

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ГЕЙЗЕНБЕРГОВСКОГО ФЕРРОМАГНЕТИКА НА ПОЛУОСИ

*В. В. Киселев**

*Институт физики металлов им. М. Н. Михеева Уральского отделения Российской академии наук
620041, Екатеринбург, Россия*

*Физико-технологический институт, Уральский федеральный университет
620002, Екатеринбург, Россия*

Поступила в редакцию 6 октября 2022 г.,
после переработки 8 ноября 2022 г.
Принята к публикации 8 ноября 2022 г.

В рамках модели Ландау–Лифшица методом обратной задачи рассеяния изучена нелинейная динамика полубесконечного изотропного ферромагнетика при частичном закреплении спинов на краю образца, а также в предельных случаях полного закрепления поверхностных спинов и в отсутствие такового. Предсказаны два типа солитонов. Первые из них представляют локализованные около поверхности образца колебания намагниченности с дискретными частотами. Второй класс содержит движущиеся частицеподобные объекты с деформируемыми ядрами, которые упруго отражаются от границы образца и на больших расстояниях от нее принимают форму типичных солитонов протяженного ферромагнетика. Найдены условия образования поверхностных солитонов. Проанализированы особенности столкновения солитонов с границей образца при разных степенях закрепления спинов на поверхности. Получена серия новых законов сохранения, которые гарантируют выполнение солитонами требуемых краевых условий, обеспечивают локализацию солитонов около поверхности образца или же отражение от нее.

DOI: 10.31857/S0044451023030094
EDN: QEPНВW

1. ВВЕДЕНИЕ

Многие нелинейные модели теории магнетизма допускают представление в виде условия коммутативности двух дифференциальных операторов [1]. Такое представление (L – A -пара) позволяет с помощью метода обратной задачи рассеяния аналитически описать многообразие магнитных солитонов и нелинейных волн в протяженных образцах. К сожалению, эта техника мало пригодна для образцов конечных размеров. Поэтому к настоящему времени свойства солитонов вблизи границ образцов практически не изучены. Между тем, ядра солитонов не являются жесткими. В ходе взаимодействия с поверхностью образца солитоны меняют свою структуру и динамические свойства. В нелинейно-упругих стержнях экспериментально наблюдается отраже-

ние солитонов от концов стержня [2]. Такие же явления должны сопутствовать движению солитонов в магнитных пленках [3].

Для моделей, допускающих L – A -пару, полное решение начально-краевых задач на полуоси (при $0 \leq x < \infty$, где x — пространственная координата), возможно лишь для выделенного класса граничных условий, которые называют интегрируемыми [4–7]. При таких условиях задача на полуоси по определенной симметрии продолжается на всю ось $-\infty < x < \infty$ и далее решается техникой обратной задачи рассеяния, которая является обобщением метода изображений, используемого в электростатике для решения краевых задач с определенной пространственной симметрией.

Далее мы будем следовать процедуре, предложенной для построения решений нелинейного уравнения Шредингера на интервале $0 \leq x < \infty$ с интегрируемыми краевыми условиями [8, 9]. Преимущество метода — не только в прямой связи с традиционной схемой метода обратной задачи рассеяния, но и в том, что в отличие от других подходов [5, 10], он открывает принципиальную возмож-

* E-mail: kiseliev@imp.uran.ru

ность полного описания квазиодномерных магнитных солитонов и спиновых волн в полубезграничных образцах. Для гейзенберговского ферромагнетика и ферромагнетиков с квадратичной по намагниченности анизотропией допустимый класс интегрируемых граничных условий установлен в работе [11].

В настоящей работе мы изучим квазиодномерные солитоны и спиновые волны в полубесконечном образце гейзенберговского ферромагнетика с энергией

$$H = \frac{\alpha}{2} \int_0^{\infty} dx (\partial_x \mathbf{M})^2 + \beta M_3(x=0, t).$$

Здесь $\mathbf{M}(x, t)$ — намагниченность среды (причем $\mathbf{M}^2(x, t) = M_0^2 = \text{const}$), $\alpha > 0$ — обменная постоянная, $\beta \mathbf{e}$ — внешнее магнитное поле вдоль края $x = 0$ образца или эффективное поле поверхностных спинов, $\mathbf{e} = (0, 0, 1)$, $0 \leq x < \infty$ и $0 \leq t < \infty$ — пространственная координата и время.

Введем нормированный вектор ферромагнетизма $\mathbf{n} = -\mathbf{M}/M_0$ и с помощью масштабных преобразований

$$x' = x/\sqrt{\alpha}, \quad t' = \gamma M_0 t, \quad \beta' = \beta/(M_0 \sqrt{\alpha})$$

перейдем к безразмерным переменным. Тогда энергия системы примет вид

$$H' = \frac{H}{M_0^2 \sqrt{\alpha}} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} dx' (\partial_{x'} \mathbf{n})^2 - \beta' n_3(x' = 0, t'). \quad (1)$$

Распределениям намагниченности в образце соответствуют решения уравнения Ландау – Лифшица:

$$\partial_{t'} \mathbf{n} = [\mathbf{n} \times \partial_{x'}^2 \mathbf{n}], \quad \mathbf{n}^2 = 1, \quad (2)$$

где $0 \leq x' < \infty$, $0 \leq t' < \infty$, с интегрируемыми краевыми условиями

$$\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{e}, \quad \partial_x \mathbf{n} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x' \rightarrow +\infty, \quad (3)$$

$$[\mathbf{n} \times (\partial_{x'} \mathbf{n} + \beta' \mathbf{e})]_{|x'=0} = 0 \quad (4)$$

и заданным начальным возмущением поля намагниченности:

$$\mathbf{n}(x', t' = 0) = \mathbf{n}_0(x'). \quad (5)$$

Далее «штрихи» над безразмерными переменными опускаем.

При конечных значениях $\beta \neq 0$ смешанное краевое условие (4) учитывает частичное закрепление

спинов на границе $x = 0$ образца. При $\beta = 0$ оно отвечает задаче при свободных краевых спинах:

$$[\mathbf{n} \times \partial_x \mathbf{n}]_{|x=0} = 0. \quad (6)$$

При $|\beta| \rightarrow \infty$ условие (4) соответствует полному закреплению спинов на границе образца:

$$n_3|_{x=0} = \pm 1. \quad (7)$$

Выбор знака в правой части (7) конкретизируем в ходе дальнейшего анализа.

Отметим, что в работе [12] было предсказано и проанализировано простейшее нелинейное возбуждение, локализованное вблизи конца полуграниченной спиновой цепочки. Рассмотренная модель в континуальном приближении эквивалентна уравнению Ландау – Лифшица для ферромагнетика со слабой анизотропией типа «легкая ось». Ее приближенное решение найдено при динамическом краевом условии, учитывающем отсутствие у краевого спина соседей в области $x < 0$. В данной работе обсуждается нелинейная динамика изотропного ферромагнетика на полуоси $0 < x < \infty$ с краевыми условиями, которые описывают частичное закрепление спинов на границе образца.

