

# РАСТЕКЕНИЕ ТОКА В ТОНКИХ ФОЛЬГАХ ИЛИ ПЛОСКИХ ТОКОВЫХ СЛОЯХ

С. Ф. Гаранин, Е. М. Кравец\*

Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики,  
607188 Саров, Нижегородская обл., Россия

Поступила в редакцию 17 октября 2022 г.,  
после переработки 17 октября 2022 г.  
Принята к публикации 31 октября 2022 г.

Для рассмотрения эволюции распределения токов в неоднородных тонких проводящих слоях или фольгах используется интегро-дифференциальное уравнение, с помощью которого трехмерная задача для магнитного поля сводится к двумерной, а для распределения токов по ширине неоднородных проводящих слоев или фольг это уравнение позволяет свести двумерную задачу для магнитного поля к одномерной. Для однородных проводящих слоев с постоянной проводимостью пространственный масштаб распределения тока, сосредоточенного вначале в ограниченной области, растет пропорционально времени со скоростью  $u = c^2/4\pi\sigma\Delta$ , где  $\sigma$  — проводимость материала слоя,  $\Delta$  — его толщина. В качестве приложения к задачам переброса тока с помощью электровзрывных размыкателей рассмотрено распределение тока по ширине фольги для периодической системы плоских фольг типа «змеек». Показано, что в этой системе вначале в фольге устанавливается распределение тока, соответствующее идеальной проводимости фольги. Затем за времена порядка  $s/u$  ( $2s$  — ширина фольги) происходит релаксация распределения тока в фольге к равномерному. Оценки показывают, что если фольги используются в качестве размыкателей, то токи по фольгам в процессе переброса тока в нагрузку должны успевать распределяться равномерно по их ширине, поэтому поправки на неоднородность распределения тока в размыкателях должны быть невелики.

DOI: 10.31857/S0044451023040041  
EDN: LNLHNG

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Во многих системах с тонкими фольгами, в частности в фольговых размыкателях тока [1–3], широко применяющихся для обострения импульсов тока, важным вопросом является вопрос о распределении тока по ширине фольги. Обычно для описания работы этих систем предполагают, что ток распределен равномерно по ширине. Это предположение, однако, может быть не всегда оправданным даже для однородных фольг, если учесть зависимость сопротивления фольги от джоулева тепловыделения. В этом случае, если в местах повышенного джоулева тепловыделения будет уменьшаться сопротивление, что возможно при переходе проводника в плазму, то ток может перебрасываться в области большего разогрева. Таким образом, на этой стадии возможна неустойчивость токового слоя относительно

филаментации (устойчивость токовых слоев относительно стратификации изучалась в работе [4]). На стадии роста сопротивления при джоулевом тепловыделении условие устойчивости проводника относительно филаментации должно выполняться, и предположение об однородности фольги может быть оправданным.

Довольно часто в технике применяются фольги конечной ширины или же наборы плоских фольг типа «змеек», которые в последнее время изучаются как возможные быстрые размыкатели [3] в мощных источниках тока. В этом случае возникают вопросы: как будет распределяться ток по ширине таких фольг и насколько правильно описывать их сопротивление, как сопротивление фольги с однородным распределением тока?

Вопросы растекания тока в тонких токовых слоях изучались в целом ряде работ [5–9]. В этих работах показано, что при анализе процессов растекания появляется физическая величина  $u = c^2/4\pi\sigma\Delta$  ( $\sigma$  — проводимость фольги,  $\Delta$  — ее толщина, а величина  $\sigma\Delta$  является поверхностной проводимостью) с

\* E-mail: EMKravets@vniief.ru

размерностью скорости, которая характеризует процесс выравнивания токов по ширине фольги. Вообще говоря, даже в предположении зависимости величин в фольге только от координаты вдоль ширины фольги магнитные поля будут иметь двумерный характер и будут также зависеть от координаты, перпендикулярной фольге. Тем не менее в работе [9] показано, что задачу о растекании тока по ширине фольги можно свести к одномерному интегро-дифференциальному уравнению для плотности тока.

В настоящей работе мы выведем интегро-дифференциальное уравнение для плотности тока в общем двумерном случае, проанализируем свойства его решений для замкнутой системы токов (вихри токов на поверхности), а также применим одномерное интегро-дифференциальное уравнение [9] для расчета распределения и выравнивания тока по ширине фольги в системах плоских фольг типа «змеек» или конечных по ширине плоских токовых слоев.

