

# ТЕНИ ЧЕРНЫХ ДЫР КАК ИСТОЧНИК ОГРАНИЧЕНИЙ НА РАСШИРЕННЫЕ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

*В. А. Прокопов<sup>a,b\*</sup>, С. О. Алексеев<sup>a,b\*\*</sup>, О. И. Зенин<sup>b\*\*\*</sup>*

*<sup>a</sup> Государственный астрономический институт им. П. К. Штернберга,  
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова  
119234, Москва, Россия*

*<sup>b</sup> Физический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова  
119234, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 16 марта 2022 г.,  
после переработки 29 марта 2022 г.  
Принята к публикации 29 марта 2022 г.

Получение первых изображений черных дыр открыло новые возможности для проверки расширенных теорий гравитации. Нами рассмотрено построение фона тени сферически-симметричных черных дыр в частном случае метрики, в которой,  $g_{11} = -g_{00}^{-1}$ . Методы вычисления расширены на наиболее общий случай невращающейся черной дыры  $g_{11} \neq -g_{00}^{-1}$ . Результаты анализа сравниваются с предсказаниями общей теории относительности при учете данных Event Horizon Telescope. Результаты для модели Хорндески с инвариантом Гаусса–Бонне, петлевой квантовой гравитации, скалярных моделей Бамбелби и Гаусса–Бонне полностью согласуются с наблюдениями M87\*. В конформной гравитации должны быть исключены большие значения  $m_2$  и  $Q_s$ . В STEGR  $f(Q)$ -гравитации наблюдения M87\* ограничивают значения параметра  $\alpha$  следующим образом:  $-0.025 < \alpha < 0.04$ . Для альтернативного обобщения метрики Бамбелби с приближением Шварцшильда:  $-0.3 < l < 0.45$ . Результаты демонстрируют тот максимум, которого можно достичь без учета вращения черной дыры.

DOI: 10.31857/S0044451022070000

EDN: EEOFFU

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Первые сферически-симметричные решения типа черная дыра были получены более 100 лет назад. На существование подобных объектов указывают результаты динамики двойных систем [1], гравитационно-волновая астрономия [2, 3], а также прямые изображения теней черной дыры [4]. В настоящее время общая теория относительности (ОТО) с большой точностью описывает почти все астрономические данные. Однако такие проблемы, как темная материя, темная энергия, эволюция ранней Вселенной, квантование гравитации и т. д., ждут лучшего теоретического обоснования. Именно по этой причине и развиваются новые гравитационные

модели, например,  $f(R)$ -гравитация [5],  $f(Q)$ -гравитация [6], скалярно-тензорные теории, включая общий случай с уравнениями поля второго порядка: теорию Хорндески [7–10], телепараллельные модели [11], гравитационные модели с конформной симметрией [12, 13], петлевая квантовая гравитация [14–16], скалярная гравитация Гаусса–Бонне [17] и многие другие. Для дальнейшего развития желательно проверить их предсказания в максимально широком диапазоне параметров. Благодаря получению изображений теней черных дыр изучение предсказаний этих теорий в окрестности черных дыр предоставляет такую возможность.

Кратко обсудим особенности рассматриваемых далее моделей. Начнем с модели Хорндески [18]. Это наиболее общий случай скалярно-тензорной гравитации с уравнениями поля второго порядка [19]. Моделью Хорндески можно моделировать темную энергию или темную материю, и эта модель представляется более общей и фундаментальной, чем теория Бранса–Дикке. После события GW170817 (слияния двух нейтронных звезд сравнительно неда-

\* E-mail: slaprok777@gmail.com

\*\* E-mail: alexeyev@gmail.com

\*\*\* E-mail: dkiiiabu4@gmail.com

леко от Земли) теория Хорндески была значительно сужена и использовалась, в том числе, в форме DHOST (вырожденных скалярно-тензорных высшего порядка) теорий [20]. Далее, теория Хорндески часто используется в сочетании с инвариантом Гаусса – Бонне [10]

$$S_{GB} = R_{\alpha\beta\gamma\sigma}R^{\alpha\beta\gamma\sigma} - 4R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} + R^2,$$

где  $R_{\alpha\beta\gamma\sigma}$ ,  $R_{\alpha\beta}$  и  $R$  — тензоры Римана, Риччи и скалярная кривизна соответственно.

Следующая рассматриваемая нами модель — петлевая квантовая гравитация (loop quantum gravity, LQG) — перспективный подход к построению квантовой теории гравитации. Ключевая идея этого подхода заключается в построении квантованной теории гравитации независимо от квантования других физических взаимодействий с помощью перехода к переменным Аштекера. Эти величины образуют замкнутую алгебру операторов, позволяя строить перенормируемую теорию. LQG дает возможность совместить стадии и отскока, и инфляции, воспроизводя теорию ранней Вселенной [21].

Далее, рассмотрим модели гравитации с конформной симметрией [11]. Наличие подобной симметрии в действии открывает перспективы построения перенормируемой теории гравитации. Из-за проблем в первых версиях в настоящее время рассматриваются модели с нелинейной реализацией конформной симметрии (см., например, [22–24]). Интерес к этим моделям появился не так давно, поэтому многие проблемы до конца не решены, например, отсутствие инфляционной асимптотики [24]. Когда эти проблемы будут решены, перспективы теории возрастут.

Следующая рассмотренная теория — модель Бамбелби, расширяющая ОТО с помощью векторного поля. При выборе подходящего потенциала векторное поле Бамбелби  $B_\mu$  приобретает ненулевое вакуумное среднее, генерируя спонтанное нарушение лоренцевой симметрии [25]. Обсуждаемый подход имеет перспективу стать «мостом» между теорией струн и ОТО на планковских масштабах, решая задачи ОТО в области высоких энергий.

