

# ХАОТИЧЕСКИЕ ТРАЕКТОРИИ НА ПОВЕРХНОСТЯХ ФЕРМИ И НЕТРИВИАЛЬНЫЕ РЕЖИМЫ ПОВЕДЕНИЯ МАГНИТНОЙ ПРОВОДИМОСТИ

*И. А. Дынников<sup>a</sup>, А. Я. Мальцев<sup>b\*</sup>, С. П. Новиков<sup>a,b</sup>*

<sup>a</sup> Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук  
119991, Москва, Россия

<sup>b</sup> Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук  
142432, Черногловка, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 17 апреля 2022 г.,  
после переработки 17 апреля 2022 г.  
Принята к публикации 18 апреля 2022 г.

Представлен обзор вопросов, связанных с недавно открытыми типами незамкнутых электронных траекторий на сложных поверхностях Ферми, соответствующих хаотической динамике в пространстве квазиимпульсов. Траектории такого типа найдены теоретически и в настоящее время достаточно хорошо изучены с теоретической точки зрения, однако, их экспериментальное обнаружение пока еще является задачей для будущих исследований. Здесь обсуждаются геометрические свойства таких траекторий, вероятность их появления на реальных поверхностях Ферми и поведение магнитопроводимости в пределе  $\omega_{BT} \rightarrow \infty$  при их возникновении. В обзор включены результаты самых последних исследований хаотических траекторий для дисперсионных соотношений самого общего вида.

EDN: EHVOSH

DOI: 10.31857/S0044451022080120

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение .....	276	3. Геометрические свойства хаотических траекторий и поведение проводимости в сильных магнитных полях .....	286
2. Типы хаотических траекторий и соответствующие им особенности угловой диаграммы .....	280	4. Заключение .....	290
		Литература .....	291

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Наша работа относится к области теории проводимости нормальных металлов, берущей свое начало от работ И. М. Лифшица, М. Я. Азбеля, М. И. Каганова и В. Г. Песчанского, опубликованных в конце 1950-х–начале 1960-х гг. (см. [1–3]). Она интенсивно развивалась в школе И. М. Лифшица и в последу-

ющие годы (см., например, [4, 5]). А именно, мы обсуждаем вопросы, связанные с влиянием геометрии квазиклассических электронных траекторий, лежащих на сложных поверхностях Ферми, на поведение проводимости металлов в сильных магнитных полях.

Как хорошо известно, движение электронов на поверхности Ферми в присутствии внешнего магнитного поля может быть описано адиабатически и задается квазиклассической системой

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}_{\text{gr}}(\mathbf{p}) \times \mathbf{B}] = \frac{e}{c} [\nabla \epsilon(\mathbf{p}) \times \mathbf{B}] \quad (1.1)$$

в  $\mathbf{p}$ -пространстве.

\* E-mail: maltsev@itp.ac.ru

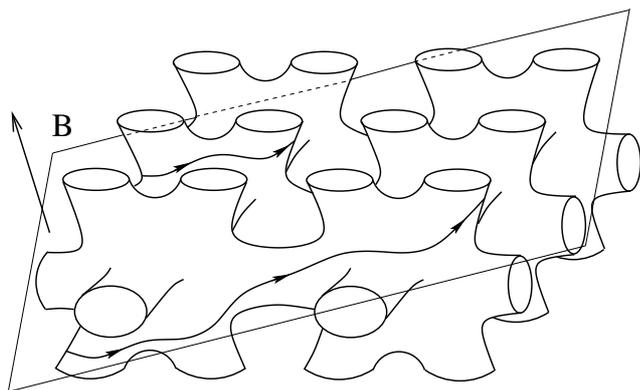


Рис. 1. Траектории системы (1.1) в пространстве  $\mathbb{R}^3$  на некотором уровне энергии  $\epsilon(\mathbf{p}) = \text{const}$  (схематически)

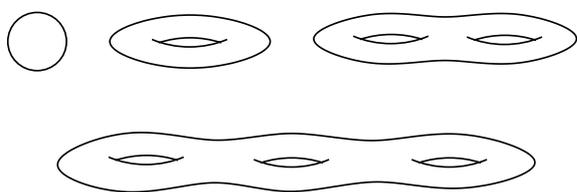


Рис. 2. Абстрактные поверхности рода 0, 1, 2, 3

Важную роль играет тот факт, что значение  $\mathbf{p}$ , т. е. квазиимпульс электрона, определяется с точностью до векторов обратной решетки  $L^*$  (где  $L$  — кристаллическая решетка металла). Таким образом, систему (1.1) можно рассматривать как систему на трехмерном торе

$$\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/L^*,$$

или как систему в трехмерном пространстве с некоторой гладкой 3-периодической функцией  $\epsilon(\mathbf{p})$ . В последнем случае мы должны помнить, что точки пространства  $\mathbb{R}^3$ , отличающиеся на векторы обратной решетки, фактически представляют одно и то же физическое состояние.

В пространстве  $\mathbb{R}^3$  траектории системы (1.1) задаются пересечениями плоскостей, ортогональных  $\mathbf{B}$ , с периодическими поверхностями постоянной энергии  $\epsilon(\mathbf{p}) = \text{const}$ . Геометрия таких пересечений может быть достаточно сложной для периодических функций  $\epsilon(\mathbf{p})$  общего вида (рис. 1). При описании гальваномагнитных явлений в металлах основную роль играют траектории системы (1.1) на поверхности Ферми  $\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon_F$ .

Каждое из представлений поверхности Ферми дает важную информацию о ней. Так, представле-

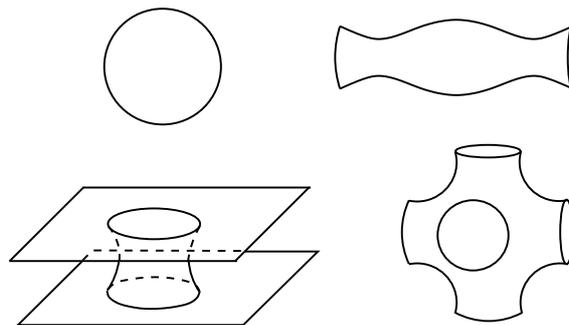


Рис. 3. Примеры поверхностей Ферми ранга 0, 1, 2 и 3

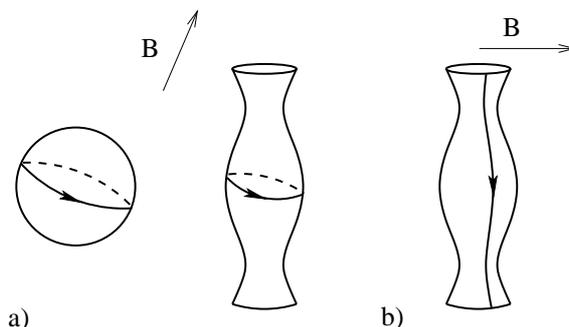


Рис. 4. Замкнутые (а) и открытая периодическая (б) траектории системы (1.1) на поверхностях Ферми различной формы

ние поверхности Ферми в виде компактной двумерной поверхности, вложенной в трехмерный тор, позволяет определить такую важную характеристику, как ее род. А именно, каждая замкнутая ориентируемая поверхность диффеоморфна двумерной сфере с  $g$ -прикрепленными ручками, где  $g$  — род поверхности (рис. 2).

С другой стороны, форма поверхности Ферми в накрывающем трехмерном пространстве обнаруживает важные особенности топологического вложения этой поверхности в трехмерный тор  $\mathbb{T}^3$ . В частности, это представление определяет такую важную характеристику вложения, как ранг поверхности Ферми. По определению, ранг поверхности Ферми может принимать значения 0, 1, 2, 3 и определяет число независимых направлений, вдоль которых простирается поверхность Ферми в накрывающем трехмерном пространстве (рис. 3). По топологическим причинам ранг поверхности Ферми не может превышать ее род  $g$ .

Наиболее важным при описании гальваномагнитных явлений в металлах является различие меж-

ду замкнутыми и открытыми (незамкнутыми в  $\mathbf{p}$ -пространстве) траекториями системы (1.1). В работе [1] было показано принципиальное различие вкладов замкнутых и открытых периодических траекторий (рис. 4) в проводимость в пределе  $\omega_B \tau \rightarrow \infty$ . Формулы для тензора проводимости, полученные в [1] для чистых монокристаллических образцов при достаточно низких температурах, можно записать в главном порядке в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma^{kl} &\simeq \\ &\simeq \frac{ne^2\tau}{m^*} \begin{pmatrix} (\omega_B\tau)^{-2} & (\omega_B\tau)^{-1} & (\omega_B\tau)^{-1} \\ (\omega_B\tau)^{-1} & (\omega_B\tau)^{-2} & (\omega_B\tau)^{-1} \\ (\omega_B\tau)^{-1} & (\omega_B\tau)^{-1} & * \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.2)$$

(для замкнутых траекторий,  $\omega_B \tau \rightarrow \infty$ ),

$$\begin{aligned} \sigma^{kl} &\simeq \\ &\simeq \frac{ne^2\tau}{m^*} \begin{pmatrix} (\omega_B\tau)^{-2} & (\omega_B\tau)^{-1} & (\omega_B\tau)^{-1} \\ (\omega_B\tau)^{-1} & * & * \\ (\omega_B\tau)^{-1} & * & * \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.3)$$

(для открытых периодических траекторий,  $\omega_B \tau \rightarrow \infty$ ).

Формулы (1.2), (1.3) описывают только асимптотическое поведение тензора проводимости в сильных магнитных полях. Это означает, что каждый матричный элемент определен в действительности с точностью до множителя порядка единицы. Величина  $n$  обозначает концентрацию электронов в металле, а величина  $m^*$  определяет значение эффективной массы электрона в кристалле. Величина  $\tau$  представляет собой время свободного пробега электрона, а величина  $\omega_B = eB/m^*c$  имеет смысл циклотронной частоты в металле. Отметим, что циклотронная частота фактически определена только для замкнутых траекторий системы (1.1) и совпадает с  $\omega_B$  только по порядку величины. В обоих случаях мы предполагаем, что ось  $z$  направлена вдоль магнитного поля, а во втором случае ось  $x$  совпадает со средним направлением периодических траекторий в  $\mathbf{p}$ -пространстве. Символы «\*» в обеих формулах обозначают некоторые константы порядка единицы.