## 2. РАСТЕКАНИЕ ТОКА В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ

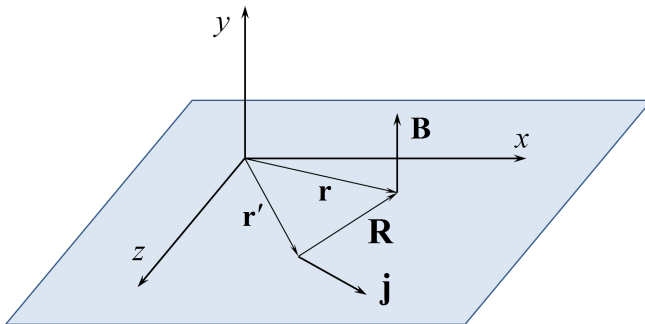


Рис. 1. Геометрия задачи

Рассмотрим плоский и бесконечно тонкий токовый слой, ось  $y$  направим перпендикулярно его плоскости (рис. 1). Плотность тока  $\mathbf{j}$  в нем будем считать зависящей от  $x$  и  $z$ . Интегро-дифференциальное уравнение, описывающее динамику магнитного поля на поверхности слоя с постоянной проводимостью, выведено в работе [8]. Мы получим интегро-дифференциальное уравнение, описывающее динамику растекания тока в двумерной задаче (плоском токовом слое), когда все величины зависят от  $x$  и  $z$ .

Найдем магнитное поле на поверхности, т. е. при  $y = 0$ . По закону Био–Савара ток и создаваемое им магнитное поле связаны соотношением

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{[\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{r} - \mathbf{r}']}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{r}', \quad (1)$$

из которого видно, что поскольку при  $y = 0$  вектор  $\mathbf{r}$  лежит в плоскости  $xz$ , вектор  $\mathbf{B}$  перпендикулярен этой плоскости. Можно показать, что фурье-компоненты величин  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ ,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int \mathbf{B}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d\mathbf{k},$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int \mathbf{j}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d\mathbf{k},$$

связаны соотношениями

$$\mathbf{B}_{\mathbf{k}} = -\frac{2\pi i}{ck} [\mathbf{j}_{\mathbf{k}} \times \mathbf{k}],$$

$$\mathbf{j}_{\mathbf{k}} = \frac{ic}{2\pi k} [\mathbf{k} \times \mathbf{B}_{\mathbf{k}}].$$

Обращая интегральный оператор в формуле (1) с помощью преобразования Фурье, можно выразить плотность тока через магнитное поле на поверхности:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\frac{c}{4\pi^2} \int \left[ \frac{\mathbf{R}}{R^3} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}'. \quad (2)$$

Динамика магнитного поля определяется уравнением Максвелла

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \operatorname{rot}_2 \mathbf{E} \quad (3)$$

(индекс «2» у ротора означает, что дифференцирование происходит только по координатам  $x$  и  $z$ ), в котором для нахождения электрического поля следует использовать закон Ома для поверхностного тока:

$$\mathbf{j} = \sigma \Delta \mathbf{E}. \quad (4)$$

Подставляя  $\mathbf{E}$  из (4) в (3) и выражая плотность тока через магнитное поле с помощью (2), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\frac{4\pi}{c} \operatorname{rot}_2(u\mathbf{j}) = \\ &= \frac{1}{\pi} \operatorname{rot}_2 \left( u(\mathbf{r}) \int \left[ \frac{\mathbf{R}}{R^3} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' \right). \end{aligned} \quad (5)$$

При  $u = \text{const}$  уравнение (5) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r})}{\partial t} &= -\frac{u}{\pi} \int \mathbf{B}(\mathbf{r}') \operatorname{div}_2 \left( \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right) d\mathbf{r}' = \\ &= \frac{u}{\pi} \int \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}')}{R^3} d\mathbf{r}' = \frac{u}{\pi} \Delta_2 \int \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \end{aligned}$$

(индекс «2» здесь, по аналогии с (3), означает, что дифференцирование происходит только по двум координатам, а  $\Delta_2$  — двумерный лапласиан), и оно совпадает с выведенным в работе [8].

Получим теперь уравнение для плотности тока. Продифференцируем (2) по времени и исполь-

зуюм (5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r})}{\partial t} &= -\frac{c}{4\pi^2} \int \left[ \frac{\mathbf{R}}{R^3} \times \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}')}{\partial t} \right] d\mathbf{r}' = \\ &= \frac{1}{\pi} \int \left[ \frac{\mathbf{R}}{R^3} \times \text{rot}'_2(u(\mathbf{r}')\mathbf{j}(\mathbf{r}')) \right] d\mathbf{r}' \equiv \\ &\equiv \frac{1}{\pi} \int \left[ \tilde{\mathbf{R}} \times \text{rot}'_2 \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' \quad (6) \end{aligned}$$