Далее рассмотрим телепараллельный эквивалент общей теории относительности (TEGR). Это расширение ОТО с ненулевыми кручением и неметричностью, где геометрическая деформация генерирует гравитационное поле. TEGR включает дополнительные степени свободы, применимые для описания нерешенных проблем ОТО. Нами рассмотрена  $f(Q)$ -гравитация — симметричная TEGR (STEGR), в которой неметричность  $Q$  не равна нулю [26].

Последняя модель — это скалярная гравитация Гаусса – Бонне — теория гравитации с действием, включающим все возможные квадратичные скаляры кривизны [17]. Эти инварианты играют ту же роль, что и в предыдущем случае: будучи феноменологической асимптотой некоторой обобщенной геометрии, они имеют перспективы предложить физическое объяснение нерешенных проблем ОТО.

Поскольку любые физические измерения имеют конечную точность, экспериментальный результат может иметь альтернативные объяснения на основании различных теорий [27]. Обычно на первом этапе выбирают самую простую модель. В дальнейшем, с уточнением данных, возможен более узкий выбор теории. Таким образом, размер тени черной дыры (ЧД), являющийся первым параметром, получаемым из наблюдений, в нашей работе используется для оценки предсказаний обсуждаемой модели. Поэтому в качестве первых приближений используется стандартное пространство-время ОТО, описываемой метриками Шварцшильда и Керра.

Ранее обсуждалось моделирование тени черной дыры, расчет параметров последней устойчивой орбиты и сильного гравитационного линзирования при учете третьей поправки в сферически-симметричном пространстве-времени. Такие метрики представляют собой продолжение метрики Рейсснера – Нордстрема на следующий порядок разложения по  $r^{-1}$  [28]. Поскольку одной тени невращающейся ЧД недостаточно для проверки моделей сложнее Рейсснера – Нордстрема, для определения коэффициентов разложения метрики необходимо использовать результаты наблюдений и размера тени ЧД, и последней устойчивой орбиты, и сильного гравитационного линзирования. Расчет следующих порядков требует увеличения количества измерений. В работе [29] было показано, что при учете вращения учета формы тени достаточно для проверки теорий, не выходящих за рамки метрики Керра – Ньюмена.

В данной работе обсуждается метод ограничения расширенных моделей гравитации, использующий современные изображения ЧД. Здесь необходимо отметить, что в новых, расширенных моделях гравитации в первую очередь рассматривают невращающиеся решения для ЧД, поскольку с ними проще работать. Поэтому и мы рассматриваем формализм для сферически-симметричного пространства-времени, чтобы извлечь максимум информации в более простом случае (в качестве первого шага общего исследования). Метод применим и в случае  $g_{11} \neq -g_{00}^{-1}$ . В работе [30] было показано, что при учете дополнительных приближений

максимальное изменение размера тени для вращающейся ЧД составит 5–7%. При малой скорости вращения можно рассматривать ЧД как статическую. Первые ограничения на размер тени ЧД при наблюдении галактики М87\* были получены в [30] ( $4.31M < D < 6.08M$ ).

Работа организована следующим образом. В разд. 2 рассматриваются метрики с поправками в виде ряда Тейлора в случае  $g_{11} = -g_{00}^{-1}$ , в разд. 3 — построение теней для расширенных теорий в случае  $g_{11} \neq -g_{00}^{-1}$ , в разд. 4 сравниваются точности различных методов и подводятся итоги.

## 2. РЕШЕНИЯ ДЛЯ СЛУЧАЯ РАСШИРЕННЫХ ТЕОРИЙ ГРАВИТАЦИИ ( $A(r) = B^{-1}(r)$ )

Общее описание сферически-симметричного, статического, асимптотически плоского пространства-времени в расширенных теориях гравитации представляет собой метрику, обобщающую пространство-время Шварцшильда:

$$ds^2 = -A(r) dt^2 + B(r) dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (1)$$

где  $A(r)$  и  $B(r)$  — метрические функции, зависящие от радиальной координаты  $r$ . Метрика Шварцшильда в планковской системе единиц  $G = c = \hbar = 1$  имеет вид

$$A(r) = B^{-1}(r) = 1 - \frac{2M}{r}, \quad (2)$$

где  $M$  — масса центрального объекта. Заметим, что метрики Шварцшильда, Рейснера–Нордстрема, их продолжения можно представить в виде разложения в ряд Тейлора в области  $r \gg 2M$ . В качестве первого приближения рассматривается метрика Шварцшильда, и в этом приближении можно описать, например, траектории звезд вокруг ЧД. Следующий порядок — метрика Рейснера–Нордстрема — позволяет описать влияние электрического или приливного заряда [31], ведь учет приливного заряда способен поменять свойства тени [28, 29, 32, 33].

Вначале рассмотрим вырожденный случай «симметричных» метрических функций  $A(r) = B(r)^{-1}$  в уравнении (1). Положение горизонта определяется условием  $A(r) = 0$ . Если решение последнего уравнения не единственно, за физический горизонт принимают внешнее решение. В третьем порядке разложения ряд  $A(r)$  имеет вид

$$A(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q}{r^2} + \frac{C_3}{r^3}, \quad (3)$$

где  $Q$  — приливной заряд,  $C_3$  — коэффициент разложения при  $r^{-3}$ . Для упрощения вычислений нормируем все значения на массу ЧД:  $\hat{r} = r/M$ ,  $q = Q/M^2$  и  $c_3 = C_3/M^3$ . В планковской системе единиц ( $G = c = \hbar = 1$ ) параметры  $M$ ,  $Q$ ,  $C_3$ ,  $r$  безразмерны. Следовательно, конфигурационное пространство становится двумерным. Тогда метрическая функция  $A(r)$  примет вид

$$A(\hat{r}) = 1 - \frac{2}{\hat{r}} + \frac{q}{\hat{r}^2} + \frac{c_3}{\hat{r}^3}. \quad (4)$$

Совокупность неустойчивых фотонных орбит образует фотонную сферу, а переходящие в нее геодезические определяют границу тени ЧД. Фотоны от удаленного источника с прицельным параметром  $b$ , большим критического значения  $b_{ph}$ , остаются вне фотонной сферы и далее достигают внешнего наблюдателя. Остальные фотоны с  $b < b_{ph}$  захватываются ЧД и образуют на картинной плоскости изображения светлый диск с темным пятном в центре, которое и называется тенью ЧД. Таким образом, видимая форма изображения от невращающейся (или медленно вращающейся) ЧД для удаленного наблюдателя имеет форму диска, радиус которого определяется критическим значением прицельного параметра ( $b_{ph} = 3\sqrt{3}M$  для ЧД Шварцшильда [34]).

