

РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ ЛАВИНЫ РЕЛЯТИВИСТСКИХ УБЕГАЮЩИХ ЭЛЕКТРОНОВ МЕТОДОМ ГРУППОВЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ МОМЕНТОВ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ

*Е. И. Бочков**

*Российский федеральный ядерный центр — ВНИИЭФ
607188, Саров, Нижегородская обл., Россия*

Поступила в редакцию 12 апреля 2022 г.,
после переработки 12 апреля 2022 г.
Принята к публикации 18 апреля 2022 г.

Получена модифицированная система групповых уравнений для двух первых моментов функции распределения электронов высоких энергий: уравнения баланса концентрации и плотности потока электронов. Главное отличие полученной системы от имеющихся версий заключается в том, что в ней члены, отвечающие за рождение электронов, выведены непосредственно из ионизационного интеграла. С помощью данной системы выполнено численное моделирование развития в однородном электрическом поле лавины релятивистских убегающих электронов. Рассчитанные характеристики лавины: время усиления, средняя энергия электронов, направленная скорость, энергетический спектр и пространственные распределения электронов, хорошо согласуются с результатами расчетов по методу Монте-Карло.

DOI: 10.31857/S0044451022080119
EDN: EHSWHP

1. ВВЕДЕНИЕ

В 1992 г. Гуревичем, Милихом и Рюсселем-Дюпре был предложен механизм развития атмосферных разрядов, основанный на генерации лавин релятивистских убегающих электронов (ЛРУЭ) в плотных газах и слабых электрических полях [1]. В настоящее время предполагается, что данный механизм лежит в основе широкого круга наблюдаемых в грозовой атмосфере явлений: усиление потоков рентгеновского излучения в грозовых облаках и ступенчатом лидере молнии; вспышки жесткого гамма-излучения, регистрируемые в ближнем космосе, вблизи уровня моря и в высокогорных условиях (см. обзор [2]); регистрация грозовых нейтронов в высокогорных условиях (см. обзор [3]); зарождение разряда молнии [4–7]; генерация высотных оптических явлений [8, 9] и узких биполярных электромагнитных импульсов [10, 11].

Для понимания результатов данных наблюдений необходима разработка эффективных методов чис-

ленного моделирования разрядов, развивающихся в режиме генерации ЛРУЭ. Как известно, наиболее полная информация, необходимая для описания плазменных процессов в газовом разряде, содержится в функции распределения электронов (ФРЭ), которую можно вычислить, решая кинетическое уравнение (КУ), или методом Монте-Карло (МК). Однако на практике численное моделирование на основе КУ или метода МК требует очень больших вычислительных ресурсов. Эффективнее моделирование в приближении сплошной среды на основе системы уравнений для моментов ФРЭ [12]. В работе [13] для моделирования стратосферных разрядов была использована система групповых уравнений (ГУ) для моментов релятивистской ФРЭ, но записаны данные уравнения были на основании упрощенных априорных соображений. Последовательный вывод системы ГУ для нулевого, первого и второго моментов релятивистской ФРЭ был выполнен в работе [14]. Точность метода моментов была продемонстрирована в [15] путем сравнения результатов численного решения системы ГУ с результатами моделирования методом МК. Существенным недостатком полученной в [14] системы ГУ является то, что в ней ионизационные члены, отвечающие за гене-

* E-mail: e_i_bochkov@mail.ru

рацию электронов высоких энергий, не были выведены непосредственно из ионизационного интеграла столкновений, а записаны из априорных соображений.

В данной работе представлена замкнутая система ГУ для двух первых моментов ФРЭ, в которой точно описаны ионизационные члены и не требуется задание априорных зависимостей. Возможности полученной системы продемонстрированы путем численного моделирования развития в воздухе при нормальных условиях в однородном электрическом поле ЛРУЭ. Сравнительный анализ вычисленных характеристик ЛРУЭ с результатами МК-расчетов показывает эффективность представленного метода ГУ.

2. СИСТЕМА ГРУППОВЫХ УРАВНЕНИЙ

В статье [14] получена система многогрупповых уравнений для первых трех моментов функции распределения электронов высоких энергий: концентрации электронов, уравнений движения (направленного импульса) и средней энергии. Как показали результаты работы [15], для численного моделирования эволюции лавины релятивистских убегающих электронов достаточно только уравнений баланса концентрации и уравнений движения. Уравнения для концентрации электронов имеют вид [14, 15]

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_k}{\partial t} + \text{div}_{\mathbf{r}} \mathbf{j}_k = & \left[\langle \mu \rangle_{k-1/2} q_e E - F_D(p_{k-1/2}) \right] \times \\ & \times \frac{n_{k-1/2}}{p_k - p_{k-1}} - \left[\langle \mu \rangle_{k+1/2} q_e E - F_D(p_{k+1/2}) \right] \times \\ & \times \frac{n_{k+1/2}}{p_{k+1} - p_k} + S_{ion,k}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь N — число разбиений интервала в пространстве импульсов $[p_{min}, p_{max}]$, границы которого определяются условиями задачи; k — номер группы, ширина которой $[p_{k-1/2}, p_{k+1/2}]$ в общем случае произвольна; n_k — концентрация электронов; \mathbf{j}_k — плотность потока электронов в k -й группе; $\langle \mu \rangle_k$ — косинус угла между векторами \mathbf{j}_k и $\mathbf{e} = -\mathbf{E}/E$; q_e — элементарный заряд; F_D — сила трения, описывающая усредненные потери энергии электроном; $S_{ion,k}$ — источник вторичных электронов высоких энергий, рождаемых в результате ионизации.