Видно, что основное отличие замкнутых траекторий от периодических проявляется в проводимости в плоскости, ортогональной  $\mathbf{V}$ . А именно, вклад замкнутых траекторий в проводимость довольно быстро убывает во всех направлениях в этой плоскости с ростом значения  $B$ , тогда как вклад периодических траекторий имеет сильную анизотропию в пределе  $\omega_B \tau \rightarrow \infty$ . Направление, в котором

происходит наибольшее подавление проводимости в плоскости, ортогональной  $\mathbf{V}$ , во втором случае совпадает со средним направлением открытых траекторий в  $\mathbf{p}$ -пространстве. Последнее обстоятельство обусловлено известной связью между траекториями электронов в координатном и (квази)импульсном пространствах при наличии магнитного поля. А именно, проекции траекторий в  $\mathbf{x}$ -пространстве на плоскость, ортогональную  $\mathbf{V}$ , подобны соответствующим траекториям в  $\mathbf{p}$ -пространстве, повернутым на  $90^\circ$ . Описанные особенности проводимости позволяют различать вклады замкнутых и открытых периодических траекторий, а также экспериментально определять направление периодических траекторий в  $\mathbf{p}$ -пространстве.

Более детальное изучение системы (1.1) привело также к открытию других важных примеров незамкнутых электронных траекторий в  $\mathbf{p}$ -пространстве, более общих, чем периодические (см. [2–5]). Открытые в этот период незамкнутые траектории системы (1.1) также имели сильную анизотропию (среднее направление) в плоскостях, ортогональных  $\mathbf{V}$ , и, как следствие, также вносили сильно анизотропный вклад (1.3) в проводимость в пределе  $\omega_B \tau \rightarrow \infty$  (в главном порядке).

Отметим, что изучение геометрии траекторий системы (1.1) является одним из важнейших методов изучения дисперсионных соотношений для широкого круга проводников (см., например, [4–8]). Заметим также, что появление незамкнутых орбит на достаточно сложных поверхностях Ферми играет важную роль и в магнитной проводимости поликристаллов при достаточно низких температурах (см. [9, 10]).

Проблема полной классификации траекторий системы (1.1) для произвольного закона дисперсии впервые была поставлена Новиковым в работе [11]. Эта проблема исследовалась в последующие десятилетия в его топологической школе (см. [12–18]), и к настоящему времени получена качественная классификация траекторий (1.1), которые могут возникать на произвольно сложных периодических поверхностях. В этой классификации все замкнутые траектории (в накрывающем  $\mathbf{p}$ -пространстве) рассматриваются как однотипные, поэтому только открытые траектории (1.1), глобальные геометрические свойства которых могут сильно различаться, подлежат классификации.

Наиболее важным в классификации открытых траекторий (1.1) является описание устойчивых открытых траекторий этой системы. Здесь мы называем устойчивыми такие открытые траектории сис-

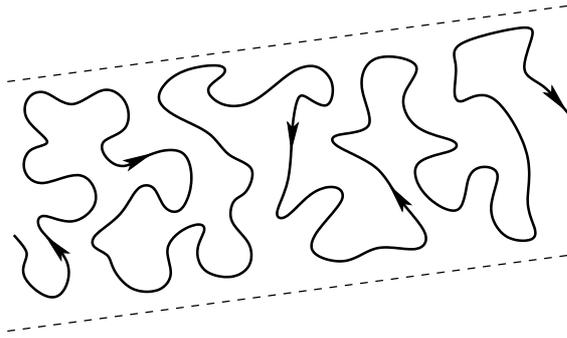


Рис. 5. Устойчивая открытая траектория в плоскости, ортогональной  $\mathbf{V}$  (схематично)

темы (1.1), которые не исчезают и существенно не меняют свою форму при малых изменениях параметров задачи (к которым относятся направление  $\mathbf{V}$  и дисперсионное соотношение  $\epsilon(\mathbf{p})$ ). Как следует из работ [12, 14, 15], такие траектории всегда обладают следующими двумя важными свойствами:

1) каждая устойчивая открытая траектория системы (1.1) лежит в прямой полосе конечной ширины в плоскости, ортогональной  $\mathbf{V}$ , и проходит через нее насквозь (рис. 5);

2) все устойчивые открытые траектории имеют при фиксированном направлении  $\mathbf{V}$  и фиксированном законе дисперсии одно и то же среднее направление, которое задается пересечением плоскости, ортогональной  $\mathbf{V}$ , с некоторой целочисленной плоскостью  $\Gamma$ , остающейся неизменной при малых изменениях любых параметров задачи.

Целочисленность плоскости  $\Gamma$  в утверждении 2) означает, что она порождается двумя неколлинеарными векторами из обратной решетки в  $\mathbf{p}$ -пространстве. Эквивалентно, плоскость  $\Gamma$  ортогональна некоторому ненулевому вектору прямой решетки. Таким образом, среднее направление устойчивых открытых траекторий в  $\mathbf{p}$ -пространстве всегда ортогонально некоторому кристаллографическому вектору

$$\mathbf{m} = m^1 \mathbf{e}_1 + m^2 \mathbf{e}_2 + m^3 \mathbf{e}_3,$$

где  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  — некоторый фиксированный базис прямой решетки  $L$  и  $m^1, m^2, m^3$  — некоторые целые числа. Можно видеть также, что указанные выше свойства определяют среднее направление  $\mathbf{l}$  устойчивых открытых траекторий в  $\mathbf{p}$ -пространстве согласно формуле

$$\mathbf{l} \sim [\mathbf{V} \times \mathbf{m}].$$

Свойство 1) открытых траекторий системы (1.1) общего положения было впервые сформулировано Новиковым в виде гипотезы [11].

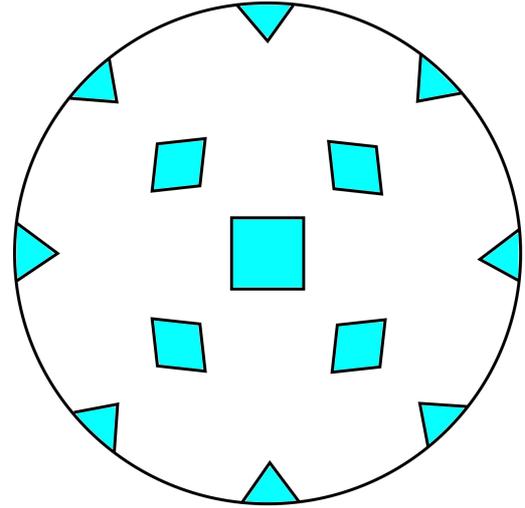


Рис. 6. Зоны устойчивости на единичной сфере (схематично)

Вклад устойчивых открытых траекторий в проводимость в пределе  $\omega_{BT} \rightarrow \infty$  также определяется формулой (1.3) при соответствующем выборе системы координат. Как и прежде, направление максимального подавления проводимости в плоскости, ортогональной  $\mathbf{V}$ , совпадает со средним направлением устойчивых открытых траекторий в  $\mathbf{p}$ -пространстве (ортогональным проекции среднего направления траекторий в  $\mathbf{x}$ -пространстве на плоскость, ортогональную  $\mathbf{V}$ ).

Величины  $(m^1, m^2, m^3)$  имеют топологическую природу и, как сказано выше, устойчивы при малых вариациях параметров задачи. В частности, они локально устойчивы по отношению к малым поворотам направления  $\mathbf{V}$  при фиксированном дисперсионном соотношении  $\epsilon(\mathbf{p})$  и энергии Ферми  $\epsilon_F$ . Как следствие, на угловой диаграмме (единичной сфере), параметризующей направления  $\mathbf{V}$ , возникает семейство зон устойчивости  $\Omega_\alpha$ , в каждой из которых тройка  $(m_\alpha^1, m_\alpha^2, m_\alpha^3)$  определена и постоянна. Из-за особого вклада в проводимость устойчивых открытых траекторий как форму зон устойчивости, так и числа  $(m_\alpha^1, m_\alpha^2, m_\alpha^3)$  можно наблюдать экспериментально. Именно таким образом числа  $(m_\alpha^1, m_\alpha^2, m_\alpha^3)$  были введены в работе [19] (см. также [20]) как топологические числа, наблюдаемые в проводимости нормальных металлов. Зоны устойчивости, как правило, представляют собой области с кусочно-гладкими границами на единичной сфере (рис. 6). Отметим, что топологические числа определяют только геометрические свойства тензора проводимости, тогда как его аналитические свойства в

пределе  $\omega_{BT} \rightarrow \infty$  внутри и вблизи зон устойчивости могут быть весьма нетривиальными (см., например, [21, 22]).

Что касается неустойчивых открытых траекторий системы (1.1), то одним из важнейших примеров таких траекторий являются периодические траектории на поверхностях Ферми ранга 1 (рис. 4). Однако на достаточно сложных поверхностях Ферми могут существовать и значительно более сложные неустойчивые открытые траектории, существование которых было обнаружено при изучении общей проблемы Новикова в последние десятилетия [13, 16, 17]. Эти траектории обладают значительно более сложными геометрическими свойствами и неустойчивы относительно любых малых поворотов направления  $\mathbf{B}$  (а также сколь угодно малых вариаций значения  $\epsilon_F$ ). Геометрическая сложность таких траекторий приводит и к более сложному поведению тензора проводимости в пределе  $\omega_{BT} \rightarrow \infty$  при наличии таких траекторий на поверхности Ферми. Как мы увидим, все такие траектории можно разделить на два основных типа (типы Царева и Дынникова), которые имеют существенно разные геометрические свойства и вносят весьма разный вклад в проводимость при  $\omega_{BT} \rightarrow \infty$ .

С момента своего открытия неустойчивые «хаотические» траектории системы (1.1) активно изучались с различных точек зрения. Наиболее значимые результаты, связанные с предметом, приведены в работах [13, 16, 17, 23–46]. Это далеко не полный список работ по теме, и в ближайшее время их ожидается больше. В данной работе мы делаем обзор состояния этой области исследований на данный момент, обращая внимание как на геометрические аспекты возникновения и поведения открытых траекторий, так и на физические следствия, вытекающие из их геометрических свойств.

## 2. ТИПЫ ХАОТИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРИЙ И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ИМ ОСОБЕННОСТИ УГЛОВОЙ ДИАГРАММЫ

Опишем здесь сначала более простые с геометрической точки зрения хаотические траектории типа Царева. Хаотические траектории Царева могут возникать только тогда, когда направление магнитного поля лишь частично иррационально, а именно, плоскость, ортогональная  $\mathbf{B}$ , содержит ненулевой вектор обратной решетки. Для описания основных особенностей хаотических траекторий Царева можно использовать следующий пример.