Рассмотрим оптически тонкий, излучающий аккреционный диск, окружающий компактный объект [35]. Следуя подходу [34], модифицируем его для симметричного случая  $A(r) = B(r)^{-1}$  (1) с дополнительными поправками. Таким образом, излучение испускается из всего объема фотонной сферы над горизонтом ЧД. Поэтому наблюдаемая удельная интенсивность  $I_{\nu_0}$  (обычно измеряемая в  $\text{эрг}^{-1} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{ср}^{-2} \cdot \text{Гц}^{-1}$ ) на видимой частоте фотона  $\nu_0$  в точке на картинной плоскости  $(X, Y)$  на небесной сфере определяется как

$$I_{\nu_0} = \int_{\gamma} z^3 j(\nu_e) dl_{prop}, \quad (5)$$

где  $\nu_e$  — излучаемая частота,  $z = \nu_0/\nu_e$  — красное смещение,  $j(\nu_e)$  — излучательная способность покоящегося источника на единицу объема,  $dl_{prop} = -k_{\alpha} u_e^{\alpha} d\lambda$  — дифференциал единицы длины в системе покоя излучателя,  $k^{\mu}$  — четырехмерная скорость фотона,  $u_e^{\mu}$  — четырехмерная скорость излучателя (в данном случае ЧД),  $\lambda$  — аффинный параметр вдоль траектории фотона  $\gamma$ . Индекс  $\gamma$  означает интегрирование по изотропным геодезическим. Красное смещение  $z$  определяется как

$$z = \frac{k_{\alpha} u_0^{\alpha}}{k_{\beta} u_e^{\beta}}, \quad (6)$$

где  $u_0^\mu = (1, 0, 0, 0)$  — четырехмерная скорость удаленного наблюдателя на бесконечности.

Рассматривая простую сферически-симметричную модель аккреции, полагаем, что газ свободно падает в радиальном направлении в сторону центра ЧД с четырехмерной скоростью, определяемой как

$$u_e^t = \frac{1}{A(\hat{r})}, \quad u_e^r = -\sqrt{1-A(\hat{r})}, \quad u_e^\theta = u_e^\phi = 0. \quad (7)$$

Величина  $k^\mu = \dot{x}^\mu$  была получена ранее в работе [34]. Далее используем следующее выражение:

$$\frac{k_r}{k_t} = \pm \sqrt{\frac{1}{A(\hat{r})} \left[ \frac{1}{A(\hat{r})} - \frac{b^2}{\hat{r}^2} \right]}, \quad (8)$$

где знаки «+(-)» обозначают движение фотона от (к) массивного(му) объекта(у). Красное смещение, таким образом, дается следующим выражением [36]:

$$z = \frac{1}{\frac{1}{A(\hat{r})} - \frac{k_r}{k_t} \sqrt{1-A(\hat{r})}}. \quad (9)$$

Обозначим частоту излучения покоящегося источника как  $\nu_*$ . Для расчета профиля интенсивности фона тени ЧД рассмотрим модель, в которой излучение монохроматично и имеет радиальный профиль  $1/\hat{r}^2$ :

$$j(\nu_e) \propto \frac{\delta(\nu_e - \nu_*)}{\hat{r}^2}, \quad (10)$$

где  $\delta$  — дельта-функция Дирака. Дифференциал единицы длины в системе покоя излучателя определяется как

$$dl_{prop} = -k_\alpha u_e^\alpha d\lambda = -\frac{k^t}{z k^r} dr. \quad (11)$$

Интегрируя уравнение (5) по всем наблюдаемым частотам, получим наблюдаемую интенсивность фотонов в точке  $(X, Y)$  на небесной сфере [34]:

$$I_{obs}(X, Y) \propto \int_\gamma \frac{z^3 k^t dr}{r^2 k^r}. \quad (12)$$

Каждой точке на картинной плоскости  $(X, Y)$  соответствует прицельный параметр  $b$ , который равен  $b^2 \propto X^2 + Y^2$ . После численного интегрирования получаем профиль интенсивности фона тени ЧД.

Зависимость размера тени от  $q$  и  $c_3$  была получена ранее в работе [28], где было показано, что, если размер тени больше, чем  $4M$ , для ее описания необходима одна дополнительная степень свободы (а именно,  $q$ ). Следовательно, во втором порядке

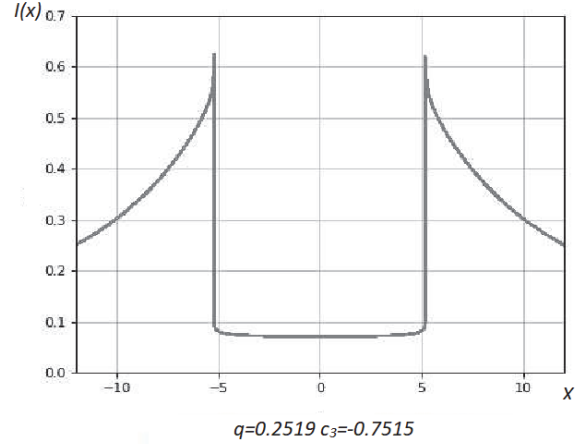
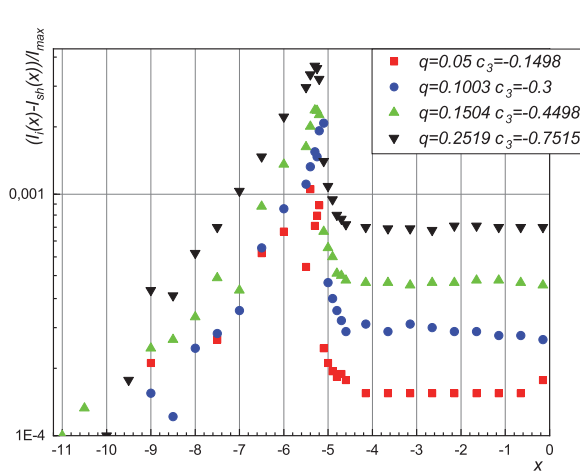