Статья организована следующим образом. В разд. 2 приведены формулы, необходимые для аналитического описания солитонов и волн в полубесконечном гейзенберговском ферромагнетике. В разд. 3 построены и исследованы два новых класса солитонов. Первый из них содержит мультисолитоны, локализованные вблизи границы $x = 0$ образца. Они обладают специфическими частотами и особенностями модуляции. Второй класс — это движущиеся частицеподобные объекты, которые испытывают упругие столкновения друг с другом и с границей образца. В разд. 4 выполнено разделение переменных, после которого все интегралы движения в полубесконечном образце записываются в виде суммы дискретных вкладов от солитонов и квазичастиц непрерывного спектра спиновых волн. Найдены дополнительные законы сохранения, которые гарантируют выполнение солитонами верных краевых условий.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Для включения начально-краевой задачи (2)–(5) в классическую схему метода обратной задачи рас-

сеяния поле $\mathbf{n}(x, t)$ продолжим четным образом на отрицательную полуось:

$$\mathbf{S}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{n}(x, t), & x \geq 0, \\ \mathbf{n}(-x, t), & x < 0. \end{cases} \quad (8)$$

Полученное распределение $\mathbf{S}(x, t)$ будет непрерывным, но его производные могут иметь скачки в точке $x = 0$. Новое поле $\mathbf{S}(x, t)$, как и прежнее $\mathbf{n}(x, t)$, удовлетворяет уравнению Ландау – Лифшица (2) при $x \neq 0$. Краевое условие (4) для $\mathbf{n}(x, t)$ в терминах $\mathbf{S}(x, t)$ принимает смысл связи:

$$[\mathbf{S} \times (\Delta \partial_x \mathbf{S} + 2\beta S_3 \mathbf{e})]_{x=0} = 0, \quad (9)$$

где

$$S_3|_{x=0} = n_3|_{x=+0}, \\ \Delta \partial_x \mathbf{S} = \partial_x \mathbf{n}|_{x=+0} - \partial_x \mathbf{n}|_{x=-0} = 2\partial_x \mathbf{n}|_{x=+0}.$$

Напомним, что в отсутствие связи (9), когда все производные функции $\mathbf{S}(x, t)$ непрерывны в точке $x = 0$, уравнение Ландау – Лифшица для расчета поля $\mathbf{S}(x, t)$ на оси $-\infty < x < \infty$ эквивалентно условию коммутативности двух операторов [13]:

$$[\partial_x - L, \partial_t - A] = 0, \quad (10)$$

где

$$L = \frac{\lambda}{2i} S_k \sigma_k, \quad A = \frac{1}{2i} (-\lambda^2 S_p + \lambda[\mathbf{S} \times \partial_x \mathbf{S}]) \sigma_p,$$

σ_k – матрицы Паули ($k = 1, 2, 3$), по дважды повторяющимся индексам проводится суммирование, λ – комплексный спектральный параметр. Соотношение (10) можно переписать в проинтегрированном виде:

$$\partial_t T_0(x, y, \lambda) = A(x, \lambda) T_0(x, y, \lambda) - T_0(x, y, \lambda) A(y, \lambda). \quad (11)$$

Здесь $T_0(x, y, \lambda)$ – матрица трансляции вдоль оси x . Она определяется уравнением

$$\partial_x T_0(x, y, \lambda) = L(x, \lambda) T_0(x, y, \lambda) \quad (12)$$

с условием $T_0(x, x, \lambda) = I$, где I – единичная матрица. Из уравнения (12) с учетом нормировки T_0 и бесследовости матрицы L следует унимодулярность матрицы трансляции:

$$\det T_0(x, y, \lambda) = 1.$$

Кроме того, $T_0(x, y, \lambda = 0) = I$ при любых значениях x и y . Для упрощения формул здесь и далее,

где это не вызывает недоразумений, не указываем зависимость матричных функций от времени t .

В [11] показано, что связь (9) эквивалентна равенству

$$A_+(\lambda)K(\lambda) - K(\lambda)A_-(\lambda) = 0, \quad (13)$$

где $A_{\pm}(\lambda) \equiv A(x, \lambda)|_{x=\pm 0}$, $K(\lambda) = \lambda I + i\beta\sigma_3$. Следуя [8,9], для учета ограничения (13) модифицируем матрицу трансляции вдоль оси x :

$$T(x, y, \lambda) = \begin{cases} T_0(x, y, \lambda), & xy > 0, \\ T_0(x, +0, \lambda)K(\lambda)T_0(-0, y, \lambda), & x > 0 > y, \\ T_0(x, -0, \lambda)K^{-1}(\lambda)T_0(+0, y, \lambda), & x < 0 < y, \end{cases} \quad (14)$$

Новая матрица переноса не является унимодулярной:

$$\det T(x, y, \lambda) = [\lambda^2 + \beta^2]^{(\text{sign } x - \text{sign } y)/2}. \quad (15)$$

Для нее справедливы соотношения

$$\begin{aligned} T(x, x, \lambda) &= I \quad \text{при } x \neq 0, \\ T(x, y, \lambda) &= T^{-1}(y, x, \lambda), \\ T(+0, -0, \lambda) &= T^{-1}(-0, +0, \lambda) = K(\lambda). \end{aligned} \quad (16)$$

Важно, что коммутационное представление (10) уравнения Ландау – Лифшица при $x \neq 0$:

$$\partial_t \mathbf{S} = [\mathbf{S} \times \partial_x^2 \mathbf{S}], \quad \mathbf{S}^2 = 1, \quad (17)$$

вместе со связью (9) эквивалентны уравнениям

$$\begin{aligned} \partial_x T(x, y, \lambda) &= L(x, \lambda)T(x, y, \lambda), \\ \partial_y T(x, y, \lambda) &= -T(x, y, \lambda)L(y, \lambda), \\ \partial_t T(x, y, \lambda) &= A(x, \lambda)T(x, y, \lambda) - T(x, y, \lambda)A(y, \lambda), \end{aligned} \quad (18)$$

которые совпадают с таковыми для прежней матрицы переноса $T_0(x, y, \lambda)$ в случае дифференцируемого поля $\mathbf{S}(x, t)$. Это позволяет включить краевую задачу (2)–(5) на полуоси в схему обратной задачи рассеяния на всей оси $-\infty < x < \infty$.

Введем матричные функции Йоста прямой задачи рассеяния:

$$\begin{aligned} T_{\pm}(x, \lambda, t) &= \lim_{y \rightarrow \pm \infty} \left[T(x, y, \lambda) \exp\left(-\frac{i\lambda y}{2} \sigma_3\right) \right], \\ \det T_{\pm}(x, \lambda) &= [\lambda^2 + \beta^2]^{(\text{sign } x \mp 1)/2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Они служат базисными решениями вспомогательной линейной системы

$$\partial_x T_{\pm} = L(\lambda) T_{\pm} \quad (20)$$

с асимптотиками

$$T_{\pm}(x, t, \lambda) \rightarrow \exp\left(-\frac{i\lambda x \sigma_3}{2}\right) \quad \text{при } x \rightarrow \pm\infty, \tag{21}$$

которые согласованы с краевым условием (3) для уравнения Ландау – Лифшица (2) при $x \rightarrow +\infty$.

Свойства симметрии матриц $K(\lambda)$, $A(\lambda)$, $L(\lambda)$

$$\begin{aligned} K^*(\lambda^*) &= \sigma_2 K(\lambda) \sigma_2, \\ A^*(\lambda^*) &= \sigma_2 A(\lambda) \sigma_2, \\ L^*(\lambda^*) &= \sigma_2 L(\lambda) \sigma_2 \end{aligned}$$

приводят к первому ограничению на решения Йоста:

$$T_{\pm}^*(x, \lambda^*) = \sigma_2 T_{\pm}(x, \lambda) \sigma_2, \tag{22}$$

которое совпадает с таковым для поля $\mathbf{S}(x, t)$ без особенности в точке $x = 0$.