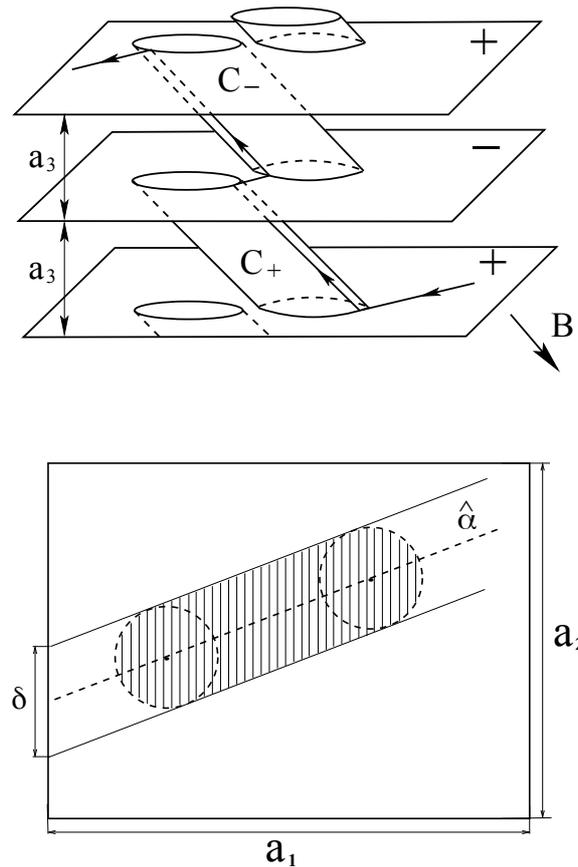


Рис. 7. Форма поверхности Ферми, несущей траекторию царевского типа, и ее вертикальная проекция (для одной зоны Бриллюэна, заштрихованная область соответствует перескоку между плоскостями)

Рассмотрим периодическое семейство  $\{\Pi_i\}$  горизонтальных плоскостей в трехмерном пространстве с одинаковым расстоянием  $a_3$  между соседними плоскостями. Пронумеруем их последовательно, так что  $\Pi_{i+1} = \Pi_i + \mathbf{a}_3$ . Выберем также два (ортогональных) периода  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  в горизонтальной плоскости и соединим все пары соседних плоскостей 3-периодическим семейством одинаковых «наклонных» цилиндров, как показано на рис. 7. Основания цилиндров выровнены так, что прямая, проходящая через центры верхнего основания цилиндра  $C$  и нижнего основания цилиндра  $C + \mathbf{a}_3$ , имеет иррациональное направление  $\hat{\alpha}$  в горизонтальной плоскости. Полученная поверхность снабжена ориентацией и как ориентированная поверхность инвариантна относительно сдвигов на  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  и  $2\mathbf{a}_3$ . Мы сглаживаем эту поверхность 3-периодическим образом, что приводит к поверхности вида  $\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon_F$  для гладкой 3-периодической функции  $\epsilon$  и уровня  $\epsilon_F$ .

Пусть теперь направление  $\mathbf{V}$  лежит в горизонтальной плоскости и ортогонально направлению  $\hat{a}$ . Рассмотрим траектории системы (1.1), соответствующие такому направлению  $\mathbf{V}$ . Эти траектории следуют прямым линиям направления  $\hat{a}$  до тех пор, пока не наткнутся на один из цилиндров, и в этом случае они перепрыгивают с  $\Pi_i$  на  $\Pi_{i+2}$  или  $\Pi_{i-2}$  в зависимости от четности  $i$ , далее по другой прямой с направлением  $\hat{a}$  до следующего прыжка и т. д. Скачки происходят с четко определенной частотой, поэтому траектории имеют асимптотическое направление в накрывающем  $\mathbf{p}$ -пространстве в обычном смысле. Однако легко может случиться, что такая траектория не содержится ни в какой прямой плоской полосе конечной ширины.

Описанный пример представляет довольно общее явление. В некотором смысле, для частично иррациональных направлений  $\mathbf{V}$  хаотические траектории системы (1.1) всегда имеют описанные свойства. В частности, как показано в [17], в этом случае они всегда имеют асимптотическое направление. Это свойство позволяет также дать качественное описание вклада таких траекторий в проводимость в пределе  $\omega_{BT} \rightarrow \infty$ . Этот вклад также имеет сильно анизотропную форму в плоскости, ортогональной  $\mathbf{V}$ , что выявляет асимптотические направления таких траекторий в  $\mathbf{p}$ -пространстве.

Формула (1.3), вообще говоря, уже неприменима в случае общих траекторий этого типа; однако для вклада таких траекторий в общий тензор проводимости справедливо следующее:

$$\sigma^{kl} \simeq \frac{ne^2\tau}{m^*} \begin{pmatrix} o(1) & o(1) & o(1) \\ o(1) & * & * \\ o(1) & * & * \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

$\omega_{BT} \rightarrow \infty.$

Здесь, как и в формуле (1.3), мы также предполагаем, что ось  $z$  направлена вдоль  $\mathbf{V}$ , а ось  $x$  направлена вдоль асимптотического направления открытых траекторий в  $\mathbf{p}$ -пространстве.

Более точные аналитические свойства тензора проводимости в этом случае, однако, сложнее, чем в случае устойчивых открытых траекторий (1.1).

С точки зрения компактной версии поверхности Ферми, вложенной в трехмерный тор  $\mathbb{T}^3$ , поведение хаотических траекторий типа Царева весьма специфично. Каждая такая траектория всюду плотно заполняет половину всей поверхности (при условии, что последняя имеет род 3, как в примере выше), отделенной от другой половины сепаратрисными циклами, не гомологичными нулю в  $\mathbb{T}^3$ .

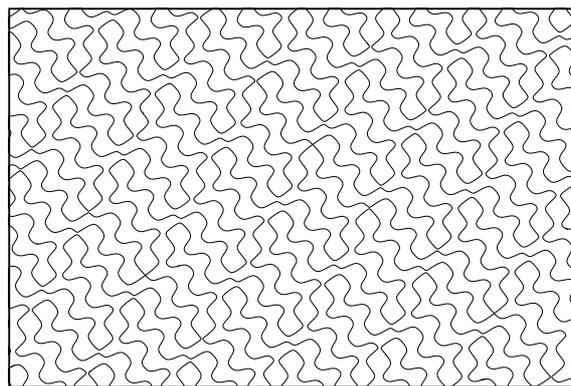


Рис. 8. Хаотическая траектория Дынникова, возникающая на поверхности  $\cos p_x + \cos p_y + \cos p_z = 0$ .

Более сложные хаотические траектории системы (1.1) можно наблюдать, когда направление  $\mathbf{V}$  имеет максимальную степень иррациональности, т.е. когда плоскость, ортогональная  $\mathbf{V}$ , не содержит векторов обратной решетки. Первые примеры таких траекторий были построены Дынниковым в работах [16, 17]. Хаотические траектории типа Дынникова имеют гораздо более сложную геометрию в  $\mathbf{p}$ -пространстве, так что соответствующая динамика чем-то напоминает диффузию в плоскостях, ортогональных  $\mathbf{V}$  (рис. 8). Как и траектории Царева, траектории Дынникова могут возникать только на поверхностях Ферми ранга 3, и они также неустойчивы по отношению к любым сколь угодно малым отклонениям направления  $\mathbf{V}$  и изменениям величины  $\epsilon_F$ .

Для объяснения возникновения траекторий типа Дынникова полезно рассмотреть угловую диаграмму, связанную с произвольным дисперсионным соотношением  $\epsilon(\mathbf{p})$ . Под угловой диаграммой мы понимаем сферическую карту, на которой для каждой точки, рассматриваемой как направление  $\mathbf{V}$ , мы указываем тип динамики, определяемый соответствующими системами (1.1) согласно нашей классификации. Возможность использовать эту диаграмму исходит из следующих важных фактов о системе (1.1).

Рассмотрим произвольную гладкую 3-периодическую функцию  $\epsilon(\mathbf{p})$ , принимающую значения в некотором интервале  $[\epsilon_{min}, \epsilon_{max}]$ . Зафиксируем некоторое направление  $\mathbf{V}$  и рассмотрим соответствующую систему (1.1). Для простоты будем считать, что направление  $\mathbf{V}$  не является рациональным. Тогда верно следующее.

1) Открытые траектории системы (1.1) присутствуют либо в замкнутом интервале энергий

$$\epsilon_{min} < \epsilon_1(\mathbf{V}) \leq \epsilon(\mathbf{p}) \leq \epsilon_2(\mathbf{V}) < \epsilon_{max}$$

либо на одном энергетическом уровне  $\epsilon_0 = \epsilon_1(\mathbf{V}) = \epsilon_2(\mathbf{V})$ .

2) В случае  $\epsilon_1(\mathbf{V}) < \epsilon_2(\mathbf{V})$  все открытые траектории в интервале  $[\epsilon_1(\mathbf{V}), \epsilon_2(\mathbf{V})]$  лежат в прямых полосах конечной ширины в плоскостях, ортогональных  $\mathbf{V}$ , и имеют (на всех уровнях энергии) одно и то же среднее направление, задаваемое пересечением плоскости, ортогональной  $\mathbf{V}$ , и некоторой целочисленной плоскости  $\Gamma$  в  $\mathbf{p}$ -пространстве. Величины  $\epsilon_1(\mathbf{V})$  и  $\epsilon_2(\mathbf{V})$  для направлений  $\mathbf{V}$  общего положения совпадают со значениями некоторых непрерывных функций  $\tilde{\epsilon}_1(\mathbf{V})$  и  $\tilde{\epsilon}_2(\mathbf{V})$ , определенных всюду на  $S^2$ . Однако для направлений  $\mathbf{V}$ , соответствующих возникновению периодических открытых траекторий, значения  $\epsilon_1(\mathbf{V})$  и  $\epsilon_2(\mathbf{V})$  имеют «скачки», при этом всегда

$$\epsilon_1(\mathbf{V}) \leq \tilde{\epsilon}_1(\mathbf{V}) \leq \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{V}) \leq \epsilon_2(\mathbf{V}).$$

3) Свойство  $\tilde{\epsilon}_1(\mathbf{V}) < \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{V})$ , так же как и целочисленная плоскость  $\Gamma$ , локально устойчивы относительно малых поворотов  $\mathbf{V}$ , поэтому каждая из плоскостей  $\Gamma_\alpha$  определяет некоторую зону устойчивости  $\hat{\Omega}_\alpha$  в пространстве направлений  $\mathbf{V}$ .