Рис. 1. Зависимость профиля интенсивности ( $I$ ) тени в относительных единицах от расстояния от центра ЧД на плоскости изображения  $X$  (в единицах  $M$ ). ЧД обладает дополнительными параметрами  $q$  и  $c_3$  и генерирует тень такого же размера, как и ЧД Шварцшильда

разложения такая тень может быть параметризована метрикой Рейснера – Нордстрема. Далее, при изменении профиля интенсивности, необходимо учитывать поправки более высоких порядков возмущения.

Рассмотрим поправки третьего и последующего порядков. При этом станут допустимыми новые комбинации параметров, так как с увеличением порядка уравнений растет и число решений. Следовательно, для ограничения теоретической модели потребуется большее количество наблюдательных данных. Таким образом, в дополнение к размеру тени необходимо учитывать радиус последней устойчивой орбиты, сильное гравитационное линзирование яркого объекта вблизи ЧД и распределение интенсивности фона.

Для оценки необходимой точности наблюдений в первом приближении используем метрику Шварцшильда. На рис. 1 показаны результаты моделирования профиля интенсивности в области тени ЧД для параметров  $q = 0.2519$ ,  $c_3 = -0.7515$ , при этом размер тени — такой же, как и у ЧД Шварцшильда. Рассмотрим отличие профиля интенсивности от случая ЧД Шварцшильда, нормированного на максимальную интенсивность ( $I_{max} \approx 0.6$ ) (рис. 2). Как видно из рис. 2, эта разница возрастает при увеличении значений дополнительных параметров. Максимальное отличие от случая ЧД Шварцшильда достигается вблизи границы тени, затем, при уходе в бесконечность, оно исчезает. Разница внутри границы тени ЧД постоянна. Далее, из рис. 2 следует,



**Рис. 2.** Зависимость разности интенсивностей  $(|I - I_{Sh}|/I_{max})$  ЧД с дополнительными параметрами  $q$  и  $c_3$  и соответствующей шварцшильдовской от расстояния  $(X)$  от центра ЧД на плоскости изображения в единицах массы ЧД  $M$

что, для экспериментальной фиксации данного различия, при обработке наблюдательных данных требуется достичь разрешения по интенсивности порядка 0.1% от максимального значения фона ЧД. Отдельно заметим, что каждая точка профиля интенсивности фона может считаться отдельной пробой потенциала ЧД.

### 3. ПОСТРОЕНИЕ ТЕНИ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ ПРИ $A(r) \neq -B^{-1}(r)$ , ОБЩИЙ МЕТОД

В общем случае в сферически-симметричном пространстве-времени  $A(r) \neq B^{-1}(r)$  (уравнение (1)), поэтому наше рассмотрение необходимо обобщить. Уравнения движения для такой метрики имеют вид

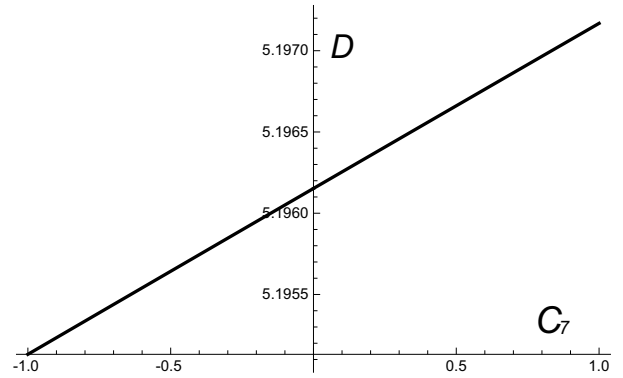
$$\left(\frac{d\hat{r}}{d\tau}\right)^2 + \frac{L^2}{B(\hat{r})\hat{r}^2} = \frac{E^2}{A(\hat{r})B(\hat{r})}, \quad (13)$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{L}{\hat{r}^2}, \quad (14)$$

где  $E$  — энергия фотона,  $L$  — угловой момент пучка,  $\tau$  — аффинный параметр. После подстановки (14) в (13) уравнение движения примет вид

$$u(r) = \left(\frac{d\hat{r}}{d\phi}\right)^2 = \frac{\hat{r}^4}{D^2 A(\hat{r})B(\hat{r})} - \frac{\hat{r}^2}{B(\hat{r})}, \quad (15)$$

где  $D = L/E$  — прицельный параметр фотонного пучка. Аналогично симметричному случаю край те-



**Рис. 3.** Зависимость размера тени  $D$  от комбинации констант модели  $C_7$  для теории Хорндески с инвариантом Гаусса–Бонне (в единицах массы ЧД  $M$ ,  $M = 1$ )

ни соответствует переходу частиц света на неустойчивую фотонную орбиту. Система, описывающая этот переход, выглядит следующим образом:

$$u(r) = 0, \quad \frac{du(r)}{dr} = 0, \quad \frac{d^2u(r)}{d^2r} > 0. \quad (16)$$

Для нахождения размера тени необходимо найти максимальный корень уравнений (16). Для конкретных примеров проделаем это численно.