Четность продолжения (8) проявляется в дополнительной симметрии матриц:

$$\begin{aligned} A(-x, -\lambda) &= A(x, \lambda), \\ L(-x, -\lambda) &= -L(x, \lambda), \\ (\lambda^2 + \beta^2)K^{-1}(\lambda) &= -K(-\lambda), \end{aligned}$$

которая дает вторую редукцию для решений Йоста:

$$T_{\pm}(x, \lambda) = \pm \text{sign } x T_{\mp}(-x, -\lambda) [\lambda^2 + \beta^2]^{(\text{sign } x \mp 1)/2}. \tag{23}$$

На вещественной λ -оси решения Йоста связаны матрицей перехода $T(\lambda)$:

$$T_-(x, \lambda) = T_+(x, \lambda) T(\lambda). \tag{24}$$

Ее алгебраическую структуру определяют свойства (19), (22), (23)

$$\begin{aligned} T(\lambda) &= \begin{pmatrix} a(\lambda) & -\bar{b}(\lambda) \\ b(\lambda) & \bar{a}(\lambda) \end{pmatrix}, \\ a(\lambda)\bar{a}(\lambda) + b(\lambda)\bar{b}(\lambda) &= \lambda^2 + \beta^2, \\ \bar{a}(\lambda) &= a^*(\lambda), \quad \bar{b}(\lambda) = b^*(\lambda), \quad a^*(-\lambda) = -a(\lambda), \\ b(-\lambda) &= b(\lambda), \quad \lambda \in R. \end{aligned} \tag{25}$$

Далее мы обоснуем (25) и конкретизируем приведенные в (28), (29) аналитические продолжения с вещественной λ -оси редукций на функции $a(\lambda)$, $\bar{a}(\lambda)$.

Учитывая, что

$$T_0(x, y, \lambda = 0) = I, \quad K(\lambda = 0) = i \sigma_3 \beta,$$

из представлений (14), (19), (24) получаем нормировочное условие для матрицы перехода:

$$T(\lambda = 0) = i \sigma_3 \beta, \tag{26}$$

которое отличается от имевшегося для поля $\mathbf{S}(x, t)$ без особенности в точке $x = 0$ [13].

На вещественной λ -оси функции $T_{\pm}(x, \lambda)$ осциллируют. Поэтому значения $\lambda \in R$ соответствуют непрерывному спектру задачи (20), (21).

Первый $T_-^{(1)}(x, \lambda)$ и второй $T_+^{(2)}(x, \lambda)$ столбцы решений Йоста аналитически продолжаются с вещественной оси в область $\text{Im } \lambda > 0$. Вторым $T_-^{(2)}(x, \lambda)$ и первым $T_+^{(1)}(x, \lambda)$ столбцы будут аналитическими функциями в нижней полуплоскости $\text{Im } \lambda < 0$, кроме, возможно, простых полюсов функции $T_{\pm}(x, \lambda)$ при $x < 0$ в точках $\lambda = \pm i\beta$, унаследованных от матрицы $K^{-1}(\lambda)$ (см. (14), (19)).

Связь решений Йоста (24) приводит к формуле

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= \frac{\det[T_-^{(1)}(x, \lambda), T_+^{(2)}(x, \lambda)]}{\det T_+(x, \lambda)} = \\ &= [\lambda^2 + \beta^2]^{(1 - \text{sign } x)/2} \det[T_-^{(1)}(x, \lambda), T_+^{(2)}(x, \lambda)]. \end{aligned} \tag{27}$$

Отсюда заключаем, что функция $a(\lambda)$ допускает аналитическое продолжение с вещественной λ -оси в область $\text{Im } \lambda > 0$, где в общем случае имеет нули, которые будем предполагать простыми. Кроме того, она может иметь нуль в точке $\lambda = i|\beta|$ (см. (14), (19)). Как и в задаче без особенностей поля $\mathbf{S}(x, t)$ [1, 13], элемент $\bar{a}(\lambda)$ матрицы перехода аналитически продолжается с вещественной λ -оси в область $\text{Im } \lambda < 0$, где выражается через $a(\lambda^*)$ (25):

$$\bar{a}(\lambda) = a^*(\lambda^*). \tag{28}$$

Редукции (22), (23) на решения Йоста порождают дополнительную симметрию элемента $a(\lambda)$ матрицы перехода:

$$a^*(-\lambda^*) = -a(\lambda), \quad \text{Im } \lambda > 0. \tag{29}$$

Следствием (29) будут ограничения на положения нулей $\lambda = \lambda_j$ функции $a(\lambda)$, которых не было в задаче без особенностей поля $\mathbf{S}(x, t)$ в точке $x = 0$. Нули либо являются чисто мнимыми:

$$\lambda_j = \{i\nu_s\}. \quad \nu_s > 0, \quad s = 1, 2, \dots, M, \tag{30}$$

либо входят парами:

$$\begin{aligned} \lambda_j &= \{\lambda_k, -\lambda_k^*\}, \quad \text{Im } \lambda_k > 0, \\ k &= 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, 2N. \end{aligned} \tag{31}$$

Полюсы функции $a(\lambda)$ совпадают с нулями $\bar{a}(\lambda)$. Согласно (28), они находятся в точках $\lambda = \lambda_j^*$.

Из представления (27) следует, что условие $a(\lambda_j) = 0$ означает пропорциональность столбцов $T_-^{(1)}(x, \lambda_j)$ и $T_+^{(2)}(x, \lambda_j)$:

$$T_-^{(1)}(x, \lambda_j) = \gamma(\lambda_j) T_+^{(2)}(x, \lambda_j). \tag{32}$$

Формула (32) определяет столбцы – решения вспомогательной системы (20), которые экспоненциально убывают при $x \rightarrow \pm\infty$. Это означает, что набор чисел $\{\lambda_j\}$ соответствует дискретному спектру прямой задачи рассеяния.

Продолжение комбинации равенств (22), (23) с вещественной λ -оси в комплексную плоскость приводит к дополнительной симметрии:

$$T_{\pm}(x, \lambda) = \pm \text{sign } x \sigma_2 T_{\mp}^*(-x, -\lambda^*) \times \sigma_2 [\lambda^2 + \beta^2]^{(\text{sign } x \mp 1)/2}, \quad (33)$$

где значения λ выбираются в областях аналитичности соответствующих столбцов. В частности, из (33) находим

$$\begin{aligned} T_{-}^{(1)}(x, \lambda) &= -i \text{sign } x \sigma_2 \times \\ &\times T_{+}^{(2)*}(-x, -\lambda^*) [\lambda^2 + \beta^2]^{(\text{sign } x + 1)/2}, \\ T_{+}^{(2)}(x, \lambda) &= -i \text{sign } x \sigma_2 \times \\ &\times T_{-}^{(1)*}(-x, -\lambda^*) [\lambda^2 + \beta^2]^{(\text{sign } x - 1)/2}, \end{aligned} \quad (34)$$

где $\text{Im } \lambda > 0$.

С помощью (34) устанавливаем ограничение на выбор нормировочных множителей γ_j в соотношении (32). Для мнимых нулей функции $a(\lambda)$ имеем

$$|\gamma(i\nu_s)|^2 = \beta^2 - \nu_s^2 > 0, \quad s = 1, 2, \dots, M. \quad (35)$$

Для комплексных нулей (31) получаем

$$\gamma(\lambda_k) \gamma(-\lambda_k^*) = \lambda_k^2 + \beta^2, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (36)$$

Соотношение (35) выполняется только при $|\beta| > \max \nu_s > 0$.

Элемент $a(\lambda)$ матрицы перехода восстанавливается по его нулям, полюсам, коэффициенту отражения $b(\lambda)$ и асимптотическому поведению при больших λ [13]:

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= (\lambda + i\alpha) \prod_{s=1}^M \left(\frac{\lambda - i\nu_s}{\lambda + i\nu_s} \right) \prod_{k=1}^N \frac{(\lambda - \lambda_k)(\lambda + \lambda_k^*)}{(\lambda + \lambda_k)(\lambda - \lambda_k^*)} \times \\ &\times \exp \left(\frac{\lambda}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu \frac{\ln[1 - |b(\mu)|^2 (\mu^2 + \beta^2)^{-1}]}{\mu(\mu - \lambda)} \right), \\ &\text{Im } \lambda > 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Для выполнений нормировочного условия (26) вещественный параметр α в (37) должен быть связан с β равенством

$$\beta = \alpha (-1)^M, \quad (38)$$

которое зависит только от четности числа M мнимых нулей коэффициента $a(\lambda)$.