(введены обозначения  $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}/R^3$ ,  $\tilde{\mathbf{E}} = u\mathbf{j} = c^2\mathbf{E}/4\pi$ , а  $\text{rot}'_2$  означает дифференцирование по  $\mathbf{r}'$ ). Интегрируя (6) по частям, учитывая, что ротор от всего выражения сводится к интегралу по удаленному контуру, переводя дифференцирование на  $\tilde{\mathbf{R}}$  и меняя дифференцирование с  $\mathbf{r}'$  на  $\mathbf{r}$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r})}{\partial t} &= \frac{1}{\pi} \int \left[ \tilde{\mathbf{R}} \times \text{rot}'_2 \mathbf{E}(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int \text{rot}'_2 \left[ \tilde{\mathbf{R}} \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' = \\ &= \frac{1}{\pi} \int \text{rot}_2 \left[ \tilde{\mathbf{R}} \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' = \\ &= \frac{1}{\pi} \text{rot}_2 \left( \int \left[ \frac{\mathbf{R}}{R^3} \times u(\mathbf{r}')\mathbf{j}(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' \right) \quad (7) \end{aligned}$$

(стрелка означает, что  $\text{rot}'_2$  действует только на вектор  $\tilde{\mathbf{R}}$ ).

Рассмотрим динамику магнитного момента  $\mathbf{M}$ , образуемого вихревыми токами  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ ,

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2c} \int [\mathbf{r} \times \mathbf{j}] d\mathbf{r}.$$

Производная по времени от  $\mathbf{M}$ , согласно (7), будет определяться выражением

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \frac{1}{2\pi c} \int [\mathbf{r} \times [\tilde{\mathbf{R}} \times \text{rot}'_2 \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}')] ] d\mathbf{r}' d\mathbf{r}.$$

Раскрывая двойное векторное произведение, получаем

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\frac{1}{2\pi c} \int \text{rot}'_2 \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}') (\mathbf{r} \cdot \tilde{\mathbf{R}}) d\mathbf{r}' d\mathbf{r}.$$

Проводя интегрирование по частям по  $d\mathbf{r}'$  и считая, что на бесконечности электрическое поле достаточно быстро стремится к нулю (критерий для этого будет получен в следующем разделе), можно получить

$$\frac{dM_i}{dt} = \frac{1}{2\pi c} \varepsilon_{ikl} \int \tilde{E}_l(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{R} d\mathbf{r}' d\mathbf{r},$$

где  $\varepsilon_{ikl}$  — единичный антисимметричный псевдотензор. Перенося дифференцирование с  $\mathbf{r}'$  на  $\mathbf{r}$  и учитывая, что

$$\int \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{R} d\mathbf{r} = 0,$$

получаем закон сохранения магнитного момента для системы замкнутых токов на проводящей плоскости:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = 0. \quad (8)$$

### 3. РАСТЕКАНИЕ ТОКА В ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ СИСТЕМЕ

Любая ограниченная замкнутая конфигурация плоских токов (токовый вихрь) со временем по мере растекания будет становиться осесимметричной, с центром, совпадающим с первоначальной локализацией этого вихря. В этом случае для больших времен имеем  $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = j(r)\mathbf{e}_\varphi$ , и уравнение (7), определяющее динамику растекания тока, можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial j}{\partial t} &= \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} u(r') j(r') \times \\ &\times \frac{r' - r \cos \varphi}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \varphi)^{3/2}} r' d\varphi dr' = \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^\infty \int_0^\pi u(rw) j(rw) \times \\ &\times \frac{w - \cos \varphi}{(w^2 + 1 - 2w \cos \varphi)^{3/2}} d\varphi w dw, \end{aligned}$$

где  $w = r'/r$ . Интеграл по углу  $\varphi$  дает

$$\frac{\partial j}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \int_0^\infty u(rw) j(rw) D(w) dw, \quad (9)$$

где

$$D(w) = \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{w+1} K\left(\frac{2\sqrt{w}}{w+1}\right) + \frac{1}{w-1} E\left(\frac{2\sqrt{w}}{w+1}\right) \right).$$

Здесь  $K(w)$  и  $E(w)$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно. Функцию  $D(w)$  после некоторых преобразований можно переписать в виде

$$D(w) = \frac{4}{\pi} \begin{cases} K(w) + \frac{E(w)}{w^2 - 1}, & w < 1, \\ \frac{w}{w^2 - 1} E\left(\frac{1}{w}\right), & w > 1. \end{cases}$$

Важным свойством функции  $D(w)$  является то, что

$$\int_0^\infty \frac{D(w)}{w^2} dw = 0.$$

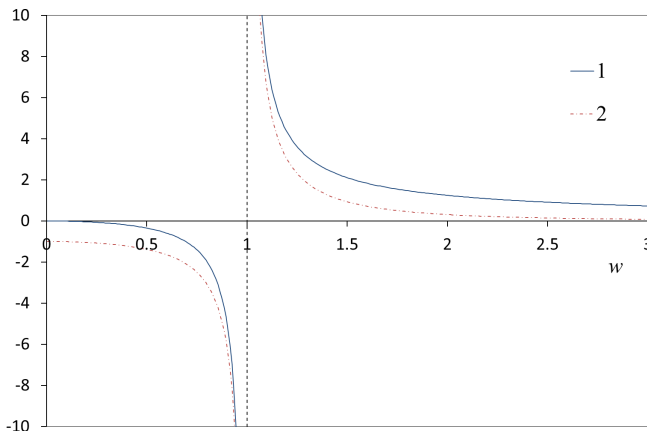


Рис. 2. Графики функций  $D(w)$  (1) и  $D(w)/w^2$  (2)