## 4. ТЕНЬ В РАЗЛИЧНЫХ ТЕОРИЯХ

### 4.1. Теория Хорндески

В данной работе рассматривается решение типа ЧД в теории Хорндески, расширенной линейно инвариантом Гаусса–Бонне [10]. Метрические функции записываются следующим образом:

$$A(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{2C_7}{7r^7}, \quad (17)$$

$$B(r)^{-1} = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{C_7}{r^7}, \quad (18)$$

где  $C_7$  — комбинация констант модели. В работе [10] рассматривалось только положительное значение  $C_7$ . Однако условие, при котором горизонт  $(A(r_h) = 0)$  находится над поверхностью  $(B(r) = 0)$ , выполняется только при  $C_7 < 0$ . При  $C_7 > 0$  объект не является ЧД. Следовательно, разумно предположить, что метрика (6) справедлива только вне фотонной сферы. Вблизи горизонта требуется более точное разложение, при котором объект можно назвать ЧД. Результаты численного моделирования зависимости размера тени от метрических функций из уравнения (6) представлены на рис. 3. Размер тени для метрики (6) незначительно (менее 0.01% при

$|C_7| < 0.5$ ) отличается от шварцшильдовского даже при значениях  $C_7$ , сравнимых с  $M$ . Таким образом, эти наблюдательные данные не исключают такую версию теории Хорндески.

### 4.2. Петлевая квантовая гравитация

Рассмотрим петлевую квантовую гравитацию с модифицированной метрикой Хейворда [15, 16]. Это решение описывает ЧД без сингулярности в центре, так называемую регулярную ЧД. Данное расширение включает временную задержку и однопетлевую квантовую поправку. Метрические функции для нее имеют вид

$$A(r) = \left(1 - \frac{2Mr^2}{r^3 + 2Ml^2}\right) \left(1 - \frac{\alpha\beta M}{\alpha r^3 + \beta M}\right), \quad (19)$$

$$B(r)^{-1} = 1 - \frac{2Mr^2}{r^3 + 2Ml^2}, \quad (20)$$

где  $l$  — обозначение для центральной плотности энергии  $3/8\pi l^2$ , константа  $\alpha$  представляет собой временную задержку между центром и бесконечностью, а  $\beta$  связана с однопетлевыми квантовыми поправками к ньютоновскому потенциалу. Эти параметры были ограничены в [15, 16] следующим образом:  $0 \leq \alpha < 1$ ,  $\beta_{max} = 41/(10\pi)$ . В случае  $l > \sqrt{16/27}M$  у объекта нет горизонта. После решения уравнений (16) получается явный вид зависимости (представленный на рис. 4) величины размера тени от  $l$ ,  $\alpha$  и  $\beta$ . Видно, что при увеличении  $l$  размер тени уменьшается. Наоборот, увеличение  $\alpha$  и  $\beta$  приводит к увеличению размера тени. При  $\beta \geq 0$  минимальный размер тени достигается при  $l = \sqrt{16/27}M$ ,  $\beta = \alpha = 0$  равном  $4.92M$ . Максимальный размер тени возникает при  $l = 0$ ,  $\beta = 41/(10\pi)$ ,  $\alpha = 1$  и равен  $5.32M$ . Заметим, что тени такого размера могут быть описаны также пространством-временем Рейснера–Нордстрема. Таким образом, используя только размер тени, невозможно получить значения всех параметров без дополнительных наблюдательных данных.

### 4.3. Конформная гравитация

Еще один пример асимметричной метрики — конформная гравитация [11]. У этой модели имеется много расширений, например, модели с нелинейной реализацией симметрии [22, 23]. В нашей работе в качестве примера для расчета параметров теней используем метрику ЧД в новой массивной конформной гравитации [13]:

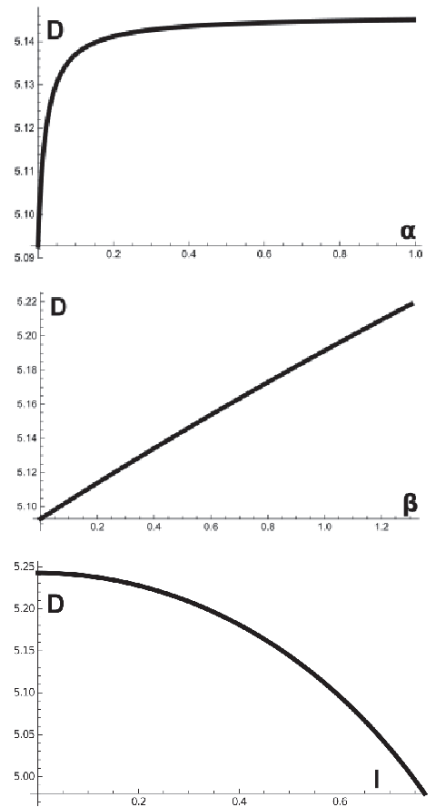
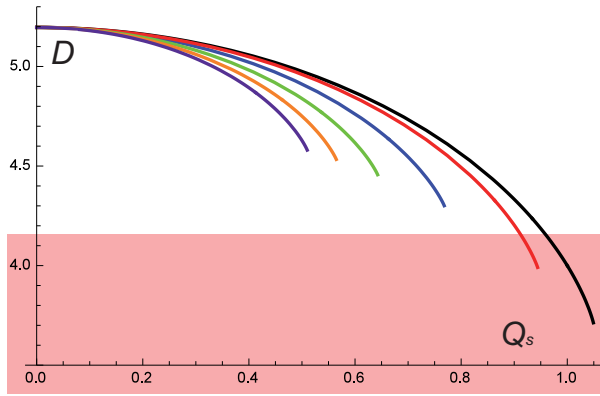


