

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУХЪЯМНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

А. М. Дюгаев^{a*}, П. Д. Григорьев^{a,b**}

^a Институт теоретической физики имени Л. Д. Ландау Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия

^b Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»
119049, Москва, Россия

Поступила в редакцию 14 января 2023 г.,
после переработки 21 марта 2023
Принята к публикации 22 марта 2023 г.

Предложен новый метод определения расщепления уровней Δ в двухъямном одномерном потенциале. Найдены две функции-«партнеры»: одна симметричная Ψ_+ , другая антисимметричная Ψ_- . По ним из уравнения Шредингера найдены отвечающие им потенциалы $V_+(x)$ и $V_-(x)$ и энергии E_+^0 и E_-^1 . Уникальным свойством Ψ_+ и Ψ_- является тождественное равенство: $E_+^0 = E_-^1$, что дает возможность определить Δ по теории возмущений по параметру $V_+(x) - V_-(x)$. Для двухъямного осцилляторного потенциала получена формула для расщепления уровней, связывающая инстантонный и одноямный пределы. Этот результат может быть востребован в теории поля, где возможность получения инстантонных решений по теории возмущений неоднократно обсуждалась. Приведен ряд потенциалов, для которых удастся найти Δ без квазиклассического приближения. Рассмотрены сингулярные потенциалы типа воронок. Дано сравнение определенной нами Δ с результатами численного решения уравнения Шредингера для инстантонного потенциала.

DOI: 10.31857/S0044451023070027
EDN: GDEWQV

1. ВВЕДЕНИЕ

Двухъямные или инстантонные потенциалы хорошо известны и изучены как для физических приложений [1–3], так и для теории поля [4]. Анализировать эффект расщепления энергии квантового уровня на величину Δ обычно начинают с его определения в одной из ям потенциала $V(x)$ [5]. Вводят некоторый затравочный уровень ϵ_0 в одной из ям потенциала, который из-за туннелирования частицы в другую яму расщепляется на величину Δ . Прохождение частицы через барьер рассматривают в квазиклассическом приближении [5–7]. Точное значение Δ можно найти для ряда модельных потенциалов [8] или из численного решения уравнения Шредингера [9–14]. Такой путь от модельного потенциала $V(x)$ к Δ оказывается довольно долгим. Известно, что значение Δ определяется в основном волно-

вой функцией частицы при малых x , где потенциальный барьер максимален. Детальная зависимость $V(x)$ не так и важна. Отметим, что сейчас также активно развиваются алгоритмы и методы решения уравнения Шредингера с учетом квантовых шумов на квантовом компьютере [15, 16], но их физическая реализация пока возможна только моделированием на классическом компьютере.

В настоящее время хорошо известен факт, что в квантовой механике для потенциалов с двумя и более вырожденными минимумами энергия основного состояния содержит неаналитические члены инстантонного происхождения в дополнение к теории возмущений. Поэтому для изучения таких потенциалов предлагались различные методы. Чаще всего они основаны на добавлении (мульти)инстантонных вкладов, полученных из полуклассического расчета, что позволяет выписать приближенное выражение для энергии частицы в многоямных потенциалах в виде бесконечного ряда [17–19]. Для изучения инстантонных двухъямных потенциалов был также использован вариант полуклассической теории, основанной на так называемых флуктонных периоди-

* E-mail: dyugaev@itp.ac.ru

** E-mail: grigorev@itp.ac.ru

ческих траекториях в евклидовом времени, с последующим расчетом пертурбативных поправок с помощью диаграмм Фейнмана [20, 21]. Таким образом, несмотря на то, что проблема недостаточности теории возмущений для двухъямных потенциалов была указана очень давно [5], решение этой задачи до сих пор актуально.