Как отмечалось во Введении, недостатком системы ГУ, полученной в [14], является то, что в ней ионизационный член $S_{ion,k}$, не был непосредственно выведен из ионизационного интеграла столкновений. Для него была принята следующая упрощенная форма [14]:

$$S_{ion,k} = \frac{\delta_{1k}}{t_{re}(E)} \sum_{i=k}^N n_i. \quad (2)$$

Здесь предполагается, что все вторичные электроны попадают в первую группу, а число электронов растет с характерным временем t_{re} , которое зависит от напряженности поля. Таким образом, система ГУ, полученная в [14], не является замкнутой, поскольку требует априорного знания зависимости $t_{re}(E)$. Используя дифференциальное разложение интеграла столкновений электронов, полученное в [16], можно вывести точное выражение для ионизационного члена в уравнениях (1), что будет сделано ниже.

Поскольку в уравнениях (1) в дивергентный член, описывающий перенос электронов в пространстве, входят величины плотности потока электронов \mathbf{j}_k , при проведении практических расчетов предпочтительно иметь уравнения непосредственно для данных величин, а не направленного импульса, как в [14]. Для того чтобы получить систему уравнений для плотности потока электронов, рассмотрим релятивистское кинетическое уравнение для ФРЭ $f(\mathbf{r}, p, \mu, t)$ [17]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{r}, p, \mu, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f(\mathbf{r}, p, \mu, t) + \\ + \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} [p^2 (\mu q_e E - F_D(p)) f(\mathbf{r}, p, \mu, t)] + \\ + \frac{\partial}{\partial \mu} \left[q_e E \frac{1-\mu^2}{p} f(\mathbf{r}, p, \mu, t) \right] - \frac{(Z+4)F_D(p)}{8\gamma p} \times \\ \times \frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1-\mu^2) \frac{\partial f(\mathbf{r}, p, \mu, t)}{\partial \mu} \right] = St_{ion}, \end{aligned} \quad (3)$$

где \mathbf{v} — скорость электрона, μ — угол между вектором импульса \mathbf{p} и единичным вектором в направлении электрической силы \mathbf{e} . Ионизационный интеграл в правой части уравнения (3), отвечающий за рождение электронов высоких энергий, имеет вид [17]

$$\begin{aligned} St_{ion} = N_0 v \int_{2\varepsilon + \varepsilon_{ion}}^{\infty} d\varepsilon' \left(\frac{\gamma'^2 - 1}{\gamma^2 - 1} \right) \times \\ \times \sigma_{ion}(\varepsilon', \varepsilon) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\mathbf{r}, p', \mu', t) d\alpha, \end{aligned} \quad (4)$$

где ε_{ion} — порог ионизации. В случае релятивистских электронов, энергия которых много больше энергии связи атомарных электронов, процесс ионизации можно описывать как рассеяние электрона на покоящемся свободном электроном, тогда связь между величинами μ и μ' задается уравнением [17]

$$\mu' = \mu\mu_0 + \sqrt{1 - \mu^2}\sqrt{1 - \mu_0^2} \cos \alpha, \quad (5)$$

где

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon(\varepsilon' + 2m_e c^2)}{\varepsilon'(\varepsilon + 2m_e c^2)}}$$

— угол рассеяния электрона.

Определим величину плотности потока электронов в k -й группе:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_k(\mathbf{r}, t) &\equiv \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} p^2 dp \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} \mathbf{v} f(\mathbf{r}, p, \mu, t) d\varphi = \\ &= \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} p^2 dp \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} (\mathbf{v}_\perp + v\mu\mathbf{e}) f(\mathbf{r}, p, \mu, t) d\varphi = \\ &= 2\pi \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} v p^2 dp \int_{-1}^1 \mu f(\mathbf{r}, p, \mu, t) d\mu \approx \\ &\approx 2\pi v_k p_k^2 (p_{k+1/2} - p_{k-1/2}) \int_{-1}^1 \mu f(\mathbf{r}, p_k, \mu, t) d\mu \mathbf{e}. \quad (6) \end{aligned}$$

Также определим величину направленной скорости электронов:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k(\mathbf{r}, t) &\equiv \mathbf{j}_k(\mathbf{r}, t)/n_k(\mathbf{r}, t) = \\ &= \frac{\int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} v p^2 dp \int_{-1}^1 \mu f(\mathbf{r}, p, \mu, t) d\mu}{\int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} p^2 dp \int_{-1}^1 f(\mathbf{r}, p, \mu, t) d\mu} \mathbf{e} \approx \\ &\approx \frac{\int_{-1}^1 \mu f(\mathbf{r}, p_k, \mu, t) d\mu}{\int_{-1}^1 f(\mathbf{r}, p_k, \mu, t) d\mu} v_k \mathbf{e} = \langle \mu \rangle_k v_k \mathbf{e}. \quad (7) \end{aligned}$$

Для того чтобы найти уравнения для величин \mathbf{j}_k , необходимо кинетическое уравнение (3) умножить на величину $\mathbf{v}p^2$ и проинтегрировать по переменным p, μ, φ на отрезках $p \in [p_{k-1/2}, p_{k+1/2}]$, $\mu \in [-1, 1]$ и $\varphi \in [0, 2\pi]$. Интегрируя таким образом первый член в левой части уравнения (3), получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} p^2 dp \int_{-1}^1 \mu d\mu \int_0^{2\pi} \mathbf{v} f(\mathbf{r}, p, \mu, t) d\varphi = \frac{\partial \mathbf{j}_k}{\partial t}. \quad (8)$$