Рис. 4. Зависимости размера тени  $D$  от времени задержки  $\alpha$  при  $l = 0.5M$  и  $\beta = 0.5$  (верхнее изображение), от однопетлевых квантовых поправок  $\beta$  при  $l = 0.5M$ ,  $\alpha = 0.5$  (центральное изображение), от центральной плотности энергии  $l$  при  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0.5$  (нижнее изображение) для ЧД в модифицированной метрике Хейворда в единицах массы ЧД  $M$ ,  $M = 1$

$$A(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q_s^2}{r^2} + \frac{Q_s^2 \left(-M^2 + Q_s^2 + \frac{6}{m_2^2}\right)}{3r^4} + \dots, \quad (21)$$

$$B(r)^{-1} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q_s^2}{r^2} + \frac{2Q_s^2 \left(-M^2 + Q_s^2 + \frac{6}{m_2^2}\right)}{3r^4} + \dots, \quad (22)$$

где  $Q_s$  — скалярный заряд,  $m_2$  — массивная мода со спином 2. Такая асимптотика справедлива вдали от горизонта. Поскольку ключевым моментом



**Рис. 5.** (В цвете онлайн) Зависимости размера тени  $D$  от скалярного заряда  $Q_s$  для новой массивной конформной гравитации с различными значениями  $m_2$  (в единицах  $M$ ,  $M = 1$ ). Черная линия соответствует  $m_2 \rightarrow \infty$ , красная —  $m_2 = 2$ , синяя —  $m_2 = 1$ , зеленая —  $m_2 = 0.707$ , оранжевая —  $m_2 = 0.577$ , фиолетовая —  $m_2 = 0.5$

для нас является учет перехода фотонов на фотонную орбиту, применение этой асимптоты оправдано. На рис. 5 показаны зависимости размера тени от скалярного заряда  $Q_s$  для различных значений  $m_2$ . Концы асимптот соответствуют описанному в работах [28, 32] эффекту: большие значения  $Q_s$  и  $1/m_2$  вызывают отсутствие фотонной сферы. Уменьшение значения  $m_2$  приводит к уменьшению размера тени. Для ограничения параметров модели требуются дополнительные данные наблюдений. Ограничения, приведенные в работе [30], исключают только большие значения  $Q_s$  и  $m_2$  (рис. 5).

#### 4.4. Модель Бамбелби

Сферически-симметричное решение модели Бамбелби имеет вид

$$A(r) = 1 - \frac{2M}{r}, \tag{23}$$

$$B(r) = \frac{1+l}{1-2M/r}, \tag{24}$$

где  $l = \xi b^2$ ,  $\xi$  — константа связи (с размерностью масса  $-1$ ), которая определяет неминимальное взаимодействие между гравитацией и полем Бамбелби,  $b^2 = B^\mu B_\mu$ .

Расчеты показывают, что размер тени не зависит от параметра  $l$ . На самом деле, положение фотонной сферы не зависит от метрической функции  $B(r)$ , если на рассматриваемом масштабе  $B(r) > 0$  и нет других особых точек (регулярна над горизонтом). Рассмотрим функцию

$$\hat{u}(r) = u(r)B(r) = \frac{r^4}{D^2 A(r)} - r^2. \tag{25}$$

Она не зависит от метрической функции  $B(r)$ . Можно показать, что при выполнении условий существования фотонной сферы (16) выполняются и условия

$$\hat{u}(r) = 0, \frac{d\hat{u}(r)}{dr} = 0, \frac{d^2\hat{u}(r)}{d^2r} > 0. \tag{26}$$

При  $B(r) > 0$  автоматически выполняется первое условие системы (16), так как на фотонной сфере  $u(r) = 0$ ,

$$\hat{u}'(r) = u'(r)B(r) + u(r)B'(r). \tag{27}$$

Но на фотонной сфере  $u(r) = 0$  и  $u'(r) = 0$ . В рассматриваемом случае  $B(r) > 0$  и нет других особых точек. Следовательно, выполняется и второе условие. Аналогично и с третьим условием. Следовательно, положение фотонной сферы также не зависит от метрической функции  $B(r)$ . При условии, что на масштабах фотонной сферы  $B(r) > 0$  и нет других особых точек, для вычисления радиуса тени вместо системы (16) можно использовать (26) для упрощения вычислений.

Интересно рассмотреть альтернативное обобщение, которое можно записать как

$$A(r) = (1+l)\bar{A}(r), \tag{28}$$

$$B(r) = \frac{1}{\bar{B}(r)}. \tag{29}$$

Метрика Шварцшильда использована в качестве первого приближения для  $\bar{B}(r)$  и  $\bar{A}(r)$  и обобщения метрики следующего вида:

$$A(r) = (1+l) \left( 1 - \frac{2M}{r} \right), \tag{30}$$

$$B(r)^{-1} = 1 - \frac{2M}{r}. \tag{31}$$

Влияние параметра  $l$  на размер тени ЧД показано на рис. 6. Для приближения  $\bar{B}(r)$  и  $\bar{A}(r)$  зависимость имеет такой же вид. Установив пределы на основании результатов наблюдения M87 [30] в приближении Шварцшильда, получим, что  $-0.3 < l < 0.45$ .

#### 4.5. $f(Q)$ -гравитация

$f(Q)$ -гравитация — это симметричная теория телепараллелизма (STTEGR) с ненулевым скаляром неметричности  $Q$  [6]. Для этой модели было получено несколько сферически-симметричных решений.