4) Если открытые траектории возникают только на одном энергетическом уровне, то возможны два случая: все они лежат в прямых плоских полосах конечной ширины (это происходит на границах зон  $\hat{\Omega}_\alpha$ ) или все они хаотичны (это происходит, когда  $\mathbf{V}$  является точкой накопления бесконечного числа зон  $\hat{\Omega}_\alpha$ , диаметр которых стремится к нулю).

Приведенное выше свойство 2) позволяет определить зоны устойчивости для всего дисперсионного соотношения путем объединения зон устойчивости по всем  $\epsilon_F \in [\epsilon_1, \epsilon_2]$ . Из свойства 1) следует, что для каждого направления  $\mathbf{V}$  открытые траектории системы (1.1) присутствуют хотя бы на одном энергетическом уровне. Такие траектории называются «топологически регулярными», если направление  $\mathbf{V}$  принадлежит одной из зон устойчивости (включая границы), и хаотическими в противном случае.

Какова общая картина распределения зон устойчивости на единичной сфере? Согласно [18], могут возникнуть только две следующие ситуации.

1) Вся единичная сфера представляет собой единственную зону устойчивости  $\hat{\Omega}$ , соответствующую некоторой целочисленной плоскости  $\Gamma$ .

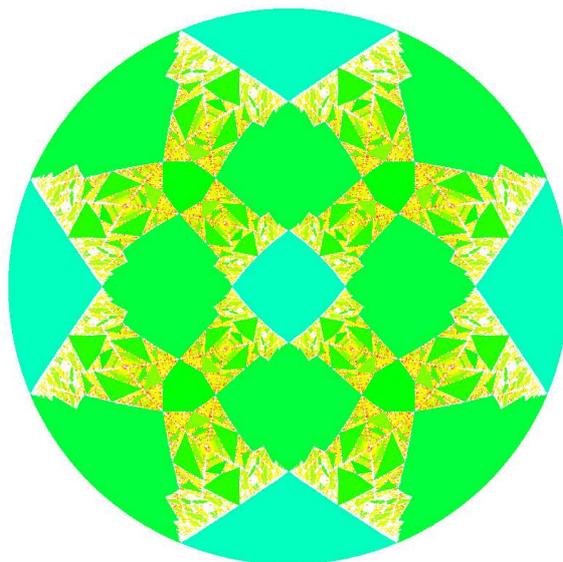


Рис. 9. Распределение зон устойчивости для дисперсионного соотношения  $\epsilon(\mathbf{p}) = \cos p_x \cos p_y + \cos p_y \cos p_z + \cos p_z \cos p_x$  [44]

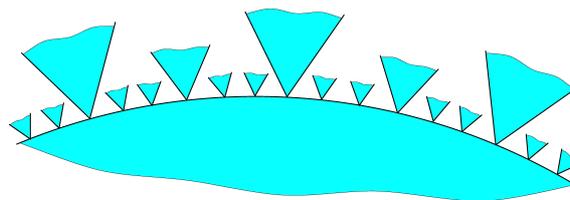


Рис. 10. Граница зоны устойчивости с прилегающими к ней меньшими зонами в точках, соответствующих появлению периодических открытых траекторий системы (1.1)

2) Угловая диаграмма содержит бесконечное число зон устойчивости, объединение которых всюду плотно в пространстве направлений  $\mathbf{V}$  (см., например, рис. 9).

Случай 1) соответствует весьма специфическим дисперсионным соотношениям (как в случае квазиодномерных проводников), и для большинства дисперсионных соотношений в реальных проводниках имеет место случай 2). В частности, ситуация 1) не может возникнуть при наличии какой-либо вращательной симметрии кристалла, действие которой на  $\mathbb{R}^3$  неприводимо.

Картина зон устойчивости, появляющаяся на угловой диаграмме в случае 2), в действительности довольно сложна. В частности, как показано в [18], граница каждой из зон устойчивости представляет собой в этом случае множество скопления бесконечного числа других зон устойчивости, примыка-

ющих к ней во всех точках, соответствующих возникновению периодических открытых траекторий (рис. 10). Легко видеть, что такие траектории возникают в зоне  $\hat{\Omega}_\alpha$  всякий раз, когда пересечение плоскости, ортогональной  $\mathbf{V}$ , и соответствующей плоскости  $\Gamma_\alpha$  задает целочисленное направление в  $\mathbf{p}$ -пространстве. Соответствующие направления  $\mathbf{V}$  не являются направлениями общего положения; в то же время они образуют всюду плотное множество на границе любой из зон устойчивости в случае 2).

Дополнением к объединению зон устойчивости в случае 2) является множество фрактального типа, и это как раз множество направлений  $\mathbf{V}$ , для которых возникают хаотические открытые траектории (типа Царева или Дынникова). Согласно гипотезе Новикова [30], для дисперсионного соотношения общего положения это множество имеет нулевую меру и хаусдорфову размерность строго меньше 2. Гипотеза Новикова подтверждается серьезными численными исследованиями, но пока еще не доказана аналитически в общем виде. Совсем недавно, однако, Дынников, Юбер, Мерка и Скрипченко смогли доказать утверждение о нулевой мере для дисперсионных соотношений, обладающих центральной симметрией  $\epsilon(-\mathbf{p}) = \epsilon(\mathbf{p})^1$ .

В ситуации 2) множество «хаотических» направлений  $\mathbf{V}$  никогда не бывает пустым. Это означает, что для определенных направлений  $\mathbf{V}$  и значений  $\epsilon_0$  хаотические траектории обязательно должны возникать. В частности, каждая точка на границе любой из зон устойчивости  $\hat{\Omega}_\alpha$  является точкой накопления таких направлений  $\mathbf{V}$ . В реальном проводнике, конечно, можно наблюдать только те хаотические траектории, которые возникают на уровне Ферми  $\epsilon_F$ .

Таким образом, каждая угловая диаграмма для реального проводника (с фиксированным  $\epsilon_F$ ) в действительности вкладывается в угловую диаграмму для всего дисперсионного соотношения. Это означает, в частности, что при фиксированном значении  $\epsilon_F$  каждая зона устойчивости  $\Omega_\alpha$  на угловой диаграмме является подобластью зоны устойчивости  $\hat{\Omega}_\alpha$  на полной угловой диаграмме. При этом на угловых диаграммах для фиксированных значений  $\epsilon_F$  обычно наблюдается только часть зон устойчивости, определенных для всего дисперсионного соотношения, и большая часть такой диаграммы может быть заполнена направлениями  $\mathbf{V}$ , для кото-

рых на соответствующей поверхности уровня имеются только замкнутые траектории.

Нам будет полезно теперь посмотреть на угловую диаграмму для каждого отдельного значения  $\epsilon_F$ . Рассмотрим снова 3-периодическую функцию  $\epsilon(\mathbf{p})$  (дисперсионное соотношение), принимающую значения в интервале  $[\epsilon_{min}, \epsilon_{max}]$  и порождающую бесконечное число зон устойчивости на полной угловой диаграмме. Как указано в [47], для (реалистичных) общих дисперсионных соотношений интервал  $[\epsilon_{min}, \epsilon_{max}]$  естественным образом делится на семь подынтервалов промежуточными точками

$$\epsilon_{min} < \epsilon_1^{A'} < \epsilon_1^A < \epsilon_1^B < \epsilon_2^B < \epsilon_2^A < \epsilon_2^{A'} < \epsilon_{max},$$

согласно разным уровням сложности угловых диаграмм при соответствующих значениях  $\epsilon_F$ , которые заключаются в следующем.

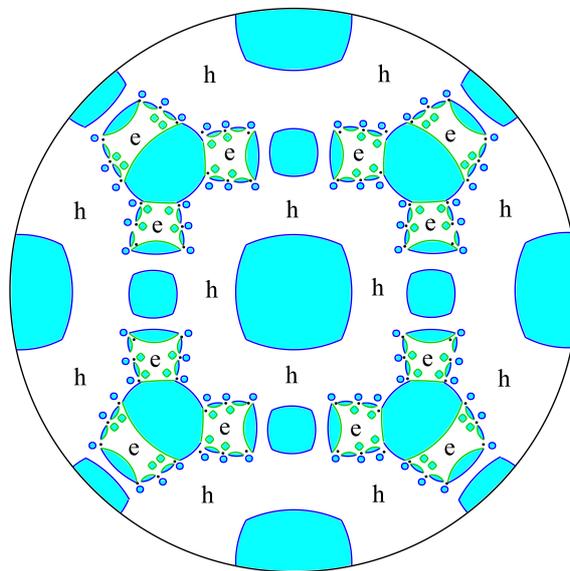
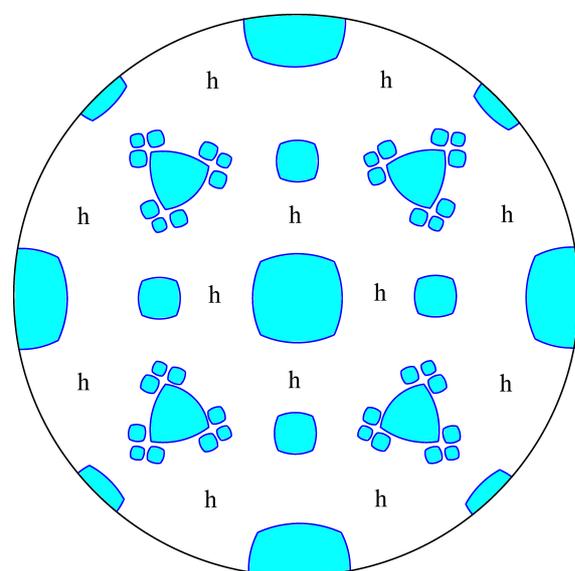
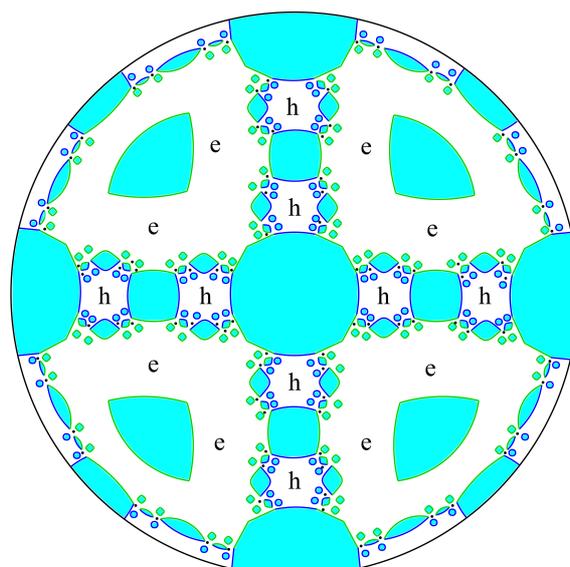
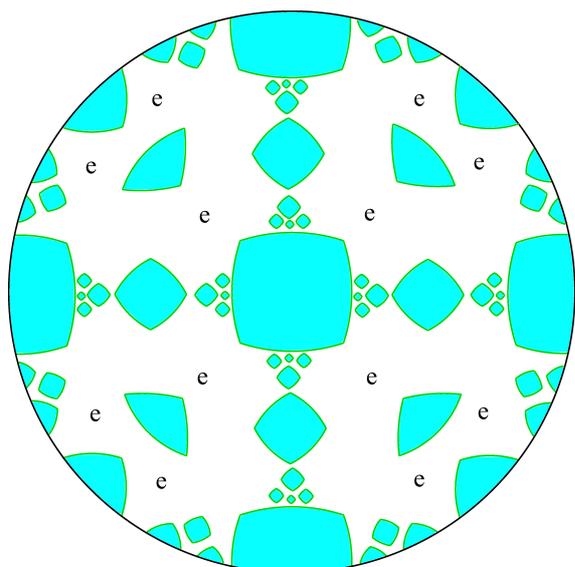
Для  $\epsilon_F$ , лежащих в интервалах  $(\epsilon_{min}, \epsilon_1^{A'})$  и  $(\epsilon_2^{A'}, \epsilon_{max})$ , угловые диаграммы не содержат никаких зон устойчивости, а все неособые траектории на соответствующих поверхностях Ферми замкнуты.