2. ФОРМУЛИРОВКА МЕТОДА

Мы предлагаем [22] начинать не с моделирования $V(x)$ и последующего решения уравнения Шредингера для волновых функций частицы, а моделировать эти функции. Потенциал $V(x)$ для каждой функции свой. Он может быть легко найден из уравнения Шредингера простым дифференцированием [22, 23]. Оказывается полезным рассматривать не одно уравнение Шредингера, а два для двух функций-«партнеров», $\Psi_+(x)$ и $\Psi_-(x)$:

$$\begin{aligned} (V_+(x) - E_+^0) \Psi_+(x) &= \Psi_+''(x), \\ (V_-(x) - E_-^1) \Psi_-(x) &= \Psi_-''(x). \end{aligned} \quad (1)$$

Функция Ψ_+ симметрична, $\Psi_+(x) = \Psi_+(-x)$, и не имеет нулей. Поэтому энергия E_+^0 — это энергия основного состояния в потенциале $V_+(x)$. Функция Ψ_- антисимметрична, $\Psi_-(-x) = -\Psi_-(x)$. Она имеет узел при $x = 0$, поэтому E_-^1 — это энергия первого возбужденного состояния в потенциале $V_-(x)$. Мы хотим добиться тождественного равенства $E_+^0 = E_-^1$, которое выполняется в целой области параметров, характеризующих потенциалы $V_+(x)$ и $V_-(x)$. Это позволяет применять теорию возмущений по параметру $V_+(x) - V_-(x)$, а не решать секулярное уравнение, так как известно, что уровни разной симметрии могут пересекаться [5]. Изменение волновых функций не дает поправку к энергии в первом порядке теории возмущений. Поэтому $\Psi_-(x)$ имеет энергию E_+^1 в потенциале $V_+(x)$, которую можно выразить через

$$\delta V(x) \equiv V_+(x) - V_-(x),$$

а именно:

$$\Delta_+ \equiv E_+^1 - E_+^0 = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_-^2(x) \delta V(x) dx. \quad (2)$$

Аналогично для потенциала $V_-(x)$, его энергия основного состояния E_-^0 лежит ниже E_-^1 на величину

$$\Delta_- \equiv E_-^1 - E_-^0 = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_+^2(x) \delta V(x) dx. \quad (3)$$

Предлагаемая конструкция может показаться нефизической, так как пару функций-«партнеров»

$\Psi_+(x)$ и $\Psi_-(x)$ с указанными свойствами или трудно найти, или они окажутся слишком экзотическими. Мы таких функций нашли очень много. Рассмотрим некоторые из них,

$$\begin{aligned} \Psi_+(x) &= A_+ \exp[-F(x)] \operatorname{ch}(x_0 x), \\ \Psi_-(x) &= A_- \exp[-F(x)] \operatorname{sh}(x_0 x). \end{aligned} \quad (4)$$

Четная функция $F(x) = F(-x)$ в уравнении (4) ограничена только необходимостью определить нормировочные постоянные A_+ , A_- . Потенциалы $V_{\pm}(x)$, соответствующие $\Psi_{\pm}(x)$ в уравнении (4), находятся из уравнения (1) дифференцированием [22]:

$$\begin{aligned} V_+(x) - E_+^0 &= V_F(x) - 2F'(x) x_0 \operatorname{th}(x_0 x) + x_0^2, \\ V_-(x) - E_-^1 &= V_F(x) - 2F'(x) x_0 \operatorname{cth}(x_0 x) + x_0^2, \\ V_F(x) &= [F'(x)]^2 - F''(x). \end{aligned} \quad (5)$$

Из уравнений (5) видно, что важное для нас тождество $E_+^0 = E_-^1$ действительно выполняется при любой функции $F(x)$ в уравнении (4). Из уравнения (5) можно найти функцию $\delta V(x)$, которая определяет величины Δ_+ , Δ_- в уравнениях (2) и (3):

$$\delta V(x) = V_+(x) - V_-(x) = \frac{4F'(x) x_0}{\operatorname{sh}(2x_0 x)}. \quad (6)$$

