

# ЗАКОНЫ ДИСПЕРСИИ ЧЕТЫРЕХУРОВНЕВОГО АТОМА С ЭКВИДИСТАНТНЫМ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМ СПЕКТРОМ ПРИ ВЫСОКОМ УРОВНЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ

*О. В. Коровай\**

*Приднестровский государственный университет им. Т. Г. Шевченко  
MD-3300, Тирасполь, Молдова*

Поступила в редакцию 28 июля 2021 г.,  
после переработки 21 октября 2021 г.  
Принята к публикации 22 октября 2021 г.

Получен закон дисперсии для системы четырехуровневых атомов с эквидистантным энергетическим спектром, взаимодействующих с резонансным лазерным излучением, с учетом трех последовательных однофотонных оптически разрешенных переходов, двух двухфотонных переходов, а также прямого трехфотонного перехода. Показано, что закон дисперсии состоит из четырех поляритонных ветвей. С использованием приближения заданной плотности фотонов предсказываются эффекты расталкивания и притяжения ветвей закона дисперсии, их пересечение, самосогласованное изменение силы связи фотонов с атомами.

DOI: 10.31857/S0044451022050029

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение явлений взаимодействия лазерного излучения с веществом в различных структурах ограниченной размерности позволяет развивать нелинейную спектроскопию как инструмент для исследования неравновесной квантовой динамики [1, 2]. В большинстве работ [3–8] изучены явления, обусловленные сильной связью — особым режимом взаимодействия фотонов с материальными возмущениями среды, проявляющимся в когерентных колебаниях энергии между материей и фотонной подсистемой. Наличие такого взаимодействия может привести к обнаружению новых химических и физических свойств и, следовательно, к развитию передовых исследований во многих областях: бозе-эйнштейновской конденсации, оптики когерентного излучения, поляритонной генерации, сверхтекучести в системе экситон-поляритонов в микрорезонаторах, квантовой обработки информации и др. При этом большой интерес представляет установление общности или различий между такими понятиями, как частота нутации либо частота осцилляций Раби в системе экситонов Ванье–Мотта и ва-

куумное раби-расщепление ансамблем изолированных двухуровневых атомов либо системой экситонов Френкеля в условиях сильной связи фотонов с материальными возмущениями. В ряде работ исследуются поляритонные состояния в микрорезонаторах, где энергии экситонов Френкеля в органических квантовых ямах и экситонов Ванье–Мотта в неорганических квантовых ямах смешиваются с оптической модой микрорезонатора, что приводит к взаимодействию экситонов между собой, результатом взаимодействия является образование связанных гибридных поляритонов [9, 10]. В работе [11] изучены оптические свойства триплетного гибрида (полупроводник–органика–полупроводник), имплантированного в микрополости, и законы дисперсии в зависимости от значений частот Раби. В [12] представлены результаты исследования нелинейных явлений, обусловленных наличием поляритонных резонансов в нелинейной среде, состоящей из  $N$  ангармонических многоуровневых систем, сильно связанных с микрорезонатором.

Нелинейно-оптические явления в четырех- и многоуровневых атомных системах исследовались в работах [13–18]. В четырехуровневых атомных системах хорошо изучены следующие нелинейно-оптические явления: когерентное управление нелинейным поглощением интенсивных лазерных полей

\* E-mail: olesya-korovai@mail.ru

[19], природа интерференции между пиками Аутлера–Таунса (или одетыми состояниями) [20], динамика экситон-светового поля плоского ансамбля квантовых точек, встроенных в фотонный резонатор [21], возникновение в законе дисперсии дополнительных поляритонных ветвей, обусловленных образованием биэкситонных и триэкситонных состояний в связанных тримерах и тетрамерах [22, 23], спектр пропускания оптического резонатора, связанного с ансамблем холодных атомов Rb-85, закон дисперсии которого состоит из четырех поляритонных ветвей [24], формирование поляритонов темного состояния [25], влияние атомной когерентности на поглощение [26], нерезонансно управляемую конденсацию и генерацию поляритонов в четырехуровневой системе, сформированной в сильно связанной двойной микрорезонаторной структуре [27].

При этом в теоретических и экспериментальных исследованиях учитывались однофотонные индуцированные переходы между последовательными парами соседних уровней под действием света, как это представлено в теории каскадных лазеров. Вместе с тем в атомных четырехуровневых системах возможны многофотонные переходы: двухфотонные переходы — между первым и третьим уровнями, вторым и четвертым уровнями, трехфотонный переход между первым и четвертым уровнями. В ряде работ изучалось влияние многофотонных процессов в системах лестничного типа на различные оптические явления — трехфотонное лазерное возбуждение четырехуровневой системы ридберговских атомов [28], трехфотонная когерентность ридберговского состояния в доплеровской расширенной четырехуровневой атомной системе атомов Rb-85 с резонансным микроволновым полем [29], экспериментальное различие расщепления Аутлера–Таунса от электромагнитно-индуцированной прозрачности при учете двухфотонного резонанса [30], сильная фотонная блокада одиночного атома в резонаторе, которая увеличивает расщепление одетого состояния между верхней и нижней поляритонными ветвями из-за учета взаимодействия между квантовой интерференцией и усиленным вакуумным расщеплением Раби [31], двухфотонная резонансная флуоресценция трансмона, сильно связанного с волноводом [32]. Известно, что в трехуровневой системе имеют место индуцированные светом однофотонные переходы из основного состояния кристалла в экситонное и из экситонного в биэкситонное, а также прямой двухфотонный переход из основного состояния кристалла на биэкситонный уровень, характеризующиеся гигантскими силами осцилля-

тора по сравнению с экситонным переходом [33]. В работе [34] представлены результаты исследования двухимпульсного взаимодействия с экситонами и биэкситонами в условиях мощной накачки в области М-полосы люминесценции. В работе [35] изучено влияние двухфотонных процессов на поглощение в системе экситонов и биэкситонов при двухимпульсном взаимодействии, которое проявляется в наблюдении несимметричного расщепления Аутлера–Таунса, а учет процессов квантовой интерференции приводит к исчезновению эффекта Аутлера–Таунса при определенных значениях величин полей падающих импульсов. Предсказана возможность управления спектром поглощения при помощи изменения интенсивности полей и расстройек резонанса. В работах [36, 37] представлены результаты исследования законов дисперсии поляритонного типа для трехуровневого атома с эквидистантным и неэквидистантным энергетическими спектрами при учете двухфотонного перехода. Закон дисперсии неэквидистантного четырехуровневого атома с одновременным учетом однофотонных, двухфотонных и трехфотонных переходов изучен в работе [38]. Из представленного краткого обзора литературы видно, что исследование особенностей протекания когерентных нелинейных оптических явлений при одновременном учете однофотонных и многофотонных процессов вызывает интерес как с теоретической, так и с прикладной точки зрения из-за реализации возможности контроля и управления процессами поглощения и взаимодействия света с материальными возбуждениями среды и вследствие этого является актуальной задачей.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Ниже представлены результаты исследований закона дисперсии четырехуровневых атомов с эквидистантным энергетическим спектром, взаимодействующих с фотонами ультракороткого импульса резонансного лазерного излучения. Пусть на среду, состоящую из четырехуровневых атомов с разностью энергии  $\hbar\omega_0$  между соседними двумя уровнями, падает ультракороткий импульс резонансного лазерного излучения с частотой  $\omega_c$  (рис. 1). Предполагается, что длительность импульса намного меньше времени релаксации атомов. В этом случае процессами релаксации можно пренебречь, так как они не успевают срабатывать за время действия импульса. Под действием фотонов этого импульса в

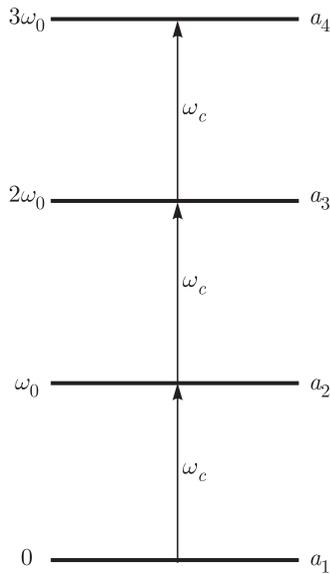


Рис. 1. Схема эквидистантного энергетического спектра четырехуровневого атома, взаимодействующего с фотонами с частотами  $\omega_c$

атомной системе возникают однофотонные оптически разрешенные переходы между последовательно расположенными парами уровней  $1 \rightleftharpoons 2$ ,  $2 \rightleftharpoons 3$  и  $3 \rightleftharpoons 4$  и одновременно с ними оптически разрешенные прямые двухфотонные переходы между уровнями  $1 \rightleftharpoons 3$  и  $2 \rightleftharpoons 4$ , а также трехфотонный переход  $1 \rightleftharpoons 4$ . Насколько нам известно, до сих пор не рассматривалось одновременное действие однофотонного, двухфотонного и трехфотонного или хотя бы однофотонного и двухфотонного процессов. Переходы между уровнями  $1 \rightleftharpoons 2$ ,  $2 \rightleftharpoons 3$  и  $3 \rightleftharpoons 4$  здесь рассматриваются как каскадные переходы между уровнями 1, 2, 3 и 4, тогда как прямые двухфотонные переходы между уровнями  $1 \rightleftharpoons 3$  и  $2 \rightleftharpoons 4$  происходят через виртуальный уровень, а трехфотонный переход — через два виртуальных уровня.

Отметим, что в полупроводниках существуют два последовательных каскадных оптически разрешенных однофотонных перехода — переход из основного состояния кристалла в экситонное и затем оптическая конверсия экситонов в биэкситоны под действием одних и тех же фотонов [33]. Вместе с тем детально изучен процесс прямого двухфотонного возбуждения биэкситона из основного состояния кристалла [39]. Процессы оптической конверсии и двухфотонного возбуждения характеризуются гигантскими силами осциллятора. Однако одновременный учет трех процессов под действием одних и тех же фотонов отсутствует, хотя экспериментальное и теоретическое исследование каждого из

процессов в отдельности проводилось многократно.

Гамильтониан взаимодействия фотонов с четырехуровневыми атомами можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hbar} \hat{H}_{int} = & -g_{12} \hat{a}_1^\dagger \hat{c}^\dagger \hat{a}_2 - g_{12}^* \hat{a}_2^\dagger \hat{c} \hat{a}_1 - g_{23} \hat{a}_2^\dagger \hat{c}^\dagger \hat{a}_3 - \\ & - g_{23}^* \hat{a}_3^\dagger \hat{c} \hat{a}_2 - g_{34} \hat{a}_3^\dagger \hat{c}^\dagger \hat{a}_4 - g_{34}^* \hat{a}_4^\dagger \hat{c} \hat{a}_3 - \\ & - g_{13} \hat{a}_1^\dagger \hat{c}^\dagger \hat{c}^\dagger \hat{a}_3 - g_{13}^* \hat{a}_3^\dagger \hat{c} \hat{c} \hat{a}_1 - g_{24} \hat{a}_2^\dagger \hat{c}^\dagger \hat{c}^\dagger \hat{a}_4 - \\ & - g_{24}^* \hat{a}_4^\dagger \hat{c} \hat{c} \hat{a}_2 - g_{14} \hat{a}_1^\dagger \hat{c}^\dagger \hat{c}^\dagger \hat{c}^\dagger \hat{a}_4 - g_{14}^* \hat{a}_4^\dagger \hat{c} \hat{c} \hat{c} \hat{a}_1, \quad (1) \end{aligned}$$

где  $\hat{a}_i (\hat{a}_i^\dagger)$  ( $i = 1-4$ ) — оператор уничтожения (рождения) атома на уровне  $i$  (отсчет энергии атомов на возбужденных уровнях  $i = 2, 3, 4$  начинается с первого уровня, так что собственная энергия атома на уровне  $i$  равна  $\hbar\omega_0(i-1)$ ),  $\hat{c} (\hat{c}^\dagger)$  — оператор уничтожения (рождения) фотона с частотой  $\omega_c$ ;  $g_{12}$ ,  $g_{23}$  и  $g_{34}$  — константы разрешенных оптических однофотонных переходов между последовательными парами уровней атома,  $g_{13}$  и  $g_{24}$  — константы двухфотонных оптически разрешенных переходов и  $g_{14}$  — константа трехфотонного перехода с уровня 1 на уровень 4,  $g_{ik}$  ( $i = 1-3$ ,  $k = 1-4$ ) — комплексно-сопряженные константы разрешенных оптических переходов соответственно.

