x = \frac{1}{2\pi} \int_{x_1(\bar{q})}^{x_2(\bar{q})} k(u_0(x), \bar{q}) dx, \quad (35)$$

где  $x_{1,2}(\bar{q})$  — «точки поворота», в которых

$$k(u_0(x_{1,2}(\bar{q})), \bar{q}) = 0 \quad (36)$$

и  $u_0(x)$  — начальное распределение волновой переменной.

Асимптотическое выражение (8) для числа солитонов предполагает, что точки поворота ушли на бесконечность, а значение интеграла округлено до целого. Но при менее формальном рассмотрении естественно предположить, что существует такое максимальное целое значение  $N$ , для которого выражение (35) с заданным распределением  $u_0(x)$  еще имеет соответствующее «собственное значение»  $\bar{q}_N$ , тогда как для  $N + 1$  такого собственного значения больше не существует. В этом случае интервал интегрирования  $(x_1(\bar{q}_N), x_2(\bar{q}_N))$  настолько широк для достаточного интенсивного начального импульса с  $u_0(x) \rightarrow 0$  при  $|x| \rightarrow \infty$ , что его с достаточной точностью можно заменить на интервал  $(-\infty, \infty)$ . Можно сказать, что  $\bar{q}_N$  соответствует  $N$ -му солитону в асимптотическом состоянии. Если уменьшить  $N$  на единицу, то мы получим  $N(\bar{q}_{N-1}) = N - 1$ , т. е.  $\bar{q}_{N-1}$  соответствует  $(N - 1)$ -му солитону, и, продолжая в том же духе, мы устанавливаем соответствие между  $n$ -м солитоном и параметром  $\bar{q}_n$ , определяемым правилом квантования Бора–Зоммерфельда

$$\int_{x_1(\bar{q}_n)}^{x_2(\bar{q}_n)} k(u_0(x), \bar{q}_n) dx = 2\pi n, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (37)$$

где  $k = k(u, \bar{q})$  — решение (33) уравнения (32). Наконец мы замечаем, что формулу (37) можно интерпретировать как квазиклассическое правило квантования для собственных значений линейного волнового уравнения для волн, распространяющихся вдоль потенциала  $u_0(x)$ . Как хорошо известно из квантовой механики (см., например, [33]), более аккуратное описание волн вблизи точек поворота ведет к замене  $n \mapsto n + 1/2$ , и это является очень общим явлением в теории коротковолновых асимптотик  $k \rightarrow \infty$  (см., например, Приложение 11 в книге

[34]). Мы будем делать такую замену в практических приложениях теории, оправдывая ее сравнением с численными результатами.

Мы свяжем параметры  $\bar{q}_n$ , полученные из правила Бора–Зоммерфельда (37), с физическими параметрами асимптотических солитонов в следующем параграфе, а теперь обратимся к обобщению этого правила квантования на общие решения гидродинамических уравнений.

### 2.2. Общая форма фонового импульса

Пусть бездисперсионное течение описывается решением  $\rho = \rho(x, t)$ ,  $u = u(x, t)$  уравнений (10) с начальными распределениями  $\rho = \rho_0(x)$ ,  $u = u_0(x)$ . Закон дисперсии в уравнениях Гамильтона (17) для движения пакета зависит от значений  $\rho$  и  $u$  в точке  $x$  нахождения малоамплитудного края в момент времени  $t$ , так что функция

$$\omega = \omega(k, \rho, u) \tag{38}$$

нам известна из линеаризованных уравнений волновой динамики. Мы снова ищем такую функцию  $k = k(\rho, u)$ , что интеграл Пуанкаре–Картана (25) сохраняется течением в расширенном фазовом пространстве  $(x, k, t)$  при условии, что контур  $C$  окружает трубку линий тока, определяемых уравнением  $dx/dt = u(x, t)$ . Как и в случае простой волны, мы определяем координату  $\mu$  вдоль линий тока уравнениями

$$\frac{dx}{u} = dt = \chi d\mu, \tag{39}$$

где  $\chi = \chi(x, t, k)$  — произвольная функция, и требуем, чтобы интеграл не зависел ни от выбора функции  $\chi$  (т. е. от выбора формы контура), ни от  $\mu$  (т. е. положения контура на трубке). Дифференцирование формулы (25) по  $\mu$  дает с учетом уравнений (10) и (17) выражение

$$dI = \oint \left\{ \left[ \frac{\partial k}{\partial \rho} \left( \frac{\partial \omega}{\partial k} - u \right) - \frac{c^2}{\rho} \frac{\partial k}{\partial u} + \frac{\partial \omega}{\partial \rho} \right] \rho_x + \left[ \frac{\partial k}{\partial u} \left( \frac{\partial \omega}{\partial k} - u \right) - \rho \frac{\partial k}{\partial \rho} + \frac{\partial \omega}{\partial u} \right] u_x \right\} \times (\delta x - u \delta t) \chi \cdot d\mu = 0. \tag{40}$$

Ввиду произвольности  $\chi$  выражение в фигурных скобках должно быть равно нулю. Более того, выражения в квадратных скобках являются функциями только от  $\rho$  и  $u$ , тогда как локальные значения производных  $\rho_x$  и  $u_x$  зависят от выбора начальных условий и в этом смысле также могут рассматриваться

как произвольные функции. Поэтому выражения в квадратных скобках должны обращаться в нуль по отдельности и мы приходим к уравнениям

$$\frac{\partial k}{\partial \rho} = \frac{(v_g - u) \frac{\partial \omega}{\partial \rho} + \frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \omega}{\partial u}}{c^2 - (v_g - u)^2}, \tag{41}$$

$$\frac{\partial k}{\partial u} = \frac{(v_g - u) \frac{\partial \omega}{\partial u} + \rho \frac{\partial \omega}{\partial \rho}}{c^2 - (v_g - u)^2},$$

которые должны определять функцию  $k = k(\rho, u)$  при данном законе дисперсии (38) и уравнении состояния  $c = c(\rho)$ . Уравнения (41) были также выведены недавно в работе [35] из уравнений Гамильтона (17) для движения пакета при том же предположении, что  $k$  является только функцией переменных  $\rho$  и  $u$ .