Для значений  $\epsilon_F$ , лежащих в интервалах  $(\epsilon_1^{A'}, \epsilon_1^A)$  и  $(\epsilon_2^A, \epsilon_2^{A'})$ , открытые траектории системы (1.1) присутствуют для некоторых  $\mathbf{V}$ , но все они являются периодическими и неустойчивыми. Соответствующие угловые диаграммы также достаточно просты, так как содержат только дуги, соответствующие наличию неустойчивых периодических траекторий.

Весь интервал  $(\epsilon_1^A, \epsilon_2^A)$  состоит из значений  $\epsilon_F$ , для которых существуют устойчивые открытые траектории на соответствующей поверхности Ферми для некоторых направлений  $\mathbf{V}$ , а соответствующая угловая диаграмма содержит непустые зоны устойчивости  $\Omega_\alpha$ . Этот интервал подразделяется на три меньших интервала согласно разным уровням сложности соответствующих угловых диаграмм.

А именно, в интервалах  $(\epsilon_1^A, \epsilon_1^B)$  и  $(\epsilon_2^B, \epsilon_2^A)$  все угловые диаграммы содержат лишь конечное число зон устойчивости (диаграммы типа А), а открытые траектории на соответствующих поверхностях Ферми либо устойчивые, либо периодические. Здесь также следует отметить, что угловые диаграммы проводимости, соответствующие интервалам  $(\epsilon_1^A, \epsilon_1^B)$  и  $(\epsilon_2^B, \epsilon_2^A)$  на самом деле несколько отличаются друг от друга. Их различие проявляется в поведении холловской проводимости для направлений  $\mathbf{V}$ , соответствующих наличию лишь замкнутых траекторий на поверхности Ферми. Так, во всех областях диаграмм, соответствующих наличию только замкнутых траекторий на поверхности Ферми, холловская

<sup>1)</sup> Заметим, что при постановке общей задачи Новикова требуется только периодичность дисперсионного соотношения  $\epsilon(\mathbf{p})$ .



**Рис. 11.** Угловые диаграммы типа А (схематично). Знаки “e” и “h” показывают тип холловской проводимости в областях наличия лишь замкнутых траекторий на поверхности Ферми

**Рис. 12.** Угловые диаграммы типа В (схематично). Знаки “e” и “h” показывают тип холловской проводимости в областях наличия лишь замкнутых траекторий на поверхности Ферми

проводимость имеет электронный тип в интервале  $(\epsilon_1^A, \epsilon_1^B)$  и дырочный тип в интервале  $(\epsilon_2^B, \epsilon_2^A)^2$  (рис. 11).

В интервале  $(\epsilon_1^B, \epsilon_2^B)$  в случае общего положения для любого уровня энергии соответствующая уг-

ловая диаграмма содержит бесконечное количество зон устойчивости (диаграммы типа В). Область, соответствующая отсутствию открытых траекторий на поверхности Ферми, несвязна и распадается на части, характеризующиеся либо электронной, либо дырочной холловской проводимостью (рис. 12). В интервале  $[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$  почти на каждом уровне энергии появляются хаотические траектории (типа Царева или Дынникова) для некоторых направлений

<sup>2)</sup> Точнее, это верно для вклада в холловскую проводимость от рассматриваемой связной компоненты поверхности Ферми.

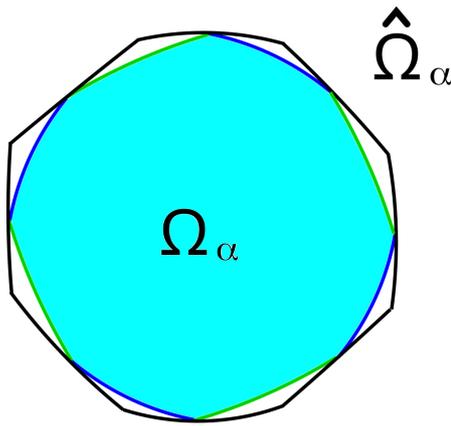


Рис. 13. Зона  $\Omega_\alpha$  (закрашена) внутри зоны  $\hat{\Omega}_\alpha$  для значения  $\epsilon_F$ , лежащего в интервале  $[\epsilon_1^{B,\alpha}, \epsilon_2^{B,\alpha}]$  (схематически)

**В.** Области на угловой диаграмме, соответствующие разным типам холловской проводимости, разделены «цепочками», состоящими из бесконечного числа зон устойчивости и «хаотических» направлений **В** (в ситуации общего положения).

Как следует из [18], мера Лебега «хаотических» направлений **В** для фиксированной поверхности Ферми общего положения равна нулю. Согласно гипотезе Новикова [31, 32], верхняя хаусдорфова размерность множества хаотических направлений **В** (на  $S^2$ ) для фиксированной поверхности Ферми общего положения строго меньше единицы (хотя для некоторых специальных поверхностей Ферми может быть больше единицы).

В дополнение к интервалу  $[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$ , определенному для всего дисперсионного соотношения, также может быть полезно рассмотреть интервалы  $[\epsilon_1^{B,\alpha}, \epsilon_2^{B,\alpha}]$ , связанные с каждой из зон  $\hat{\Omega}_\alpha$ . Интервал  $[\epsilon_1^{B,\alpha}, \epsilon_2^{B,\alpha}]$  можно рассматривать как энергетический интервал, где хаотические траектории возникают для направлений **В**, накапливающихся вблизи границы зоны  $\hat{\Omega}_\alpha$ . Его можно определить следующим образом. Как мы отмечали выше, на границе каждой из зон определена непрерывная функция

$$\epsilon_0(\mathbf{V}) = \tilde{\epsilon}_1(\mathbf{V}) = \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{V}).$$

Величины  $\epsilon_1^{B,\alpha}$  и  $\epsilon_2^{B,\alpha}$  определяются как значения  $\min \epsilon_0(\mathbf{V})$  и  $\max \epsilon_0(\mathbf{V})$ , взятые по границе  $\hat{\Omega}_\alpha$ .

Интервал  $[\epsilon_1^{B,\alpha}, \epsilon_2^{B,\alpha}]$  может быть достаточно большим для «больших» зон  $\hat{\Omega}_\alpha$  (при малых значениях  $(m_\alpha^1, m_\alpha^2, m_\alpha^3)$ ) и стремится к нулю при уменьшении зон (росте  $(m_\alpha^1, m_\alpha^2, m_\alpha^3)$ ).

Для значений  $\epsilon_F$ , лежащих в интервале  $[\epsilon_1^{B,\alpha}, \epsilon_2^{B,\alpha}]$ , граница соответствующей зоны устойчивости  $\Omega_\alpha$  имеет общие точки с границей зоны

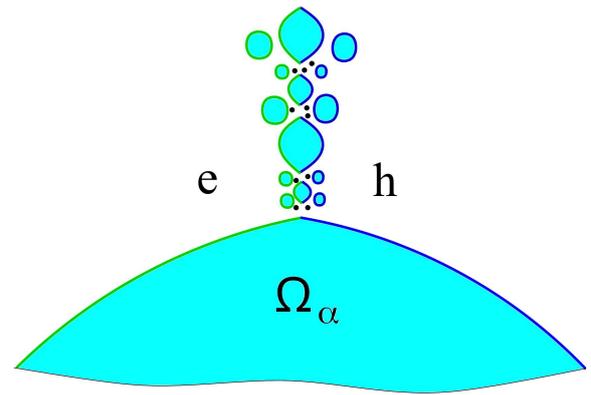


Рис. 14. Точка скопления «хаотических» направлений **В** и уменьшающиеся зоны устойчивости на границе зоны  $\Omega_\alpha$  (схематично). Указан также тип холловской проводимости в областях, где на поверхности Ферми присутствуют лишь замкнутые траектории

$\hat{\Omega}_\alpha$  (рис. 13), и именно эти граничные точки  $\Omega_\alpha$  являются точками накопления «хаотических» направлений **В** на угловых диаграммах для таких  $\epsilon_F$  (рис. 14).

Как можно видеть, таким образом, наличие хаотических траекторий на поверхности Ферми должно иметь место для определенных проводящих материалов и специально выбранных направлений магнитного поля. Насколько нам известно, однако, такие траектории (как и угловые диаграммы типа **В**) пока не были обнаружены в экспериментах по магнитной проводимости в сильных магнитных полях. Одной из основных причин этого, на наш взгляд, может являться то, что в действительности интервал  $[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$  достаточно узок для большинства реальных дисперсионных соотношений, поэтому вероятность попадания уровня Ферми в этот интервал довольно мала. С другой стороны, большое разнообразие материалов, доступных для создания на сегодняшний день, дает надежду, что в достаточно точных экспериментах в ряде проводников такие траектории могут быть обнаружены. Напомним, что хаотические траектории Царева или Дынникова могут возникать только на поверхностях Ферми ранга 3.