Далее интегрируем второй член:

$$\begin{aligned} &\int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} p^2 dp \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} \mathbf{v} \sum_i v_i \nabla_i f(\mathbf{r}, p, \mu, t) d\varphi = \\ &= \sum_i \nabla_i \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} p^2 dp \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_i f(\mathbf{r}, p, \mu, t) d\varphi = \\ &= \sum_i \nabla_i n_k(\mathbf{r}, t) \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_i \rangle_k \approx \sum_i \nabla_i n_k \mathbf{u}_k u_{k,i} = \\ &= \mathbf{j}_k \sum_i \nabla_i u_{k,i} + \sum_i u_{k,i} \nabla_i \mathbf{j}_k = \\ &= \mathbf{j}_k \operatorname{div}_{\mathbf{r}} \mathbf{u}_k + (\mathbf{u}_k \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \mathbf{j}_k = (\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{u}_k) \mathbf{j}_k. \quad (9) \end{aligned}$$

При выводе данного выражения величины моментов второго порядка $\langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_i \rangle_k$ были заменены на произведение моментов первого порядка аналогично тому, как это было сделано в работе [14]. Данное приближение можно обосновать следующим образом. В рассматриваемом здесь случае полагается, что ФРЭ не зависит от азимутального угла в пространстве импульсов, поэтому если направить ось z в координатном пространстве вдоль вектора \mathbf{e} , то отличным от нуля будет только момент $\langle v_z^2 \rangle_k \mathbf{e}$. Величина $\langle v_z^2 \rangle_k$ выражается как

$$\begin{aligned} \langle v_z^2 \rangle_k &= \frac{2\pi \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} v^2 p^2 dp \int_{-1}^1 \mu^2 f(\mathbf{r}, p, \mu, t) d\mu}{2\pi \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} p^2 dp \int_{-1}^1 f(\mathbf{r}, p, \mu, t) d\mu} \approx \\ &\approx \frac{\int_{-1}^1 \mu^2 f(\mathbf{r}, p_k, \mu, t) d\mu}{\int_{-1}^1 f(\mathbf{r}, p_k, \mu, t) d\mu} = \\ &= v_k^2 \langle \mu^2 \rangle_k \approx v_k^2 \langle \mu \rangle_k^2 = u_k^2. \quad (10) \end{aligned}$$

Как показывают результаты МК-расчетов развития в электрическом поле ЛРЭУЭ [18], угловое распределение релятивистских электронов сильно вытянуто вдоль вектора \mathbf{e} , и средний косинус угла между вектором скорости электронов и вектором напряженности поля, а также среднее значение квадрата косинуса близки к единице, поэтому замена в (10) значения величины среднего квадрата косинуса $\langle \mu^2 \rangle_k$ на квадрат среднего значения $\langle \mu \rangle_k^2$ не должна приводить к большой ошибке.

Интегрирование третьего члена кинетического уравнения (3) дает

$$\begin{aligned}
 & \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} p^2 dp \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} \frac{\mathbf{v}}{p^2} \times \\
 & \times \frac{\partial}{\partial p} [p^2(\mu q_e E - F_D(p))f(\mathbf{r}, p, \mu, t)] d\varphi = \\
 & = 2\pi \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} v dp \int_{-1}^1 \mu \times \\
 & \times \frac{\partial}{\partial p} [p^2(\mu q_e E - F_D(p))f(\mathbf{r}, p, \mu, t)] d\mu \mathbf{e} \approx \\
 & \approx \left[2\pi p_{k+1/2}^2 v_{k+1/2} \int_{-1}^1 (\mu^2 q_e E - \mu F_D(p_{k+1/2})) \times \right. \\
 & \times f(\mathbf{r}, p_{k+1/2}, \mu, t) d\mu - 2\pi p_{k-1/2}^2 v_{k-1/2} \times \\
 & \times \left. \int_{-1}^1 (\mu^2 q_e E - \mu F_D(p_{k-1/2}))f(\mathbf{r}, p_{k-1/2}, \mu, t) d\mu - \right. \\
 & \left. - 2\pi p_k^2 \left(\frac{dv}{dp}\right)_k (p_{k+1/2} - p_{k-1/2}) \times \right. \\
 & \times \left. \int_{-1}^1 (\mu^2 q_e E - \mu F_D(p_k))f(\mathbf{r}, p_k, \mu, t) d\mu \right] \mathbf{e} \approx \\
 & \approx \left[(\langle \mu^2 \rangle_{k+1/2} q_e E - \langle \mu \rangle_{k+1/2} F_D(p_{k+1/2})) \times \right. \\
 & \times \frac{v_{k+1/2} n_{k+1/2}}{p_{k+1} - p_k} - \\
 & - (\langle \mu^2 \rangle_{k-1/2} q_e E - \langle \mu \rangle_{k-1/2} F_D(p_{k-1/2})) \times \\
 & \times \frac{v_{k-1/2} n_{k-1/2}}{p_k - p_{k-1}} - \left(\frac{dv}{dp}\right)_k \times \\
 & \times (\langle \mu^2 \rangle_k q_e E - \langle \mu \rangle_k F_D(p_k)) n_k \left. \right] \mathbf{e} \approx \\
 & \approx (\langle \mu \rangle_{k+1/2} q_e E - F_D(p_{k+1/2})) \frac{\mathbf{j}_{k+1/2}}{p_{k+1} - p_k} - \\
 & - (\langle \mu \rangle_{k-1/2} q_e E - F_D(p_{k-1/2})) \frac{\mathbf{j}_{k-1/2}}{p_k - p_{k-1}} - \\
 & - \frac{1}{v_k} \left(\frac{dv}{dp}\right)_k (\langle \mu \rangle_k q_e E - F_D(p_k)) \mathbf{j}_k = \\
 & = \frac{\langle \mu \rangle_{k+1/2} q_e E - F_D(p_{k+1/2})}{p_{k+1} - p_k} \mathbf{j}_{k+1/2} - \\
 & - \frac{\langle \mu \rangle_{k-1/2} q_e E - F_D(p_{k-1/2})}{p_k - p_{k-1}} \mathbf{j}_{k-1/2} - \\
 & - \frac{\langle \mu \rangle_k q_e E - F_D(p_k)}{\gamma_k^2 p_k} \mathbf{j}_k. \quad (11)
 \end{aligned}$$