С помощью вспомогательной линейной задачи (20), (21) мы построили отображение решений $\mathbf{n}(x, t)$ уравнения Ландау – Лифшица на полуоси в набор данных рассеяния. Он включает спектральные плотности $b(\lambda)$, $-\infty < \lambda < +\infty$, дискретные нули $\{\lambda_j\}$ коэффициента $a(\lambda)$ ($\text{Im } \lambda_j > 0$) и нормировочные множители $\{\gamma(\lambda_j)\}$. В терминах данных рассеяния задача интегрирования уравнения Ландау – Лифшица сводится к решению линейных дифференциальных уравнений. Из последнего уравнения (18) вытекает привычная зависимость данных рассеяния от времени [1, 13]:

$$\begin{aligned} a(t, \lambda) &= a(0, \lambda), \\ b(t, \lambda) &= b(0, \lambda) e^{-i\lambda^2 t}, \\ \gamma(\lambda_j, t) &= \gamma(0, \lambda_j) e^{-i\lambda_j^2 t}. \end{aligned} \quad (39)$$

Значения постоянных интегрирования $b(0, \lambda)$, $\gamma(0, \lambda_j)$ находим из уравнений (20), (24) по заданному начальному распределению намагниченности (5).

С физической точки зрения, спектральная плотность $b(\lambda, t)$ параметризует спин-волновые цуги, которые расплываются с течением времени из-за преобладания эффектов дисперсии над эффектами сжатия нелинейных волновых пакетов. Нули λ_j параметризуют структурно устойчивые магнитные солитоны. Чисто солитонным состояниям в отсутствие диспергирующих волн соответствует коэффициент $a(\lambda)$ с нулями при условии $b(\lambda) = \bar{b}(\lambda) \equiv 0$.

Возвращение от данных рассеяния к полю $\mathbf{S}(x, t)$ осуществляется по стандартной схеме обратной задачи рассеяния с учетом дополнительных редукиций, порожденных симметрией продолжения поля $\mathbf{n}(x, t)$ на бесконечный интервал. Обратные отображения для расчета реальных полей $\mathbf{n}(x, t)$ в области $x > 0$ и фиктивных полей $\mathbf{S}(x, t)$ при $x < 0$ оказываются разными. В то же время, замечательная черта подхода [8, 9] состоит в том, что вычисления реальных и фиктивных полей выполняются независимо.

Далее ограничимся расчетом полей $\mathbf{n}(x, t)$ на интервале $0 \leq x < \infty$. Для этого используем первый столбец матричной связи (24) решений Ёоста на вещественной λ -оси. Соответствующее равенство запишем в виде, удобном для дальнейшего анализа:

$$\begin{aligned} \frac{T_{-}^{(1)}(x, \lambda)}{\lambda a(\lambda)} \exp \left(\frac{i\lambda y}{2} \right) - \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp \left(\frac{i\lambda(y-x)}{2} \right) = \\ = \frac{T_{+}^{(1)}(x, \lambda)}{\lambda} \exp \left(\frac{i\lambda y}{2} \right) - \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp\left(\frac{i\lambda(y-x)}{2}\right) + T_+^{(2)}(x, \lambda) \frac{r(\lambda)}{\lambda} \exp\left(\frac{i\lambda y}{2}\right),$$

$$\lambda \in R, \quad (40)$$

где $r(\lambda) = b(\lambda)/a(\lambda)$, $y > x$. Как и в задаче без особенностей поля $\mathbf{S}(x, t)$ при $x = 0$, функция $T_+(x, \lambda)$ при $x > 0$ допускает представление [1, 13]

$$T_+(x, \lambda) = \exp\left(-\frac{i\lambda x \sigma_3}{2}\right) + \frac{\lambda}{2i} \int_x^\infty dy \Gamma(x, y) \exp\left(-\frac{i\lambda y \sigma_3}{2}\right). \quad (41)$$

Ядро интегрального оператора имеет вид

$$\Gamma(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha(x, y) & \beta^*(x, y) \\ \beta(x, y) & -\alpha^*(x, y) \end{pmatrix}.$$

Зависимость от времени t подразумевается.

Распределение намагниченности в образце при $0 \leq x < \infty$, $t \geq 0$ выражается через Γ :

$$\sigma_k n_k(x, t) = [I - \Gamma(x, x, t) \sigma_3] \sigma_3 [I - \Gamma(x, x, t) \sigma_3]^\dagger. \quad (42)$$

Уравнения обратной задачи рассеяния для расчета $\Gamma(x, y)$ получаются в результате интегрирования равенства (40) по вещественной λ -оси. Интегралы по параметру λ от левой части (40) вычисляются с помощью теоремы Коши о вычетах и формул (32), (41). Интегралы в правой части равенства преобразуются с учетом представления (41). Вычисления отличаются от аналогичных для поля $\mathbf{S}(x, t)$ без особенностей [1, 13] лишь наличием дополнительных редукций на данные рассеяния и появлением у коэффициента $a(\lambda)$ особого нуля $\lambda = i|\alpha|$ при $\alpha < 0$. Последнее означает, что левая часть равенства (40) при $\lambda = i|\alpha|$ может иметь дополнительный полюс. В действительности, таковой отсутствует, так как, согласно редукции (35), $\gamma(i|\alpha) = 0$ ($\alpha^2 = \beta^2$), а значит

$$T_-^{(1)}(x, i|\alpha) \equiv 0 \quad \text{при} \quad \alpha < 0, \quad x > 0.$$

С учетом этих пояснений можно сразу написать линейное интегральное уравнение для расчета $\Gamma(x, y)$:

$$\Gamma(x, y, t) + \sigma_3 K(x + y, t) + \int_x^\infty dz \Gamma(x, z, t) \partial_y K(z + y) = 0, \quad (43)$$

где

$$K(x, t) = \begin{pmatrix} 0 & -k^*(x, t) \\ k(x, t) & 0 \end{pmatrix}, \quad (44)$$

$$k(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty \frac{r(\lambda, t)}{\lambda} \exp\left(\frac{i\lambda x}{2}\right) d\lambda - \sum_{j=1}^{2N+M} \frac{m_j(t)}{\lambda_j} \exp\left(\frac{i\lambda_j x}{2}\right),$$

$$m_j(t) = \gamma_j(t) / [\partial_\lambda a(\lambda)]|_{\lambda=\lambda_j}, \quad j = 1, 2, \dots, 2N + M.$$

Рассмотренная процедура является нелинейным обобщением метода «изображений» и метода Фурье, известных в теории линейных краевых задач. Действительно, в малоамплитудном пределе при $|b(\lambda)| \ll 1$ и в отсутствие солитонов справедливы соотношения

$$a(\lambda) = \lambda + i\beta, \quad \Gamma(x, x, t) \approx -\sigma_3 K(2x, t).$$

Поэтому формула (42) для расчета спин-волнового поля сводится к преобразованию Фурье

$$n_+(x, t) = -2k(x, t) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{r(\lambda, t)}{\lambda} e^{i\lambda x} d\lambda = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda b(\lambda, t=0) e^{-i\lambda^2 t} \left[\frac{e^{ix\lambda}}{\lambda + i\beta} + \frac{e^{-ix\lambda}}{\lambda - i\beta} \right],$$

$$n_3 \approx 1. \quad (45)$$

Здесь и далее $n_\pm = n_1 \pm in_2$. В формуле (45) мы учли четность функции $b(\lambda)$ (25). Прямой проверкой нетрудно убедиться, что на полуоси $0 \leq x < \infty$ при $t \geq 0$ выражение (45) является решением линеаризованного уравнения Ландау – Лифшица (2):

$$\partial_t n_+ = i \partial_x^2 n_+, \quad |n_+| \ll 1,$$

с линеаризованным краевым условием (4)

$$[\partial_x n_+ - \beta n_+]|_{x=0} = 0.$$

3. СОЛИТОНЫ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ ОБРАЗЦЕ

Обсудим вначале нелинейные коллективные возбуждения, которые параметризованы мнимыми нулями функции $a(\lambda)$. Оказывается, что все они отвечают неподвижным солитонам, ядра которых содержат колебательные степени свободы и локализованы около края $x = 0$ образца.