Для существования функции  $k = k(\rho, u)$  ее производные, определяемые формулами (41), должны удовлетворять условию совместности

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{\partial k}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial k}{\partial \rho} \right). \tag{42}$$

Если это условие не удовлетворяется тождественно, то мы можем ограничиться пределом больших значений  $k$ , поскольку именно этот предел соответствует большим квантовым числам в правиле квантования Бора–Зоммерфельда. Для этого мы раскладываем правые части уравнений (41) по степеням малого параметра  $\sim c/k$  и получаем

$$\frac{\partial k}{\partial \rho} = R_1(k, \rho, u), \quad \frac{\partial k}{\partial u} = R_2(k, \rho, u), \tag{43}$$

где в  $R_{1,2}$  оставлены лишь члены, удовлетворяющие условию (42). Полученные уравнения позволяют найти приближенное выражение для функции

$$k = k(\rho, u, q), \tag{44}$$

где  $q$  — постоянная интегрирования, определяемая начальным значением  $k = k_0 \gg c$ . Удобно определить  $q$  так, чтобы условие  $k \sim k_0 \gg c$  соответствовало условию  $q \gg c$ .

Решение (44) (точное или приближенное) позволяет определить интеграл Пуанкаре–Картана

$$N(q) = \frac{1}{4\pi} \oint_C (k \delta x - \omega \delta t) \tag{45}$$

для контура  $C$  вокруг трубки линий тока гидродинамического течения. Если мы деформируем контур к начальному моменту  $t = 0$ , то получим

$$N(q) = \frac{1}{4\pi} \oint_{C_0(q)} k \delta x = \frac{1}{2\pi} \int_{x_1(q)}^{x_2(q)} k[\rho_0(x), u_0(x), q] dx, \tag{46}$$

где  $x_{1,2}(q)$  — точки поворота, определяемые уравнением

$$k[\rho_0(x_{1,2}(q), u_0(x_{1,2}(q))), q] = 0. \quad (47)$$

Если нам известно только асимптотическое решение при  $k \gg c$  уравнений (43), то (47) также дает приближенные значения для координат точек поворота. Тем не менее формула (46) дает достаточно точное значение для интеграла, так как вдоль почти всего интервала интегрирования мы имеем  $k \gg c$  и окрестности точек поворота дают относительно небольшой вклад в интеграл. Как и в случае простой волны, мы устанавливаем соответствие между номерами солитонов  $n$  и значениями параметра  $q_n$ , которые определяются правилом квантования Бора–Зоммерфельда

$$\int_{x_1(q_n)}^{x_2(q_n)} k[\rho_0(x), u_0(x), q_n] dx = 2\pi n, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (48)$$

В конкретных приложениях этой формулы мы будем делать замену  $n \mapsto n + 1/2$ , как это было пояснено ниже уравнения (37).

Теперь мы должны связать параметры  $\bar{q}_n$  (случай простой волны) или  $q_n$  (общий случай) с параметрами асимптотических солитонов, на которые распадается изначально плавный интенсивный импульс.

### 3. ПАРАМЕТРЫ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СОЛИТОНОВ

Теперь, когда каждый солитон в асимптотическом состоянии помечен параметром  $\bar{q}_n$  или  $q_n$ , нам нужно связать их с физическими параметрами солитона, в частности, с его скоростью  $V_n$ . Это можно сделать, используя замечание Стокса [28, 29] (см. также [30, 31]), что экспоненциально малые хвосты солитонов  $\propto \exp[\pm \tilde{k}(x - Vt)]$  подчиняются тем же самым линеаризованным уравнениям, что и малоамплитудные гармонические волны  $\propto \exp[i(kx - \omega t)]$ . Следовательно, скорость солитона  $V_n$  выражается формулой

$$V_n = \tilde{\omega}(\tilde{k}_n)/\tilde{k}_n, \quad \text{где } \tilde{\omega}(\tilde{k}) = i\omega(-i\tilde{k}), \quad (49)$$

где  $\tilde{k}$  обозначает обратную полуширину солитона (см. [17, 18, 21]). Это означает аналитическое продолжение функции  $\omega = F(k^2)$  из области положительных значений ее аргумента  $k^2$  в область отрицательных его значений  $k^2 = -\tilde{k}^2 < 0$ . На практике это

означает, что мы рассматриваем одну и ту же функцию  $F$  в различных интервалах ее аргумента  $k^2$ .

Мы обобщаем это наблюдение Стокса на другие функции от  $k^2$ , которые могут быть продолжены в область  $k^2 < 0$ , где они превращаются в некие соотношения для обратной полуширины солитонов  $\tilde{k}$ . Например, пусть мы нашли точное решение (33) уравнения (32), которое может быть выражено формулой

$$k^2 = \bar{K}(u, \bar{q}). \quad (50)$$

Ее продолжение в солитонную область дает

$$\tilde{k}^2 = -\bar{K}(u, \bar{q}). \quad (51)$$

Пусть мы нашли из правила Бора–Зоммерфельда значение  $\bar{q}_n$  для  $n$ -го солитона и пусть при асимптотически больших временах этот солитон движется по нулевому фону  $u = 0$ . Тогда его обратная полуширина будет даваться формулой

$$\tilde{k}_n^2 = -\bar{K}(0, \bar{q}_n) \quad (52)$$

и, следовательно, его скорость легко может быть найдена с помощью формулы (49). Этот подход воспроизводит в другой форме теорию, развитую для импульсов в виде простых волн в работах [24, 25].

Этот подход непосредственным образом распространяется на случаи, когда известно точное решение уравнений (41), что подразумевает выполнение условия (42). Опять мы выражаем точное решение в форме

$$k^2 = K(\rho, u, q) \quad (53)$$

и продолжаем его аналитически в солитонную область, получая соотношение

$$\tilde{k}^2 = -K(\rho, u, q). \quad (54)$$

Если для  $n$ -го солитона правило Бора–Зоммерфельда (48) дает значение  $q_n$ , а асимптотический солитон распространяется по фону с параметрами  $\rho = \rho_R, u = 0$ , то его обратная полуширина будет даваться формулой

$$\tilde{k}_n^2 = -K(\rho_R, 0, q_n), \quad (55)$$

а его скорость будет определяться правилом Стокса (49).