3. ОСЦИЛЛЯТОРНЫЙ ДВУХЪЯМНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

Далее рассмотрим подробнее осцилляторный двухъямный потенциал, который определяет функцию $F(x)$ в уравнениях (4) и (5):

$$\begin{aligned} F(x) &= x^2/2, \quad E_+^0 = E_-^1 = 1 - x_0^2, \\ V_+(x) &= x^2 - 2x_0 x \operatorname{th}(x_0 x), \\ V_-(x) &= x^2 - 2x_0 x \operatorname{cth}(x_0 x), \\ \delta V(x) &= 4xx_0 / \operatorname{sh}(2x_0 x). \end{aligned} \quad (7)$$

В выбранной нами системе единиц осцилляторный спектр $E_n = 1 + 2n$, где n целое число. Этим объясняется появление энергии нулевых колебаний, равной 1, в энергиях $E_+^0 = E_-^1$ в уравнении (7). Предел $x_0 \gg 1$ отвечает потенциалам $V_+(x)$, $V_-(x)$ с глубокими ямами в точках $x_M = \pm x_0$ со значениями

$$V_+(x_0) \approx V_-(x_0) \approx -x_0^2.$$

Этот предел сильной «двухъямности» достигается уже при $x_0 = 2$ в уравнении (7), что видно на рис. 1. Параметры Δ_+ , $\Delta_- \approx 0.1$ при $x_0 = 2$. Малость Δ_+ , Δ_- связана с тем, что реальным параметром является не x_0 , а x_0^2 . Поэтому при $x_0 = 2$ величины

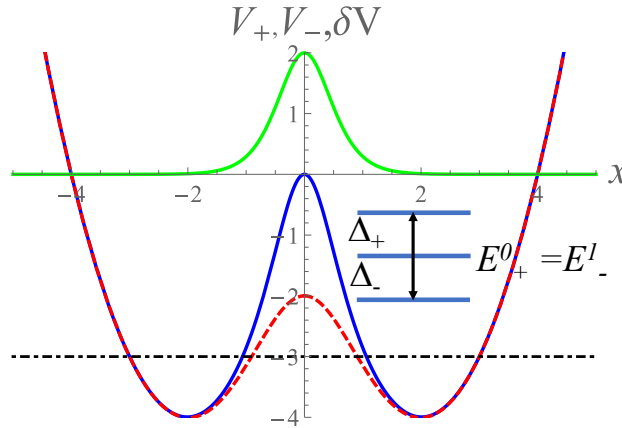


Рис. 1. (В цвете онлайн) Графики функций $V_+(x)$ (сплошная синяя линия), $V_-(x)$ (штриховая красная линия) и их разности $\delta V \equiv V_+ - V_-$ (сплошная зеленая линия), определенные в уравнении (7) при $x_0 = 2$. Значения $E_+^0 = E_-^1 = -3$, $\Delta_+ = 0.07165$, $\Delta_- = 0.1091$

Δ_+ , Δ_- экспоненциально малы. Из уравнений (2)–(4) и (7) следуют связи Δ_+ , Δ_- с параметром x_0 :

$$\Delta_+ = 4x_0 A_-^2 \int_0^\infty \exp(-x^2) x \operatorname{th}(x_0 x) dx, \tag{8}$$

$$\Delta_- = 4x_0 A_+^2 \int_0^\infty \exp(-x^2) x \operatorname{cth}(x_0 x) dx.$$