Пусть $M = 1$, $a(\lambda) = (\lambda + i\alpha)(\lambda - i\nu)/(\lambda + i\nu)$, $\nu > 0$. Из соотношения (35) найдем $|\gamma(i\nu)|^2 = \alpha^2 - \nu^2$ и запишем выражение для $m(t)$ (43) в виде

$$m(t) = \frac{2\gamma(t)\nu}{\nu + \alpha}, \quad \gamma(t) = e^{i\varphi(t)} \sqrt{\alpha^2 - \nu^2}, \quad (46)$$

$$\varphi(t) = \nu^2 t + \delta_0,$$

где δ_0 — произвольная вещественная постоянная. В отсутствие спиновых волн (при $b \equiv 0$) интегральные уравнения (43) имеют вырожденные ядра, а потому допускают точные решения. Используя (46), из (42), (43) находим односолитонное решение уравнения Ландау–Лифшица (2)

$$\begin{aligned} n_3 &= 1 - \frac{2(\alpha^2 - \nu^2)}{[\alpha \operatorname{ch}(\nu x) + \nu \operatorname{sh}(\nu x)]^2}, \\ n_+ &= -\frac{2i\gamma(t)(\alpha \operatorname{sh}(\nu x) + \nu \operatorname{ch}(\nu x))}{[\alpha \operatorname{ch}(\nu x) + \nu \operatorname{sh}(\nu x)]^2} \end{aligned} \quad (47)$$

с краевым условием (4), где $\beta = -\alpha$ в соответствии с формулой (38). Приграничный солитон (47) формируется, когда поверхностное поле превышает пороговое значение: $|\beta| > \nu$. Компоненты намагниченности в ядре солитона совершают однородную прецессию с частотой $\omega = \nu^2$ вокруг оси z . Структура ядра зависит от величины и знака параметра β (см. рис. 1).

Различия приграничных солитонов наиболее ярко проявляются вблизи порога их образования по параметру $|\beta| > \nu$. Один из них при значениях $0 < \beta - \nu \ll \beta$ представляет область полностью перемангниченного материала шириной $d \approx 2 \ln(1 + \sqrt{2})/\nu$ (рис. 1а). В центре солитона $n_3 = -1$. Координата центра $x_0 \approx (2\nu)^{-1} \ln |2\nu/(\beta - \nu)|$ хотя и не совпадает с краем образца, но из-за логарифмической зависимости от параметра $2\nu/(\beta - \nu)$ не слишком удалена от поверхности. Структуру солитона стабилизирует прецессия намагниченности в его ядре. С ростом β центр солитона прижимается к краю образца.

Второй тип солитонов образуется в поверхностном магнитном поле альтернативного направления $\beta < -\nu$. При значениях $0 < |\beta| - \nu \ll |\beta|$ солитон (47) оказывается малоамплитудным (рис. 1б). Его центр совпадает с границей образца. С увеличением $|\beta|$ усиливается перемангничивание в ядре солитона. На границе образца при $|\beta| \gg 1$ намагниченность среды выходит на насыщение: $n_3 \approx -1$.

В работе [12] для полуограниченной цепочки спинов со слабой обменной анизотропией построено приближенное решение, описывающее нелинейное возбуждение, локализованное вблизи конца цепочки. Хотя в данной работе обсуждается динамика изотропного ферромагнетика на полуоси с другими краевыми условиями, односолитонное состояние (47) по своей структуре близко к результату работы [12].

В пределе $|\beta| \rightarrow \infty$ решение (47) упрощается:

$$n_3 = 1 - \frac{2}{\operatorname{ch}^2(\nu x)}, \quad n_+ = -\frac{2i e^{i\varphi(t)} \operatorname{sh}(\nu x)}{\operatorname{ch}^2(\nu x)}, \quad (48)$$

и описывает прецессирующий солитон в случае полного закрепления спинов на границе образца (рис. 1в):

$$n_3|_{x=0} = -1, \quad n_3 \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad x \rightarrow \infty.$$

Центр солитона (48) совпадает с краем образца. Толщина слоя приграничных колебаний намагниченности порядка ν^{-1} .

Все солитонные решения имеют единообразную форму записи (42):

$$\begin{aligned} n_3(x, t) &= 1 - 2|\beta(x, x, t)|^2, \\ n_+(x, t) &= -2[1 - \alpha^*(x, x, t)]\beta(x, x, t). \end{aligned} \quad (49)$$

Для двухсолитонного возбуждения с двумя мнимыми нулями $\lambda_{1,2} = i\nu_{1,2}$ коэффициента $a(\lambda)$ функции $m_{1,2}(t)$ имеют вид

$$\begin{aligned} m_{1,2} &= \mp 2\nu_{1,2} \left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{\nu_2 - \nu_1} \right) \sqrt{g_{1,2}} e^{i\varphi_{1,2}(t)}, \\ g_{1,2} &= \frac{\alpha - \nu_{1,2}}{\alpha + \nu_{1,2}}, \quad \varphi_{1,2}(t) = \nu_{1,2}^2 t + \delta_{1,2}, \end{aligned} \quad (50)$$

где $\delta_{1,2}$ — вещественные параметры. Используя формулы (50), из (43) находим

$$\begin{aligned} \alpha^*(x, x, t) &= \frac{2}{D} \left(\frac{\nu_+}{\nu_-} \right)^2 \times \\ &\times \left[g_1 e^{x\nu_-} + g_2 e^{-x\nu_-} - \frac{2\sqrt{g_1 g_2}}{\nu_+} (\nu_1 e^{i\varphi_-(t)} + \nu_2 e^{-i\varphi_-(t)}) \right], \\ \beta(x, x, t) &= \frac{2i\nu_+}{D\nu_-} \left[\sqrt{g_2} e^{i\varphi_2(t)} (e^{x\nu_1} - g_1 e^{-x\nu_1}) - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{g_1} e^{i\varphi_1(t)} (e^{x\nu_2} - g_2 e^{-x\nu_2}) \right], \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} D &= e^{x\nu_+} + g_1 g_2 e^{-x\nu_+} + \\ &+ \left(\frac{\nu_+}{\nu_-} \right)^2 (g_2 e^{-x\nu_-} + g_1 e^{x\nu_-}) - \frac{8\nu_1 \nu_2}{\nu_-^2} \sqrt{g_1 g_2} \cos \varphi_-(t), \end{aligned}$$

где $\nu_{\pm} = \nu_2 \pm \nu_1$, $\varphi_-(t) = \varphi_2(t) - \varphi_1(t)$. В данном случае $M = 2$, поэтому решение (49), (51) удовлетворяет краевому условию (4) с $\beta = \alpha$. Оно описывает нелинейную суперпозицию двух прецессирующих солитонов типа (47), которые локализованы около края образца в слоях толщиной порядка ν_1^{-1} и ν_2^{-1} . В ядрах солитонов намагниченность прецессирует вокруг оси z с частотами ν_1^2 и ν_2^2 . Взаимосвязь солитонов проявляется в том, что при $x = 0$ компонента n_3 намагниченности не остается постоянной, как это было у односолитонного состояния (47). Она осциллирует с частотой $\Omega = |\nu_2^2 - \nu_1^2|$, равной разности частот прецессии индивидуальных солитонов.