Однако такое непосредственное аналитическое продолжение становится невозможным, если нам известно только асимптотическое решение (44), справедливое лишь при  $k \gg c \sim u$ . Тем не менее эту трудность можно обойти следующим образом. Пусть асимптотическое решение представлено



в форме (53). Естественно, это общее решение остается справедливым и в случае простых волн, когда имеется функциональная связь между  $\rho$  и  $u$ , скажем,  $\rho = \rho_{sw}(u)$ , так что мы получаем асимптотическую формулу

$$k^2 = K(\rho_{sw}(u), u, q), \quad k \gg u. \quad (56)$$

Асимптотические солитоны распространяются вдоль простых волн, на которые расщепился начальный импульс, так что его обратные полуширины представляются конкретизацией формулы (51), полученной аналитическим продолжением формулы (50). Если же мы возьмем ее разложение в ряд по степеням малого параметра  $u$ , то получающаяся формула

$$k^2 = \bar{K}_{asymp}(u, \bar{q}) \quad (57)$$

должна согласовываться с формулой (56). Это условия «сшивания» двух выражений в области их совместной справедливости позволяет найти соотношение между параметрами  $q$  и  $\bar{q}$ :

$$\bar{q} = \bar{q}(q). \quad (58)$$

Следовательно, обратные полуширины асимптотических солитонов даются выражением (52),

$$\tilde{k}_n^2 = -\bar{K}(0, \bar{q}(q_n)), \quad (59)$$

где параметры  $q_n$  получены из правила Бора–Зоммерфельда (48) и мы снова предположили, что асимптотические солитоны распространяются по фону с  $u = 0$ . Наконец, скорости солитонов находим опять с помощью правила Стокса (49).

Проиллюстрируем развитую теорию примерами.

#### 4. СОЛИТОНЫ, ОБРАЗУЮЩИЕСЯ В ТЕОРИИ ОБОБЩЕННОГО НУШ

Здесь мы рассмотрим эволюцию начального импульса в теории обобщенного дефокусирующего НУШ (обобщенного уравнения Гросса–Питаевского для бозе–эйнштейновского конденсата с отталкивающим взаимодействием между атомами)

$$i\psi_t + \frac{1}{2}\psi_{xx} - f(|\psi|^2)\psi = 0, \quad (60)$$

где функция нелинейности положительна:  $f(\rho) > 0$ ,  $f(0) = 0$ . Хорошо известно, что подстановка

$$\psi = \sqrt{\rho} \exp\left(i \int^x u(x', t) dx'\right) \quad (61)$$

переводит это уравнение в систему

$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho u)_x &= 0, \\ u_t + uu_x + \frac{c^2}{\rho}\rho_x + \left(\frac{\rho_x^2}{8\rho^2} - \frac{\rho_{xx}}{4\rho}\right)_x &= 0, \end{aligned} \quad (62)$$

где

$$c^2 = \rho f'(\rho). \quad (63)$$

Линеаризация этой системы относительно однородного состояния дает закон дисперсии Боголюбова для линейных волн,

$$\omega = k \left( u \pm \sqrt{c^2 + \frac{k^2}{4}} \right), \quad (64)$$

т. е.  $c$  является скоростью звука в бездисперсионном пределе  $k \rightarrow 0$ . Уравнения (62) сводятся в этом же пределе к стандартным уравнениям Эйлера (10).

Теперь мы можем проверить, удовлетворяют ли производные (41) условию совместности. В этом случае удобно заменить  $\rho$  на переменную  $c$ , где функция  $\rho = \rho(c)$  получается обращением функции  $c = c(\rho)$  (см. (63)), так что уравнения (41) приобретают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial c} &= -\frac{c[(2 + c\rho'/\rho)k^2 + 4(1 + c\rho'/\rho)c^2]}{k(k^2 + 3c^2)}, \\ \frac{\partial k}{\partial u} &= -\frac{\sqrt{k^2 + 4c^2}[k^2 + 2(1 + \rho/(c\rho'))c^2]}{k(k^2 + 3c^2)}. \end{aligned} \quad (65)$$

Вычисление дает (см. также [35])

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial c} \left( \frac{\partial k}{\partial u} \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial k}{\partial c} \right) &= \frac{\sqrt{k^2 + 4c^2}}{k\rho\rho'(k^2 + 3c^2)^2} \times \\ &\times \left[ (k^2 + 6c^2)\rho'^2(\rho' - 2c) + 2(k^2 + 3c^2)\rho^2(c\rho'' - \rho') \right], \end{aligned} \quad (66)$$

и мы видим, что условие совместности удовлетворяется только для нелинейности керровского типа с  $f(\rho) = \rho$  и  $\rho = c^2$ . В остальных случаях оно выполняется только асимптотически в пределе  $k \rightarrow \infty$ , так что удобно рассмотреть эти две ситуации по отдельности.

##### 4.1. Нелинейность вида $f(\rho) = \rho$

НУШ с нелинейностью Керра является полностью интегрируемым уравнением [9], так что правило квантования Бора–Зоммерфельда для солитонов может быть выведено из рассмотрения линейной спектральной задачи Захарова–Шабата [7, 8].