Вычисление нормировочных функций A_\pm^2 сводится к взятию табличных интегралов [24]:

$$A_\pm^2 = \frac{2}{\sqrt{\pi} [\exp(x_0^2) \pm 1]}. \tag{9}$$

Предел $x_0 \gg 1$ удобно исследовать, выделив из функций $\operatorname{th}(x_0 x)$, $\operatorname{cth}(x_0 x)$ единицу:

$$\operatorname{th}(x_0 x) = 1 - \frac{2}{\exp(2x_0 x) + 1}, \tag{10}$$

$$\operatorname{cth}(x_0 x) = 1 + \frac{2}{\exp(2x_0 x) - 1}.$$

Из уравнений (8)–(10) получаем

$$\Delta_\pm = 2x_0 A_\mp^2(x_0) C_\pm(x_0), \tag{11}$$

$$C_\pm(x_0) = 1 \mp \frac{1}{x_0^2} \int_0^\infty \frac{\exp(-z^2/4x_0^2) z dz}{\exp(z) \pm 1}.$$

Приведем первые члены разложения C_\pm по параметру «двухъямности» $x_0^{-2} \ll 1$:

$$C_+(x_0) \approx 1 - \frac{\pi^2}{12x_0^2} \left(1 - \frac{21}{120} \frac{\pi^2}{x_0^2} \right), \tag{12}$$

$$C_-(x_0) \approx 1 + \frac{\pi^2}{6x_0^2} \left(1 - \frac{\pi^2}{10x_0^2} \right).$$

Из уравнений (11), (12) видно, что имеет место «медленное» разложение Δ_\pm по степеням $x_0^{-2} \ll 1$

и «быстрое» разложение по степеням $\exp(-x_0^2)$:

$$\Delta_\pm(x_0) = \frac{4x_0 \exp(-x_0^2) C_\pm(x_0)}{1 \mp \exp(-x_0^2) \sqrt{\pi}}. \tag{13}$$

При переходе от уравнения (8) к уравнениям (11), (13) не делалось приближений, это одни и те же выражения для $\Delta_\pm(x_0)$. Графики функций $C_\pm(x_0)$ и $\Delta_\pm(x_0)$ изображены на рис. 2 и 3.

Осцилляторный потенциал, и только он, обладает замечательным свойством, которое следует из уравнений (8), (9) в пределе $x_0 \rightarrow 0$. Параметры $\Delta_\pm(x_0)$ имеют конечное предельное значение, равное 2 при $x_0 \rightarrow 0$:

$$\Delta_+(x_0) = 2(1 - x_0^2), \tag{14}$$

$$\Delta_-(x_0) = 2(1 - x_0^2/3).$$

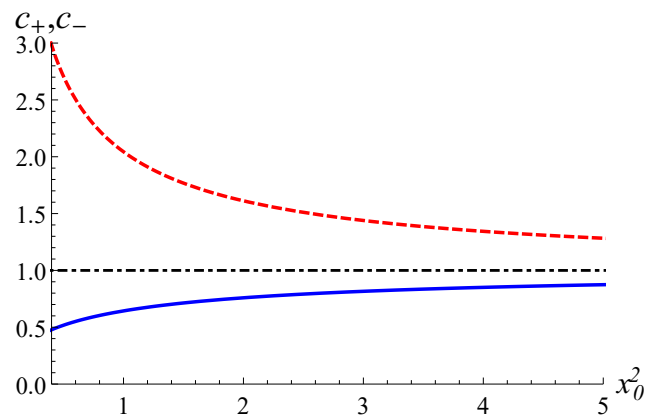


Рис. 2. (В цвете онлайн) Функции C_+ (сплошная синяя линия) и C_- (штриховая красная линия), заданные уравнением (11) и построенные в зависимости от x_0^2 , поскольку именно x_0^2 входит в уравнение (11). $C_\pm(x_0)$ с разных сторон стремятся к значению $C_\pm = 1$ при $x_0 \rightarrow \infty$ согласно уравнению (12)