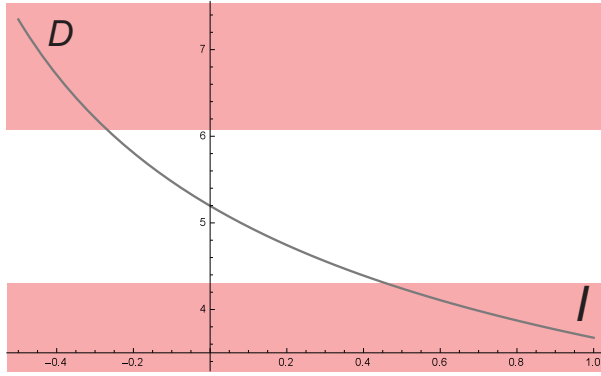


Рис. 6. Зависимость размера тени ЧД  $D$  от параметра  $l$  в альтернативном обобщении метрики Бамбелби в приближении Шварцшильда (в единицах массы ЧД  $M$ ,  $M = 1$ )

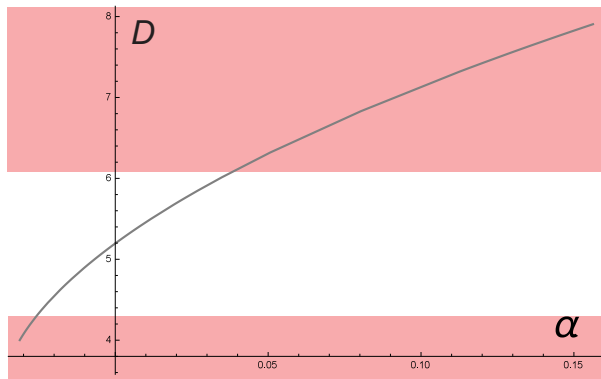


Рис. 7. Зависимость размера тени ЧД  $D$  от параметра  $\alpha$  в  $f(Q)$ -гравитации в единицах массы ЧД  $M_{ren}$

Нами выбрано приближенное решение, расширяющее ОТО ( $I^+$ ). Компоненты метрики имеют вид [6]

$$A(r) = 1 - \frac{2M_{ren}}{r} - \alpha \frac{32}{r^2}, \quad (32)$$

$$B(r)^{-1} = 1 - \frac{2M_{ren}}{r} - \alpha \frac{96}{r^2}, \quad (33)$$

$$2M_{ren} = 2M - \alpha \left( \frac{32}{3M} + c_1 \right), \quad (34)$$

где  $a$  — параметр разложения,  $c_1$  — постоянная интегрирования,  $M_{ren}$  — ренормированная масса. Заметим, что для удаленного наблюдателя нет разницы между перенормированной и обычной массой Шварцшильда. Далее будем использовать  $M_{ren}$ , нормируя все величины на нее. Влияние  $a$  на размер тени ЧД показано на рис. 7. Были установлены следующие ограничения на параметры на основании наблюдений M87 [30]:  $-0.025 < \alpha < 0.04$ .

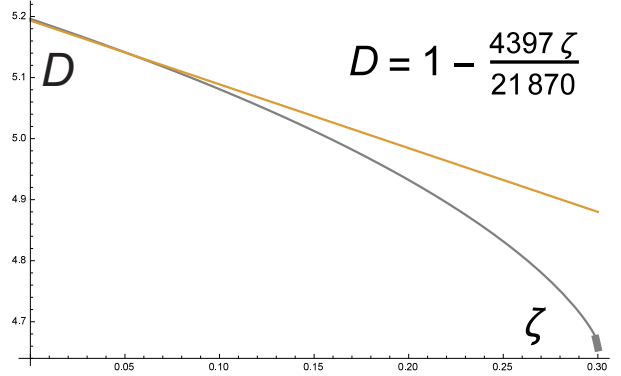


Рис. 8. Нижняя кривая представляет собой зависимость размера тени ЧД  $D$  от параметра  $\zeta$  в скалярной гравитации Гаусса–Бонне (в единицах массы ЧД  $M$ ,  $M = 1$ ). Верхняя линия — ее первое приближение

#### 4.6. Скалярная гравитация Гаусса – Бонне

Статическое сферически-симметричное решение в скалярной гравитации Гаусса–Бонне было получено аналитически в [17] и имеет вид

$$A = -f(r) \left[ 1 + \frac{\zeta}{3r^3 f(r)} h(r) \right], \quad (35)$$

$$B = \frac{1}{f(r)} \left[ 1 - \frac{\zeta}{r^3 f(r)} k(r) \right], \quad (36)$$

где

$$h(r) = 1 + \frac{26}{r} + \frac{66}{5r^2} + \frac{96}{5r^3} - \frac{80}{r^4}, \quad (37)$$

$$k(r) = 1 + \frac{1}{r} + \frac{52}{3r^2} + \frac{2}{r^3} + \frac{16}{5r^4} - \frac{368}{3r^5}, \quad (38)$$

$$f(r) = 1 - \frac{2}{r}, \quad (39)$$

$\zeta$  — параметр связи.

В работе [37] зависимости радиуса фотонной сферы и радиуса тени ЧД от  $\zeta$  вычислены в первом порядке относительно константы связи:

$$r_{ph}^{sGB} = 3 \left[ 1 - \frac{961}{2430} \zeta \right], \quad (40)$$

$$b_c^{sGB} = \sqrt{27} \left[ 1 - \frac{4397\zeta}{21870} \right]. \quad (41)$$

Нами получено численное решение с более высокой точностью (рис. 8). При  $\zeta > 0.3$  фотонная сфера отсутствует. В работах [28, 32] было показано, что такой объект не имеет тени.

#### 5. ОБСУЖДЕНИЕ И ВЫВОДЫ

Разрешение первых изображений черных дыр в проекте Event Horizon составляло примерно полови-



ну размера объекта [4]. Дальнейшее совершенствование наземного оборудования позволило бы увеличить разрешение лишь в несколько раз (не на порядки!). Кроме того, уже достигнут максимально возможный размер наземной сети радиотелескопов. Как было продемонстрировано ранее в статьях [28, 29] и расширено в предыдущих разделах настоящей работы, ограничение для реальных моделей расширенной гравитации требует повышения точности на несколько порядков (не раз!). Поэтому следующим шагом могла бы стать сеть из орбитальных телескопов. Кроме того, измерение размера тени без дополнительных данных будет достаточным только для моделей, основанных на метрике Рейснера – Нордстрема. Для теорий с более сложной структурой пространства-времени необходимы дополнительные виды наблюдения. При рассмотрении последней устойчивой орбиты, сильного гравитационного линзирования ярких звезд [28] и распределения интенсивности теневого фона (как показано выше) минимальное разрешение должно быть порядка 0.001 размера тени. Эта оценка справедлива, если дополнительные коэффициенты согласованы с массой черной дыры. Поэтому более перспективным представляется изучение тени от быстровращающегося объекта. При тех же значениях дополнительных коэффициентов необходимое разрешение составит около 0.01 размера тени [29]. Таким образом, появляется дополнительная причина развивать теорию теней на основании метрик вращающихся черных дыр для развития моделей расширенной гравитации в астрофизике.