Пользуясь этим свойством, можно показать, что уравнение (9), в соответствии с (8), удовлетворяет закону сохранения полного магнитного момента

$$\frac{dM}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{c} \int_0^\infty j(r) r^2 dr = \frac{1}{c} \int_0^\infty \frac{\partial j}{\partial t} r^2 dr = 0.$$

Графики функций  $D(w)$  и  $D(w)/w^2$  представлены на рис. 2. Величина  $D(w) \simeq -w^2$  при малых  $w$  и  $D(w) \simeq 2/w$  при больших  $w$ .

Зная  $j(r)$ , из закона Био–Савара (1) в нашем осесимметричном случае можно найти магнитное поле на плоскости,  $B_z(r) \equiv B(r)$ :

$$B(r) = \frac{\pi}{c} \int_0^\infty j(rw) D(w) dw.$$

Рассмотрим, как ведет себя  $j(r)$  на больших расстояниях  $r \gg 1$ . Большие  $r$  в интеграле (9) соответствуют малым  $w$ . Но  $D(w) \propto w^2$  при малых  $w$ , а значит, интеграл в (9) пропорционален  $1/r^3$  и, следовательно,  $\partial j/\partial t \propto 1/r^4$  и, можно думать, что на больших расстояниях  $j \propto 1/r^4$ .

Для того чтобы выполнялся закон сохранения магнитного момента, электрическое поле на больших расстояниях должно убывать быстрее, чем  $1/r^2$  (изменения магнитного момента приводят к такой зависимости от  $r$  для вектор-потенциала, а следовательно, и электрического поля). Поскольку, согласно закону Ома, электрическое поле  $E \propto uj$ , для сохранения магнитного момента, казалось бы, необходимо, чтобы на больших расстояниях  $u$  росло медленнее, чем  $r^2$ . Однако фактически, если на больших расстояниях  $u \propto r^\alpha$ , то при  $\alpha > 1$  ток и магнитный момент могут за конечное время перебраиваться на бесконечность (это следует из оценки

$dr/dt \propto u \propto r^\alpha$ ; одновременно при  $\alpha > 1$  оценка интеграла (9) для больших  $r$  приводит к расходимости). Таким образом, следует считать, что при  $\alpha > 1$  магнитный момент не сохраняется. Тогда плотность тока будет экспоненциально затухать в зависимости от времени, а на больших  $r$ , поскольку электрическое поле ведет себя, как  $1/r^2$ , плотность тока будет  $j \propto 1/r^{2+\alpha}$ .

### 3.1. Автомоделное решение

Рассмотрим случай постоянной проводимости слоя,  $u = \text{const}$ . Поскольку в этом случае для больших времен характерные расстояния меняются как  $r \propto ut$ , а магнитный момент  $M$  сохраняется,  $M = \text{const}$ , для больших  $t$  следует искать решение в виде

$$j = \frac{c}{\pi} \frac{M}{(ut)^3} \tilde{j}(\xi),$$

где  $\xi = r/ut$  — безразмерная автомоделная переменная, а  $\tilde{j}(\xi)$  — безразмерная автомоделная плотность тока. Из (9) получаем уравнение для  $\tilde{j}(\xi)$ :

$$\xi \tilde{j}'(\xi) + 3\tilde{j}(\xi) + \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^\infty \tilde{j}(\xi w) D(w) dw = 0.$$

Мы нашли точное аналитическое решение этого уравнения. Решением этого уравнения для плотности тока  $\tilde{j}(\xi)$ , нормированной на автомоделный магнитный момент,

$$\int_0^\infty \tilde{j}(\xi) \xi^2 d\xi = 1,$$

является функция

$$\tilde{j}(\xi) = -\frac{d}{d\xi} \frac{\beta}{2} \frac{1}{(1 + \beta \xi^2)^{3/2}} = \frac{3\beta^2}{2} \frac{\xi}{2(1 + \beta \xi^2)^{5/2}}$$

при  $\beta = 1/4$ , т. е.

$$\tilde{j}(\xi) = \frac{3}{32} \frac{\xi}{(1 + \xi^2/4)^{5/2}}.$$

Эта величина представлена на рис. 3. Плотность тока линейно растет при малых  $\xi$ , достигает максимума при  $\xi = 1$  и убывает как  $1/\xi^4$  на больших  $\xi$ .