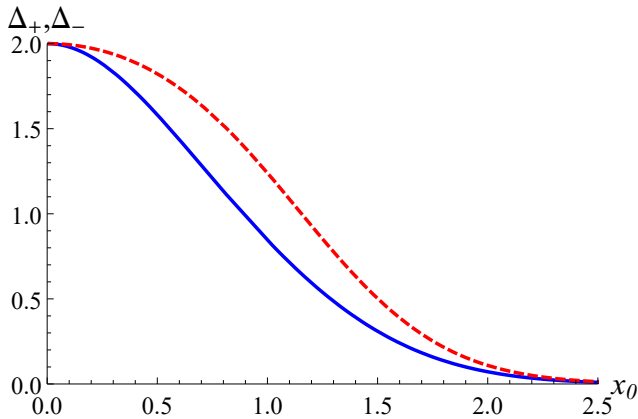


Рис. 3. (В цвете онлайн) Графики функций $\Delta_+(x_0)$ (сплошная синяя линия) и $\Delta_-(x_0)$ (штриховая красная линия), построенные на основе уравнений (8) и (9)

Это можно увидеть из уравнения (7): при $x_0 = 0$ разница потенциалов $\delta V(x) = 2$, а Δ_{\pm} , определенные в уравнениях (2) и (3), равны 2 вследствие нормировки функций $\Psi_{\pm}(x)$. Старшие порядки теории возмущений зануляются из-за ортогональности волновых функций для состояний с разной энергией. Число 2 — это расстояние между нулевым и первым возбужденным уровнем в спектре осциллятора, поэтому $E_+^1 - E_+^0 = E_-^1 - E_-^0 = 2$ при $x_0 = 0$. Волновые функции $\Psi_{\pm}(x)$, с учетом (9), имеют при $x_0 \rightarrow 0$ конечным пределом правильно нормированные функции осциллятора. Функции $\Delta_{\pm}(x_0)$ изображены на рис. 3. Здесь мы столкнулись с интересным явлением, когда конструкция, основанная на теории возмущений, оказалась правильной практически во всей области параметров.

4. ОБОБЩЕНИЕ НА ДРОБНЫЕ СТЕПЕНИ

Обобщение точной модели двухъямного осциллятора возможно аналитически ценой потери экспоненциальных и степенных поправок при $x_0 \gg 1$. Первые исчезают, если не различать A_+^2 и A_-^2 , а вторые теряются после замены в уравнении (8) функций $\text{th}(x_0 x)$ и $\text{cth}(x_0 x)$ на 1. Но возникает общность, связанная со свободой выбора функции $F(x)$ в уравнении (4). Обобщение уравнений (4) и (8) имеет вид

$$\Delta = 2x_0 A^2 \exp[-2F(0)] = 2x_0 \Psi_+^2(0). \quad (15)$$

Можно также показать, что уравнение (15) верно и для общего потенциала из уравнения (5):

$$V_0(x) = V_F(x) - 2F'(x) x_0 \text{sign}(x). \quad (16)$$

Потенциалы $V_{\pm}(x)$, $V_0(x)$ разные, но расщепления Δ для них одинаковые в пределе $x_0 \rightarrow \infty$. Для осциллятора потенциал $V_0(x) = x^2 - 2x_0|x|$ исследован

при $x_0 \gg 1$ в [8]. В этом пределе Δ не отличается от $\Delta_+ = \Delta_-$ в уравнении (13).

Применим нашу теорию для частного случая $F(x) = |x|^{\nu}/\nu$ в уравнении (4):

$$\begin{aligned} \Psi_{\nu+}(x) &= A_{\nu} \exp(-|x|^{\nu}/\nu) \text{ch}(x x_0), \\ \Psi_{\nu-}(x) &= A_{\nu} \exp(-|x|^{\nu}/\nu) \text{sh}(x x_0). \end{aligned} \quad (17)$$

Функции $\exp(-|x|^{\nu}/\nu)$ исследовались нами ранее [22]. Они являются функциями основного состояния для потенциалов с энергией, равной нулю при всех $\nu \neq 2$. Потенциалы $V_{0\nu}$, соответствующие функциям в уравнении (17), находятся из уравнения (16):

$$V_{0\nu}(x) = |x|^{2\nu-2} - 2x_0|x|^{\nu-1} - (\nu-1)|x|^{\nu-2}, \quad (18)$$