Почувствительно увидеть, как эти известные результаты могут быть получены нашим методом, не опирающимся на полную интегрируемость этого уравнения. Мы предположим, что начальный импульс имеет форму ямы в распределении  $c = c_0(x)$  и, кроме того, имеется некое начальное распределение скорости течения  $u = u_0(x)$ . Вдали от импульса имеем  $c_0(x) \rightarrow c_R$ ,  $u_0(x) \rightarrow 0$  при  $|x| \rightarrow \infty$ . Естественно, эти два распределения эквивалентны некоторым начальным распределениям бездисперсионных римановых инвариантов  $r_{\pm}^{(0)}(x)$  (см. (14))

$$r_{\pm} = \frac{u}{2} \pm c. \tag{67}$$

В этом случае с  $\rho = c^2$  уравнения (65) могут быть написаны в форме

$$\frac{\partial k}{\partial c} = -4 \frac{c}{k}, \quad \frac{\partial k}{\partial u} = -\frac{\sqrt{k^2 + 4c^2}}{k}, \tag{68}$$

и они имеют точное решение

$$k^2 = (q - u)^2 - 4c^2, \tag{69}$$

где  $q$  — постоянная интегрирования. Если написать это решение в виде

$$k^2 = 4 \left( \frac{q}{2} - \frac{u}{2} - c \right) \left( \frac{q}{2} - \frac{u}{2} + c \right) = 4(\lambda - r_+)(\lambda - r_-), \tag{70}$$

где мы определили  $\lambda = q/2$ , то правило Бора-Зоммерфельда (48) гласит

$$\int_{x_1(\lambda_n)}^{x_2(\lambda_n)} \sqrt{(\lambda_n - r_+^{(0)}(x))(\lambda_n - r_-^{(0)}(x))} dx = n\pi, \tag{71}$$

$$n = 1, 2, \dots, N.$$

Эта формула совпадает с асимптотической формулой для собственных значений линейной спектральной задачи (см. [7, 8]) с точностью до замены  $n$  на  $n + 1/2$ , как это уже было отмечено ниже уравнения (37).

Поскольку выражение (69) представляет точное решение уравнений (68), оно справедливо для любых значений  $k$  и может быть продолжено в солитонную область, так что мы получаем

$$\tilde{k}^2 = -4(\lambda - r_+)(\lambda - r_-). \tag{72}$$

В асимптотической области, когда солитоны распространяются по однородному фону со значениями римановых инвариантов  $r_{\pm} = \pm c_R$ , мы находим для обратной полуширины  $n$ -го солитона выражение

$$\tilde{k}_n^2 = 4(c_R^2 - \lambda_n^2).$$

Следовательно, согласно правилу Стокса (49), скорость солитона равна

$$V_n = \frac{\tilde{\omega}(\tilde{k}_n)}{\tilde{k}_n} = \sqrt{c_R^2 - \frac{\tilde{k}^2}{4}} = \lambda_n \tag{73}$$

в согласии с известными результатами (см., например, [8]).

Возможность найти в этом случае точное решение уравнений (65) связана, по-видимому, с полной интегрируемостью НУШ (60) с нелинейностью Керра  $f(\rho) = \rho$ . Мы обсудим эту связь с интегрируемостью в разделе 5.

### 4.2. Не керровская нелинейность

В пределе больших  $k \gg c$  правая сторона уравнения (66) стремится к нулю как  $\propto k^{-2}$ , т.е. условие (42) выполняется в этом пределе и мы можем найти асимптотическое выражение для функции  $k = k(c, u)$ . Уравнения (65) в пределе больших  $k$  приобретают вид

$$\frac{\partial k^2}{\partial c^2} = -2 \left( 1 + \frac{c^2}{\rho} \frac{d\rho}{dc^2} \right), \quad \frac{\partial k}{\partial u} = -1. \tag{74}$$

Второе уравнение дает

$$k = q - u + F(c^2),$$

где в главном приближении

$$k \approx q \sim k_0 \gg |u|, c.$$

Мы предполагаем, что

$$F(c^2) \sim c^2,$$

так что

$$k^2 \approx (q - u)^2 + 2qF(c^2),$$

где мы пренебрегли малыми членами  $uF \sim c^3$  и  $F^2 \sim c^4$ . Тогда первое уравнение (74) дает

$$F(c^2) = -\frac{1}{q} \left( c^2 + \int_0^{c(c)} \frac{c^2}{\rho} d\rho \right) \sim \frac{c^2}{q}$$

в согласии с нашим предположением о порядке малости  $F$ . В результате мы получаем асимптотическое решение

$$k^2 = (q - u)^2 - 2 \left( c^2 + \int_0^{c(c)} \frac{c^2}{\rho} d\rho \right). \tag{75}$$

Для частного случая функции нелинейности

$$f(\rho) = \frac{1}{\gamma-1} \rho^{\gamma-1}, \quad \text{когда } c^2 = \rho^{\gamma-1}, \quad \rho = c^{2/(\gamma-1)}, \quad (76)$$

находим

$$k^2 = (q-u)^2 - \frac{2\gamma}{\gamma-1} c^2. \quad (77)$$

Если  $\gamma = 2$ , т.е.  $f(\rho) = \rho$ , асимптотическая формула воспроизводит точное решение (69). Функция  $k = k(c, u)$ , определенная формулой (77), может быть использована в правиле Бора–Зоммерфельда (48), так что мы находим

$$\int_{x_1(q_n)}^{x_2(q_n)} \sqrt{(q_n - u_0(x))^2 - \frac{2\gamma}{\gamma-1} c_0^2(x)} dx = 2\pi \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (78)$$

где мы сделали также замену  $n \mapsto n + 1/2$ . В результате мы получаем набор значений параметра  $q_n$  для солитонов, образующихся из начального импульса с заданными начальными распределениями  $c = c_0(x), u = u_0(x)$ . Чтобы связать  $q_n$  со скоростями солитонов, мы должнышить наше решение с точным решением уравнения (32) для импульса в виде простой волны.

Задача об эволюции начального разрыва простой волны в виде ступеньки была детально изучена в работе [36] методом работы [17]. Найденное там решение уравнения (32) может быть написано в наших обозначениях в форме

$$k^2 = 4c^2(\alpha^2(c, \bar{q}) - 1), \quad (79)$$

где функция  $\alpha = \alpha(c, \bar{q})$  определяется неявно выражением

$$\frac{c}{\bar{q}} = \left( \frac{2}{1+\alpha} \right)^{\frac{\gamma-1}{3\gamma-5}} \left( \frac{\gamma+1}{3-\gamma+2(\gamma-1)\alpha} \right)^{\frac{2(\gamma-2)}{3\gamma-5}}. \quad (80)$$

В пределе  $c \ll \bar{q}$  имеем  $\alpha \gg 1$ , так что получаем разложение

$$\frac{c}{\bar{q}} = \beta(\gamma) \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\gamma-1} \cdot \frac{1}{\alpha^2} + \frac{\gamma^2 - 3\gamma + 6}{4(\gamma-1)^2} \cdot \frac{1}{\alpha^3} + \dots \right), \quad (81)$$

где

$$\beta(\gamma) = 2^{\frac{3-\gamma}{3\gamma-5}} \left( \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right)^{\frac{2(\gamma-2)}{3\gamma-5}}. \quad (82)$$

Обращение этого ряда и подстановка результата в формулу (79) дают с необходимой точностью

$$k^2 \approx (2\bar{q}\beta)^2 - \frac{4}{\gamma-1} (2\bar{q}\beta)c + \left( \frac{4}{(\gamma-1)^2} - \frac{2}{\gamma-1} - 2 \right) c^2, \quad c \ll \bar{q}. \quad (83)$$

Это асимптотическое выражение должно совпадать с формулой (77) для импульсов в виде простой волны.