Используя (1), легко получить гейзенберговские уравнения движения для операторов  $\hat{a}_i$  ( $i = 1-4$ ) и  $\hat{c}$ , после усреднения которых в приближении среднего поля (mean field approximation) приходим к системе нелинейных эволюционных уравнений для амплитуд  $a_i = \langle \hat{a}_i \rangle$  ( $i = 1-4$ ) и  $c = \langle \hat{c} \rangle$ :

$$\begin{aligned} i\dot{a}_1 = & -g_{12}c^*a_2 - g_{13}c^*c^*a_3 - g_{14}c^*c^*c^*a_4, \\ i\dot{a}_2 = & \omega_0a_2 - g_{12}^*a_1c - g_{23}c^*a_3 - g_{24}c^*c^*a_4, \\ i\dot{a}_3 = & 2\omega_0a_3 - g_{23}^*a_2c - g_{34}c^*a_4 - g_{13}a_1cc, \\ i\dot{a}_4 = & 3\omega_0a_4 - g_{34}^*a_3c - g_{24}^*a_2cc - g_{14}^*a_1ccc, \\ i\dot{c} = & \omega_c c - g_{12}a_1^*a_2 - g_{23}a_2^*a_3 - g_{34}a_3^*a_4 - \\ & - 2g_{13}a_1^*c^*a_3 - 2g_{24}a_2^*c^*a_4 - 3g_{14}a_1^*c^*c^*a_4. \end{aligned} \quad (2)$$

Найдем дисперсионное уравнение системы в окрестности частоты  $\omega_0$  второго уровня атома. Беря за основу уравнение для  $\dot{a}_2$ , видим, что скорость изменения амплитуды  $a_2$  определяется выражениями  $a_1c$ ,  $c^*a_3$  и  $c^*c^*a_4$ . Слагаемое с  $a_1c$  описывает вклад в скорость изменения амплитуды  $a_2$  за счет гибели атома на уровне 1 и фотона с энергией  $\hbar\omega_c$ , в результате чего атом переходит на уровень 2. Слагаемое с  $c^*a_3$  описывает процессы гибели атома на уровне 3 с образованием фотона на частоте  $\omega_c$ , в результате чего атом переходит на уровень 2. Аналогично, слагаемое с  $c^*c^*a_4$  описывает процесс гибели атома на уровне 4 с образованием

двух фотонов с частотой  $\omega_c$  и переходом атома на уровень 2. Соответствующие им операторы  $\hat{a}_1\hat{c}$ ,  $\hat{c}^\dagger\hat{a}_3$  и  $\hat{c}^\dagger\hat{c}^\dagger\hat{a}_4$  описывают состояния с квазиэнергиями  $\hbar\omega_c$ ,  $\hbar(2\omega_0 - \omega_c)$  и  $\hbar(3\omega_0 - 2\omega_c)$ , равными энергии  $\hbar\omega_0$  атома на втором уровне. Следовательно, состояние атома на уровне 2, а также реплика возбужденного состояния 3, сдвинутая вниз на энергию фотона  $\hbar\omega_c$  и реплика возбужденного состояния 4, сдвинутая вниз на энергию двух фотонов, вырождены по энергии.

Используя (2), получаем для амплитуд  $a_1c$ ,  $c^*a_3$  и  $c^*c^*a_4$  следующие уравнения:

$$\begin{aligned} i(\dot{a}_1c) &= \omega_c(a_1c) - g_{12}c^*ca_2 - g_{13}c^*c^*ca_3 - \\ &- g_{34}a_1a_3^*a_4 - g_{14}c^*c^*ca_4 - g_{12}a_1a_1^*a_2 - \\ &- g_{23}a_1a_2^*a_3 - 2g_{13}a_1^*a_1c^*a_3 - 2g_{24}a_1a_2^*c^*a_4 - \\ &- 3g_{14}a_1^*a_1c^*c^*a_4, \\ i(\dot{a}_3c^*) &= (2\omega_0 - \omega_c)(c^*a_3) + g_{12}^*a_1a_2^*a_3 + \\ &+ g_{23}^*a_2a_3^*a_3 + g_{34}^*a_4^*a_3a_3 + 2g_{13}^*a_1ca_3^*a_3 + \\ &+ 2g_{24}^*a_2ca_4^*a_3 + 3g_{14}^*a_1cca_4^*a_3 - g_{23}^*c^*a_2c - \\ &- g_{34}c^*c^*a_4 - g_{13}^*c^*cca_1, \\ i(c^*\dot{c}^*a_4) &= (3\omega_0 - 2\omega_c)(c^*c^*a_4) + 2g_{12}^*a_1a_2^*c^*a_4 + \\ &+ 2g_{23}^*a_2a_3^*c^*a_4 + 2g_{34}^*a_3a_4^*a_4c^* + 4g_{13}^*a_1c^*c^*a_3a_4 + \\ &+ 4g_{24}^*a_2a_4^*c^*c^*a_4 + 6g_{14}^*a_1ccc^*a_4^*a_4 - g_{34}^*c^*c^*ca_3 - \\ &- g_{14}^*c^*c^*ccca_1 - g_{24}^*c^*c^*cca_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Далее будем считать, что амплитуды фотонов  $c$  намного превосходят амплитуды атомов на соответствующих уровнях ( $c \gg a_1, a_2, a_3, a_4$ ). В этом приближении все слагаемые в последнем уравнении в (2), кроме первого, исчезающе малы и ими можно пренебречь. Тогда решение этого уравнения имеет простой вид  $c = c_0 \exp(-i\omega t)$ , где  $c_0$  — начальное значение амплитуды фотонов. Таким образом, видно, что огибающая функции  $c(t)$  в приближении заданной плотности фотонов не изменяется со временем:

$$|c|^2 = |c_0|^2 \equiv f_0 = \text{const.}$$

Пренебрегая исчезающе малыми слагаемыми в (3), получаем следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} i\dot{a}_2 &= \omega_0a_2 - g_{12}^*(a_1c) - g_{23}(c^*a_3) - \\ &- g_{24}(c^*c^*a_4), \\ i(\dot{a}_1c) &= \omega_c(a_1c) - g_{12}f_0a_2 - g_{13}f_0(c^*a_3) - \\ &- g_{14}f_0(c^*c^*a_4), \\ i(\dot{a}_3c^*) &= (2\omega_0 - \omega_c)(c^*a_3) - g_{23}^*f_0a_2 - \\ &- g_{34}(c^*c^*a_4) - g_{13}^*f_0(a_1c), \\ i(c^*\dot{c}^*a_4) &= (3\omega_0 - 2\omega_c)(c^*c^*a_4) - \\ &- g_{34}^*f_0(c^*a_3) - g_{24}^*f_0^2a_2 - g_{14}^*f_0^2(a_1c), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $f_0$  — (заданная) плотность фотонов. Решения системы (4) будем искать в виде  $a_2, a_1c, c^*a_3, c^*c^*a_4 \sim \exp(-i\omega t)$ , где  $\omega$  — собственная частота атомных поляритонов. Тогда для стационарных амплитуд получаем алгебраическую систему уравнений:

$$\begin{aligned} (\omega - \omega_0)a_2 + g_{12}^*(a_1c) + g_{23}(c^*a_3) + \\ + g_{24}(c^*c^*a_4) &= 0, \\ (\omega - \omega_c)a_1c + g_{12}f_0a_2 + g_{13}f_0(c^*a_3) + \\ + g_{14}f_0(c^*c^*a_4) &= 0, \\ (\omega - 2\omega_0 + \omega_c)c^*a_3 + g_{23}^*f_0a_2 + \\ + g_{34}(c^*c^*a_4) + g_{13}^*f_0(a_1c) &= 0, \\ (\omega - 3\omega_0 + 2\omega_c)c^*c^*a_4 + g_{34}^*f_0(c^*a_3) + \\ + g_{24}^*f_0^2a_2 + g_{14}^*f_0^2(a_1c) &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

детерминант которой

$$\begin{vmatrix} \omega - \omega_0 & g_{12}^* & g_{23} & g_{24} \\ g_{12}f_0 & \omega - \omega_c & g_{13}f_0 & g_{14}f_0 \\ g_{23}^*f_0 & g_{13}^*f_0 & \omega - 2\omega_0 + \omega_c & g_{34} \\ g_{24}^*f_0^2 & g_{14}^*f_0^2 & g_{34}^*f_0 & \omega - 3\omega_0 + 2\omega_c \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

представляет собой закон дисперсии взаимодействующих атомов с эквидистантным энергетическим спектром в окрестности частоты  $\omega_0$  нижайшего возбужденного уровня атома в приближении заданной плотности фотонов. Раскрывая детерминант (6) и полагая константы  $g_{ik} = |g_{ik}| \exp(i\varphi_{ik})$ , получаем уравнение четвертой степени для определения частот  $\omega$  атомных поляритонов:

$$\begin{aligned} (\omega - \omega_0)(\omega - \omega_c)(\omega - 2\omega_0 + \omega_c)(\omega - 3\omega_0 + 2\omega_c) - \\ - \Omega_{12}^2(\omega - 2\omega_0 + \omega_c)(\omega - 3\omega_0 + 2\omega_c) - \\ - \Omega_{23}^2(\omega - \omega_c)(\omega - 3\omega_0 + 2\omega_c) - \Omega_{34}^2(\omega - \omega_0)(\omega - \omega_c) - \\ - \Omega_{13}^2(\omega - \omega_0)(\omega - 3\omega_0 + 2\omega_c) - \\ - \Omega_{24}^2(\omega - \omega_c)(\omega - 2\omega_0 + \omega_c) - \\ - \Omega_{14}^2(\omega - \omega_0)(\omega - 2\omega_0 + \omega_c) + \\ + \Omega_{12}^2\Omega_{34}^2 + \Omega_{23}^2\Omega_{14}^2 + \Omega_{13}^2\Omega_{24}^2 + \\ + 2\Omega_{13}\Omega_{34}\Omega_{14}(\omega - \omega_0) \cos \Theta_1 + \\ + 2\Omega_{12}\Omega_{23}\Omega_{13}(\omega - 3\omega_0 + 2\omega_c) \cos \Theta_2 + \\ + 2\Omega_{12}\Omega_{14}\Omega_{24}(\omega - 2\omega_0 + \omega_c) \cos \Theta_4 + \\ + 2\Omega_{23}\Omega_{34}\Omega_{24}(\omega - \omega_c) \cos \Theta_3 - \\ - 2\Omega_{12}\Omega_{23}\Omega_{13}\Omega_{14} \cos(\Theta_1 + \Theta_2) - \\ - 2\Omega_{12}\Omega_{13}\Omega_{23}\Omega_{34} \cos(\Theta_1 - \Theta_4) - \\ - 2\Omega_{23}\Omega_{14}\Omega_{13}\Omega_{24} \cos(\Theta_1 - \Theta_3) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\Omega_{12}^2 &= g_{12}^2 f_0, & \Omega_{23}^2 &= g_{23}^2 f_0, & \Omega_{34}^2 &= g_{34}^2 f_0, \\ \Omega_{13}^2 &= g_{13}^2 f_0^2, & \Omega_{24}^2 &= g_{24}^2 f_0^2, & \Omega_{14}^2 &= g_{14}^2 f_0^3\end{aligned}\quad (8)$$

— частоты Раби для дипольно-разрешенных оптических переходов, каждая из которых пропорциональна матричному элементу соответствующего перехода и плотности фотонов для однофотонного перехода, квадрату плотности фотонов для двухфотонного перехода и кубу плотности фотонов для трехфотонного перехода, а  $\Theta_i$  ( $i = 1-4$ ) — разности фаз, выражения для которых имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\Theta_1 &= \varphi_{12} + \varphi_{24} - \varphi_{14}, & \Theta_2 &= \varphi_{12} + \varphi_{23} - \varphi_{13}, \\ \Theta_3 &= \varphi_{23} + \varphi_{34} - \varphi_{24}, & \Theta_4 &= \varphi_{12} + \varphi_{24} - \varphi_{14}.\end{aligned}\quad (9)$$