Здесь при получении последнего равенства мы учли соотношение

$$\frac{1}{v} \left(\frac{dv}{dp}\right) = \frac{1}{\gamma^2 p}.$$

Интегрируя сумму четвертого и пятого членов уравнения (3), получаем

$$\begin{aligned}
 & 2\pi \mathbf{e} \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} v p^2 dp \int_{-1}^1 \mu d\mu \times \\
 & \times \left\{ \frac{\partial}{\partial \mu} \left[q_e E \frac{1 - \mu^2}{p} f(\mathbf{r}, p, \mu, t) \right] - \frac{(Z+4)F_D(p)}{8\gamma p} \times \right. \\
 & \times \left. \frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{\partial f(\mathbf{r}, p, \mu, t)}{\partial \mu} \right] \right\} = \\
 & = -2\pi \mathbf{e} \left[\int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} \frac{v}{p} p^2 dp \int_{-1}^1 q_e E (1 - \mu^2) f(\mathbf{r}, p, \mu, t) d\mu - \right. \\
 & - \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} \frac{(Z+4)F_D(p)}{8\gamma p} v p^2 dp \times \\
 & \times \left. \int_{-1}^1 (1 - \mu^2) \frac{\partial f(\mathbf{r}, p, \mu, t)}{\partial \mu} d\mu \right] \approx \\
 & \approx -\mathbf{e} \left[(1 - \langle \mu^2 \rangle_k) \frac{v_k n_k}{p_k} q_e E - \right. \\
 & - \left. \frac{(Z+4)F_D(p_k)}{4\gamma_k p_k} \langle \mu \rangle_k v_k n_k \right] \approx \\
 & \approx -\left(1 - \langle \mu^2 \rangle_k\right) \frac{v_k n_k}{p_k} q_e E \mathbf{e} + \frac{(Z+4)F_D(p_k)}{4\gamma_k p_k} \mathbf{j}_k \approx \\
 & \approx \frac{v_k n_k}{p_k} q_e \mathbf{E} + \left[\langle \mu \rangle_k q_e E + \frac{(Z+4)F_D(p_k)}{4\gamma_k} \right] \frac{\mathbf{j}_k}{p_k}. \quad (12)
 \end{aligned}$$

Объединяя выражения (8), (9), (11), (12), получаем следующее уравнение для плотности потока электронов:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \mathbf{j}_k}{\partial t} + (\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{u}_k) \mathbf{j}_k = \left[\langle \mu \rangle_{k-1/2} q_e E - F_D(p_{k-1/2}) \right] \times \\
 & \times \frac{\mathbf{j}_{k-1/2}}{p_k - p_{k-1}} - \left[\langle \mu \rangle_{k+1/2} q_e E - F_D(p_{k+1/2}) \right] \frac{\mathbf{j}_{k+1/2}}{p_{k+1} - p_k} + \\
 & + \left[\frac{\langle \mu \rangle_k q_e E - F_D(p_k)}{\gamma_k^2} - \left(\langle \mu \rangle_k q_e E + \frac{(Z+4)F_D(p_k)}{4\gamma_k} \right) \right] \times \\
 & \times \frac{\mathbf{j}_k}{p_k} - \frac{v_k n_k}{p_k} q_e \mathbf{E} + \mathbf{S}_{ion,k}^{\mathbf{j}}. \quad (13)
 \end{aligned}$$

Теперь вычислим ионизационные члены $S_{ion,k}$ и $\mathbf{S}_{ion,k}^{\mathbf{j}}$ в уравнениях (1) и (13). Используя дифференциальное разложение интеграла столкновений, полученное в работе [16], мы можем выразить интеграл по переменной α в (4) следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\mathbf{r}, p', \mu', t) d\alpha &= f(\mathbf{r}, p', \mu, t) + \\ &+ \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(1-\mu_0)^l}{2^l(l!)^2} \frac{\partial^l}{\partial \mu^l} \left\{ (1-\mu^2)^l \frac{\partial^l f}{\partial \mu^l} \right\} = \\ &= f(\mathbf{r}, p', \mu, t) + \frac{1-\mu_0}{2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1-\mu^2) \frac{\partial f}{\partial \mu} \right\} + \\ &+ \frac{(1-\mu_0)^2}{16} \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \left\{ (1-\mu^2)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2} \right\} + \dots \quad (14) \end{aligned}$$