Бездисперсионные римановы инварианты (14) в нашем случае (76) равны

$$r_{\pm} = \frac{u}{2} \pm \frac{c}{\gamma-1}. \quad (84)$$

Рассмотрим распространяющиеся вправо солитоны, движущиеся по фону с

$$r_- = \frac{u}{2} - \frac{c}{\gamma-1} = -\frac{c_R}{\gamma-1} = \text{const},$$

где  $c \rightarrow c_R, u \rightarrow 0$  при  $|x| \rightarrow \infty$ . Тогда мы должны подставить

$$u = \frac{2}{\gamma-1} (c - c_R) \quad (85)$$

в уравнение (77) и получить

$$k^2 = \left( q + \frac{2c_R}{\gamma-1} \right)^2 - \frac{4}{\gamma-1} \left( q + \frac{2c_R}{\gamma-1} \right) c + \left( \frac{4}{(\gamma-1)^2} - \frac{2}{\gamma-1} - 2 \right) c^2, \quad c \ll q. \quad (86)$$

Это выражение совпадает с (83) при

$$\bar{q} = \frac{1}{2\beta} \left( q + \frac{2c_R}{\gamma-1} \right). \quad (87)$$

В солитонной области формула (79) дает

$$\tilde{k}^2 = 4c^2(1 - \alpha^2(c, \bar{q})), \quad (88)$$

так что скорости асимптотических солитонов, движущихся по однородному покоящемуся фону с  $c = c_R, u = 0$ , равны

$$V_n = \frac{\tilde{\omega}(\tilde{k}_n)}{\tilde{k}_n} = \sqrt{c_R^2 - \frac{\tilde{k}_n^2}{4}} = c_R \alpha \left( c_R, \frac{1}{2\beta} \left( q_n + \frac{2c_R}{\gamma-1} \right) \right), \quad (89)$$

где  $q_n$  находятся из правила квантования Бора–Зоммерфельда (78).

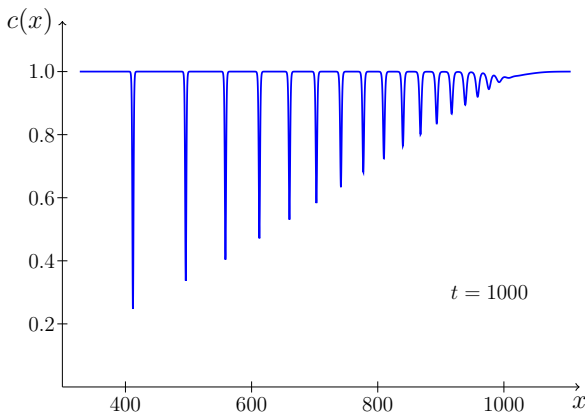


Рис. 1. Распределение  $c(x)$  для распространяющихся вправо солитонов, которые были образованы при эволюции импульса с начальными распределениями (93); время эволюции  $t = 1000$

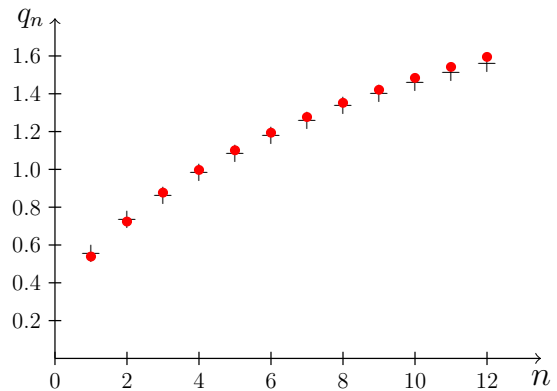


Рис. 2. Параметры  $q_n^{B-3}$ , полученные из правила Бора–Зоммерфельда (крестики), и  $q_n^{числ}$ , полученные из численного решения обобщенного НУШ (точки)

Скорость солитона  $V$  связана с минимальной плотностью  $\rho_m$  в центре темного солитона соотношением (см. [37])

$$V^2 = \frac{2\rho_m}{(\rho_R - \rho_m)^2} \int_{\rho_m}^{\rho_R} [f(\rho_R) - f(\rho)] d\rho, \quad (90)$$

так что когда найдена скорость солитона, то нетрудно найти его амплитуду.

Мы проиллюстрируем теорию конкретным примером с  $\gamma = 3$ , когда  $\beta = \sqrt{2}$  и функция  $\alpha = \alpha(c)$  может быть найдена в явном виде (см. [36]):

$$\alpha(c, \bar{q}) = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + 8 \left( \frac{\bar{q}}{c} \right)^2} - 1 \right). \quad (91)$$

В результате получаем простую формулу для скорости

$$V_n = \frac{1}{2} \left( \sqrt{c_R^2 + (c_R + q_n)^2} - c_R \right). \quad (92)$$

Мы сравнили наши аналитические предсказания с результатами численного решения обобщенного НУШ (60) с  $f(\rho) = \rho^2/2$  ( $\gamma = 3$ ) для начальных распределений

$$c_0(x) = 1 - \frac{0.9}{\text{ch}^2(x/20)}, \quad u_0(x) = 0. \quad (93)$$

В этом случае начальный импульс превращается в две симметричные последовательности темных солитонов, движущихся вправо и влево, и типичное