Магнитное поле на поверхности в автомоделных переменных определяется формулой

$$B(r) = \frac{M}{(ut)^3} b(\xi).$$

Безразмерная величина магнитного поля

$$b(\xi) = \int_0^\infty \tilde{j}(\xi w) D(w) dw,$$

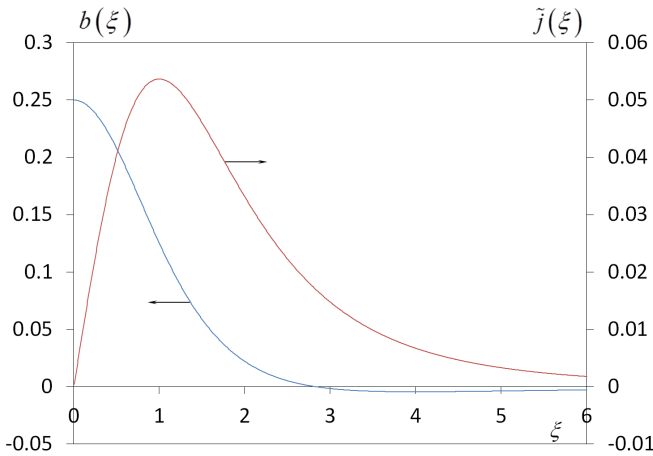


Рис. 3. Автомоделная плотность тока  $\tilde{j}(\xi)$  и магнитное поле  $b(\xi)$  токового вихря

соответствующая току  $\tilde{j}(\xi)$ , равна

$$b(\xi) = \beta \frac{1 - \beta\xi^2/2}{(1 + \beta\xi^2)^{5/2}} = \frac{1}{4} \frac{1 - \xi^2/8}{(1 + \xi^2/4)^{5/2}}$$

и также показана на рис. 3. Магнитное поле максимально при  $\xi = 0$ , меняет направление при  $\xi = 2\sqrt{2}$ , а на больших расстояниях ведет себя как  $1/\xi^3$ .

#### 4. СИСТЕМА ПЛОСКИХ ФОЛЬГ. ОДНОМЕРНОЕ РАССМОТРЕНИЕ

##### 4.1. Постановка задачи

В одномерном случае, когда все величины зависят только от  $x$ , а  $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = j(x)\mathbf{e}_z$ , уравнение (7) сводится к полученному нами ранее [9] уравнению

$$\frac{\partial j}{\partial t} = -\frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{u(x')j(x')}{x - x'}. \quad (10)$$

Это уравнение может использоваться для расчетов распределения токов в плоских токовых слоях, в том числе и для систем плоских фольг типа «змеек». Интересно отметить, что из дивергентного характера уравнения (10) следует, что для локализованного распределения тока и неограниченного по пространству распределения ненулевой проводимости (т. е. не обращающейся в бесконечность скорости  $u$ ) полный ток по системе  $\int_{-\infty}^{\infty} j dx$  сохраняется. Таким образом, это уравнение особенно удобно использовать в задачах с поддерживаемым в системе током.

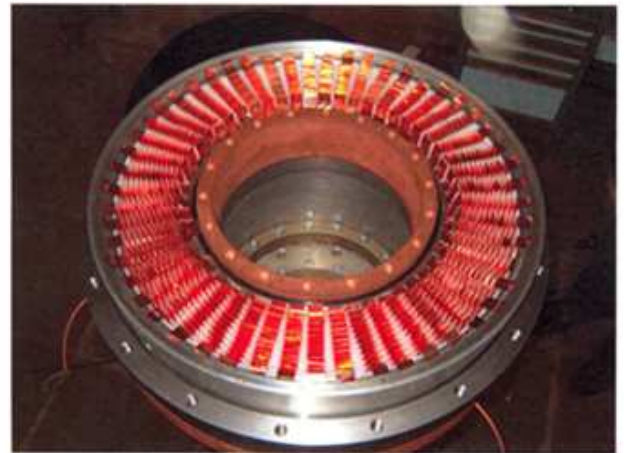


Рис. 4. Электровзрывной размыкатель тока типа «змеек» для обострения тока в ВМГ

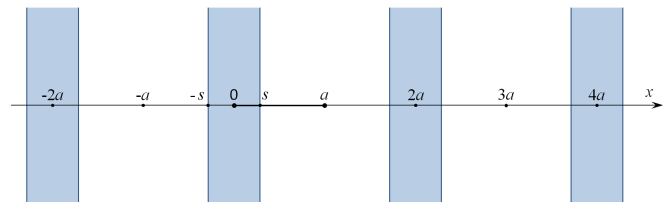


Рис. 5. Система периодических плоских фольг

Мы будем решать задачу для распределения токов в плоских токовых слоях, в том числе и для систем плоских фольг типа «змеек» (рис. 4). Предположим, что имеется бесконечная периодическая система плоских фольг шириной  $2s$ , находящихся на расстояниях  $2(a - s)$  друг от друга (рис. 5). Период системы по координате  $x$  равен  $2a$ . В частном случае  $a \rightarrow \infty$  система превращается в уединенную фольгу, а малые расстояния между фольгами  $2(a - s)$  будут соответствовать почти сплошной фольге.