Соответственно ионизационный интеграл примет вид

$$\begin{aligned} St_{ion} &= N_0 v \int_{2\varepsilon+\varepsilon_{ion}}^{\infty} \left(f(\mathbf{r}, p', \mu, t) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(1-\mu_0)^l}{2^l(l!)^2} \times \right. \\ &\times \left. \frac{\partial^l}{\partial \mu^l} \left\{ (1-\mu^2)^l \frac{\partial^l f}{\partial \mu^l} \right\} \right) \left(\frac{\gamma'^2-1}{\gamma^2-1} \right) \sigma_{ion}(\varepsilon', \varepsilon) d\varepsilon'. \quad (15) \end{aligned}$$

Удобство данного разложения заключается в том, что его легко можно проинтегрировать по переменной μ , и таким образом можно получать уравнения для моментов ФРЭ любого порядка. Так, для момента нулевого порядка, т. е. величины $S_{ion,k}$, имеем

$$\begin{aligned} S_{ion,k} &= 2\pi \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} p^2 dp \int_{-1}^1 St_{ion} d\mu = 2\pi N_0 \times \\ &\times \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} \frac{v p^2}{\gamma^2-1} dp \int_{2\varepsilon+\varepsilon_{ion}}^{\infty} (\gamma'^2-1) \sigma_{ion}(\varepsilon', \varepsilon) d\varepsilon' \times \\ &\times \int_{-1}^1 f(\mathbf{r}, p', \mu, t) d\mu \approx N_0 \frac{v_k}{\gamma_k^2-1} \times \\ &\times 2\pi p_k^2 (p_{k+1/2} - p_{k-1/2}) \times \\ &\times \int_{2\varepsilon_k+\varepsilon_{ion}}^{\infty} (\gamma'^2-1) \sigma_{ion}(\varepsilon', \varepsilon_k) d\varepsilon' \times \\ &\times \int_{-1}^1 f(\mathbf{r}, p', \mu, t) d\mu \approx N_0 \frac{v_k p_k^2 (p_{k+1/2} - p_{k-1/2})}{\gamma_k^2-1} \times \\ &\times \int_{2\varepsilon_k}^{\infty} \frac{(\gamma'^2-1) \sigma_{ion}(\varepsilon', \varepsilon_k) v'}{p'^2} 2\pi p'^2 dp' \times \\ &\times \int_{-1}^1 f(\mathbf{r}, p', \mu, t) d\mu. \quad (16) \end{aligned}$$

Здесь при получении последнего равенства мы учли, что $d\varepsilon' = v' dp'$ и $2\varepsilon_k \gg \varepsilon_{ion}$. С учетом того, что по определению

$$n_i \equiv 2\pi \int_{p_{i-1/2}}^{p_{i+1/2}} p^2 dp \int_{-1}^1 f(\mathbf{r}, p, \mu, t) d\mu,$$

выражение (16) окончательно можно записать в виде

$$\begin{aligned} S_{ion,k} &\approx N_0 \frac{v_k p_k^2 (p_{k+1/2} - p_{k-1/2})}{\gamma_k^2-1} \times \\ &\times \sum_{i=i_k}^N \frac{\sigma_{ion}(\varepsilon_i, \varepsilon_k) v_i (\gamma_i^2-1)}{p_i^2} n_i = \\ &= N_0 v_k (p_{k+1/2} - p_{k-1/2}) \sum_{i=i_k}^N v_i \sigma_{ion}(\varepsilon_i, \varepsilon_k), \quad (17) \end{aligned}$$

где i_k — номер интервала $[p_{i-1/2}, p_{i+1/2}]$, в котором лежит $p(2\varepsilon_k)$. Аналогичным образом можно получить ионизационный член, входящий в уравнение (13):

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{ion,k}^j &= 2\pi \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} v p^2 dp \int_{-1}^1 \mu St_{ion} d\mu \mathbf{e} = \\ &= 2\pi N_0 \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} \frac{v^2 p^2}{\gamma^2-1} dp \times \\ &\times \int_{2\varepsilon+\varepsilon_{ion}}^{\infty} (\gamma'^2-1) \sigma_{ion}(\varepsilon', \varepsilon) \mu_0(\varepsilon', \varepsilon) d\varepsilon' \times \\ &\times \int_{-1}^1 \mu f(\mathbf{r}, p', \mu, t) d\mu \mathbf{e} \approx \frac{N_0 v_k^2 p_k^2 (p_{k+1/2} - p_{k-1/2})}{\gamma_k^2-1} \times \\ &\times \int_{2\varepsilon_k}^{\infty} \frac{(\gamma'^2-1) \sigma_{ion}(\varepsilon', \varepsilon_k) \mu_0(\varepsilon', \varepsilon_k)}{p'^2} 2\pi v' p'^2 dp' \times \\ &\times \int_{-1}^1 \mu f(\mathbf{r}, p', \mu, t) d\mu \mathbf{e}. \quad (18) \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\mathbf{j}_i \equiv 2\pi \int_{p_{i-1/2}}^{p_{i+1/2}} v p^2 dp \int_{-1}^1 \mu f(\mathbf{r}, p, \mu, t) d\mu \mathbf{e},$$

окончательно имеем

$$\mathbf{S}_{ion,k}^j \approx N_0 v_k^2 (p_{k+1/2} - p_{k-1/2}) \times \sum_{i=i_k}^N \sigma_{ion}(\varepsilon_i, \varepsilon_k) \mu_0(\varepsilon_i, \varepsilon_k) \mathbf{j}_i. \quad (19)$$