распределение  $c(x)$  при времени эволюции  $t = 1000$  показано на рис. 1 для движущихся вправо солитонов. Если предположить, что все эти солитоны начали свое движение в точке  $x = 0$  в момент времени  $t = 0$  сразу с асимптотической скоростью  $V_n$ , то их координаты в момент  $t$  будут равны

$$x_n(t) = t(\sqrt{1 + (1 + q_n)^2} - 1)/2.$$

Эта формула позволяет найти значения  $q_n$  из численных значений координат:

$$q_n^{числ} = \sqrt{(2x_n(t)/t + 1)^2 - 1} - 1. \quad (94)$$

Полученные таким образом значения можно сравнить со значениями  $q_n^{B-3}$ , найденными из правила Бора–Зоммерфельда (78) в частном случае начальных распределений (93), и результаты такого сравнения показаны на рис. 2, где крестики соответствуют  $q_n^{B-3}$ , а точки численному расчету  $q_n^{числ}$ . Как легко видеть, согласие очень хорошее даже для небольших номеров  $n$ .

В случае  $f(\rho) = \rho^2/2$  формула (90) дает следующее выражение для минимума плотности в центре  $n$ -го солитона

$$\rho_m^{(n)} = \left[ \rho_R^2 + \frac{3}{4} \left( \sqrt{\rho_R^2 + (q_n + \rho_R)^2} - \rho_R \right)^2 \right]^{1/2} - \rho_R. \quad (95)$$

Эта формула также хорошо согласуется с минимальными значениями плотности в центрах солитонов, показанных на рис. 1.

### 5. СВЯЗЬ С ТЕОРИЕЙ ПОЛНОСТЬЮ ИНТЕГРИРУЕМЫХ УРАВНЕНИЙ

Как мы видели в предыдущем разделе, есть существенная разница между случаями с  $\gamma = 2$  и  $\gamma \neq 2$ : если  $\gamma = 2$ , то производные (65) коммутируют и мы получаем точное решение (69) этих уравнений, тогда как если  $\gamma \neq 2$ , то мы можем получить только асимптотическое решение (77), справедливое в пределе  $q \gg |u|, c$ . Представляется очень правдоподобным, что такая разница связана с полной интегрируемостью НУШ (60) с  $f(\rho) = \rho, (\gamma = 2)$ . Здесь мы обсудим эту связь для класса полностью интегрируемых уравнений, принадлежащих схеме Абловица-Кауа-Ньюэлла-Сигура (АКНС) [38].

Обычно схема АКНС формулируется в матричной форме, но для обсуждения ее квазиклассического предела удобно перейти к скалярной форме (см. [39]). Предположим, что рассматриваемое интегрируемое уравнение может быть записано как условие совместности двух линейных уравнений

$$\phi_{xx} = \mathcal{A}\phi, \quad \phi_t = -\frac{1}{2}\mathcal{B}_x\phi + \mathcal{B}\phi_x \quad (96)$$

для функции  $\phi$ , где  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  зависят от волновых переменных (пусть это будут  $\rho$  и  $u$ ) и от спектрального параметра  $\lambda$ . Условие совместности

$$(\phi_{xx})_t = (\phi_t)_{xx}$$

приводит к уравнению

$$\mathcal{A}_t - 2\mathcal{B}_x\mathcal{A} - \mathcal{B}\mathcal{A}_x + \frac{1}{2}\mathcal{B}_{xxx} = 0, \quad (97)$$

которое должно выполняться при любых значениях  $\lambda$ , так что в результате мы получаем систему уравнений для  $\rho$  и  $u$ . Возможность представления (96) дает множество полезных соотношений для решений нелинейных уравнений. В частности, первое уравнение (96) второго порядка имеет два базисных решения  $\phi_+, \phi_-$ , с помощью которых мы определяем функцию

$$g = \phi_+\phi_-, \quad (98)$$

которая удовлетворяет уравнениям

$$g_{xxx} - 2\mathcal{A}_xg - 4\mathcal{A}g_x = 0, \quad g_t = \mathcal{B}g_x - \mathcal{B}_xg. \quad (99)$$

Первое из них легко интегрируется, что дает

$$\frac{1}{2}gg_{xx} - \frac{1}{4}g_x^2 - \mathcal{A}g^2 = P, \quad (100)$$

где  $P$  — постоянная интегрирования. Тогда с помощью второго уравнения (99) находим

$$\left(\frac{\sqrt{P}}{g}\right)_t = \left(\frac{\sqrt{P}}{g}\mathcal{B}\right)_x, \quad (101)$$

где мы поместили постоянный множитель  $\sqrt{P}$  под знаки дифференцирования, чтобы фиксировать асимптотическое поведение  $g$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ . Уравнение (101) может служить производящей функцией законов сохранения наших нелинейных уравнений и усреднение этой производящей функции по быстрым колебаниям в волне дает удобный метод вывода модуляционных уравнений Уизема [40, 41]. Решение линейных уравнений (96) также может быть выражено через функцию  $g$  (см., например, [8, 42])

$$\phi_{\pm} = \sqrt{g} \exp\left(\pm i \int^x \frac{\sqrt{P}}{g} dx\right). \quad (102)$$

Теперь мы можем обратиться к обсуждению квазиклассического предела.

Рассмотрим трансформацию крупномасштабного импульса в последовательность солитонов. Согласно изложенной во Введении картине, эта трансформация происходит через промежуточную стадию формирования и эволюции ДУВ, которые в теории Гуревича-Питаевского [10] (см. также [14] и имеющиеся там ссылки) могут быть представлены в виде периодических решений с медленно меняющимися параметрами, что ведет к медленному изменению как  $P$ , так и параметров, входящих в  $g$ . Тем не менее, следуя методу Уизема в формулировке Кричевера [43] (см. также [44]) мы предполагаем, что выражения (101) и (102) остаются верными во все время эволюции  $\rho$  и  $u$  от начальных гладких распределений до асимптотических последовательностей солитонов. Пока распределения  $\rho$  и  $u$  являются гладкими функциями, функция  $g$  также гладкая и поэтому ее производными в (100) можно пренебречь, так что мы получаем

$$\frac{\sqrt{P}}{g} \approx \sqrt{-\bar{\mathcal{A}}} \equiv \bar{k}(\rho, u, \lambda), \quad (103)$$