Будем считать, что полный ток по системе постоянен в каждом из полупериодов, проводимость в области между фольгами мала и, соответственно, скорость  $u_v$  очень велика,  $u_v \gg u$ . Мы хотим промоделировать ситуацию, когда в начальный момент времени ток быстро распределяется по ширине фольги так, как если бы она вначале была практически сверхпроводящей, а затем уже более медленно (со скоростью  $u$ ) стремится распределиться равномерно по ширине фольги. Для такого моделирования задачу можно поставить так: вначале ток  $j$  вообще равномерно распределен по системе. В этом случае в начальный момент времени нормальная компонента магнитного поля  $B_y$  везде, в том числе и на по-

верхности фольги, равна нулю. Затем ток быстро, со скоростью  $u_v \gg u$ , перераспределится, но на поверхности фольги нормальная компонента  $B_y$  останется равной нулю, поскольку по фольге ток распределяется более медленно, со скоростью  $u$ . Таким образом, в данной задаче мы сможем узнать, как распределяется ток по почти сверхпроводящей фольге (на малых временах) и как будет перераспределяться и выравниваться ток по фольге на больших временах. Такой прием для описания динамики распределения тока по фольге является в некоторой степени искусственным, однако он позволяет, оставаясь в рамках одномерной задачи, описать динамику распределения токов по фольге, начиная с малых времен и до полного выравнивания тока.

В частности, мы сможем получить ответ на вопрос о том, как будет меняться от времени эффективное сопротивление фольги и насколько точно предположение о том, что ток по фольге распределяется равномерно. Эффективное сопротивление фольги в рассматриваемой системе определяется электрическим полем в центре фольги, поскольку именно это электрическое поле соответствует уходу магнитного потока из системы и, соответственно, передаче магнитного потока в нагрузку.

### 4.2. Расчетная методика

С учетом периодичности рассматриваемой задачи перепишем выражение (10) в виде

$$\frac{\partial j(x,t)}{\partial t} = \frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^a \frac{d\xi}{\xi} (u(x+\xi)j(x+\xi,t) - u(x-\xi)j(x-\xi,t)) \times \left(1 - \frac{\xi}{2a} \left(\psi\left(1 + \frac{\xi}{2a}\right) - \psi\left(1 - \frac{\xi}{2a}\right)\right)\right), \quad (11)$$

где  $\xi = x' - x$ ,  $\psi$  — пси-функция Эйлера. Таким образом, от интегрирования по бесконечной прямой в (10) мы перешли к интегрированию по конечному отрезку  $(0, a)$  в (11).

Перейдем к безразмерным переменным, взяв за единицу измерения длины полуширину фольги  $s$ , за единицу измерения скорости — скорость  $u$ ; в этом случае время будет измеряться в единицах  $s/u$ .

В соответствии с вышесказанным для моделирования с первоначальным распределением магнитного поля, которое в начальный момент не должно иметь нормальной компоненты на фольге, в числен-

ных расчетах интегро-дифференциального уравнения растекания тока (11) в начальный момент времени  $t = 0$  задавалось равномерное распределение тока по координате  $x$ . Для удобства нормировки мы задавали плотность тока таким образом, чтобы полный ток по отрезку  $(0, a)$  был равен единице:

$$\int_0^a j(x,0) dx = 1,$$

т. е. чтобы плотность тока в начальный момент времени была равна

$$j(x,0) = 1/a.$$

В нашей задаче между фольгами располагался вакуум или диэлектрик, поэтому величина  $u_v$  в вакууме задавалась значительно большей, чем внутри фольги,  $u_v(s < x < a) = 10^4$ .

### 4.3. Результаты расчетов

Плотность тока  $j(x,t)$  в фольге, полученная в расчете с  $a = 2$  на различные моменты времени, представлена на рис. 6.

На рис. 6 видно, что ток  $j(x,t)$  в фольге при малых временах распределяется так же, как и в сверхпроводящей фольге, и имеет особенность вида  $1/\sqrt{1-x/s}$  (стандартную для задач с решением уравнением Лапласа в плоском случае вблизи границы отрезка [10]) вблизи границы фольги  $x = s$ , т. е. концентрируется вблизи границы, а затем стремится к равномерному распределению по ширине фольги. К моменту времени  $t = 1$  распределение тока уже близко к равномерному.