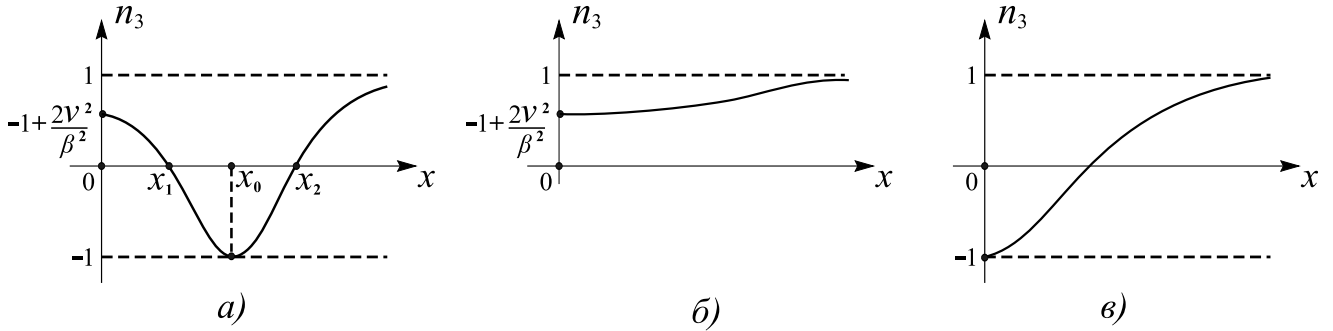


Рис. 1. Изменение компоненты n_3 вблизи края образца в зависимости от значений параметра β . При смешанном краевом условии (4): $\beta > \nu$, $2\nu x_0 = \ln[(\beta + \nu)/(\beta - \nu)]$, $x_{1,2} = x_0 + \nu^{-1} \ln(\sqrt{2} \pm 1)$ (а), $\beta < -\nu$ (б). В случае полного закрепления спинов: $n_3|_{x=0} = -1$ (в)

В одномерном случае прецессирующие солитоны как связанные состояния большого числа магнов возникают, когда амплитуда внешнего воздействия превышает определенное значение. Локализация таких солитонов около границы образца возможна только при достаточной степени неоднородности поля намагниченности вблизи поверхности образца. Поэтому для образования приграничных солитонов имеется порог по модулю поверхностной константы β . В то же время, в зависимости от знака β строения ядер приграничных солитонов, а значит и их энергии, различны. В разд. 4 вычислена полная энергия полуограниченного образца при наличии в нем солитонов и магнов (62). Энергетически выгодно, когда около границы образца локализуется при $\beta > 0$ четное, а при $\beta < 0$ нечетное число прецессирующих солитонов.

В пределе $|\alpha| \rightarrow \infty$ параметры $g_{1,2}$ равны единице. Двухсолитонное решение (49), (51) упрощается и описывает приграничные колебания намагниченности при полном закреплении поверхностных спинов в соответствии с краевым условием

$$n_3|_{x=0} = 1,$$

которое знаком правой части отличается от граничного условия для односолитонного состояния. Таким образом, в зависимости от выбора одного из вариантов полного закрепления поверхностных спинов (7) граница образца захватывает либо четное, либо нечетное число M прецессирующих солитонов:

$$n_3|_{x=0} = (-1)^M. \tag{52}$$

Второй класс солитонов параметризуют пары комплексных нулей (31) функции $a(\lambda)$. Это движущиеся объекты, для которых характерны упругие парные столкновения друг с другом и отражения от края образца.

Обсудим простейший солитон, который соответствует нулям $\lambda = \lambda_0, -\lambda_0^*$ функции $a(\lambda)$:

$$a(\lambda) = (\lambda + i\alpha) \frac{(\lambda - \lambda_0)(\lambda + \lambda_0^*)}{(\lambda + \lambda_0)(\lambda - \lambda_0^*)}.$$

Тогда в уравнении обратной задачи рассеяния имеем

$$m_1(t) = 2\lambda_0 \kappa(t) \left(\frac{\lambda_0 - \lambda_0^*}{\lambda_0 + \lambda_0^*} \right),$$

$$m_2(t) = \frac{2\lambda_0^* g^*}{\kappa^*(t)} \left(\frac{\lambda_0 - \lambda_0^*}{\lambda_0 + \lambda_0^*} \right),$$

$$\kappa(t) = \frac{\gamma(t)}{\lambda_0 + i\alpha} = \kappa(t=0) e^{-i\lambda_0^2 t}, \quad g = \frac{i\alpha - \lambda_0}{i\alpha + \lambda_0}.$$

Распределение намагниченности в образцы дают формулы (49), где

$$\alpha^*(x, x, t) = \frac{2}{\Delta} \left(\frac{\lambda_0 - \lambda_0^*}{\lambda_0 + \lambda_0^*} \right) \times$$

$$\times \left[\left(\frac{\lambda_0 - \lambda_0^*}{\lambda_0 + \lambda_0^*} \right) \left(g e^{ix(\lambda_0 + \lambda_0^*)} + g^* e^{-ix(\lambda_0 + \lambda_0^*)} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\lambda_0 + \lambda_0^*} \left(\lambda_0^* |\kappa(t)|^2 - \lambda_0 \left| \frac{g}{\kappa(t)} \right|^2 \right) \right], \tag{53}$$

$$\beta(x, x, t) = -\frac{2}{\Delta} \left(\frac{\lambda_0 - \lambda_0^*}{\lambda_0 + \lambda_0^*} \right) \times$$

$$\times \left[\kappa(t) \left(e^{i\lambda_0^* x} - g^* e^{-i\lambda_0^* x} \right) - \frac{g^*}{\kappa^*(t)} \left(e^{-i\lambda_0 x} - g e^{i\lambda_0 x} \right) \right],$$

$$\Delta = \left(\frac{2|\lambda_0|}{\lambda_0 + \lambda_0^*} \right)^2 \left(|\kappa(t)|^2 + \left| \frac{g}{\kappa(t)} \right|^2 \right) +$$

$$+ |g|^2 e^{ix(\lambda_0 - \lambda_0^*)} + e^{-ix(\lambda_0 - \lambda_0^*)} +$$

$$+ \left(\frac{\lambda_0 - \lambda_0^*}{\lambda_0 + \lambda_0^*} \right)^2 \left(g e^{ix(\lambda_0 + \lambda_0^*)} + g^* e^{-ix(\lambda_0 + \lambda_0^*)} \right).$$

В этом случае $M = 0$, поэтому решение (49), (53) удовлетворяет краевому условию (4) с $\beta = \alpha$. Оно описывает движение частицеподобного возбуждения из внутренней части образца к его краю, отражение от границы и последующее возвращение локализованного объекта в глубь образца. В ходе столкновения с поверхностью образца ядро магнитного возбуждения сильно деформируется. Однако после удаления от края образца оно принимает стационарную форму.

Проанализируем особенности отражения солитона от поверхности образца. Для этого выделим из параметра λ_0 его вещественную и мнимую части: $2\lambda_0 = v + iu$. Поскольку $\text{Im } \lambda_0 > 0$, значения u всегда положительны. Примем для определенности, что параметр v тоже положителен. Выражение для поля $\alpha^*(x, x, t)$ ($\beta(x, x, t)$) (53) имеет вид дроби. Ее асимптотическое поведение при $x \gg 1$ определяется конкуренцией слагаемых в числителе с экспоненциальными множителями: $e^{\pm ux}$, $e^{\pm uv t/2}$ ($e^{\pm(x+vt)u/2}$, $e^{\pm(x-vt)u/2}$) и ведущих членов в знаменателе с коэффициентами: $e^{\pm ux}$, $e^{\pm uv t/2}$. Отсюда сразу следует, что при $t \rightarrow \pm\infty$ в системах отсчета, связанных с солитоном, где $x \mp vt = \text{const}$, его структура описывается выражениями

$$n_3 = 1 - \frac{2u^2}{(u^2 + v^2) \text{ch}^2 \Phi_{\pm}}, \quad 2\Phi_{\pm} = u(x \mp vt - x_{\pm}),$$

$$n_{\pm} = \pm \frac{2iu\kappa(t=0)}{(u^2 + v^2)|\kappa(t=0)|} \times$$

$$\times \exp\left(i\left[\frac{(u^2 - v^2)t}{4} \pm \frac{vx}{2} + \varphi_{\pm}\right]\right) \frac{v \text{ch } \Phi_{\pm} \pm iu \text{sh } \Phi_{\pm}}{\text{ch}^2 \Phi_{\pm}},$$