Из (7) видно, что закон дисперсии атомных поляритонов может иметь четыре действительных корня, которые описывают четыре дисперсионные ветви в зависимости от частоты фотонов  $\omega_c = ck$ , где  $k$  — волновой вектор. Форма и положение ветвей закона дисперсии существенно определяются частотами Раби (8), квадраты которых, в свою очередь, определяются плотностью фотонов в степени, равной кратности многофотонного перехода (первой, второй и третьей степени соответственно). Второе, третье и четвертое слагаемые в (7) пропорциональны квадратам соответствующих частот Раби либо квадрату модуля соответствующего матричного элемента перехода. Эти три слагаемых описывают последовательные, независимые вклады каждого из однофотонных переходов (между уровнями  $1 \leftrightarrow 2$ ,  $2 \leftrightarrow 3$ ,  $3 \leftrightarrow 4$ ) в дисперсионном уравнении. При этом знаки (либо фазы) соответствующих констант взаимодействия по отношению к другим константам не играют роли. Пятое и шестое слагаемые в (7) описывают последовательные, независимые вклады каждого из двухфотонных переходов (между уровнями  $1 \leftrightarrow 3$  и  $2 \leftrightarrow 4$  соответственно). Седьмое слагаемое описывает вклад прямого трехфотонного перехода между уровнями  $1 \leftrightarrow 4$ . Слагаемые с одиннадцатого по четырнадцатое пропорциональны произведениям трех частот Раби (трех констант взаимодействия). Их появление обусловлено одновременным действием (квантовой интерференцией) трех процессов. Если хотя бы одна из констант взаимодействия равна нулю, то эти слагаемые отсутствуют. При этом учет знаков между констан-

тами взаимодействия (фазовых соотношений) играет важную роль, так как закон дисперсии зависит еще и от разности фаз между константами соответствующих оптических процессов. Последние четыре слагаемые учитывают вклад в дисперсионное соотношение квантовой интерференции четырех процессов. Здесь важны корреляции между четырьмя константами взаимодействия, обусловленные четырехчастичными процессами. Слагаемые с разностью фаз в (7) являются следствием когерентности процесса взаимодействия фотонов с атомами. По этой причине экспериментальное установление особенностей поведения закона дисперсии при одновременном учете всех оптических переходов может способствовать установлению фазовых соотношений между различными константами взаимодействия. В дисперсионном уравнении (7) содержатся девять частотных параметров  $\omega$ ,  $\omega_0$ ,  $\omega_c$ ,  $\Omega_{12}$ ,  $\Omega_{23}$ ,  $\Omega_{34}$ ,  $\Omega_{13}$ ,  $\Omega_{24}$ ,  $\Omega_{14}$  и разности фаз  $\Theta_i$  ( $i = 1-4$ ). Далее частоты  $\omega$ ,  $\omega_0$ ,  $\omega_c$ ,  $\Omega_{23}$ ,  $\Omega_{34}$ ,  $\Omega_{13}$ ,  $\Omega_{24}$ ,  $\Omega_{14}$  нормируем на самую низкую частоту Раби  $\Omega_{12}$ . Частоты  $\omega$ ,  $\omega_0$ ,  $\omega_c$  в полупроводниках порядка  $10^{15} \text{ с}^{-1}$ , тогда как значения частот Раби  $\Omega_{12}$ ,  $\Omega_{23}$ ,  $\Omega_{34}$ ,  $\Omega_{13}$ ,  $\Omega_{24}$ ,  $\Omega_{14}$  на два-три порядка меньше. Кроме того, из общих соображений известно, что значения частот Раби приблизительно равны при умеренных уровнях возбуждения, а при низких (высоких) уровнях частоты многофотонных переходов  $\Omega_{13}$ ,  $\Omega_{24}$ ,  $\Omega_{14}$  меньше (больше) частот однофотонных переходов  $\Omega_{12}$ ,  $\Omega_{23}$ ,  $\Omega_{34}$ . Следовательно, с ростом плотности фотонов частоты Раби  $\Omega_{13}$ ,  $\Omega_{24}$ ,  $\Omega_{14}$  будут возрастать быстрее, чем частоты  $\Omega_{12}$ ,  $\Omega_{23}$ ,  $\Omega_{34}$ .

Если считать, что энергетический спектр атома ограничен тремя уровнями, то в этом случае все константы взаимодействия, обусловленные переходами на четвертый энергетический уровень, тождественно равны нулю. Таким образом, полагая в (7)  $\Omega_{14} = \Omega_{24} = \Omega_{34} = 0$ , приходим к следующему выражению, описывающему закон дисперсии эквидистантного трехуровневого атома, взаимодействующего с фотонами, в приближении заданной плотности фотонов:

$$\begin{aligned}(\omega - \omega_0)(\omega - \omega_c)(\omega - 2\omega_0 + \omega_c) - \\ - \Omega_{12}^2(\omega - 2\omega_0 + \omega_c) - \Omega_{23}^2(\omega - \omega_c) - \\ - \Omega_{13}^2(\omega - \omega_0) + 2\Omega_{12}\Omega_{23}\Omega_{13} \cos \Theta = 0,\end{aligned}\quad (10)$$

где  $\Theta$  — разность фаз, равная  $\Theta = \varphi_{12} + \varphi_{23} - \varphi_{13}$  [36, 37].

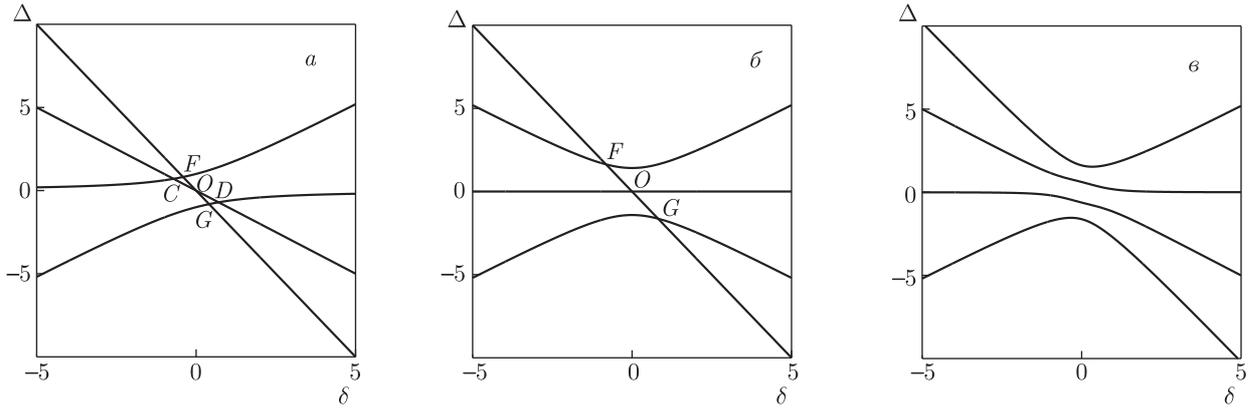


Рис. 2. Законы дисперсии  $\Delta(\delta)$  при значениях частот Раби без учета многофотонных переходов  $\Omega_{13} = \Omega_{24} = \Omega_{14} = 0$  при а)  $\Omega_{12} \neq 0, \Omega_{23} = \Omega_{34} = 0$ ; б)  $\Omega_{12} = \Omega_{23} \neq 0, \Omega_{34} = 0$ ; в)  $\Omega_{12} = \Omega_{23} = \Omega_{34} \neq 0$

### 3. ЗАКОН ДИСПЕРСИИ ЧЕТЫРЕХУРОВНЕВОГО АТОМА С ЭКВИДИСТАНТНЫМ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМ СПЕКТРОМ

Рассмотрим подробнее особенности поведения закона дисперсии для четырехуровневого атома с эквидистантным энергетическим спектром. Собственные частоты второго, третьего и четвертого (возбужденных) уровней соответственно равны  $\omega_0, 2\omega_0$  и  $3\omega_0$ . Атом взаимодействует с фотонами одного и того же импульса с частотой  $\omega_c$ . Из (7) видно, что при  $\Omega_{23} = 0, \Omega_{34} = 0, \Omega_{24} = 0, \Omega_{13} = 0$  (предел двухуровневого атома) это уравнение распадается на три:

$$(\omega - \omega_0)(\omega - \omega_c) - \Omega_{12}^2 = 0, \quad \omega - 2\omega_0 + \omega_c = 0, \\ \omega - 3\omega_0 + 2\omega_c = 0,$$

первое из которых представляет собой хорошо известное уравнение поляритонного типа, а второе и третье — дисперсию «голых» фотонов, не взаимодействующих со средой. Обе поляритоноподобные ветви закона дисперсии пересекаются с прямыми  $\omega - 2\omega_0 + \omega_c = 0, \omega - 3\omega_0 + 2\omega_c = 0$  в четырех точках (рис. 2а): с прямой  $\omega - 2\omega_0 + \omega_c = 0$  в точках

$$C \left( \omega - \Omega_{12}/\sqrt{2}, \omega + \Omega_{12}/\sqrt{2} \right),$$

$$D \left( \omega + \Omega_{12}/\sqrt{2}, \omega - \Omega_{12}/\sqrt{2} \right)$$

и с прямой  $\omega - 3\omega_0 + 2\omega_c = 0$  в точках

$$F \left( \omega - \Omega_{12}/2\sqrt{3}, \omega + \Omega_{12}/2\sqrt{3} \right),$$

$$G \left( \omega + \Omega_{12}/2\sqrt{3}, \omega - \Omega_{12}/2\sqrt{3} \right),$$

кроме того, прямые имеют точку пересечения  $O(0, 0)$  (рис. 2а). Если теперь положить, например,

$\Omega_{23} \neq 0$ , но  $\Omega_{34} = 0$  и  $\Omega_{13} = 0, \Omega_{24} = 0$ , т.е. если включить взаимодействие фотонов с атомом на переходе  $2 \leftrightarrow 3$ , то в этом случае уравнение (7) распадается на два независимых уравнения:

$$\omega - 3\omega_0 + 2\omega_c = 0,$$

$$(\omega - \omega_0)(\omega - \omega_c)(\omega - 2\omega_0 + \omega_c) - \\ - \Omega_{12}^2(\omega - 2\omega_0 + \omega_c) - \Omega_{23}^2(\omega - \omega_c) = 0.$$

Вырожденные по энергии точки пересечения ветвей  $C$  и  $D$  расщепляются благодаря взаимодействию фотонов с атомом на переходе  $2 \leftrightarrow 3$  и формируют три отдельные ветви закона дисперсии — верхнюю, среднюю и нижнюю, которые по-прежнему пересекаются прямой  $\omega - 3\omega_0 + 2\omega_c = 0$  в трех точках: средняя ветвь в точке  $O(0, 0)$ , а верхняя и нижняя поляритонные ветви в точках

$$F \left( \omega + \sqrt{\frac{2}{3}(\Omega_{12}^2 + 3\Omega_{23}^2)}, \frac{1}{2}\omega - \sqrt{\frac{1}{6}(\Omega_{12}^2 + 3\Omega_{23}^2)} \right)$$

и

$$G \left( \omega - \sqrt{\frac{2}{3}(\Omega_{12}^2 + 3\Omega_{23}^2)}, \frac{1}{2}\omega + \sqrt{\frac{1}{6}(\Omega_{12}^2 + 3\Omega_{23}^2)} \right)$$

соответственно (рис. 2б). Верхняя и средняя ветви имеют экстремумы в окрестности точки  $F$ , а средняя и нижняя — в окрестности точки  $G$ . С ростом  $\Omega_{23}$  величины расщеплений растут и положения экстремумов изменяются. Если теперь положить, например,  $\Omega_{34} \neq 0$ , но  $\Omega_{24} = \Omega_{13} = 0$ , т.е. если включить взаимодействие фотонов с атомом на переходе  $3 \leftrightarrow 4$ , то в этом случае уравнение (7) не распадается на два независимых уравнения. Вырожденные по энергии точки пересечения ветвей  $F$  и  $G$  расщепляются благодаря взаимодействию фотона с атомом