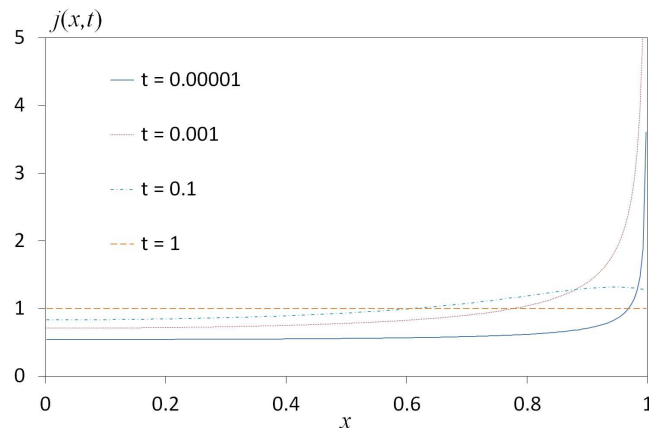


Рис. 6. Плотность тока в фольге в расчете с  $a = 2$  на различные моменты времени

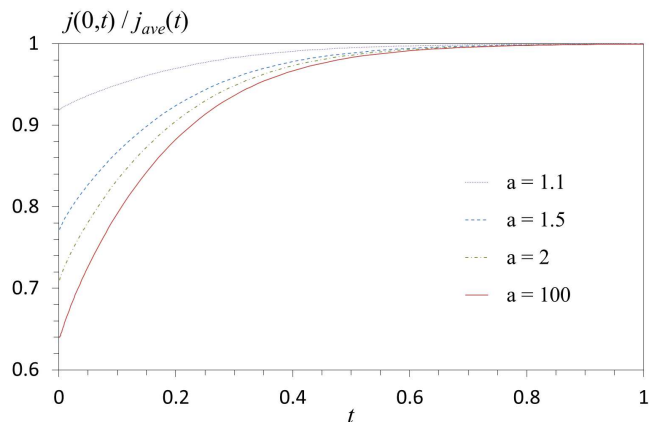


Рис. 7. Зависимость от времени отношения плотности тока при  $x = 0$  к среднему значению тока в фольге  $j_{ave}(t)$  для различных расстояний между фольгами

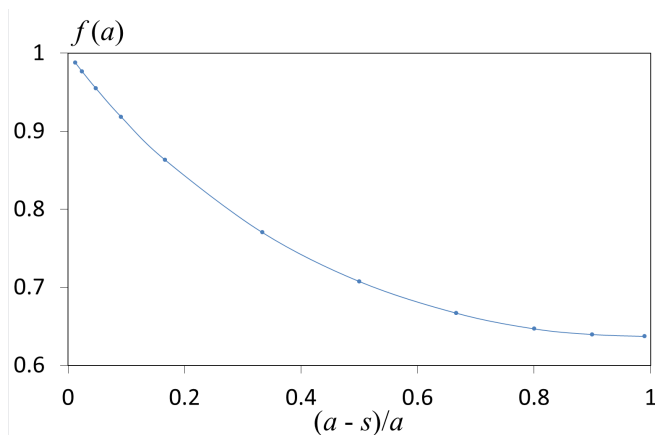


Рис. 8. Величина  $f(a)$  для различных значений  $(a - s)/a$

На рис. 7 показана зависимость от времени отношения плотности тока при  $x = 0$  к среднему значению тока в фольге  $j_{ave}(t)$ . В момент начала счета, согласно постановке задачи, эта величина равна единице, однако очень быстро достигает минимума. На рис. 7 данные начальные участки не показаны, поскольку при увеличении  $u_v$  эти временные интервалы уменьшаются. В дальнейшем с течением времени величина  $j(0,t)/j_{ave}(t)$  возрастает и стремится к единице по мере выравнивания тока.

На рис. 8 представлена величина  $f(a)$ , равная значению при  $t = 0$  функции, полученной экстраполяцией до  $t = 0$  зависимости  $j(0,t)/j_{ave}(t)$ , у которой отброшены значения при малых  $t$ , т. е. по существу отношение тока в центре фольги к среднему току по фольге для сверхпроводящих фольг. По оси абсцисс отложена величина  $(a - s)/a$ , равная доле вакуумной области в полупериоде  $a$ .

Для самого большого полупериода  $a$ , для которого проводились расчеты ( $a = 100$ ), значение  $f(a)$  равно 0.637, что очень близко к зна-

чению  $2/\pi \approx 0.6366$  для изолированной фольги. При уменьшении расстояния между фольгами величина  $f(a)$  медленно увеличивается. Например,  $f(2) = 0.708$ . По мере сближения фольг функция  $f(a)$  линейно стремится к единице.

#### 4.4. Некоторые оценки для системы типа «змеек»

Для системы типа «змеек», применяемой в работе [3], внутренний радиус серпантина  $R_1 = 15.5$  см, период  $2a = 1.87$  см, ширина фольги  $2s = 1.6$  см, зазоры между фольгами  $2(a - s) = 0.27$  см. Тогда  $(a - s)/a = 0.144$  и соответствующее уменьшение эффективного сопротивления (см. рис. 8)  $f = 0.877$ . Для внешнего радиуса серпантина  $R_2 = 22.8$  см имеем зазоры  $2(a - s) = 1.16$  см и  $(a - s)/a = 0.42$ ,  $f = 0.734$ . Система фольг удалена от генератора и нагрузки на расстояние  $d$ , большее 10 см, так что условие для рассмотрения системы фольг как отдельного узла,  $d \gg s$ , выполняется. Оценим время выравнивания тока и необходимость учета неравномерности его распределения для работы фольгового размыкателя.