где

$$x_+ = 2u^{-1} \ln(2|\lambda_0 \kappa(0)/v|),$$

$$x_- = 2u^{-1} \ln[2|g\lambda_0|/(v|\kappa(0)|)],$$

$$\varphi_+ = -\arg \lambda_0, \quad \varphi_- = \arg \lambda_0 - \arg g.$$

Формулы (54) описывают солитоны безграничного гейзенберговского ферромагнетика с характерным размером порядка u^{-1} , движущиеся внутри образца со скоростями $\pm v$. На больших расстояниях от поверхности единственным результатом отражения от нее солитона оказывается изменение фазы внутренней прецессии и сдвиг центра солитона. В системах отсчета, сопутствующих солитону, намагниченность прецессирует с частотой $\Omega = (u^2 + v^2)/4$ вокруг оси z . Изменение начальной фазы прецессии солитона

$$\varphi_+ - \varphi_- = -i \ln \left[\frac{\lambda_0^*}{\lambda_0} \left(\frac{i\alpha - \lambda_0}{i\alpha + \lambda_0} \right) \right]$$

после его отражения несет информацию о характере закрепления спинов на поверхности образца. Это обстоятельство можно использовать для диагностики состояния поверхностных спинов.

При $v = 0$ выражению (54) соответствует покоящийся солитон на большом удалении от границы образца. В этом случае формула (54) совпадает с решением, полученным для неподвижного солитона в безграничном изотропном ферромагнетике [1, 13].

Напомним, что приграничные солитоны образуются только при условии, что величины поверхностного поля $|\beta|$ больше определенного порогового значения. Для движущихся солитонов такого ограничения нет. Решение (49), (53) справедливо для любых значений поверхностного поля β .

При $\alpha = \beta = 0$ параметр $g = -1$ и формулы (49), (53) дают решение модели Ландау–Лифшица (2) со свободными спинами на границе образца:

$$[\mathbf{n} \times \partial_x \mathbf{n}]|_{x=0} = 0.$$

В этом случае движение и отражение солитона сопровождается изменением во времени компоненты n_3 намагниченности на границе образца по закону

$$n_3(x=0, t) = 1 - 2 \left(\frac{2uv}{u^2 + v^2} \right)^2 \text{ch}^{-2} \left(\frac{vut}{2} + \ln \kappa(0) \right).$$

В пределе $\alpha \rightarrow \infty$ параметр $g = 1$ и решение (49), (53) описывает отражение прецессирующего солитона от границы образца с закрепленными на ней спинами: $n_3|_{x=0} = 1$.

4. ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ

Как и в неограниченной среде, не зависящий от времени элемент $a(\lambda)$ матрицы перехода $T(\lambda)$ является производящим функционалом интегралов движения полубесконечного ферромагнетика. С помощью формул (14), (19), (24) получим выражение для $T(\lambda)$:

$$T(\lambda) = T_+^{-1}(+0, \lambda) K(\lambda) T_-(-0, \lambda), \quad (55)$$

которое будет основой дальнейшего анализа. При $x > 0$ матрица $T_+(x, \lambda)$ унимодулярна, поэтому

$$T_+^{-1}(x, \lambda) = \sigma_2 T^T(x, \lambda) \sigma_2.$$

Верхний индекс « T » означает транспонирование. Свойство симметрии (33) позволяет выразить $T_-(-0, \lambda)$ через $T_+^*(+0, \lambda^*)$:

$$T_-(-0, \lambda) = \sigma_2 T_+^*(+0, -\lambda^*) \sigma_2.$$

В результате (55) примет вид

$$T(\lambda) = \sigma_2 T_+^T(+0, \lambda) \sigma_2 K(\lambda) \sigma_2 T_+^*(+0, -\lambda^*) \sigma_2. \quad (56)$$

Отсюда получаем выражение для $a(\lambda)$:

$$a(\lambda) = (\lambda + i\beta)[T_+(+0, \lambda)]_{22}[T_+(+0, -\lambda^*)]_{22}^* + (\lambda - i\beta)[T_+(+0, \lambda)]_{12}[T_+(+0, -\lambda^*)]_{12}^*. \quad (57)$$

Серию локальных интегралов движения порождает разложение функции $a(\lambda)$ по степеням λ^{-1} . Для его получения необходимо найти соответствующие ряды для элементов матрицы $T_+(+0, \lambda)$. Матричная функция $T_+(+0, \lambda)$ имеет следующую алгебраическую структуру:

$$T_+(+0, \lambda) = (I + W(0, \lambda)) e^{Z(+0, y \rightarrow +\infty)}. \quad (58)$$

Разложение по обратным степеням λ^{-1} антидиагональной матрицы $W(x, \lambda)$ при $x \geq 0$ получено в [13]:

$$W(x, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n(x)}{\lambda^n}, \quad (59)$$

$$W_n(x) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_n^*(x) \\ \omega_n(x) & 0 \end{pmatrix},$$

где $w_0(x) = n_+(x)/[1 + n_3(x)]$. Следующие коэффициенты определяются рекуррентными соотношениями:

$$\omega_{n+1}(x) = -i \partial_x \omega_n(x) - \frac{n_-(x)}{2} \sum_{k=1}^n \omega_n(x) \omega_{n-k+1}(x),$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

При $n = 0$ последняя сумма отсутствует.

Диагональная матрица $Z(+0, y \rightarrow +\infty)$ выражается через $W_n(x)$:

$$Z(+0, y \rightarrow +\infty) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_n}{\lambda^n}, \quad Z_n = \begin{pmatrix} \xi_n & 0 \\ 0 & \xi_n^* \end{pmatrix}, \quad (60)$$

$$Z_n = \frac{i}{2} \int_0^{\infty} [n_1(x)\sigma_1 + n_2(x)\sigma_2] W_{n+1}(x) dx.$$

Используя эти результаты, вычислим первый член асимптотического разложения функции

$$\ln \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda^2 + \beta^2}} = -\frac{iH}{\lambda} + \left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \quad (61)$$

Выражение для H :

$$H = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} dx (\partial_x \mathbf{n})^2 - \beta n_3(x=0),$$

совпадает с энергией (1) полубесконечного ферромагнетика. С другой стороны, разложение по степеням λ^{-1} левой части равенства (61) можно получить сразу, так как функция $a(\lambda)$ нам известна (37). Сравнение двух разложений дает явные формулы для локальных интегралов движения полубесконечного ферромагнетика. В частности, в терминах спектральных данных энергия образца «диагонализуются» и совпадает с энергией идеального газа солитонов и магнонов:

$$H = (-1)^{M+1} \beta + 2 \sum_{s=1}^M \nu_s + 4 \sum_{k=1}^N \text{Im } \lambda_k + \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \mu^2 \rho(\mu),$$

$$\rho(\mu) = -\frac{1}{2\pi\mu^2} \ln \left(1 - \frac{|b(\mu)|^2}{\mu^2 + \beta^2} \right) > 0. \quad (62)$$

Величина $\rho(\mu)$ имеет смысл плотности спиновых мод с волновым числом μ . Дискретные слагаемые соответствуют аддитивным вкладам в энергию системы от разных типов солитонов.

Непосредственно из уравнения Ландау – Лифшица (2) следует, что при краевых условиях (3), (4) существует еще один важный интеграл движения:

$$N = \int_0^{\infty} (1 - n_3(x)) dx. \quad (63)$$

Он определяет число спиновых отклонений в системе [14, 15].