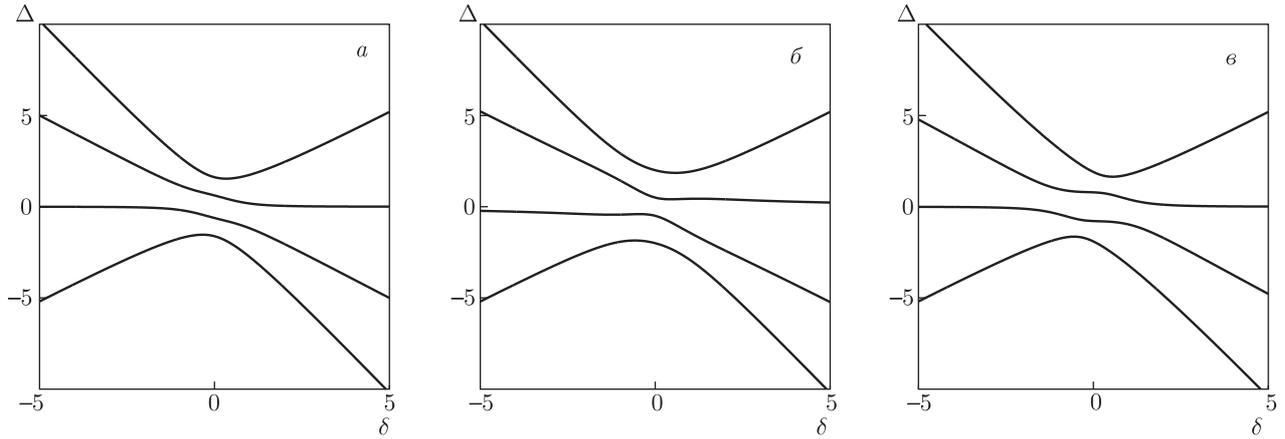


Рис. 3. Законы дисперсии  $\Delta(\delta)$  при значениях частот Раби без учета многофотонных переходов  $\Omega_{13} = \Omega_{24} = \Omega_{14} = 0$  при а)  $\Omega_{12} = \Omega_{23} = \Omega_{34} = 1$ ; б)  $\Omega_{12} = \Omega_{34} = 1, \Omega_{23} = 1.5$ ; в)  $\Omega_{12} = \Omega_{23} = 1, \Omega_{34} = 1.5$

на переходе  $3 \leftrightarrow 4$  и формируются четыре отдельные ветви закона дисперсии: верхняя, две средние и нижняя (рис. 2в). Верхняя и нижняя ветви закона дисперсии имеют экстремумы в окрестности точки  $O$ : верхняя — минимум, нижняя — максимум, и характеризуются наличием восходящих и нисходящих участков. Если частоты Раби однофотонных переходов равны  $\Omega_{12} = \Omega_{23} = \Omega_{34} = 1$ , то ветви закона дисперсии расположены зеркально симметрично (рис. 3а). Изменение значений  $\Omega_{23}$  (рис. 3б) и  $\Omega_{34}$  (рис. 3в) приводит к возникновению экстремумов средних ветвей и изменению расстояний между ветвями закона дисперсии и положений экстремумов верхней и нижней ветвей в зависимости от соотношения величин частот Раби однофотонных переходов.

Если теперь включить в рассмотрение взаимодействие атома с фотонами на оптически разрешенных двухфотонных переходах  $1 \leftrightarrow 3$  и  $2 \leftrightarrow 4$ , т. е. положить  $\Omega_{24} \neq 0$  и  $\Omega_{13} \neq 0$  и пренебречь четырехчастичной корреляцией  $\Omega_{12}\Omega_{13}\Omega_{23}\Omega_{34} \rightarrow 0$ , то уравнение (7) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
 & (\omega - \omega_0)(\omega - \omega_c)(\omega - 2\omega_0 + \omega_c)(\omega - 3\omega_0 + 2\omega_c) - \\
 & - \Omega_{12}^2(\omega - 2\omega_0 + \omega_c)(\omega - 3\omega_0 + 2\omega_c) - \\
 & - \Omega_{23}^2(\omega - \omega_c)(\omega - 3\omega_0 + 2\omega_c) - \\
 & - \Omega_{34}^2(\omega - \omega_0)(\omega - \omega_c) - \\
 & - \Omega_{13}^2(\omega - \omega_0)(\omega - 3\omega_0 + 2\omega_c) - \\
 & - \Omega_{24}^2(\omega - \omega_c)(\omega - 2\omega_0 + \omega_c) + \\
 & + \Omega_{12}^2\Omega_{34}^2 + \Omega_{23}^2\Omega_{14}^2 + \Omega_{13}^2\Omega_{24}^2 + \\
 & + 2\Omega_{12}\Omega_{23}\Omega_{13}(\omega - 3\omega_0 + 2\omega_c) \cos \Theta_2 + \\
 & + 2\Omega_{23}\Omega_{34}\Omega_{24}(\omega - \omega_c) \cos \Theta_3 = 0. \quad (11)
 \end{aligned}$$

Используя (7), можно получить явные решения уравнения четвертой степени в виде зависимости  $\omega(\omega_c)$ . Однако более удобным оказывается исследование обратной функции  $\omega_c(\omega)$ . Из (7) легко получить выражение

$$\omega_c = \omega - \frac{F(\omega)}{G(\omega)}, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned}
 F(\omega) = & \Omega_{12}^2(\omega - 2\omega_0 + \omega_c)(\omega - 3\omega_0 + 2\omega_c) + \\
 & + \Omega_{13}^2(\omega - \omega_0)(\omega - 3\omega_0 + 2\omega_c) + \\
 & + \Omega_{14}^2(\omega - \omega_1)(\omega - 2\omega_0 + \omega_c) - \\
 & - \Omega_{12}^2\Omega_{34}^2 - \Omega_{23}^2\Omega_{14}^2 - \Omega_{13}^2\Omega_{24}^2 - \\
 & - 2\Omega_{13}\Omega_{34}\Omega_{14}(\omega - \omega_0) \cos \Theta_1 - \\
 & - 2\Omega_{12}\Omega_{23}\Omega_{13}(\omega - 3\omega_0 + 2\omega_c) \cos \Theta_2 - \\
 & - 2\Omega_{12}\Omega_{14}\Omega_{24}(\omega - 2\omega_0 + \omega_c) \cos \Theta_4 + \\
 & + 2\Omega_{12}\Omega_{23}\Omega_{13}\Omega_{14} \cos(\Theta_1 + \Theta_2) + \\
 & + 2\Omega_{12}\Omega_{13}\Omega_{23}\Omega_{34} \cos(\Theta_1 - \Theta_4) + \\
 & + 2\Omega_{23}\Omega_{14}\Omega_{13}\Omega_{24} \cos(\Theta_1 - \Theta_3), \quad (12a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G(\omega) = & (\omega - \omega_0)(\omega - 2\omega_0 + \omega_c)(\omega - 3\omega_0 + 2\omega_c) - \\
 & - \Omega_{23}^2(\omega - 3\omega_0 + 2\omega_c) - \Omega_{34}^2(\omega - \omega_0) - \\
 & - \Omega_{24}^2(\omega - 2\omega_0 + \omega_c) + \\
 & + 2\Omega_{23}\Omega_{34}\Omega_{24} \cos \Theta_3. \quad (12b)
 \end{aligned}$$

Видно, что поведение функции  $\omega_c(\omega)$  будет определяться корнями знаменателя  $G(\omega)$ , который представляет собой кубическое уравнение  $G(\omega) = 0$  относительно  $\omega$ . При этом корни знаменателя будут являться полюсами функции  $\omega_c(\omega)$ , положение которых будет изменяться в зависимости от значений параметров системы, где второе слагаемое (12b)

описывает взаимодействие импульса на частоте  $\omega_c$  с атомами с квазиэнергией  $\hbar(3\omega_0 - \omega_c)$  с частотой Раби  $\Omega_{23}$  (переход  $2 \rightleftharpoons 3$ ), третье слагаемое (12b) — с атомами с квазиэнергией  $\hbar(\omega_0 - \omega_c)$  на переходе  $3 \rightleftharpoons 4$  с частотой Раби  $\Omega_{34}$ , четвертое слагаемое (12b) — с атомами с квазиэнергией  $\hbar(2\omega_0 - \omega_c)$  на переходе  $2 \rightleftharpoons 4$  с частотой Раби  $\Omega_{24}$ , наличие этого слагаемого приводит к керровскому сдвигу уровней, пятое слагаемое представляет собой квантовую интерференцию трех процессов. Второе и третье слагаемые описывают однофотонные переходы, тогда как четвертое слагаемое — это следствие учета двухфотонного перехода  $2 \rightleftharpoons 4$ . Положение корней знаменателя, которые являются аналогами поперечных частот теории экситон-поляритонов, т.е. расщепление первого возбужденного уровня атома, определяется тремя частотами Раби и разностью фаз  $\Theta_3$ . Что касается слагаемых числителя (12a), которые также пропорциональны квадрату и кубу плотности фотонов падающего импульса, то их наличие приводит к деформации и смещению уровня, но не приводит к возникновению дополнительного расщепления первого возбужденного уровня атома.

Рассмотрим случай точного резонанса  $\omega_0 - \omega_c = 0$ , тогда выражение (12) можно записать в виде

$$\omega_c = \omega - \frac{A}{\omega - \omega_1} - \frac{B}{\omega - \omega_2} - \frac{C}{\omega - \omega_3}. \quad (13)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\frac{a}{3} + 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right), \\ \omega_{2,3} &= -\frac{a}{3} + 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\alpha \pm \pi}{3}\right), \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\cos \alpha = -\frac{q}{2\sqrt{-(p/3)^3}},$$

$$p = -\frac{1}{3}a^2 + b, \quad q = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c,$$

$a, b, c$  — коэффициенты уравнения (7) при соответствующих степенях  $\omega$ .

Введем в рассмотрение нормированные расстройки резонансов  $\Delta, \delta$ :

$$\omega - \omega_0 = \Omega_{12}\Delta, \quad \Omega_2\delta = \omega_c - \omega_0,$$

и частоты Раби

$$\begin{aligned} \omega_{23} &= \frac{\Omega_{23}}{\Omega_{12}}, & \omega_{34} &= \frac{\Omega_{34}}{\Omega_{12}}, & \omega_{13} &= \frac{\Omega_{13}}{\Omega_{12}}, \\ \omega_{24} &= \frac{\Omega_{24}}{\Omega_{12}}, & \omega_{14} &= \frac{\Omega_{14}}{\Omega_{12}}, \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned} \omega - \omega_c &= \Omega_{12}(\Delta - \delta), \\ \omega - 2\omega_0 + \omega_c &= \Omega_{12}(\Delta + \delta), \\ \omega - 3\omega_0 + 2\omega_c &= \Omega_{12}(\Delta + 2\delta). \end{aligned} \quad (15)$$

С учетом нормированных величин (15) дисперсионное уравнение (7) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} &\Delta^4 + 2\delta\Delta^3 - (\omega_{23}^2 + \omega_{34}^2 + \omega_{13}^2 + \omega_{14}^2 + \delta^2 + 1)\Delta^2 + \\ &+ ((\omega_{34}^2 - \omega_{23}^2 - 2\omega_{13}^2 - \omega_{14}^2 - 3)\delta - \\ &- 2\delta^3 + 2\omega_{13}\omega_{34}\omega_{14} \cos \Theta_1 + \\ &+ 2\omega_{23}\omega_{13} \cos \Theta_2 + 2\omega_{14}\omega_{24} \cos \Theta_4 + \\ &+ 2\omega_{23}\omega_{34}\omega_{24} \cos \Theta_3)\Delta + (\omega_{23}^2 + \omega_{24}^2 - 2)\delta^2 + \\ &+ 4(\omega_{23}\omega_{13} \cos \Theta_2 + 2\omega_{14}\Omega_{24} \cos \Theta_4 - \\ &- 2\omega_{23}\omega_{34}\omega_{24} \cos \Theta_3)\delta - \\ &- 2\omega_{23}\omega_{13}\omega_{14} \cos(\Theta_1 + \Theta_2) - \\ &- 2\omega_{13}\omega_{23}\omega_{34} \cos(\Theta_1 - \Theta_4) - \\ &2\omega_{23}\omega_{14}\omega_{13}\omega_{24} \cos(\Theta_1 - \Theta_3) + 2 = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Используя уравнение четвертой степени (16), изучим его решения как функцию  $\Delta(\delta)$  при постоянных значениях параметров — нормированных частот Раби  $\omega_{23}, \omega_{34}, \omega_{13}, \omega_{24}, \omega_{14}$  и разностей фаз  $\Theta_i$  ( $i = 1-4$ ).

Для оценки и анализа природы корней уравнения (16) используем подход, развитый в работе [40], из которого видно, что все четыре корня  $\Delta_i$  ( $i = 1-4$ ) являются действительными и определяются выражениями [41]

$$\begin{aligned} \Delta_{1,2} &= -\frac{b}{4a} - S \pm \frac{1}{2}\sqrt{-4S^2 - 2p + \frac{q}{S}}, \\ \Delta_{3,4} &= -\frac{b}{4a} + S \pm \frac{1}{2}\sqrt{-4S^2 - 2p - \frac{q}{S}}, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$p = \frac{8ac - 3b^2}{8a^2}, \quad q = \frac{b^3 - 4abc + 8a^2d}{8a^3},$$

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{2}{3}p + \frac{1}{3a}\left(Q + \frac{D_0}{Q}\right)},$$

$$Q = \sqrt[3]{\frac{D_1 + \sqrt{D_1^2 - 4D_0^3}}{2}},$$

$$D_0 = c^2 - 3bd + 12ae,$$

$$D_1 = 2c^3 - 9bcd + 27b^2e + 27ad^2 - 72ace,$$

$a, b, c, d, e$  — коэффициенты уравнения (16) при соответствующих степенях  $\Delta$ .