а энергии, соответствующие функциям (17), равны

$$E_{\nu+}^0 = E_{\nu-}^1 = -x_0^2.$$

Нормировочная постоянная A_{ν} , одинаковая для $\Psi_{\nu\pm}$ в уравнении (17), вычислена методом перевала при $x_0 \gg 1$:

$$A_{\nu}^2 \approx 2x_M^{\nu/2-1} \sqrt{\frac{\nu-1}{\pi}} \exp[-2x_M^{\nu}(1-1/\nu)], \quad (19)$$

Положение максимума функций x_M связано с x_0 : $x_0 = x_M^{\nu-1}$, а расщепление $\Delta_{\nu} = 2x_0 A_{\nu}^2$ следует из уравнения (15).

Интересен случай $\nu = 3$:

$$\begin{aligned} \Delta_{\nu=3} &= a_0 x_0^{5/4} \exp\left(-\frac{4}{3} x_0^{3/2}\right), \\ a_0 &= 4\sqrt{\frac{2}{\pi}} = 3.2, \end{aligned} \quad (20)$$

$$V_{0,\nu=3} = x^4 - 2x_0 x^2 - 2|x|.$$

Потенциал такого типа рассматривался в теории инстантонов [4] и детально исследован численными методами [10–14]:

$$V_U(x) = x^4 - 2x_0 x^2. \quad (21)$$

Мы проанализировали табличные данные для расщепления уровня Δ_C в потенциале из уравнения (21), приведенные в [11] в интервале $3 < x_0 < 6$, где Δ_C меняется на 5 порядков. Выяснилось, что с точностью в 1% зависимость $\Delta_C(x_0)$ имеет вид из уравнения (20), но с другой предэкспонентой:

$$\begin{aligned} \Delta_C &= b_0 x_0^{\mu} \exp\left(-4x_0^{3/2}/3\right), \\ b_0 &= 9.03, \quad \mu = 1.41. \end{aligned} \quad (22)$$

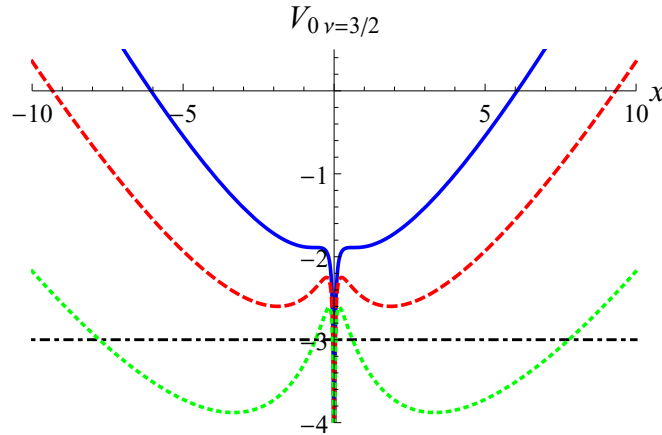


Рис. 4. (В цвете онлайн) График функции $V_{0, \nu=3/2}(x)$ из уравнения (23) при $x_0 = 1.19$ (сплошная синяя линия), $x_0 = 1.5$ (штриховая красная линия), и $x_0 = 1.8$ (пунктирная зеленая линия)

Потенциалы из уравнений (20) и (21) отличаются членом $2|x|$. Но главная экспоненциальная зависимость $\Delta(x_0)$ одинаковая. Заметим, что теория возмущений по разности потенциалов $V_U - V_{0,3}$ в уравнениях (20), (21) безусловно применима: $E_{03} = -50$ для $x_0 = \sqrt{50}$, а для V_U численное решение [13] дает $E_{0U} = -43.78$.