где  $\bar{\mathcal{A}} = \bar{\mathcal{A}}(\rho, u)$  получается из  $\mathcal{A}$  в том же приближении с опущенными производными функций  $\rho$  и  $u$ . В результате мы приходим к квазиклассическому пределу формулы (102):

$$\phi_{\pm} \approx \sqrt{g} \exp\left(\pm i \int^x \bar{k}(\rho, u, \lambda) dx\right). \quad (104)$$

Условие, что  $\phi_{\pm}$  должны быть однозначными функциями  $x$ , дает правило квантования Бора-Зоммерфельда (см., например, [6–8])

$$\int_{x_1(\lambda_n)}^{x_2(\lambda_n)} \bar{k}(\rho_0(x), u_0(x), \lambda_n) dx = \pi \left(n + \frac{1}{2}\right), \quad (105)$$

$n = 1, 2, \dots,$



где  $x_1(\lambda_n), x_2(\lambda_n)$  — точки поворота. Сравнение с формулой (48) дает выражение для волнового числа, фигурирующего в нашей теории:

$$k(\rho, u) = 2\bar{k}(\rho, u) = 2\sqrt{-\bar{\mathcal{A}}(\rho, u)}, \quad (106)$$

а также ведет к некому выражению, связывающему постоянную интегрирования  $q$  нашей теории и спектральный параметр  $\lambda$  схемы АКНС. Следовательно, в случае нелинейных уравнений, полностью интегрируемых в схеме АКНС, мы получаем выражение для функции  $k = k(\rho, u)$  без необходимости решать уравнения (41).

Подстановка  $\sqrt{P}/g = k/2$  в (101) дает уравнение

$$k_t - (k\bar{\mathcal{B}})_x = 0, \quad (107)$$

где  $\bar{\mathcal{B}}(\rho, u)$  снова получается из  $\mathcal{B}$  в таком же квазиклассическом приближении. Это уравнение должно совпасть с законом сохранения числа волн (2), так что мы получаем

$$\frac{\omega}{k} = -\bar{\mathcal{B}}. \quad (108)$$

Таким образом, в квазиклассическом приближении функции  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  схемы АКНС оказываются связанными с законом дисперсии  $\omega = \omega(k, \rho, u)$  линейных волн и с функцией  $k = k(\rho, u, q)$ , получаемой решением уравнений (41), если эти производные коммутируют. С этой точки зрения условие коммутативности производных (41) может рассматриваться как «тест на интегрируемость» нелинейных уравнений в рамках схемы АКНС. Если это условие выполняется, то выражения

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{A}}(\rho, u, q) &= -\frac{1}{4}k^2(\rho, u, q), \\ \bar{\mathcal{B}}(\rho, u, q) &= -\frac{\omega(k(\rho, u, q), \rho, u)}{k(\rho, u, q)} \end{aligned} \quad (109)$$

представляют квазиклассический предел функций  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  в паре Лакса (96), а  $q$  играет роль спектрального параметра.

Конкретизируем эти формулы на примере НУШ (60) с  $f(\rho) = \rho$ . В этом случае имеем (см. [45])

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= -\left(\lambda + \frac{i\psi_x}{2\psi}\right)^2 + \psi^*\psi - \left(\frac{\psi_x}{2\psi}\right)_x, \\ \mathcal{B} &= -\lambda + \frac{i}{2}\frac{\psi_x}{\psi}. \end{aligned} \quad (110)$$

Подстановка (61) и пренебрежение производными функций  $\rho$  и  $u$  дает

$$\bar{\mathcal{A}} = -\left(\lambda - \frac{u}{2}\right)^2 + \rho, \quad \bar{\mathcal{B}} = -\lambda - \frac{u}{2}. \quad (111)$$

Тогда из формулы (106) следует выражение

$$k^2 = 4\left[(\lambda - u/2)^2 - \rho\right],$$

совпадающее с (69) для  $q = 2\lambda$ . Исключение  $\lambda$  из этого уравнения и из формулы (108), т.е. из  $\omega = k(\lambda + u/2)$ , воспроизводит закон дисперсии (64).

Несмотря на формальное сходство между правилами Бора–Зоммерфельда для интегрируемых и неинтегрируемых уравнений, следует, однако, подчеркнуть одно важное физическое различие между этими двумя ситуациями. Как видно, например, из рис. 1, даже при очень большом времени эволюции малоамплитудная часть волновой структуры еще не превратилась в солитоны, характеризующиеся четко определенными скоростями и амплитудами. Тем не менее в интегрируемом случае можно с полной определенностью утверждать, что если время эволюции будет достаточно большим, то в конечном счете образуется ровно  $N$  солитонов, отвечающих дискретному спектру ассоциированной с уравнением линейной задачи. В неинтегрируемом случае такой теоремы нет, а взаимодействие между солитонами является неупругим. Поэтому, несмотря на увеличение расстояния между солитонами в постоянно расширяющихся дисперсионных ударных волнах, нельзя исключить существенного влияния взаимодействия на конечные состояния солитонов с малой амплитудой и очень близкими скоростями. В принципе такое взаимодействие может даже приводить к слиянию солитонов, и, как было показано в работах [46, 47], такого рода процессы играют важную роль в солитонной турбулентности, описываемой неинтегрируемыми уравнениями с фокусирующей нелинейностью. Естественно, эти эффекты выходят за рамки нашей теории и предлагаемое правило Бора–Зоммерфельда применимо лишь для вычисления параметров достаточно быстро сформировавшихся солитонов, когда влиянием взаимодействия между солитонами на их скорости в конечном состоянии можно пренебречь. Это означает, что для таких солитонов через время эволюции  $t \sim l/c_0$  расстояние между солитонами  $\sim L$  должно быть много больше, чем их ширина  $\sim \tilde{k}^{-1}$  (здесь  $l$  — начальная ширина импульса,  $c_0$  — характерная скорость линейных волн, распространяющихся по начальному профилю).