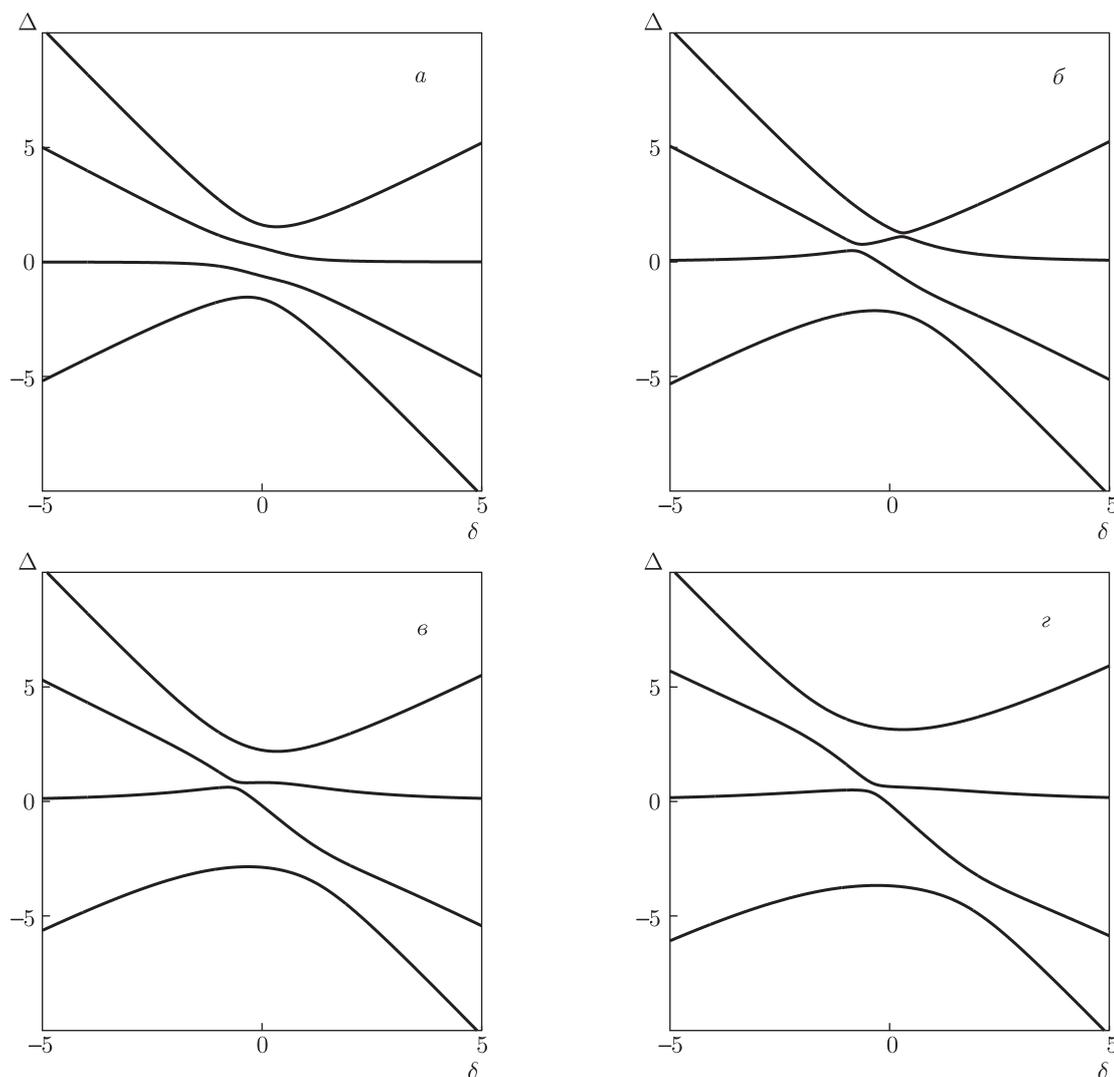
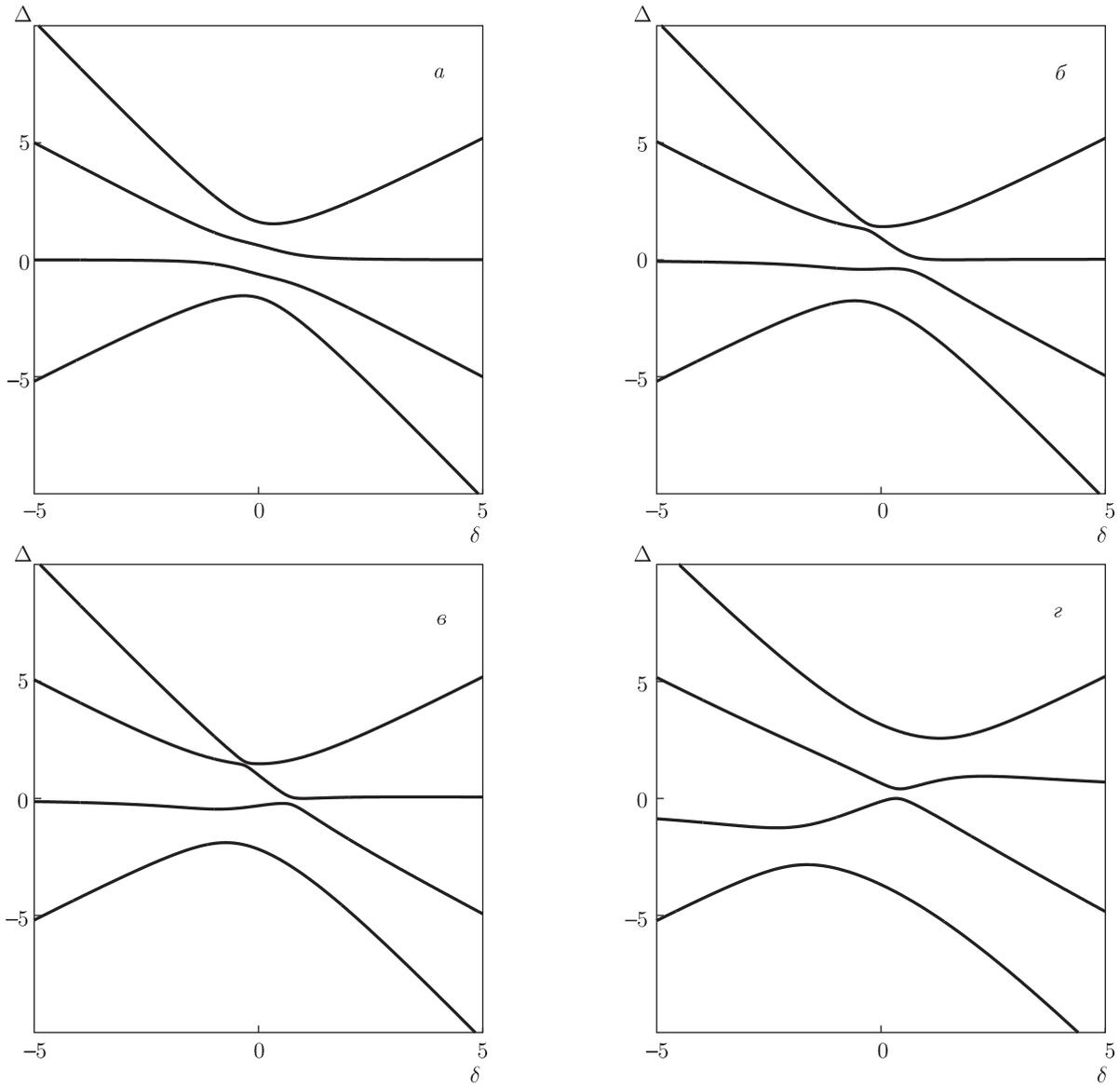


Рис. 4. Законы дисперсии  $\Delta(\delta)$  при разности фаз  $\Theta_i = 0$  и нормированных частотах Раби  $\omega_{23} = \omega_{34} = 1, \omega_{14} = \omega_{24} = 0$  при различных значениях  $\omega_{13}$ : 0 (а), 1 (б), 2 (в), 3 (г)

Рассмотрим простейший случай, положим разности фаз  $\Theta_i = 0$  ( $i = 1-4$ ) и изучим влияние многофотонных переходов на положение ветвей закона дисперсии. Будем считать, что  $\omega_{24} = \omega_{14} = 0$ , и будем изменять частоту двухфотонного перехода  $\omega_{13}$ . На рис. 4а видно, что при  $\omega_{13} = 0$  закон дисперсии состоит из четырех отдельных ветвей — верхняя и нижняя поляритонные ветви характеризуются наличием восходящих и нисходящих участков, а обе средние ветви убывают при увеличении расстройки резонанса  $\delta$ . Увеличение значения  $\omega_{13}$  приводит к сильному сближению верхней и средней ветвей в коротковолновой области  $\Delta > 0$  и средних ветвей в области  $\delta < 0$  (рис. 4б). При этом наблюдается изменение формы средних ветвей — у I средней ветви

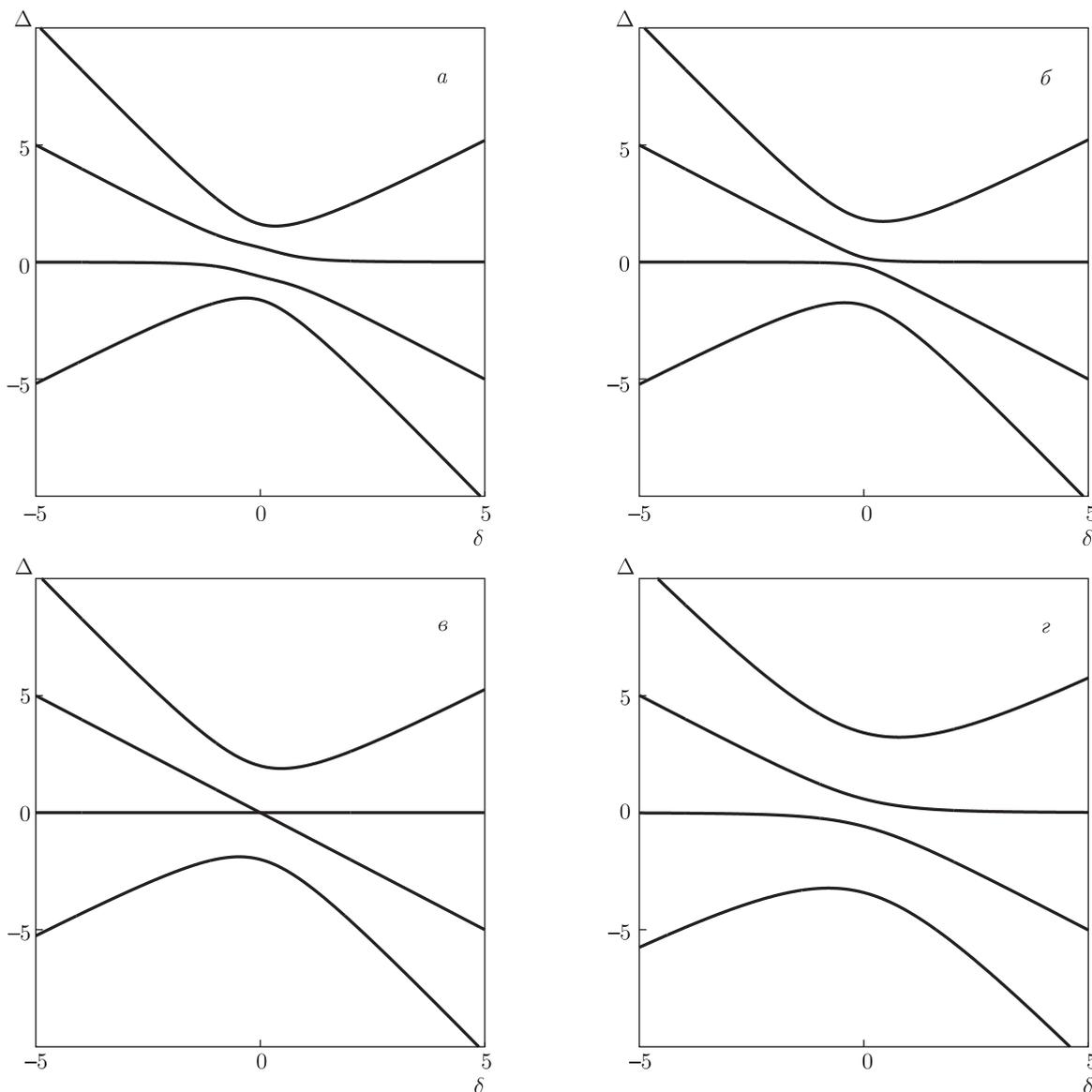
наблюдается возникновение экстремумов (минимума и максимума), у II средней ветви появляется максимум (рис. 4в) (здесь и ниже на всех рисунках для удобства описания I средняя ветвь — это верхняя из средних, II средняя ветвь — нижняя из средних). Дальнейшее увеличение  $\omega_{13}$  приводит к исчезновению максимума I средней ветви, сильному сближению максимума и минимума средних ветвей между собой в области  $\Delta < 0$  (рис. 4г), одновременному расталкиванию верхней и I средней ветвей и одновременному смещению верхней и нижней ветвей в коротковолновую и длинноволновую области соответственно, при этом наблюдается сближение верхней и I средней ветвей в области  $\delta < 0$  и II средней и нижней ветвей в области  $\delta > 0$ . Зафиксируем