Наш метод позволяет найти Δ и для сингулярных потенциалов. Один из них отвечает $\nu = 3/2$ в уравнениях (17), (18):

$$\begin{aligned} V_{0, \nu=3/2} &= |x| - 2x_0|x|^{1/2} - |x|^{-1/2}/2, \\ E &= -x_0^2, \\ \Delta_{\nu=3/2} &= \frac{4}{\sqrt{2\pi}}x_0^{1/2} \exp\left(-\frac{2}{3}x_0^3\right). \end{aligned} \tag{23}$$

Его график приведен на рис. 4 при трех значениях $x_0 = 1.19, 1.5, 1.9$. При $x_0 < 1.19$ потенциал $V_{0, \nu=3/2}$ переходит в потенциал типа воронки при $|x| \rightarrow 0$ и линеен по x при больших $|x|$. Такие потенциалы популярны в теории струн [25]. На рис. 4 видно, что при $x_0 > 1.19$ в потенциале $V_{0, \nu=3/2}(x)$ из уравнения (23) появляются две симметричные ямы, однако сингулярность воронки при $|x| \rightarrow 0$ сохраняется.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведем основные результаты и укажем на разницу с численным расчетом. Мы рассмотрели ряд примеров, когда возможно моделировать волновые функции, а не потенциалы. Это позволяет не вычислять экспоненциально малое расщепление уровней Δ , а по его значению определить потенциал $V(x)$. Выяснилось, что даже сильное изменение $V(x)$ может слабо сказаться на величине Δ . Применения предложенного нами метода очень разнообразны.

Одни связаны с выбором функции $F(x)$ в уравнении (4), другие — с выбором самих функций $\Psi_{\pm}(x)$ в уравнении (1).

Наш главный результат для двухъямного осцилляторного потенциала представлен аналитически в уравнении (8). При этом предэкспонента в инстантонном пределе $x_0^2 \gg 1$ может быть получена по теории возмущений разложением в ряд по степеням x_0^{-2} . Однопараметрическая формула (8), связывающая оба предела, может быть востребована в теории поля, где возможность получения инстантонных решений по теории возмущений неоднократно обсуждалась [4].

Полученный результат интересен тем, что он является существенно непертурбативным, хотя и использует своеобразную теорию возмущений в процессе вывода. С другой стороны, он выходит далеко за рамки стандартного квазиклассического подхода. Применение метода квазиклассики к двухъямному потенциалу $V(x)$ в пределе $x_0 \gg 1$ большого расстояния между ямами дает [4] расщепление уровней в виде $\Delta \approx \Phi \exp(-\phi)$, где Φ и ϕ зависят от потенциала $V(x)$. Мы рассмотрели переход от двухъямного к одноямному потенциалу на примере осцилляторного потенциала $V_+(x)$ из уравнения (7) и получили для расщепления уровней Δ_+ выражение (см. формулы (8), (9)) вида

$$\Delta_+ = \Phi_+(x_0) \frac{1}{\exp(x_0^2) - 1}, \tag{24}$$

применимое на всем интервале $0 < x_0 < \infty$. Похожая на (24) формула содержится в знаменитой работе Планка 1900 г., посвященной излучению черного тела [26]. Инстантонный предел $x_0 \gg 1$ достигается разложением «функции Бозе–Эйнштейна» в уравнении (24): $1/[\exp(x_0^2) - 1] \rightarrow \exp(-x_0^2)$. Можно

рассмотреть и другой потенциал $V_-(x)$ из уравнения (7), для которого наша формула (13) для Δ_- также применима на всем интервале $0 < x_0 < \infty$ и похожа на функцию Ферми – Дирака:

$$\Delta_- = \Phi_-(x_0) \frac{1}{\exp(x_0^2) + 1}. \quad (25)$$

Рассмотренные в литературе [12–14] двухъямные потенциалы $V(x)$ обычно набраны из целых степеней x . Мы рассмотрели также дробные степени x . При этом потенциал имеет сингулярность при $x = 0$, что видно в наших общих формулах (17), (18) и проиллюстрировано на рис. 4 для $\nu = 3/2$. Здесь барьер имеет структуру, и можно рассмотреть инстантонный предел.