Выравнивание тока, согласно рис. 7, происходит за безразмерное время 0.13–0.14 (для которого разница между величиной  $j(0,t)/j_{ave}(t)$  и единицей уменьшается в 2 раза), и оно не сильно зависит от величины  $(a - s)/a$ .

Для медной фольги [3] в начальном состоянии величина  $u = c^2/4\pi\sigma\Delta = 8.92 \cdot 10^4$  см/с. Если  $2s = 1.6$  см, то безразмерному времени 1 соответствует размерное время  $s/u = 9 \cdot 10^{-6}$  с, значит, характерное время выравнивания тока порядка  $10^{-6}$  с. Само по себе время выравнивания оказывается сравнимым и даже большим времени переброса тока в этом размыкателе и, казалось бы, могло потребовать введения поправок  $f \approx 0.88$ ,  $f \approx 0.73$  к эффективному сопротивлению. Однако фактически сопротивление фольг в размыкателе за счет нагрева при протекании тока растет значительно (скорость  $u$  может возрастать на два порядка). Поэтому токи по ширине фольги практически выравниваются и, соответственно, нет необходимости вводить поправки на неоднородность распределения тока по ширине фольги.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Эволюцию двумерного распределения токов в неоднородных тонких проводящих слоях или фольгах можно описывать с помощью интегро-дифференциального уравнения, что позволяет свести

трехмерную задачу для магнитного поля к двумерной, а для распределения токов по ширине неоднородных проводящих фольг двумерная задача для магнитного поля сводится к одномерной. Показано, что в двумерном случае для замкнутой системы токов сохраняется магнитный момент этой системы.

Замкнутая система токов при больших временах становится азимутально симметричной. Для этого случая получены интегро-дифференциальное уравнение и его автомодельное решение, для которого сохраняется магнитный момент, а пространственные масштабы растут линейно со временем.

Рассмотрена задача о распределении токов для систем плоских фольг типа «змеек». Для описания эволюции распределения токов при фиксированном полном токе через систему следует считать, что в начальный момент плотность тока является постоянной по всей системе, включая промежутки между фольгами, а затем происходит быстрая релаксация этого распределения со скоростью  $u_v \gg u$ . В результате в фольге быстро устанавливается распределение тока, соответствующее идеальной проводимости фольги. Затем за времена  $s/u$  происходит релаксация распределения тока в фольге к равномерному.

Проведены расчеты распределения тока по фольге для разных значений  $a/s$ . Показано, что на стадии быстрого включения тока эффективное сопротивление фольги не очень значительно отличается от сопротивления, вычисленного в предположении равномерного распределения тока. Наибольшее различие имеет место для далеко разнесенных фольг. На стадии релаксации распределения тока к равномерному величина  $j(0, t)/j_{ave}(t)$  стремится к единице, причем характерное время этого выравнивания составляет  $(0.13-0.14)s/u$  и слабо зависит от значений зазоров между фольгами.

Оценки показывают, что если фольги используются в качестве размыкателей, то токи по фольгам

в процессе переброса тока в нагрузку должны успевать распределяться равномерно по их ширине. Поэтому поправки на неоднородность распределения тока в размыкателях должны быть невелики.

Однако для плоских токовых слоев рассмотренные в работе распределения тока и их эволюция могут играть важную роль, в том числе в развитии тиринг-неустойчивости этих слоев.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Бурцев, Н. В. Калинин, А. В. Лучинский, *Электрический взрыв проводников и его применение в электрофизических установках*, Энергоиздат, Москва (1990).
2. А. М. Buyko, J. Appl. Mech. Tech. Phys. **56**, 114 (2015).
3. А. А. Базанов, Е. И. Бочков, С. Г. Гаранин и др., ДАН **489**, 355 (2018).
4. S. F. Garanin and S. D. Kuznetsov, J. Appl. Phys. **123**, 133301 (2018).
5. Е. Б. Татарина, К. В. Чукбар, ЖЭТФ **92**, 809 (1987).
6. М. И. Дьяконов, А. С. Фурман, ЖЭТФ **92**, 1012 (1987).
7. В. В. Смирнов, К. В. Чукбар, Физика плазмы **25**, 610 (1999).
8. К. В. Чукбар, *Лекции по явлениям переноса в плазме*, ИД «Интеллект», Долгопрудный (2008).
9. S. F. Garanin, E. M. Kravets, and V. Yu. Dolinskiy, IEEE Trans. Plasma Sci. **48**, 4279 (2020).
10. С. Ф. Гаранин, С. Д. Кузнецов, УФН **190**, 1109 (2020).