**Рис. 5.** Законы дисперсии  $\Delta(\delta)$  при разности фаз  $\Theta_i = 0$  и нормированных частотах Раби  $\omega_{23} = \omega_{34} = 1$ ,  $\omega_{13} = \omega_{14} = 0$  при различных значениях  $\omega_{24}$ : 0 (а), 0.65 (б), 1 (в), 3 (г)

$\omega_{13} = \omega_{14} = 0$  и будем изменять частоту двухфотонного перехода  $\omega_{24}$ . При  $\omega_{24} = 0$  расположение и форма ветвей закона дисперсии на рис. 5а совпадает с приведенными на рис. 4а. На рис. 5б видно, что при увеличении частоты Раби  $\omega_{24}$  наблюдается изменение формы I средней ветви и образование максимума, затем сближение минимума верхней ветви и максимума I средней ветви, расположенного в области  $\delta < 0$ , и возникновение области сближения между минимумом I средней ветви и максимумом II средней ветви в области  $\delta > 0$  (рис. 5в). Дальнейшее увеличение  $\omega_{24}$  (рис. 5г) приводит к возникновению

новых экстремумов обеих средних ветвей — минимума I средней ветви в области  $\delta > 0$  и максимума II средней ветви в области  $\delta < 0$ , и одновременно расталкиванию верхней и нижних ветвей в коротковолновую и длинноволновую области соответственно. Зафиксируем  $\omega_{13} = \omega_{24} = 0$  и будем изменять частоту Раби трехфотонного перехода  $\omega_{14}$ . На рис. 6а при  $\omega_{14} = 0$  поведение ветвей закона дисперсии совпадает с приведенным на рис. 4а и рис. 5а. На рис. 6б видно, что при увеличении  $\omega_{14}$  происходит симметричное сближение средних ветвей, при этом I средняя ветвь характеризуется линейным участ-

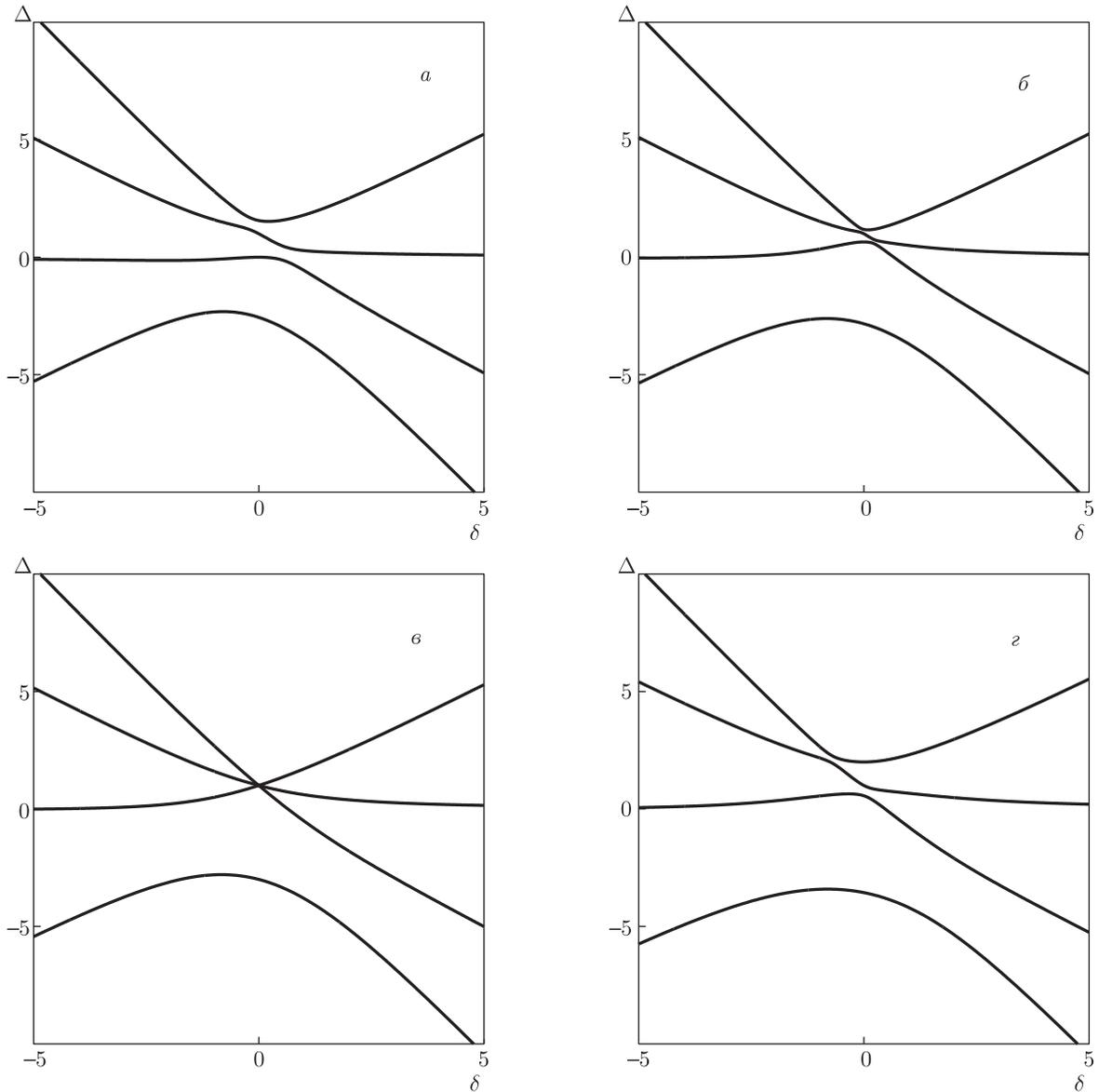


**Рис. 6.** Законы дисперсии  $\Delta(\delta)$  при разности фаз  $\Theta_i = 0$  и нормированных частотах Раби  $\omega_{23} = \omega_{34} = 1$ ,  $\omega_{13} = \omega_{24} = 0$  при различных значениях  $\omega_{14}$ : 0 (а), 0.65 (б), 1 (в), 3 (г)

ком в области  $\delta > 0$ , а II средняя ветвь — линейным участком в области  $\delta < 0$ . При  $\omega_{14} = 1$  (рис. 6в) наблюдается пересечение средних ветвей в точке  $\delta = 0$  с изменением форм средних ветвей — они становятся прямыми, причем II средняя ветвь не зависит от  $\delta$ , дальнейшее увеличение параметра  $\omega_{14}$  приводит к расталкиванию средних ветвей (рис. 6г).

Если теперь положить  $\omega_{24} = \omega_{14} = 1$  и  $\omega_{13} = 0$ , на рис. 7а видно, что между верхней и обеими средними ветвями существует область сужения в окрестности  $\delta = 0$ . При увеличении частоты Раби двухфотонного перехода  $\omega_{13} = 1$  на рис. 7б видно, что уве-

личение параметра  $\omega_{13}$  приводит к возникновению экстремумов средних ветвей — максимуму I средней ветви и минимуму II средней ветви, и одновременно сильному сближению трех ветвей закона дисперсии — верхней и обеих средних в коротковолновой области  $\Delta > 0$  в окрестности точки  $\delta = 0$  с изменением формы ветвей. Затем при  $\omega_{13} = 1$  (рис. 7в) возникает пересечение трех ветвей закона дисперсии — верхней и обеих средних в точке  $\delta = 0$ , корень  $\Delta = 1$  уравнения (7) становится трехкратно вырожденным при точной расстройке резонанса  $\delta$ . Дальнейшее увеличение параметра  $\omega_{13}$  приводит к



**Рис. 7.** Законы дисперсии  $\Delta(\delta)$  при разности фаз  $\Theta_i = 0$  и нормированных частотах Раби  $\omega_{23} = \omega_{34} = 1, \omega_{14} = \omega_{24} = 1$  при различных значениях  $\omega_{13}$ : 0 (а), 0.65 (б), 1 (в), 2 (г)

восстановлению структуры из четырех ветвей закона дисперсии, при этом наблюдается изменение формы верхней и средней ветвей — максимум верхней ветви смещается в область  $\delta < 0$ , наблюдается сближение верхней и I средней ветвей в области  $\delta < 0$  и обеих средних ветвей в окрестности точки  $\delta = 0$ , одновременно наблюдается расталкивание средних ветвей со смещением сужения между верхней и I средней ветвями в область  $\delta < 0$  и верхней и нижней поляритонных ветвей в коротковолновую и длинноволновую области соответственно (рис. 7г).

При  $\omega_{13} = \omega_{14} = 1, \omega_{24} \neq 0$  (рис. 8а) видно, что закон дисперсии состоит из четырех ветвей, I средняя ветвь характеризуется наличием экстремумов — максимума и минимума, и, следовательно, наличием восходящих и нисходящих участков, II средняя ветвь характеризуется максимумом, экстремумы обеих ветвей расположены в коротковолновой области  $\Delta > 0$ . Увеличение значения частоты Раби двухфотонного перехода  $\omega_{24}$  приводит к сильному сближению верхней и обеих средних ветвей (рис. 8б) и при  $\omega_{24} = 1$  наблюдается пересечение всех трех