Результаты работы могут найти применение для моделирования двухъямных квантовых систем, например, кубитов, особенно если важна не только точность определения расщепления уровней, но и наглядная зависимость этого расщепления от различных параметров потенциала.

Финансирование. Работа автора А. М. Д. выполнена в рамках госзадания 0033-2019-0001 «Развитие теории конденсированного состояния вещества». Работа автора П. Д. Г. поддержана Фондом развития теоретической физики и математики «Базис» и программой стратегического академического лидерства «Приоритет-2030» (грант НИТУ «МИСиС» №К2-2022-025).

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Кramers, *Physica* **7**, 284 (1940).
2. S. Chandrasekar, *Rev. Mod. Phys.* **15**, 1 (1943).
3. W. Miller, *J. Chem. Phys.* **61**, 1823 (1974).
4. А. И. Вайнштейн, В. И. Захаров, В. А. Новиков, М. А. Шифман, *УФН* **136**, 553 (1982).
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Физматлит, Москва (2001).
6. R. Dutt, A. Khare, and U. Sukhatme, *Phys. Lett. B* **181**, 295 (1986).
7. J. W. Harald Müller-Kirsten, *Introduction to Quantum Mechanics: Schrödinger Equation and Path Integral*, 2nd ed., World Sci., Singapore (2012).
8. R. Merzbacher, *Quantum Mechanics*, Wiley, New York (1970).
9. M. Bernstein and L. S. Brown, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1933 (1984).
10. P. Kumar, M. Ruiz-Altaba, and B. S. Thomas, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2749 (1986).
11. Wai-Yee Keung, E. Kovacs, and U. P. Sukhatme, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 41 (1988).
12. A. V. Turbiner, *Lett. Math. Phys.* **74**, 169 (2005); doi:10.1007/s11005-005-0012-z
13. A. V. Turbiner, *Int. J. Mod. Phys. A* **25**, 647 (2010); doi:10.1142/S0217751X10048937
14. A. V. Turbiner and J. C. del Valle, *Acta Polytech.* **62**, 208 (2022); doi:10.14311/AP.2022.62.0208
15. Ю. И. Богданов, Н. А. Богданова, Д. В. Фастовец, В. Ф. Лукичев, *Письма в ЖЭТФ* **114**, 391 (2021).
16. A. M. Polyakov, *Nucl. Phys. B* **120**, 429 (1977).
17. J. Zinn-Justin, *Nucl. Phys. B* **192**, 125 (1981); **218**, 333 (1983).
18. J. Zinn-Justin and U. D. Jentschura, *Ann. Phys.* **313**, 197 (2004); **313**, 269 (2004); *Phys. Lett. B* **596**, 138 (2004).
19. G. V. Dunne and M. Unsal, *Phys. Rev. D* **89**, 105009 (2014).
20. M. A. Escobar-Ruiz, E. Shuryak, and A. V. Turbiner, *Phys. Rev. D* **92**, 025046 (2015); Erratum *Phys. Rev. D* **92**, 089902 (2015).
21. E. Shuryak and A. V. Turbiner, *Phys. Rev. D* **98**, 105007 (2018).
22. А. М. Дюгаев, П. Д. Григорьев, *Письма в ЖЭТФ* **112**, 107 (2020).
23. А. В. Турбинер, *Письма в ЖЭТФ* **30**, 379 (1979).
24. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Наука, Москва (1971).
25. И. В. Андреев, *Хромодинамика и жесткие процессы при высоких энергиях*, Наука, Москва (1981).
26. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика, Часть 1*, Физматлит, Москва (2005).