Выпишем теперь полную систему ГУ для двух первых моментов релятивистской ФРЭ — баланса концентрации и плотности потока электронов:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_k}{\partial t} + (\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{j}_k) &= \frac{\langle \mu \rangle_{k-1/2} q_e E - F_D(p_{k-1/2})}{p_k - p_{k-1}} n_{k-1/2} - \\ &- \frac{\langle \mu \rangle_{k+1/2} q_e E - F_D(p_{k+1/2})}{p_{k+1} - p_k} n_{k+1/2} + \\ &+ \sum_{i=i_k}^N s_{ik} v_i n_i, \\ \frac{\partial \mathbf{j}_k}{\partial t} + (\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{u}_k) \mathbf{j}_k &= \\ &= \frac{\langle \mu \rangle_{k-1/2} q_e E - F_D(p_{k-1/2})}{p_k - p_{k-1}} \mathbf{j}_{k-1/2} - \\ &- \frac{\langle \mu \rangle_{k+1/2} q_e E - F_D(p_{k+1/2})}{p_{k+1} - p_k} \mathbf{j}_{k+1/2} + \\ &+ \left[\frac{\langle \mu \rangle_k q_e E - F_D(p_k)}{\gamma_k^2} - \left(\langle \mu \rangle_k q_e E + \frac{(Z+4)F_D(p_k)}{4\gamma_k} \right) \right] \times \\ &\times \frac{\mathbf{j}_k}{p_k} - \frac{v_k n_k}{p_k} q_e \mathbf{E} + \sum_{i=i_k}^N s_{ik} \mu_0(\varepsilon_i, \varepsilon_k) v_k \mathbf{j}_i, \quad (20) \end{aligned}$$

где

$$s_{ik} = N_0 v_k (p_{k+1/2} - p_{k-1/2}) \sigma_{ion}(\varepsilon_i, \varepsilon_k).$$

Следует отметить главный недостаток данной системы ГУ. В исходном кинетическом уравнении (3) полагалось, что ФРЭ не зависит от азимутального угла φ в пространстве импульсов, поэтому система (20) не описывает диффузию электронов в направлении, ортогональном вектору напряженности поля. В дальнейших расчетах для зависимости от импульса энергетических потерь электрона F_D используется формула Бете [19], а для дифференциального сечения ионизации σ_{ion} — формула Мёллера [19].

При решении системы уравнений (20) необходимо также вычислять величины $n_{k-1/2}$ и $n_{k+1/2}$, для этого используется следующая процедура:

$$\begin{aligned} n_{k+1/2} &= \\ &= \begin{cases} n_k, & [\langle \mu \rangle_{k+1/2} eE - F_D(p_{k+1/2})] > 0, \\ n_{k+1}, & [\langle \mu \rangle_{k+1/2} eE - F_D(p_{k+1/2})] < 0. \end{cases} \quad (21) \end{aligned}$$

Аналогично рассчитываются $\mathbf{j}_{k-1/2}$ и $\mathbf{j}_{k+1/2}$. Величина $\langle \mu \rangle_{k+1/2}$ вычисляется путем линейной интерполяции значений $\langle \mu \rangle_k$ и $\langle \mu \rangle_{k+1}$.

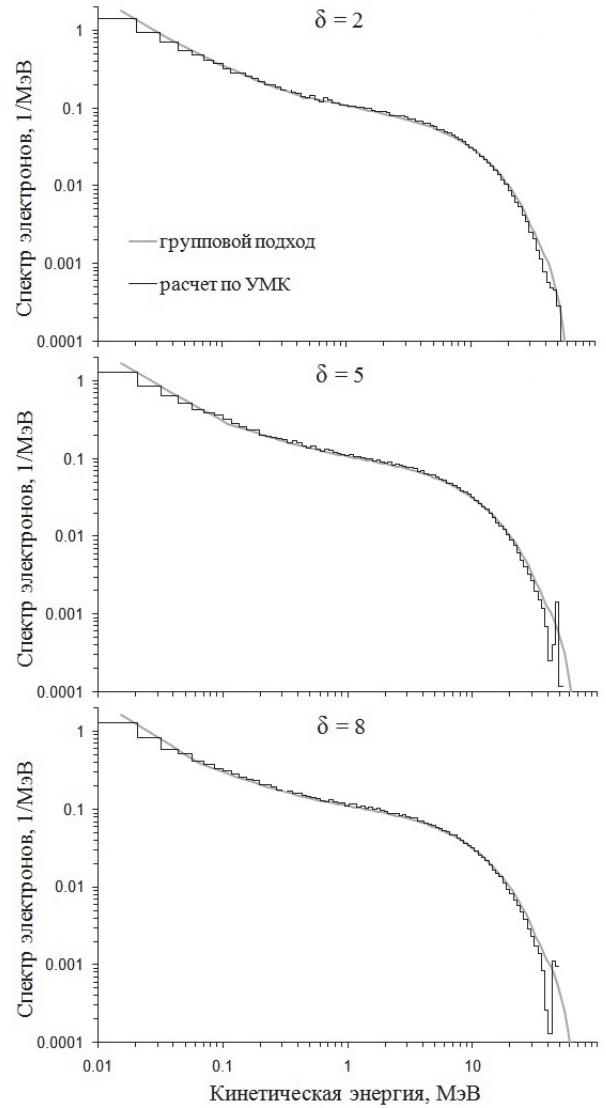


Рис. 1. Нормированное на единицу энергетическое распределение электронов для $\delta = 2, 5, 8$ в момент времени $t = 849$ нс, 167 нс, 88 нс соответственно. Результаты решения системы ГУ и расчет по УМК

3. СРАВНЕНИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ГРУППОВЫХ УРАВНЕНИЙ С РЕЗУЛЬТАТАМИ РАСЧЕТОВ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