В заключение данного раздела сделаем еще одно замечание. Приведенные выше формулировки относятся к общей ситуации, когда законы дисперсии и поверхности Ферми не имеют дополнительных симметрий нефизического происхождения. Однако некоторые полезные теоретические модели могут иметь такие симметрии, и в этом случае приведенные выше утверждения должны быть изменены.

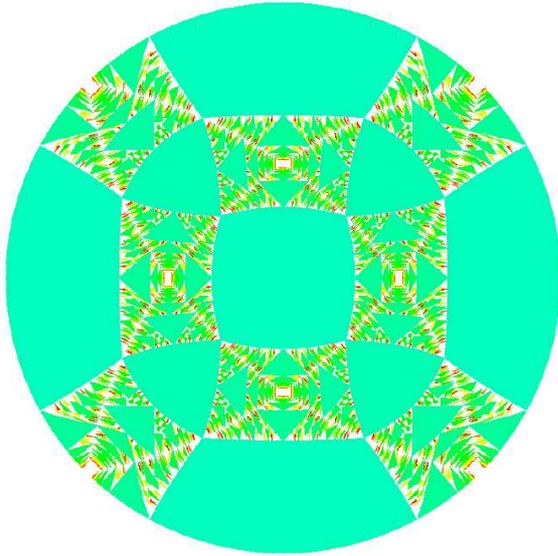


Рис. 15. Угловая диаграмма для поверхности  $\cos p_x + \cos p_y + \cos p_z = 0$  [44]

Например, рассмотрим дисперсионное соотношение

$$\epsilon(\mathbf{p}) = \cos p_x + \cos p_y + \cos p_z \quad (2.2)$$

и поверхность Ферми

$$\cos p_x + \cos p_y + \cos p_z = 0. \quad (2.3)$$

Легко видеть, что значение  $\epsilon(\mathbf{p})$  меняется на противоположное при сдвиге на «полупериод»

$$p_x \rightarrow p_x + \pi, \quad p_y \rightarrow p_y + \pi, \quad p_z \rightarrow p_z + \pi.$$

Поэтому, любая поверхность уровня  $\epsilon(\mathbf{p}) = -\epsilon$  получается из поверхности  $\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon$  сдвигом в  $\mathbf{p}$ -пространстве. Следовательно, любая пара противоположных уровней  $\epsilon(\mathbf{p}) = -\epsilon$  и  $\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon$  содержит траектории одинаковой геометрии, а поверхность (2.3) должна содержать открытые траектории системы (1.1) для любого направления  $\mathbf{V}$ . То же самое можно сказать о любом дисперсионном соотношении, фурье-разложение которого содержит только нечетные гармоники.

Таким образом, в приведенном примере угловая диаграмма для поверхности Ферми (2.3) совпадает с диаграммой для всего дисперсионного соотношения (рис. 15). Хаотические траектории для дисперсионного соотношения (2.2) возникают только на нулевом уровне энергии, и введенный выше интервал  $[\epsilon_1^B, \epsilon_2^B]$  схлопывается здесь в одну точку  $\epsilon = 0$ .

### 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ХАОТИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРИЙ И ПОВЕДЕНИЕ ПРОВОДИМОСТИ В СИЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

Влияние геометрии траекторий системы (1.1) на поведение проводимости в сильных магнитных полях обусловлено, конечно, в первую очередь, связью формы траектории в координатном и импульсном пространствах. Для описания гальваномагнитных явлений в обсуждаемой ситуации удобнее всего использовать кинетическое уравнение

$$f_t + \frac{e}{c} \sum_{l=1}^3 [\nabla \epsilon(\mathbf{p}) \times \mathbf{V}]^l \frac{\partial f}{\partial p^l} + e \sum_{l=1}^3 E^l \frac{\partial f}{\partial p^l} = I[f](\mathbf{p}, t),$$

где  $I[f]$  представляет интеграл столкновений.

Как известно, электропроводность определяется линейной поправкой к равновесной функции распределения

$$f_0(\mathbf{p}) = \frac{1}{\exp[(\epsilon(\mathbf{p}) - \epsilon_F)/T] + 1},$$

удовлетворяющей соотношению

$$\frac{e}{c} \sum_{l=1}^3 [\nabla \epsilon(\mathbf{p}) \times \mathbf{V}]^l \frac{\partial f_0}{\partial p^l} + e \sum_{l=1}^3 E^l \frac{\partial f_0}{\partial p^l} = \left[ \widehat{L}_{[f_0]} \cdot f_0 \right](\mathbf{p}), \quad (3.1)$$

где  $\widehat{L}_{[f_0]}$  представляет линейризацию функционала  $I[f](\mathbf{p})$  на функции  $f_0$ .

После перехода к переменным, непосредственно связанным с системой (1.1)

$$p_z, s = teB/c, \epsilon$$

(где  $t$  — время пробега по траекториям системы (1.1)), уравнение (3.1) может быть записано в виде

$$\frac{eB}{c} \frac{\partial f_{(1)}}{\partial s} + e (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_{gr}) \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} = \left[ \widehat{L}_{[f_0]} \cdot f_{(1)} \right](p_z, s, \epsilon). \quad (3.2)$$

Анализ системы (3.2) является наиболее простым, когда на поверхности Ферми присутствуют лишь замкнутые или периодические траектории (1.1) (в обоих случаях траектории замкнуты на компактной поверхности Ферми в трехмерном торе). В этом случае [1] функция  $f_{(1)}$  имеет следующее разложение:

$$f_{(1)} = f_{(1)}^{(0)} + f_{(1)}^{(1)} B^{-1} + f_{(1)}^{(2)} B^{-2} + \dots, \quad (3.3)$$

и соответствующие тензоры проводимости имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma^{kl}(B) \simeq & \frac{ne^2\tau}{m^*} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} + \\ & + \frac{ne^2\tau}{m^*} \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & * \\ * & * & 0 \end{pmatrix} (\omega_B\tau)^{-1} + \\ & + \frac{ne^2\tau}{m^*} \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} (\omega_B\tau)^{-2} + \dots \quad (3.4) \end{aligned}$$

в случае замкнутых траекторий или

$$\begin{aligned} \sigma^{kl}(B) \simeq & \frac{ne^2\tau}{m^*} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} + \\ & + \frac{ne^2\tau}{m^*} \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & * \\ * & * & 0 \end{pmatrix} (\omega_B\tau)^{-1} + \\ & + \frac{ne^2\tau}{m^*} \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} (\omega_B\tau)^{-2} + \dots \quad (3.5) \end{aligned}$$

в случае открытых периодических траекторий.

Однако при наличии открытых траекторий более общего вида разложения (3.3)–(3.5) уже неприменимы, что связано с наличием всюду плотных обмоток части (компактной) поверхности Ферми такими траекториями. В частности, даже для случая устойчивых открытых траекторий выражение (1.3) задает только главный член их вклада в проводимость, а поправочные члены имеют более сложный вид (см., например, [21]).

Для упрощения анализа системы (3.2) можно использовать  $\tau$ -приближение и перейти к системе

$$\frac{eB}{c} \frac{\partial f_{(1)}}{\partial s} + e (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_{gr}) \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} = -f_{(1)}/\tau, \quad (3.6)$$

дающей аналогичные результаты более простым путем.

Решения системы (3.6) естественно представить в виде

$$f_{(1)}(p_z, s, \epsilon) = -\frac{\partial f_0(\epsilon)}{\partial \epsilon} \sum_{l=1}^3 E^l g^l(p_z, s, \epsilon),$$

где

$$g^l(p_z, s, \epsilon) = \frac{c}{B} \int_{-\infty}^s v_{gr}^l(p_z, s', \epsilon) e^{c(s'-s)/eB\tau} ds'$$

получены интегрированием по траектории, проходящей через точку  $(p_z, s, \epsilon)$ .

Легко видеть, что тогда тензор проводимости задается следующим интегралом по поверхности Ферми:

$$\begin{aligned} \sigma^{kl}(B) = & \frac{ec}{B} \iint_{S_F} \frac{dp_z ds}{(2\pi\hbar)^3} v_{gr}^k(p_z, s) \times \\ & \times \int_{-\infty}^s v_{gr}^l(p_z, s') e^{c(s'-s)/eB\tau} ds'. \quad (3.7) \end{aligned}$$

Можно также показать, что в этом случае симметричная часть тензора проводимости дается формулой

$$s^{kl}(B) = e^2 \tau \iint_{S_F} \langle v_{gr}^k \rangle_B \langle v_{gr}^l \rangle_B \frac{dp_z ds}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (3.8)$$

где

$$\begin{aligned} \langle v_{gr}^k \rangle_B(p_z, s) & \equiv \\ & \equiv \frac{c}{eB\tau} \int_{-\infty}^s v_{gr}^k(p_z, s') e^{c(s'-s)/eB\tau} ds'. \quad (3.9) \end{aligned}$$

Из представлений (3.7)–(3.9) уже можно видеть, что свойства проводимости в сильных магнитных полях тесно связаны с геометрией соответствующих траекторий системы (1.1). Действительно, величина (3.9) может быть аппроксимирована выражением

$$\langle v_{gr}^k \rangle_B(p_z, s) \simeq \frac{c}{eB\tau} \int_{s-eB\tau/c}^s v_{gr}^k(p_z, s') ds',$$

которое пропорционально приращению  $k$ -й координаты вдоль траектории в  $\mathbf{x}$ -пространстве. В то же время, как мы отмечали выше, проекции электронных траекторий в  $\mathbf{x}$ -пространстве на плоскость, ортогональную  $\mathbf{B}$ , подобны траекториям в  $\mathbf{p}$ -пространстве, повернутым на  $90^\circ$ . Таким образом, из формул (3.7), (3.8) следует, что проводимость в плоскости, ортогональной  $\mathbf{B}$ , тесно связана с геометрией траекторий электронов в  $\mathbf{p}$ -пространстве.

Представления (3.7)–(3.9) особенно удобны для оценки поведения проводимости при наличии хаотических открытых траекторий системы (1.1). Для

полного описания тензора проводимости при этом необходимо знать не только геометрию хаотических траекторий в накрывающем  $\mathbf{p}$ -пространстве, но и их поведение на компактной поверхности Ферми (с точки зрения общей теории динамических систем). Заметим здесь, что для любой заданной поверхности Ферми и направления  $\mathbf{V}$  могут возникать хаотические траектории только одного типа (Царева или Дынникова). В случае наличия хаотических траекторий могут присутствовать и замкнутые траектории системы (1.1), и тогда поверхность Ферми разделяется на части, заполненные хаотическими траекториями, и части, заполненные замкнутыми. В каждом конкретном случае все имеющиеся хаотические траектории имеют при этом сходные геометрические и динамические свойства.