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развитый в этой работе асимптотический метод предлагает простой способ вычисления параметров солитонов, образующихся из исходно гладкого нелинейных уравнений. Применительно к интегрируемым уравнениям он предоставляет простой способ вывода правила квантования Бора–Зоммерфельда для линейной спектральной задачи, ассоциированной с нелинейным уравнением в схеме АКНС. Условие коммутативности производных, определенных формулами (41) или их обобщениями (см. [35]) может использоваться как «тест на интегрируемость»: если они коммутируют, то представляется весьма правдоподобным, что рассматриваемое уравнение полностью интегрируемо в схеме АКНС и формулы (109) предоставляют полезную информацию о квазиклассическом пределе функций, определяющих соответствующую пару Лакса. Наконец, результаты статьи могут быть использованы также при рассмотрении задач, связанных с распространением высокочастотных волновых пакетов по неоднородному и меняющемуся со временем фону, как это было продемонстрировано в работе [35].

**Благодарности.** Автор благодарит Л. Ф. Каланса де Брито и Д. В. Шайкина за полезные обсуждения.

**Финансирование.** Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда N 19-72-30028 (разделы II-III) и в рамках проекта Госзадания FFUU-2021-0003 (разделы IV-V).

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: Метод обратной задачи*, Наука, Москва (1980).
2. М. Абловиц, Х. Сигур, *Солитоны и метод обратной задачи*, Мир, Москва (1987).
3. А. Ньюэлл, *Солитоны в математике и физике*, Мир, Москва (1989).
4. S. C. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, and R. M. Miura, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1095 (1967).
5. V. I. Karpman, *Phys. Lett. A* **25**, 708 (1967).
6. В. И. Карпман, *Нелинейные волны в диспергирующих средах*, Наука, Москва (1973).
7. S. Jin, C. D. Levermore, and D. W. McLaughlin, *Comm. Pure Appl. Math.* **52**, 613 (1999).
8. А. М. Камчатнов, R. A. Kraenkel, and В. А. Умаров, *Phys. Rev. E* **66**, 036609 (2002).
9. В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, *ЖЭТФ* **64**, 1627 (1973).
10. А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, *ЖЭТФ* **65**, 590 (1973).
11. G. B. Whitham, *Proc. Roy. Soc. London A* **283**, 238 (1965).
12. Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны*, Мир, Москва (1977).
13. А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, *ЖЭТФ* **93**, 871 (1987).
14. А. М. Камчатнов, *УФН* **191**, 52 (2021).
15. К. Ланцош, *Вариационные принципы механики*, Мир, Москва (1965).
16. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Физматлит, Москва (2006).
17. G. A. El, *Chaos* **15**, 037103 (2005).
18. А. М. Камчатнов, *Chaos* **30**, 123148 (2020).
19. А. М. Камчатнов and D. V. Shaykin, *Phys. Fluids* **33**, 052120 (2021).
20. А. М. Камчатнов, *Phys. Rev. E* **99**, 012203 (2019).
21. А. М. Камчатнов, *ЖЭТФ* **159**, 76 (2021).
22. L. F. Calazans de Brito, and A. M. Kamchatnov, *Phys. Rev. E* **104**, 054203 (2021).
23. G. A. El, A. Gammal, E. G. Khamis, R. A. Kraenkel, and A. M. Kamchatnov, *Phys. Rev. A* **76**, 053813 (2007).
24. G. A. El, R. H. J. Grimshaw, and N. F. Smyth, *Physica D* **237**, 2423 (2008).
25. M. D. Maiden, N. A. Franco, E. G. Webb, G. A. El, and M. A. Hofer, *J. Fluid Mech.* **883**, A10 (2020).
26. H. Poincaré, *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, t. III, (Paris, Gauthier-Villiar, 1899) [перевод: А. Пуанкаре, *Избранные труды*, т. II, Наука, Москва (1972)].
27. Э. Картан, *Интегральные инварианты*, ГИТТЛ, Москва–Ленинград (1940).

28. Г. Ламб, *Гидродинамика*, ОГИЗ-ГИТТЛ, Москва–Ленинград (1947).
29. G. G. Stokes, *Mathematical and Physical Papers*, Cambridge University Press, Cambridge (1905), Vol. V, p. 163.
30. O. Akimoto and K. Ikeda, *J. Phys. A: Math. Gen.* **10**, 425 (1977).
31. S. A. Darmanyan, A. M. Kamchatnov, and M. Nevière, *ЖЭТФ* **123**, 997 (2003).
32. Ф. Р. Гантмахер, *Лекции по аналитической механике*, Наука, Москва (1966).
33. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Физматлит, Москва (2001).
34. В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, Москва (1989).
35. D. V. Shaykin, and A. M. Kamchatnov, *Phys. Fluids* **35**, 062108 (2023), preprint arXiv:2303.16592 (2023).
36. M. A. Hofer, *J. Nonlinear Sci.* **24**, 525 (2014).
37. A. M. Kamchatnov and M. Salerno, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **42**, 185303 (2009).
38. M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, and H. Segur, *Stud. Appl. Math.* **53**, 249 (1974).
39. A. M. Kamchatnov and R. A. Kraenkel, *J. Phys. A: Math. Gen.* **35**, L13 (2002).
40. A. M. Kamchatnov, *Phys. Lett. A* **186**, 387 (1994).
41. A. M. Kamchatnov, *Physica D* **188**, 247 (2004).
42. A. M. Kamchatnov, *J. Phys. A: Math. Gen.* **34**, L441 (2001).
43. И. М. Кричевер, *Функ. Анализ Прилож.* **22**, 37 (1988).
44. B. A. Dubrovin and S. P. Novikov, *Sov. Sci. Rev. C. Math. Phys.* **9**, 1 (1993).
45. S. J. Alber, Complex Deformations of Integrable Hamiltonians Over Generalized Jacobi Varieties, in *Nonlinear Processes in Physics*, ed. by A. S. Fokas, D. J. Kaup, A. C. Newell, and V. E. Zakharov, p.6 Springer, Berlin (1993).
46. С. Ф. Крылов, В. В. Яньков, *ЖЭТФ* **79**, 82 (1980).
47. А. И. Дьяченко, В. Е. Захаров, А. Н. Пушкарёв, В. Ф. Швец, В. В. Яньков, *ЖЭТФ* **96**, 2026 (1989).