Для того чтобы продемонстрировать точность предложенного метода ГУ, был выполнен расчет развития ЛРУЭ в однородном электрическом поле с напряженностью $E = F_{min} \delta$, где δ — параметр перенапряжения величины напряженности поля относительно минимума силы Бете F_{min} . Система уравнений (20) решалась численно в диапазоне энергий от 10 кэВ до 100 МэВ. Данный энергетический диа-

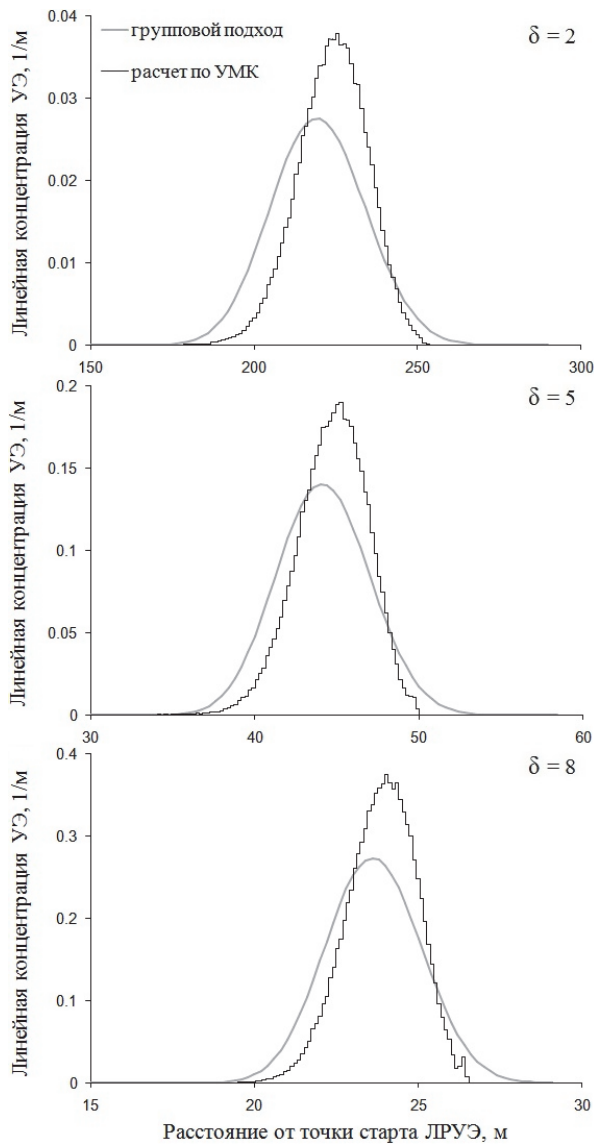


Рис. 2. Нормированное на единицу распределение электронов вдоль оси симметрии лавины для $\delta = 2, 5, 8$. Результаты решения системы ГУ и расчет по УМК

пазон был разбит на $N_\epsilon = 100$ интервалов, границы которых определялись по формуле

$$\epsilon_j = \epsilon_{min} \left(\frac{q^{j-1} - 1}{q - 1} \right),$$

где $j = 1 - N_\epsilon$, и q есть решение уравнения

$$\frac{q^{N_\epsilon - 1} - 1}{q - 1} = \frac{\epsilon_{max}}{\epsilon_{min}}.$$

Расчеты выполнены для воздуха ($Z = 14.5$, $F_{min} \approx 2.18$ кВ/см) при нормальных условиях ($N_0 = 2.69 \cdot 10^{25}$ м⁻³). Постановка задачи была следующей: в начальный момент времени задавалось дель-

тообразное распределение электронов в пространстве и гауссово по энергии со средней энергией 7 МэВ и шириной распределения 0.1 МэВ. Данная постановка задачи близка к принятой в численном моделировании ЛРУЭ методом МК [18, 20], что позволяет выполнять прямое сравнение результатов.

В таблице приведены рассчитанные методом ГУ характеристики ЛРУЭ: время усиления t_{re} , т. е. время, за которое число электронов увеличивается в e раз; средняя энергия $\langle \epsilon_{re} \rangle$ и направленная скорость электронов u_{re} . Для сравнения в таблице указаны и значения, рассчитанные по МК-программе ЭЛИЗА, отличающейся детальным описанием процессов взаимодействия электронов, гамма-квантов и позитронов с молекулами воздуха [18, 21], а также по упрощенной МК-программе (УМК), аналогичной описанной в [20]. Также для величины t_{re} в таблице приведены значения, полученные путем численного решения КУ [20]. Как можно видеть, значения t_{re} , вычисленные методом ГУ, наиболее близки именно к результатам решения КУ (отличия не превышают 8%), что естественно, поскольку система ГУ непосредственно выведена из КУ. Значения средней энергии электронов в лавине, полученные методом ГУ, не более чем на 10% отличаются от значений, вычисленных по УМК-модели. Значения же направленной скорости u_{re} , полученные разными методами, очень близки между собой, здесь отличия не превышают 2%.