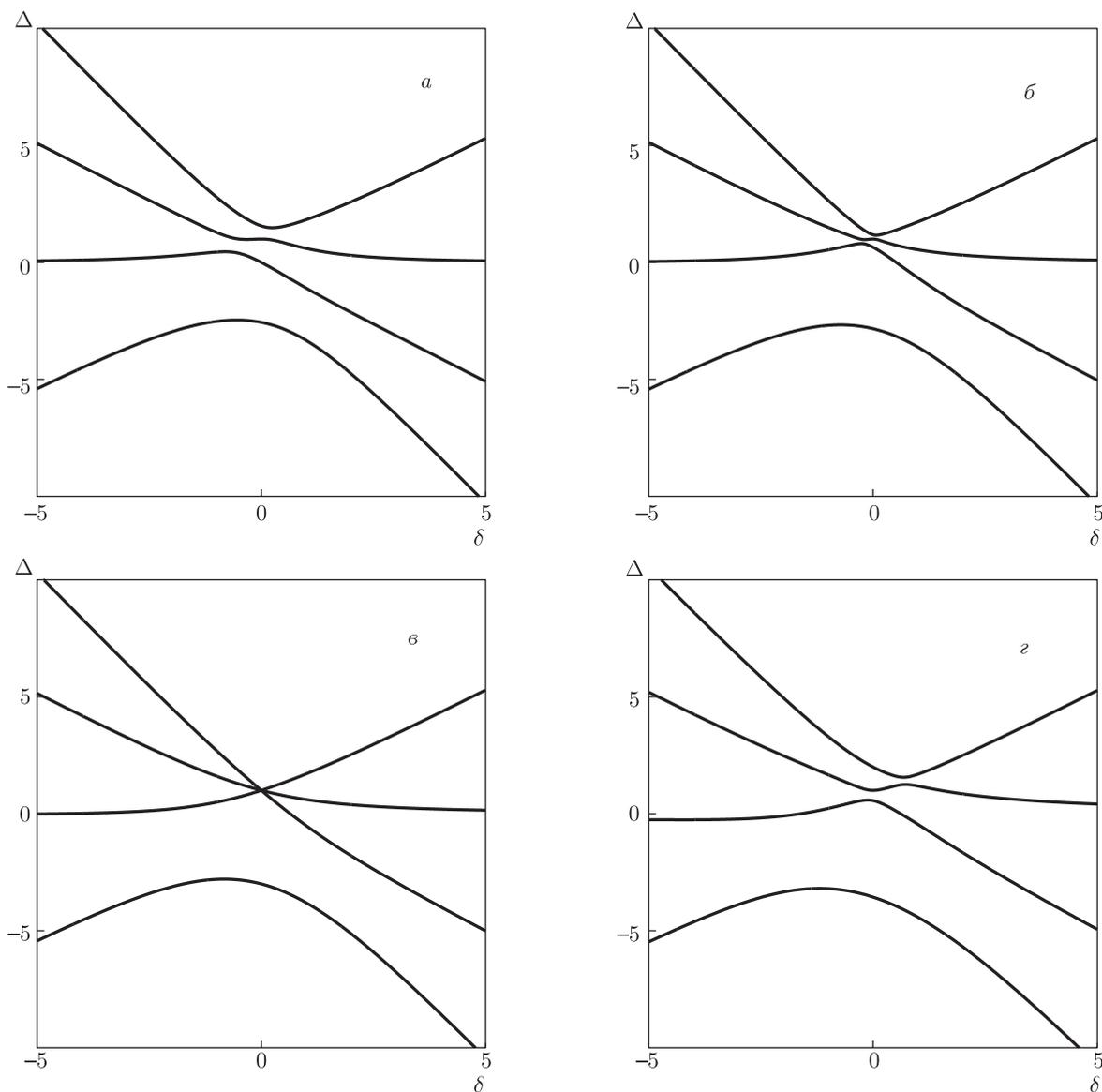
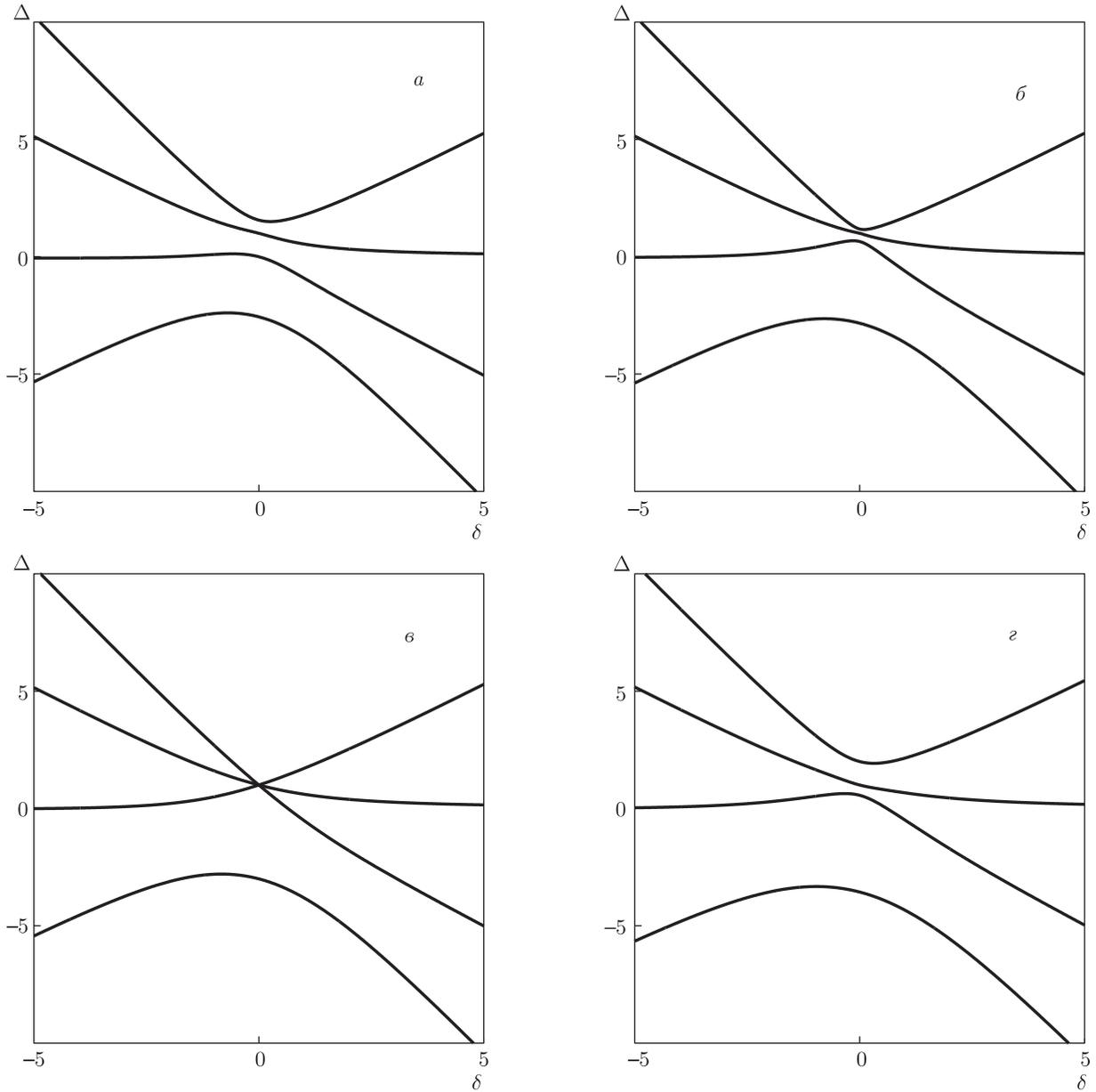


Рис. 8. Законы дисперсии  $\Delta(\delta)$  при разности фаз  $\Theta_i = 0$  и нормированных частотах Раби  $\omega_{23} = \omega_{34} = 1, \omega_{13} = \omega_{14} = 1$  при различных значениях  $\omega_{24}$ : 0 (а), 0.65 (б), 1 (в), 2 (г)

ветвей закона дисперсии — верхней и обеих средних, в точке  $\delta = 0$ , так как корень  $\Delta = 1$  уравнения (16) становится трехкратно вырожденным при отсутствии расстройки резонанса (рис. 8в). Отметим, что аналогичное поведение кривых закона дисперсии наблюдается и на рис. 7в. Дальнейшее увеличение параметра  $\omega_{24}$  приводит к восстановлению структуры из четырех ветвей, при этом наблюдается изменение формы верхней и средней ветвей — максимум верхней ветви смещается в область  $\delta > 0$ , наблюдается сближение верхней и I средней ветвей в области  $\delta > 0$  и обеих средних ветвей в окрестности точки  $\delta = 0$  (рис. 8г), наблюдаются расталкивание

средних ветвей со смещением сужения между верхней и I средней ветвями в область  $\delta > 0$  и смещение верхней и нижней поляритонных ветвей в коротковолновую и длинноволновую области соответственно.

При  $\omega_{13} = \omega_{24} = 1, \omega_{14} = 0$  (рис. 9а) видно, что закон дисперсии состоит из четырех ветвей, I средняя ветвь имеет убывающий характер с ростом расстройки резонанса  $\delta$ , II средняя ветвь характеризуется неярко выраженным максимумом и наблюдается область сужения между верхней и I средней ветвями. Увеличение значения частоты Раби трехфотонного перехода  $\omega_{14}$  приводит к сильному сбли-



**Рис. 9.** Законы дисперсии  $\Delta(\delta)$  при разности фаз  $\Theta_i = 0$  и нормированных частотах Раби  $\omega_{23} = \omega_{34} = 1$ ,  $\omega_{13} = \omega_{24} = 1$  при различных значениях  $\omega_{14}$ : 0 (а), 0.65 (б), 1 (в), 2 (г)

жению верхней и обеих средних ветвей (рис. 9б) и при  $\omega_{14} = 1$  наблюдается пересечение всех трех ветвей закона дисперсии — верхней и обеих средних, в точке  $\delta = 0$ , корень  $\Delta = 1$  уравнения (16) становится трехкратно вырожденным при отсутствии расстройки резонанса (рис. 9в). Отметим, что аналогичное поведение кривых закона дисперсии наблюдается и на рис. 7б, 8б. Дальнейшее увеличение параметра  $\omega_{14}$  приводит к восстановлению структуры из четырех ветвей, при этом наблюдается изменение формы  $\Pi$  средней  $\delta$ -ветви — величина максимума с увеличе-

нием параметра  $\omega_{14}$  уменьшается, наблюдается расталкивание всех четырех ветвей закона дисперсии и смещение верхней и нижней поляритонных ветвей в коротковолновую и длинноволновую области соответственно (рис. 9г).

Рассмотрим поведение ветвей закона дисперсии  $\Delta(\delta)$  при  $\Theta_i = \pi/2$  ( $i = 1-4$ ) и изучим влияние многофотонных переходов. Если  $\omega_{24} = \omega_{14} = 0$ , а  $\omega_{13} = 0$  (рис. 10а), видно, что закон дисперсии состоит из четырех ветвей, зеркально симметрично расположенных относительно  $\delta$ , средние ветви ха-

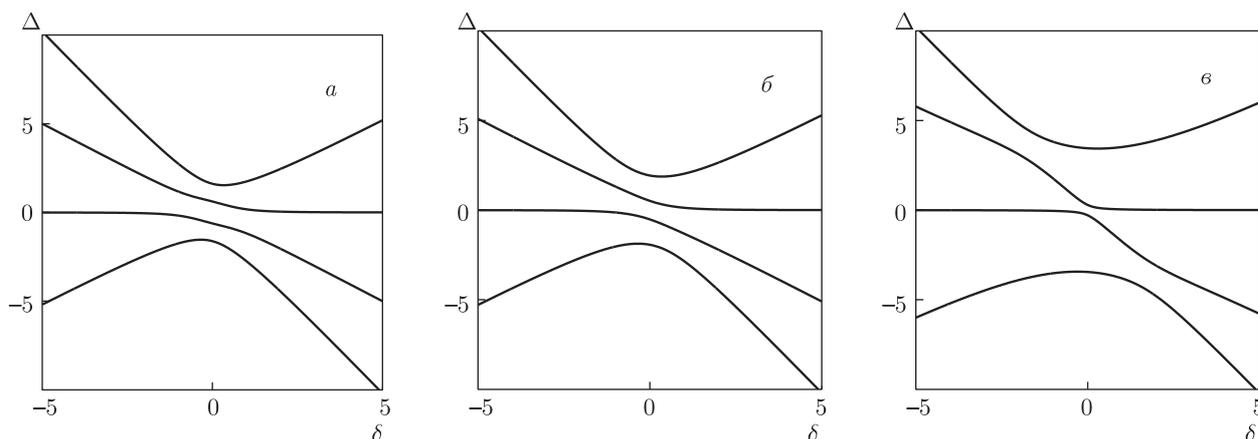


Рис. 10. Законы дисперсии  $\Delta(\delta)$  при разности фаз  $\Theta_i = \pi/2$  и нормированных частотах Раби  $\omega_{23} = \omega_{34} = 1, \omega_{24} = \omega_{14} = 0$  при различных значениях  $\omega_{13}$ : 0 (а), 1 (б), 3 (в)