Покажем, что как и в безграничной среде [1, 13], N выражается через значение $\partial_\lambda a(\lambda)|_{\lambda=0}$. С помощью (14), (19) находим

$$T_+(x, \lambda=0) = I, \quad x > 0. \quad (64)$$

Воспользуемся интегральным уравнением для функции Йоста $T_+(x, \lambda)$ в области $x > 0$:

$$T_+(x, \lambda) = \exp\left(\frac{\lambda x \sigma_3}{2i}\right) + \frac{i\lambda}{2} \int_x^{+\infty} dx' \exp\left(\frac{\lambda(x-x')\sigma_3}{2i}\right) \times [n_k(x')\sigma_k - \sigma_3] T_+(x', \lambda).$$

Из него с учетом (64) следует соотношение

$$\partial_\lambda T_+(x, \lambda)|_{\lambda=0} = \frac{i}{2} \int_0^{+\infty} dx' [n_k(x')\sigma_k - \sigma_3]. \quad (65)$$

С помощью (64), (65), из представления (57) получим

$$\partial_\lambda a(\lambda)|_{\lambda=0} = 1 - \beta N.$$

Учтем связь $\alpha = (-1)^M \beta$ и с помощью дисперсионного соотношения (37) выразим число спиновых отклонений через параметры солитонов и плотность магнов в образце:

$$N = \sum_{s=1}^M \frac{2}{\nu_s} + 4 \sum_{k=1}^N \frac{\text{Im } \lambda_k}{|\lambda_k|^2} + \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \rho(\mu) + \beta^{-1} [1 - (-1)^M]. \quad (66)$$

Хорошо известно [16], что далекие фурье-компоненты полей без особенностей на вещественной оси экспоненциально малы. Поскольку метод обратной задачи рассеяния является нелинейным аналогом преобразования Фурье, спектральные функции $b(\lambda)$ полей $\mathbf{S}(x, t)$ без особенностей также убывают быстрее любой степени λ при $\lambda \rightarrow \infty$. В рассматриваемой задаче мы продолжили поля $\mathbf{n}(x, t)$, заданные на полуоси $0 \leq x < \infty$, на всю ось $-\infty < x < \infty$. Производные продолжения имеют скачки на вещественной оси. В таких случаях далекие фурье-компоненты линейных мод имеют степенную малость при $\lambda \rightarrow \infty$. Покажем, что в нелинейной начально-краевой задаче (2)–(5) спектральная плотность $b(\lambda)$ также характеризуется степенным разложением при $\lambda \rightarrow \infty$. Для солитонных состояний все коэффициенты степенного ряда должны обращаться в нуль. Поэтому для полубезграничного ферромагнетика $b(\lambda)$ оказывается производящей функцией нетривиальных сохраняющихся со временем связей между полями $\mathbf{n}(x, t)$ и их пространственными производными на границе образца.

Подходящее представление для $b(\lambda)$ получим из (56). Вычисления упрощаются, если с помощью формул (22)

$$\begin{aligned} [T_+(+0, \lambda)]_{11} &= [T_+^*(+0, \lambda^*)]_{22}, \\ [T_+(+0, \lambda)]_{21} &= -[T_+^*(+0, \lambda^*)]_{12} \end{aligned}$$

выразить коэффициент $b(\lambda)$ через те же функции, что были использованы в формуле (57) для $a(\lambda)$:

$$b(\lambda) = (\lambda + i\beta) [T_+^*(+0, \lambda^*)]_{12} [T_+^*(+0, -\lambda^*)]_{22} - (\lambda - i\beta) [T_+^*(+0, \lambda^*)]_{22} [T_+^*(+0, -\lambda^*)]_{12}. \quad (67)$$

Используя соотношения (58)–(60), из (67) находим асимптотическое разложение при $\lambda \gg 1$ для функции $b(\lambda)$:

$$b(\lambda) = -2 \exp \left(2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi_{2k}}{\lambda^{2k}} \right) \times \sum_{p=0}^{\infty} (i\beta \omega_{2p} + \omega_{2p+1})|_{x=0} \lambda^{-2p}. \quad (68)$$

Для чисто солитонных состояний $b(\lambda) \equiv 0$, поэтому все предэкспоненциальные множители в (68) обращаются в нуль:

$$(i\beta \omega_{2p} + \omega_{2p+1})|_{x=0} = 0, \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

Мы получили дополнительный набор законов сохранения, которые управляют выполнением солитонами верных краевых условий (3), (4). Первый из них имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln \left[\frac{n_+(x, t)}{1 + n_3(x, t)} \right] \Bigg|_{x=0} = \beta, \quad \beta = (-1)^M \alpha. \quad (69)$$

Для одиночного приграничного солитона (47) в справедливости тождества (69) легко убедиться простой проверкой.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе методом обратной задачи рассеяния исследована нелинейная динамика солитонов и спиновых волн в полубесконечном изотропном ферромагнетике. Учтены смешанные краевые условия, предельным случаем которых являются свободные поверхностные спины и спины с полным закреплением на границе образца. Предсказаны и подробно исследованы новые типы солитонов, характерные для образцов конечных размеров. Показано, что в ферромагнетике пороговым образом по параметру закрепления спинов могут зарождаться околограничные солитоны с характерными частотными и модуляционными свойствами. Кроме того, при любой степени закрепления поверхностных спинов существуют движущиеся солитоны, которые упруго отражаются от границы образца. В ходе отражения ядра солитонов сильно деформируются, поэтому такие солитоны невозможно описать известными ранее пертурбативными методами. В то же время, на больших расстояниях от границы ядра солитонов принимают форму типичных прецессирующих солитонов безграничного ферромагнетика. Сдвиг фазы, приобретаемый солитонами после отражения от границы образца, можно использовать для диагностики степени закрепления поверхностных спинов. Полученные результаты допускают экспериментальную проверку. Они полезны для моделирования солитонных возбуждений в реальных образцах конечных размеров.

В работе найдено разделение переменных, после которого все интегралы движения полубесконечного ферромагнетика записываются в виде суммы вкладов от разных типов солитонов и квазичастиц спектра спиновых волн. Получены новые законы сохранения, которые обеспечивают локализацию магнитных солитонов около поверхности образца или их отражение от таковой.

Финансирование. Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки России (тема «Квант», № АААА-А18-118020190095-4).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Б. Борисов, В. В. Киселев, *Квазиодномерные магнитные солитоны*, Физматлит, Москва (2014).
2. Г. В. Дрейден, А. В. Порубов, А. М. Самсонов, И. В. Семенова, *ЖТФ* **71**, 1 (2001).
3. В. В. Киселев, А. А. Расковалов, *ЖЭТФ* **62**, 693 (2022).
4. I. T. Habibullin, in *Nonlinear World: IV Int. Workshop on Nonlinear and Turbulent Processes in Physics*, ed. by V. G. Baryachtar et. al., World Scientific Singapore (1989), Vol. 1, p. 130.
5. И. Т. Хабибуллин, *ТМФ* **86**, 43 (1991).
6. A. S. Fokas, *Commun. Math. Phys.* **230**, 1 (2002).
7. A. S. Fokas, *Comm. Pure Appl. Math.*, **V. LVIII**, 639 (2005).
8. П. Н. Бибииков, В. О. Тарасов, *ТМФ* **79**, 334 (1989).
9. V. O. Tarasov, *Inverse Problems* **7**, 435 (1991).
10. A. S. Fokas, *Physica D* **35**, 167 (1989).
11. Е. К. Склянин, *Функциональный анализ и его приложения* **21**, 86 (1987).
12. Н. Г. Гочев, *ФНТ* **10**, 615 (1984).
13. Л. Д. Фаддеев, Л. А. Тахтаджян, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, Москва (1986).
14. А. М. Косевич, Е. А. Иванов, А. С. Ковалев, *Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны*, Наукова думка, Киев (1983).
15. А. М. Kosevich, В. А. Ivanov, and A. S. Kovalev, *Phys. Rep.* **194**, 117 (1990).
16. А. Б. Мигдал, *Качественные методы в квантовой теории*, Наука, Москва (1979).