Как упоминалось выше, хаотические траектории типа Царева ведут себя на компактной поверхности Ферми весьма специальным образом. В то же время их геометрические свойства в накрывающем  $\mathbf{p}$ -пространстве гораздо проще, чем у хаотических траекторий типа Дынникова. Как мы уже отмечали, вклад таких траекторий в проводимость в сильных магнитных полях описывается формулой (2.1). В этом случае асимптотика старшего члена тензора проводимости отличается от (1.3) тем, что компонента  $\sigma^{xx}$  затухает несколько медленнее, чем  $(\omega_B\tau)^{-2}$  (не обязательно по степенному закону).

В случае хаотических траекторий типа Дынникова как их геометрия в  $\mathbf{p}$ -пространстве, так и их поведение на компактной поверхности Ферми играют важную и нетривиальную роль в их вкладе в проводимость в пределе  $\omega_B\tau \rightarrow \infty$ . Например, для связанных физических поверхностей Ферми рода меньше шести каждая из таких траекторий плотно заполняет часть поверхности Ферми, инвариантную относительно отражения  $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ . Это обстоятельство приводит к соотношению

$$\langle v^k \rangle_{\text{tr}} = 0$$

для каждой из компонент групповой скорости (включая компоненту вдоль направления  $\mathbf{V}$ ) для таких траекторий. Вследствие этого вклад таких траекторий в полный тензор проводимости в пределе сильных магнитных полей имеет вид [26]

$$\sigma^{kl} \simeq \frac{ne^2\tau}{m^*} \begin{pmatrix} o(1) & o(1) & o(1) \\ o(1) & o(1) & o(1) \\ o(1) & o(1) & o(1) \end{pmatrix}, \quad \omega_B\tau \rightarrow \infty.$$

Таким образом, траектории типа Дынникова отличаются от всех других типов траекторий тем, что

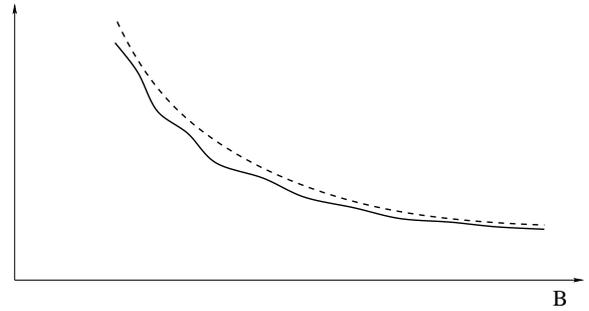


Рис. 16. Зависимость величин  $\sigma^{xx}$  и  $\sigma^{yy}$ , определяемых вкладом хаотических траекторий Дынникова, от величины  $B$  в пределе сильных магнитных полей

они не дают никакого вклада в проводимость вдоль направления  $\mathbf{V}$  в пределе достаточно сильных магнитных полей. В этой ситуации вклад в компоненту  $\sigma^{zz}$  полного тензора проводимости вносят только замкнутые траектории системы (1.1) на поверхности Ферми.

При описании вклада траекторий типа Дынникова в поперечную проводимость важную роль играет их блуждание по плоскостям, ортогональным  $\mathbf{V}$ . Первые примеры таких траекторий, построенные в работе [17], обладали замечательным свойством самоподобия. А именно, всегда существовали два направления, ортогональные  $\mathbf{V}$ , такие, что соответствующие траектории совпадали сами с собой после растяжения по этим направлениям с некоторыми растягивающими коэффициентами  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  и последующей конечной деформации в плоскости. На основе этого свойства в работе [26] было установлено анизотропное поведение проводимости в плоскости, ортогональной  $\mathbf{V}$ , описываемой некоторыми «скейлинговыми» коэффициентами  $\alpha$  и  $\beta$ . А именно, при соответствующем выборе координатных осей в плоскости, ортогональной  $\mathbf{V}$ , компоненты  $\sigma^{xx}(B)$  и  $\sigma^{yy}(B)$  подчиняются степенному закону:

$$\begin{aligned} \sigma^{xx} &\sim \frac{ne^2\tau}{m^*} (\omega_B\tau)^{2\alpha-2}, \\ \sigma^{yy} &\sim \frac{ne^2\tau}{m^*} (\omega_B\tau)^{2\beta-2}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$0 < \alpha, \beta < 1.$$

Вообще говоря, замечательное свойство самоподобия не выполняется для траекторий типа Дынникова в общем случае. Тем не менее, как показано в [43], соотношения (3.10) на самом деле носят более общий характер и, вероятно, должны выполняться и в общем случае хаотических траекторий типа Дынникова. Данное обстоятельство связано, в действи-

тельности, с индексами Зорича – Концевича – Форни для динамических систем на двумерных поверхностях (см. [23–25, 27]).

Заметим, что выражения (3.10) не представляют членов какого-либо разложения компонент проводимости по величине  $B$ , а в действительности выражают лишь «общий тренд» в затухании этих компонент с увеличением напряженности магнитного поля. Более точно, эти отношения имеют вид

$$\limsup_{B \rightarrow \infty} \frac{\ln \sigma^{xx}(B)}{\ln \omega_B \tau} = 2\alpha - 2,$$

$$\limsup_{B \rightarrow \infty} \frac{\ln \sigma^{yy}(B)}{\ln \omega_B \tau} = 2\beta - 2,$$

а поведение  $\sigma^{xx}(B)$  и  $\sigma^{yy}(B)$  схематично показано на рис. 16. Отметим также, что строгое обоснование существования индексов Зорича – Концевича – Форни для модели хаотических траекторий типа Дынникова достаточно общего вида дано в работе [41].

При обсуждении индексов Зорича – Концевича – Форни следует отметить еще одну особенность хаотических траекторий типа Дынникова. Всякий раз, когда они возникают, имеет место один из следующих двух взаимоисключающих случаев (см. [36, 38–40]). В первом случае почти все плоскости, ортогональные  $\mathbf{B}$ , содержат только одну хаотическую траекторию. Во втором случае почти все плоскости, ортогональные  $\mathbf{B}$ , содержат бесконечное число хаотических траекторий. Таким образом, траектории в первом случае должны, вообще говоря, «заполнять» соответствующие плоскости «намного плотнее», чем во втором случае. В первом случае можно ожидать выполнения соотношения  $\alpha + \beta = 1$ , а во втором – неравенства  $\alpha + \beta > 1$ . Соответственно, во втором случае проводимость в плоскости, ортогональной  $\mathbf{B}$ , должна, вероятно, уменьшаться медленнее при  $B \rightarrow \infty$ , чем в первом случае.

Для вклада траекторий типа Дынникова в продольную проводимость  $\sigma^{zz}(B)$  в работе [26] была также предложена аналогичная формула:

$$\sigma^{zz} \sim \frac{ne^2\tau}{m^*} (\omega_B \tau)^{2\gamma-2}, \quad \omega_B \tau \rightarrow \infty$$

( $0 < \gamma < 1$ ). Вероятно, это приближение (с учетом тех же замечаний, что и относительно  $\sigma^{xx}(B)$  и  $\sigma^{yy}(B)$ ) является наиболее подходящим в общей ситуации.

Что касается вклада траекторий типа Дынникова в холловскую проводимость, то следует учитывать [15, 17], что такие траектории распадаются на

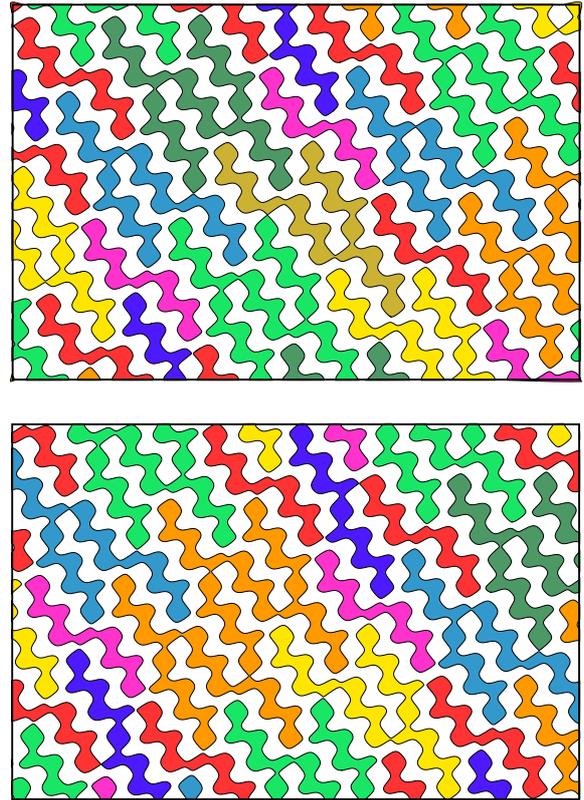


Рис. 17. Расщепление траектории типа Дынникова (рис. 8) на электронноподобные и дырочноподобные замкнутые траектории при небольшом сдвиге энергии Ферми соответственно вниз или вверх

замкнутые траектории электронного типа при сколь угодно малом понижении уровня Ферми, и на траектории дырочного типа при сколь угодно малом повышении уровня Ферми (рис. 17). Аналогично, направления  $\mathbf{B}$  на угловой диаграмме, для которых возникают траектории типа Дынникова, принадлежат множеству, отделяющему области холловской проводимости электронного типа от областей холловской проводимости дырочного типа (рис. 12), что уже обсуждалось выше. Как следствие этого, вклад таких траекторий в холловскую проводимость может быть как электронным, так и дырочным; можно только утверждать, что он убывает при  $B \rightarrow \infty$ . Заметим также, что теми же свойствами обладает и вклад открытых траекторий любого другого типа в холловскую проводимость.