Нами также были рассчитаны зависимости размера тени черной дыры от параметров модели в различных расширенных теориях гравитации и установлены ограничения на них с использованием данных наблюдений M87. Результаты для модели Хорндески с инвариантом Гаусса – Бонне, петлевой квантовой гравитации, скалярных моделей Бамбелби и Гаусса – Бонне полностью согласуются с наблюдениями M87\*. Вернее сказать, предсказания этих моделей не выходят за ограничения, установленные имеющимися данными наблюдений. Как нами показано, в конформной гравитации должны быть исключены большие значения  $m_2$  и  $Q_s$  (например, если  $m_2 = 2$ , то  $Q_s < 0.9$ ). В STEGR  $f(Q)$ -гравитации наблюдения M87\* ограничивают значения  $\alpha$  следующим образом:  $-0.025 < \alpha < 0.04$ . Для альтернативного обобщения метрики Бамбелби с приближением Шварцшильда  $-0.3 < l < 0.45$ . Эти результаты демонстрируют тот максимум, которого можно достичь без учета вращения черной дыры.

Подход без учета вращения ЧД справедлив, когда скорость вращения ЧД мала и ею можно пренебречь. При учете вращения количество проб потенциала черной дыры, необходимых для проверки, увеличивается. «В качестве компенсации» требования к точности наблюдений снижаются на порядок.

**Финансирование.** Работа выполнена при поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета «Фундаментальные и прикладные космические исследования».

## ЛИТЕРАТУРА

1. J. A. Orosz, J. E. McClintock et al., *Astrophys. J.* **742**, 84 (2011).
2. B. Abbott et al., *Phys. Rev. D* **93**, 12 (2016).
3. B. Abbott et al., *Amer. Phys. Soc.* **119**, 16 (2017).
4. K. Akiyama et al., *Astrophys. J.* **875**, L5 (2019).
5. S. Capozziello and M. De Laurentis, *Phys. Rep.* **509**, 167 (2011).
6. F. D'Ambrosio, S. D. B. Fell et al., *Phys. Rev. D* **105**, 2 (2021).
7. T. P. Sotiriou and V. Faraoni, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 451 (2010).
8. A. De Felice and S. Tsujikawa, *Living Rev. Rel.* **13**, 3 (2010).
9. C. Charmousis, E. J. Copeland et al., *Phys. Rev. Lett.* **108**, 5 (2012).
10. E. Babichev, C. Charmousis et al., *JCAP* **4**, 27 (2017).
11. C. Pfeifer and S. Schuster, *Universe* **7**(5), 153 (2021).
12. P. D. Mannheim, *Found. Phys.* **42**, 388 (2012).
13. Y. S. Myung and D.-C. Zou, *Phys. Rev. D* **100**, 064057 (2019).
14. P. A. M. Casares, arXiv:1808.01252.
15. T. De Lorenzo, C. Pacilio et al., *Gen. Rel. Grav.* **47**(4), 41 (2015).
16. J.-P. Hu, L.-L. Shi et al., *Astrophys. Space Sci.* **363**(10), 199 (2018).
17. N. Yunes and L. C. Stein, *Phys. Rev. D* **83**, 104002 (2011).

18. G. W. Horndeski, *Int. J. Theor. Phys.* **10**, 363 (1974).
19. T. Kobayashi, *Rep. Progr. Phys.* **82**, 086901 (2019).
20. Y. Ageeva, P. Petrov, and V. Rubakov, *Phys. Rev. D* **104**, 063530 (2021).
21. A. Barrau, T. Cailleteau et al., *Class. Quant. Grav.* **31**, 053001 (2014).
22. A. B. Arbuzov and B. N. Latosh, *Universe* **6**, 12 (2020).
23. S. Alexeyev and D. Krichevskiy, *Phys. Part. Nucl. Lett.* **18**, 128 (2021).
24. S. Alexeyev, D. Krichevskiy, and B. Latosh, *Universe* **7**, 501 (2021).
25. R. Casana, A. Cavalcante et al., *Phys. Rev. D* **97**, 104001 (2018).
26. F. D'Ambrosio, S. D. B. Fell et al., *Phys. Rev. D* **105**, 024042 (2022).
27. H. C. D. Lima, Jr., et al., *Phys. Rev. D* **8**, 084040 (2021).
28. С. О. Алексеев, Б. Н. Латош, В. А. Прокопов, Е. Д. Емцова, *ЖЭТФ* **157**, 796 (2019).
29. С. О. Алексеев, В. А. Прокопов, *ЖЭТФ* **155**, 847 (2020).
30. P. Kocherlakota, L. Rezzolla et al., *Phys. Rev. D* **103**, 104047 (2021).
31. N. Dadhich, R. Maartens et al., *Phys. Lett. B* **487**, 1 (2000).
32. A. F. Zakharov, *Phys. Rev. D* **90**, 062007 (2014).
33. D. Pugliese, H. Quevedo, and R. Ruffini, *Phys. Rev. D* **83**, 024021 (2011).
34. C. Bambi, *Phys. Rev. D* **87**, 107501 (2013).
35. N. I. Shakura and R. A. Sunyaev, *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **175**, 613 (1976).
36. R. Shaikh, P. Kocherlakota et al., *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **482**, 52 (2018).
37. A. M. Bauer, A. Cárdenas-Avendaño et al., *Astrophys. J.* **925**(2), 119 (2022).