На рис. 1 представлены нормированные на единицу энергетические распределения электронов, вычисленные методом ГУ и методом УМК, для $\delta = 2, 5$ и 8 в момент времени $t = 5t_{re}$, когда достигается равновесие электронов с полем. В целом наблюдается хорошее согласие распределений, полученных по обоим методикам. На рис. 2 показана линейная концентрация электронов вдоль оси симметрии лавины в те же самые моменты времени. В целом наблюдается нормальное согласие, хотя можно видеть, что распределение, полученное методом УМК, не совсем симметрично относительно максимума распределения, и сам максимум слегка опережает максимум распределения, рассчитанного методом ГУ.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исходя из кинетического уравнения для релятивистских электронов, выполнен вывод групповых уравнений для плотности потока электронов. Совместно с уравнениями баланса концентрации электронов, полученными ранее, мы имеем замкнутую систему ГУ, позволяющих моделировать кинетику электронов высоких энергий. Особенностью полу-

Таблица. Время усиления t_{re} , средняя энергия $\langle \varepsilon_{re} \rangle$ и направленная скорость u_{re} электронов в лавине, вычисленные разными методами для нормальных условий

δ	t_{re} , нс				$\langle \varepsilon_{re} \rangle$, МэВ			u_{re} , 10^8 м/с		
	ГУ	УМК	КУ [20]	ЭЛИЗА [17]	ГУ	УМК	ЭЛИЗА [21]	ГУ	УМК	ЭЛИЗА [21]
2	191	177	197	189.7	7.74	7.27	6.74	2.59	2.64	2.64
3	81.5	75.1	—	77.6	7.95	7.39	6.79	2.59	2.65	2.65
4	51.2	47.1	—	47.5	7.97	7.36	6.83	2.62	2.67	2.65
5	37.0	34.0	39.9	34.3	7.93	7.31	6.87	2.64	2.68	2.66
6	28.8	26.4	—	26.4	7.62	7.23	6.79	2.66	2.69	2.66
8	19.6	17.9	21.2	17.8	7.66	7.30	6.61	2.67	2.70	2.68
10	14.6	13.5	—	13.3	7.45	6.90	6.41	2.67	2.71	2.69
12	11.6	10.6	—	10.45	7.32	6.71	6.15	2.69	2.71	2.69
14	9.35	8.72	—	8.56	7.01	6.55	5.99	2.69	2.71	2.69

ченной системы является то, что в ней ионизационные члены были непосредственно выведены из ионизационного интеграла, поэтому в представленном виде метод ГУ не требует задания априорной зависимости от напряженности поля времени усиления лавины. Система предназначена для численного моделирования газовых разрядов, развивающихся с участием электронов высоких энергий, в том числе релятивистских убегающих электронов. Для демонстрации точности полученной системы ГУ для моментов ФРЭ выполнено численное моделирование развития в однородном электрическом поле в воздухе ЛРУЭ. Рассчитанные характеристики лавины, вычисленные решением системы ГУ, близки к полученным методом МК. Преимущество метода ГУ состоит в том, что он позволяет рассчитывать пространственные и энергетические распределения электронов за гораздо меньшее счетное время, чем методы МК и КУ. Недостатком метода ГУ в представленном виде является невозможность описывать поперечную относительно вектора электрической силы диффузию электронов.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. V. Gurevich, G. M. Milikh, and R. Roussel-Dupre, *Phys. Lett. A* **165**, 463 (1992).
2. J. R. Dwyer, D. M. Smith, and S. A. Cummer, *Space Sci. Rev.*, **173**, 133, DOI: 10.1007/s11214-012-9894-0 (2012).
3. Л. П. Бабич, УФН **189**, 1044 (2019).
4. J. R. Dwyer, *Geophys. Res. Lett.* **32**, L20808, DOI: 10.1029/2005GL023975 (2005).
5. А. В. Гуревич, К. П. Зыбин, УФН **171**, 1177 (2001).
6. Л. П. Бабич, Е. И. Бочков, И. М. Куцык, ЖЭТФ **139**, 1028 (2011).
7. L. P. Babich, E. I. Bochkov, J. R. Dwyer, and I. M. Kutsyk, *J. Geophys. Res.* **117**, A09316, DOI: 10.1029/2012JA017799 (2012).
8. J. R. Dwyer, N. Liu, and H. Rassoul, *Geophys. Res. Lett.* **40**, 4067, DOI:10.1002/grl.50742 (2013).
9. Л. П. Бабич, Е. И. Бочков, ЖЭТФ **151**, 823 (2017).
10. H. E. Tierney, R. A. Roussel-Dupre, E. M. D. Symbolisty, and W. H. Beasley, *J. Geophys. Res.* **110**, D12109, DOI:10.1029/2004JD005381 (2005).
11. Л. П. Бабич, Е. И. Бочков, И. М. Куцык, ЖЭТФ **144**, 205 (2013).
12. В. Е. Голант, А. П. Жилинский, И. Е. Сахаров, *Основы физики плазмы*, Атомиздат, Москва (1977).
13. Л. П. Бабич, А. Ю. Кудрявцев, М. Л. Кудрявцева, И. М. Куцык, *Геомагнетизм и аэрономия* **48**, 381 (2008).

14. Л. П. Бабич, М. Л. Кудрявцева, ЖЭТФ **131**, 808 (2007).
15. Л. П. Бабич, Е. И. Бочков, ЖЭТФ **139**, 568 (2011).
16. Е. И. Бочков, Физика плазмы **48**, 463 (2022).
17. Л. П. Бабич, ЖЭТФ **125**, 808 (2004).
18. Л. П. Бабич, Е. Н. Донской, Р. И. Ильяев, И. М. Куцык, Р. А. Рюссель-Дюпре, Физика плазмы **30**, 666 (2004).
19. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика. Теоретическая физика*, т. IV, Наука, Москва (1969).
20. L. P. Babich et al., IEEE Trans. Plasma Sci. **29**, 430 (2001).
21. Л. П. Бабич, УФН **190**, 1261 (2019).