В заключение этого раздела мы опишем специфику некоторых квантовых явлений, связанных с хаотическими траекториями типа Дынникова. Одно из важных свойств траекторий Дынникова состоит в том, что они всегда содержат пары дуг, близ-

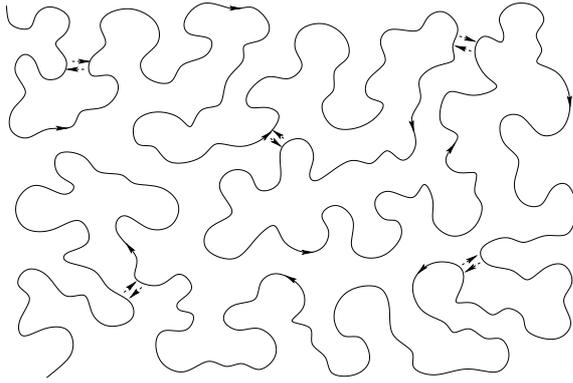


Рис. 18. Явление магнитного пробоя на участках хаотической траектории типа Дынникова, близких друг к другу (схематично)

ких в плоскости, ортогональной  $\mathbf{B}$ , но далеких друг от друга вдоль траектории. Беря все более и более длинные участки хаотической траектории, мы можем найти пары, подходящие сколь угодно близко друг к другу. Можно поэтому ожидать, что в пределе сильных магнитных полей и больших значений  $\tau$  определенную роль может играть явление магнитного пробоя, возникающее в таких областях (рис. 18).

Как известно, явление магнитного пробоя может возникать на траекториях систем (1.1) самой разной геометрии (см., например, [48–53]). В нашем случае мы можем наблюдать влияние этого явления на эффективную длину свободного пробега. Как известно, вероятность (внутризонного) магнитного пробоя при заданном расстоянии между близкими участками траектории сильно зависит от величины магнитного поля и стремится к  $1/2$  в пределе  $B \rightarrow \infty$ . В грубом приближении для заданного значения  $B$  можно ввести характерное расстояние  $\delta p(B)$  между сегментами, такое что вероятность пробоя близка к  $1/2$  при расстоянии между отрезками меньшем чем  $\delta p(B)$ , и близка к нулю при расстоянии большем чем  $\delta p(B)$ . По заданному значению  $\delta p(B)$  также можно определить характерную длину  $l(B)$  участка траектории в  $\mathbf{r}$ -пространстве, на котором пара таких отрезков оказывается на расстоянии порядка  $\delta p(B)$ . Легко видеть, что длина  $l(B)$  уменьшается с ростом  $B$ . Естественно также ввести характерное время  $\tau_{(1)}(B) \sim l(B)/V$  движения между двумя отрезками, находящимися на расстоянии  $\delta p(B)$  в плоскости и далеко друг от друга по траектории. В рассматриваемой ситуации время  $\tau_{(1)}(B)$  играет роль времени свободного пробега, связанного с явлением магнитного пробоя на хаотической траектории.

В этом же приближении естественно также ввести эффективное время свободного пробега  $\tau_{eff}(B)$ , определяемое соотношением

$$\tau_{eff}^{-1}(B) = \tau^{-1} + \tau_{(1)}^{-1}(B),$$

в уравнение (3.6).

Можно видеть, что явление магнитного пробоя не оказывает существенного влияния на проводимость при условии  $\tau_{(1)}(B) \gg \tau$ . В противоположной ситуации ( $\tau_{(1)}(B) < \tau$ ) явление магнитного пробоя очень важно и может существенно изменить поведение тензора проводимости в пределе  $B \rightarrow \infty$  (в частности, это может сказаться на скорости убывания компонент тензора проводимости в этом пределе).

Надо сказать, что условия внутризонного магнитного пробоя обычно достаточно жесткие и требуют для его наблюдения очень сильных магнитных полей и очень сильного сближения участков траектории друг с другом. В целом, для наблюдения описанного эффекта в любом случае требуются сверхчистые материалы, очень низкие температуры и чрезвычайно сильные магнитные поля (а также, возможно, некоторые геометрические особенности электронного спектра). Для большинства материалов выполнение условий  $\tau_{(1)}(B) < \tau$ , вероятно, приближается к пределу экспериментальных возможностей.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлены результаты исследований наиболее сложных квазиклассических траекторий электронов, возникающих на поверхностях Ферми в присутствии внешнего магнитного поля. Существование траекторий этого типа пока доказано теоретически, хотя их экспериментальное обнаружение еще предстоит осуществить. Геометрия описанных траекторий соответствует хаотической динамике в пространстве квазиимпульсов, что, в свою очередь, приводит к весьма нетривиальному поведению магнитопроводимости в сильных магнитных полях. В общем случае наличие таких траекторий характерно для широкого класса дисперсионных соотношений в кристалле; однако их появление требует специального выбора значения энергии Ферми и направления магнитного поля. Сложность экспериментального поиска описанных траекторий связана в основном с достаточно узким энергетическим интервалом их возникновения для большинства дисперсионных соотношений. В

данном обзоре представлены результаты самых последних исследований геометрии описанных траекторий, особенностей диаграмм угловой проводимости, соответствующих возможности их возникновения на поверхности Ферми, а также особенностей электронных транспортных явлений в пределе  $\omega_{BT} \rightarrow \infty$  при наличии таких траекторий на поверхности Ферми.

**Благодарности.** Статья посвящена 90-летию М. Я. Азбеля.

## ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, ЖЭТФ **31**, 63 (1956).
2. И. М. Лифшиц, В. Г. Песчанский, ЖЭТФ **35**, 1251 (1958).
3. И. М. Лифшиц, В. Г. Песчанский, ЖЭТФ **38**, 188 (1960).
4. И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, *Электронная теория металлов*, Наука, Москва (1971).
5. M. I. Kaganov and V. G. Peschansky, Phys. Rep. **372**, 445 (2002).
6. Ч. Киттель, *Квантовая теория твердых тел*, Наука, Москва (1967).
7. Дж. Займан, *Принципы теории твердого тела*, Мир, Москва (1966).
8. А. А. Абрикосов, *Основы теории металлов*, Наука, Москва (1987).
9. Ю. А. Дрейзин, А. М. Дыхне, ЖЭТФ **36**, 127 (1973).
10. Ю. А. Дрейзин, А. М. Дыхне, ЖЭТФ **84**, 1756 (1983).
11. С. П. Новиков, УМН **37**, 3 (1982).
12. А. В. Зорич, УМН **39**, 235 (1984).
13. С. П. Царев, Частное сообщение, 1992-93 г.
14. И. А. Дынников, УМН **47**, 161 (1992).
15. И. А. Дынников, Математические заметки **53**, 57 (1993).
16. I. A. Dynnikov, *Surfaces in 3-torus: Geometry of Plane Sections*, Proc. of ECM2, BuDA (1996).
17. I. A. Dynnikov, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, Vol. 179, AMS, Providence, RI (1997), p. 45.
18. И. А. Дынников, УМН **54**, 21 (1999).
19. С. П. Новиков, А. Я. Мальцев, Письма в ЖЭТФ **63**, 809 (1996).
20. С. П. Новиков, А. Я. Мальцев, УФН **168**, 249 (1998).
21. А. Я. Мальцев, ЖЭТФ **151**, 944 (2017).
22. А. Я. Мальцев, ЖЭТФ **152**, 1053 (2017).
23. A. V. Zorich, in: Proc. *Geometric Study of Foliations* (Tokyo, November 1993), ed. by T. Mizutani et al., World Scientific, Singapore (1994), p. 479.
24. A. V. Zorich, Annales de l'Institut Fourier **46**, 325 (1996).
25. A. V. Zorich, Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, Vol. 179, AMS, Providence, RI (1997), p. 173.
26. А. Я. Мальцев, ЖЭТФ **112**, 1710 (1997).
27. A. V. Zorich, Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, Vol. 197, AMS, Providence, RI (1999), p. 135.
28. Р. Де Лео, УМН **55**, 181 (2000).
29. Р. Де Лео, УМН **58**, 197 (2003).
30. A. Ya. Maltsev and S. P. Novikov, *Dynamical Systems, Topology and Conductivity in Normal Metals*, arXiv:cond-mat/0304471, DOI:10.1023/B:JOSS.0000019835.01125.92.
31. A. Ya. Maltsev and S. P. Novikov, Sol. State Phys. Bulletin of Braz. Math. Society, New Series **34**, 171 (2003).
32. A. Ya. Maltsev and S. P. Novikov, J. Stat. Phys. **115**, 31 (2004).
33. A. V. Zorich, in *Frontiers in Number Theory, Physics and Geometry*, Vol. 1: *On Random Matrices, Zeta Functions and Dynamical Systems*, ed. by P. Cartier, B. Julia, P. Moussa, P. Vanhove, Ecole de physique des Houches, France, March 9–21 (2003), Springer-Verlag, Berlin (2006), p. 439.
34. Р. Де Лео, И. А. Дынников, УМН **62**, 151 (2007).
35. R. De Leo and I. A. Dynnikov, Geom. Dedicata **138**, 51 (2009).
36. И. А. Дынников, Труды МИАН **263**, 72 (2008).
37. A. Skripchenko, Discrete Contin. Dyn. Sys. **32**, 643 (2012).

38. A. Skripchenko, *Ann. Glob. Anal. Geom.* **43**, 253 (2013).
39. I. Dynnikov and A. Skripchenko, *Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, Vol. 234*, AMS, Providence, RI (2014), p. 173.
40. I. Dynnikov and A. Skripchenko, *Trans. Moscow Math. Soc.* **76**, 287 (2015).
41. A. Avila, P. Hubert, and A. Skripchenko, *Invent. Mathem.* **206**, 109 (2016).
42. A. Avila, P. Hubert, and A. Skripchenko, *Bulletin de la societe mathematique de France*, **144**(3), 539 (2016).
43. А. Я. Мальцев, С. П. Новиков, *Труды МИАН* **302**, 296 (2018).
44. R. D. Leo, in: *Advanced Mathematical Methods in Biosciences and Applications*, ed. by F. Berezovskaya and B. Toni, pp. 53–88 STEAM-H: Science, Technology, Engineering, Agriculture, Mathematics & Health. Springer (2019), p. 53.
45. А. Я. Мальцев, С. П. Новиков, *УМН* **74**, 149 (2019).
46. А. Я. Мальцев, *ЖЭТФ* **154**, 1183 (2018).
47. А. Я. Мальцев, *ЖЭТФ* **156**, 140 (2019).
48. Г. Е. Зильберман, *ЖЭТФ* **32**, 296 (1957).
49. Г. Е. Зильберман, *ЖЭТФ* **33**, 387 (1958).
50. Г. Е. Зильберман, *ЖЭТФ* **34**, 748 (1958).
51. М. Я. Азбель, *ЖЭТФ* **39**, 1276 (1960).
52. А. А. Слуцкий, *ЖЭТФ* **53**, 767 (1967).
53. A. Alexandradinata and L. Glazman, *Phys. Rev. B* **97**, 144422 (2018).