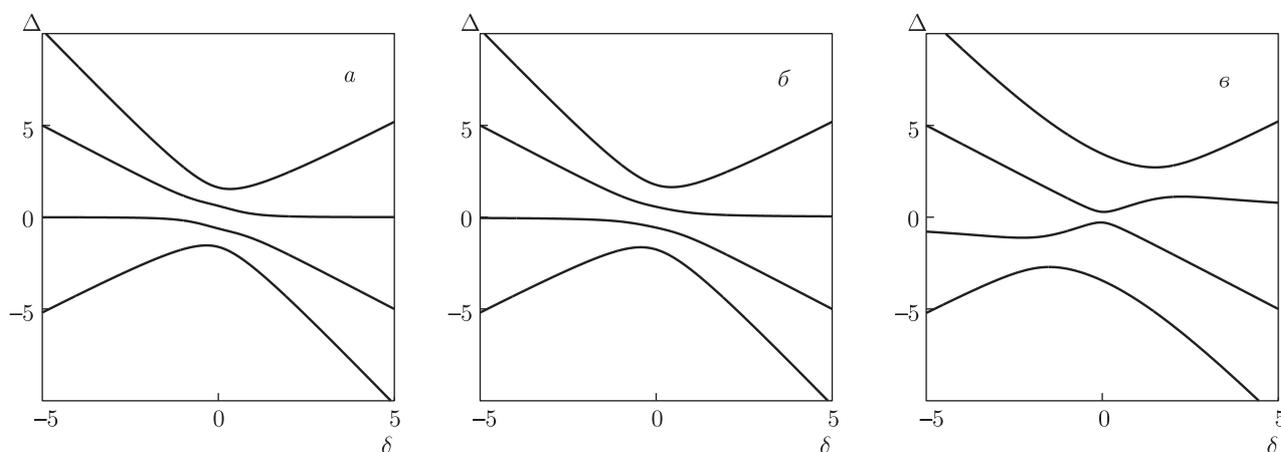


Рис. 11. Законы дисперсии  $\Delta(\delta)$  при разности фаз  $\Theta_i = \pi/2$  и нормированных частотах Раби  $\omega_{23} = \omega_{34} = 1, \omega_{13} = \omega_{14} = 1$  при различных значениях  $\omega_{24}$ : 0 (а), 0.65 (б), 3 (в)

рактически не выражены экстремумы — I средняя ветвь максимума, а II средняя ветвь минимума, расположенных в окрестности  $\delta = 0$ . Увеличение параметра  $\omega_{13}$  приводит к исчезновению экстремумов средних ветвей и медленному их сближению друг с другом в окрестности  $\delta = 0$  (рис. 10б), при  $\omega_{13} = 2$  наблюдается изменение формы средних ветвей и появление области сужений между I средней и верхней ветвями в области  $\delta < 0$  и между II средней и нижней ветвями в области  $\delta > 0$ , сильное сближение средних ветвей в окрестности  $\delta = 0$  и симметричное расталкивание всех четырех ветвей закона дисперсии со смещением верхней и нижней поляритонных ветвей в коротковолновую и длинноволновую области соответственно (рис. 10в).

Если  $\omega_{13} = \omega_{14} = 0$ , а  $\omega_{24} = 0$  (рис. 11а), видно, что закон дисперсии состоит из четырех ветвей, симметрично расположенных относительно  $\delta$ , средние ветви характеризуются наличием неярко выраженных экстремумов — I средняя ветвь максимума, а II средняя ветвь минимума, расположенных в окрестности  $\delta = 0$ . Увеличение параметра  $\omega_{24}$  приводит к исчезновению экстремумов средних ветвей и медленному их сближению в окрестности  $\delta = 0$ , также наблюдается смещение максимума нижней ветви в область  $\delta < 0$ , минимума верхней ветви в область  $\delta > 0$  (рис. 11б). Дальнейшее увеличение  $\omega_{24}$  приводит к возникновению области сужения между средними ветвями при  $\delta = 0$  с изменением формы ветвей и появлением экстремумов (рис. 11в). Минимум I средней ветви и максимум II средней ветви силь-

но сближаются в окрестности  $\delta = 0$ , одновременно возникают области сужений между верхней ветвью и максимумом I средней ветви при  $\delta > 0$  и минимумом II средней ветви и максимумом нижней ветви при  $\delta < 0$  со смещением ветвей закона дисперсии в коротковолновую и длинноволновую области соответственно (рис. 11б).

Если  $\omega_{13} = \omega_{24} = 0$ , а  $\omega_{14} = 0$  (рис. 12а), видно, что закон дисперсии состоит из четырех ветвей, зеркально симметрично расположенных относительно  $\delta$ , средние ветви характеризуются наличием неярко выраженных экстремумов — I средняя ветвь максимума, а II средняя ветвь минимума, расположенных в окрестности  $\delta = 0$ . Увеличение частоты Раби трехфотонного перехода  $\omega_{14}$  (рис. 12б) приводит к увеличению значений экстремумов средних ветвей и одновременному сближению минимума верхней и максимума I средней ветвей и максимума нижней и минимума II средней ветвей в окрестности  $\delta = 0$ . Затем увеличение параметра  $\omega_{14}$  приводит к возникновению симметричных относительно  $\delta$  пересечений верхней и I средней ветвей и нижней и II средней ветвей в точке  $\delta = 0$  (рис. 12в), ветви расталкиваются, структура из четырех ветвей закона дисперсии восстанавливается (рис. 12г), дальнейшее увеличение параметра  $\omega_{14}$  приводит к изменению формы ветвей закона дисперсии, исчезновению экстремумов средних ветвей и одновременному симметричному относительно  $\delta$  расталкиванию всех ветвей закона дисперсии и смещению в коротковолновую и длинноволновую области (рис. 12д).

Если  $\omega_{24} = \omega_{14} = 1$ , а  $\omega_{13} = 0$  (рис. 13а), видно, что закон дисперсии состоит из четырех ветвей, симметрично расположенных относительно  $\delta$ , средние ветви характеризуются наличием неярко выраженных экстремумов — I средняя ветвь максимума, а II средняя ветвь минимума, расположенных в окрестности  $\delta = 0$ . Увеличение частоты Раби  $\omega_{13}$  (рис. 13б) приводит к изменению формы средних ветвей и исчезновению экстремумов с одновременным сближением друг с другом в окрестности  $\delta = 0$ . При  $\omega_{13} = 2$  (рис. 13в) возникает пересечение средних ветвей в точке  $\delta = 0$ , одна из ветвей становится прямой и не зависит от  $\delta$ , появляются области сужений между верхней и I средней ветвями в области  $\delta < 0$  и II средней и нижней ветвями в области  $\delta > 0$ , а также происходит расталкивание ветвей и смещение ветвей закона дисперсии в коротковолновую и длинноволновую области (рис. 13г).

Если  $\omega_{13} = \omega_{14} = 1$ , а  $\omega_{24} = 0$  (рис. 14а), видно, что закон дисперсии состоит из четырех ветвей, сим-

метрично расположенных относительно  $\delta$ , средние ветви характеризуются наличием неярко выраженных экстремумов — I средняя ветвь максимума, а II средняя ветвь минимума, расположенных в окрестности  $\delta = 0$ . Увеличение частоты Раби  $\omega_{24}$  (рис. 14б) приводит к изменению формы средних ветвей и исчезновению экстремумов с одновременным сближением друг с другом в окрестности  $\delta = 0$  (рис. 14в). При  $\omega_{13} = 2$  наблюдается пересечение средних ветвей в точке  $\delta = 0$  с изменением формы и возникновением экстремумов — минимума и максимума у обеих ветвей, и симметрично относительно  $\delta$  расталкивание средних ветвей, восстановление структуры закона дисперсии и возникновение областей сужений между верхней и I средней ветвями в области  $\delta > 0$  и II средней и нижней ветвями в области  $\delta < 0$  со смещением ветвей закона дисперсии в коротковолновую и длинноволновую области (рис. 14г).

Если  $\omega_{13} = \omega_{24} = 1$ , а  $\omega_{14} = 0$  (рис. 15а), видно, что закон дисперсии состоит из четырех ветвей, симметрично расположенных относительно  $\delta$ , средние ветви характеризуются наличием неярко выраженных экстремумов — I средняя ветвь максимума в области  $\delta > 0$ , а II средняя ветвь минимума в области  $\delta < 0$ , и наличием пересечения средних ветвей в точке  $\delta = 0$ . Увеличение частоты Раби трехфотонного перехода  $\omega_{14}$  приводит к изменению формы средних ветвей — исчезновению экстремумов и одновременному расталкиванию друг относительно друга (рис. 15б). Дальнейшее увеличение параметра  $\omega_{14}$  приводит к симметричному смещению ветвей закона дисперсии в коротковолновую и длинноволновую области (рис. 15в).

В случае, если разности фаз  $\Theta_i = \pi$  ( $i = 1-4$ ), поведение ветвей закона дисперсии аналогично случаю, описанному при  $\Theta_i = 0$ , с сохранением характера изменений в длинноволновой области  $\Delta < 0$ .

Таким образом, на рис. 15а видно, что при одновременном учете всех однофотонных процессов и обоих процессов двухфотонного возбуждения атома и при отсутствии трехфотонного процесса возбуждения возникает эффект пересечения двух средних ветвей закона дисперсии в точке  $\delta = 0$  при  $\Theta_i = \pi/2$  и при условии равенства нулю частот Раби  $\Omega_{12}, \Omega_{23}, \Omega_{23}, \Omega_{13}, \Omega_{24}, \Omega_{14} = 0$ .

При одновременном учете процессов двухфотонного и трехфотонного возбуждения атома (рис. 7в, 8в, 9в) возникают эффекты пересечения: трех ветвей — верхней и двух средних ветвей в коротковолновой области спектра при  $\Theta_i = 0$  либо нижней и двух средних ветвей закона дисперсии в длинновол-

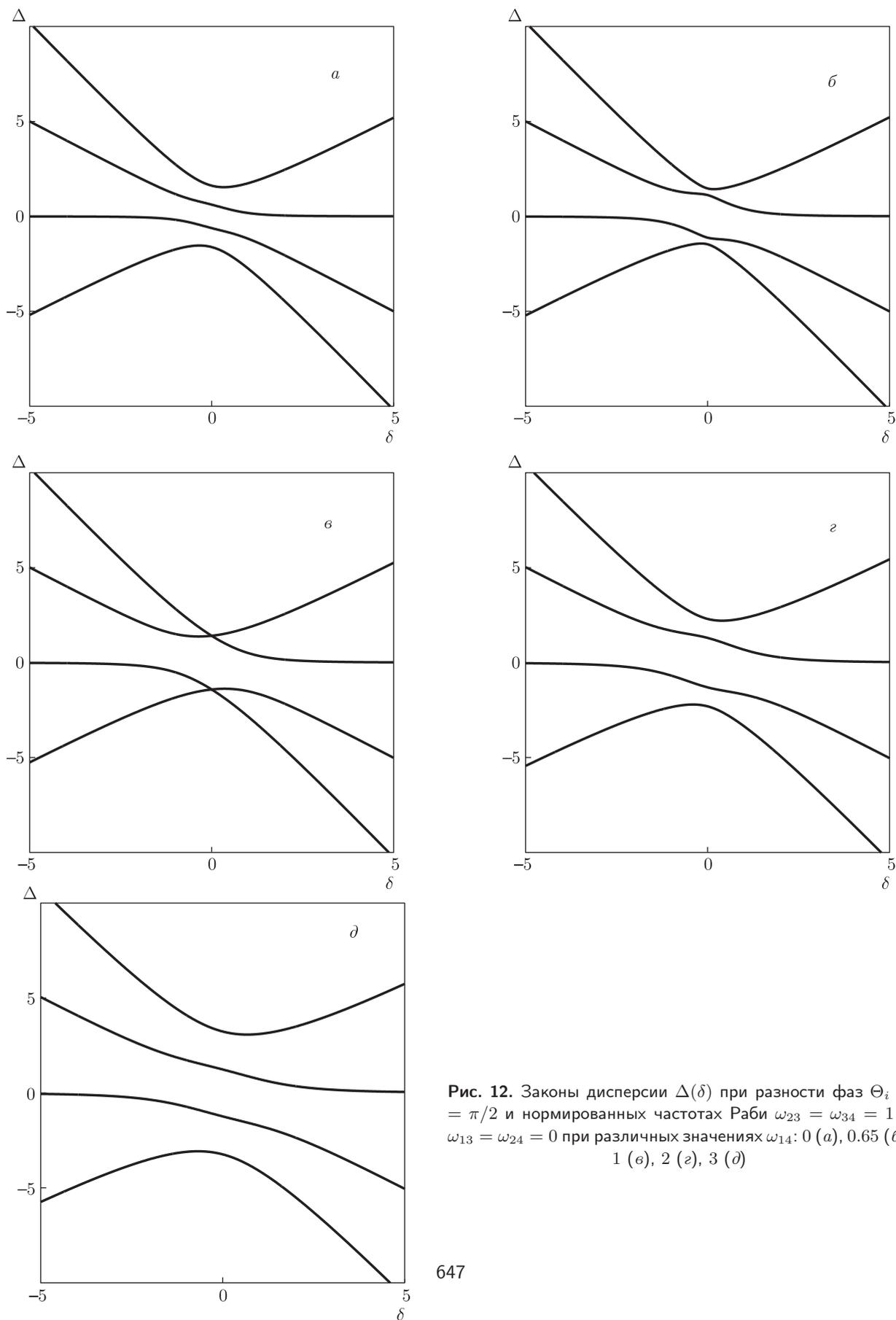
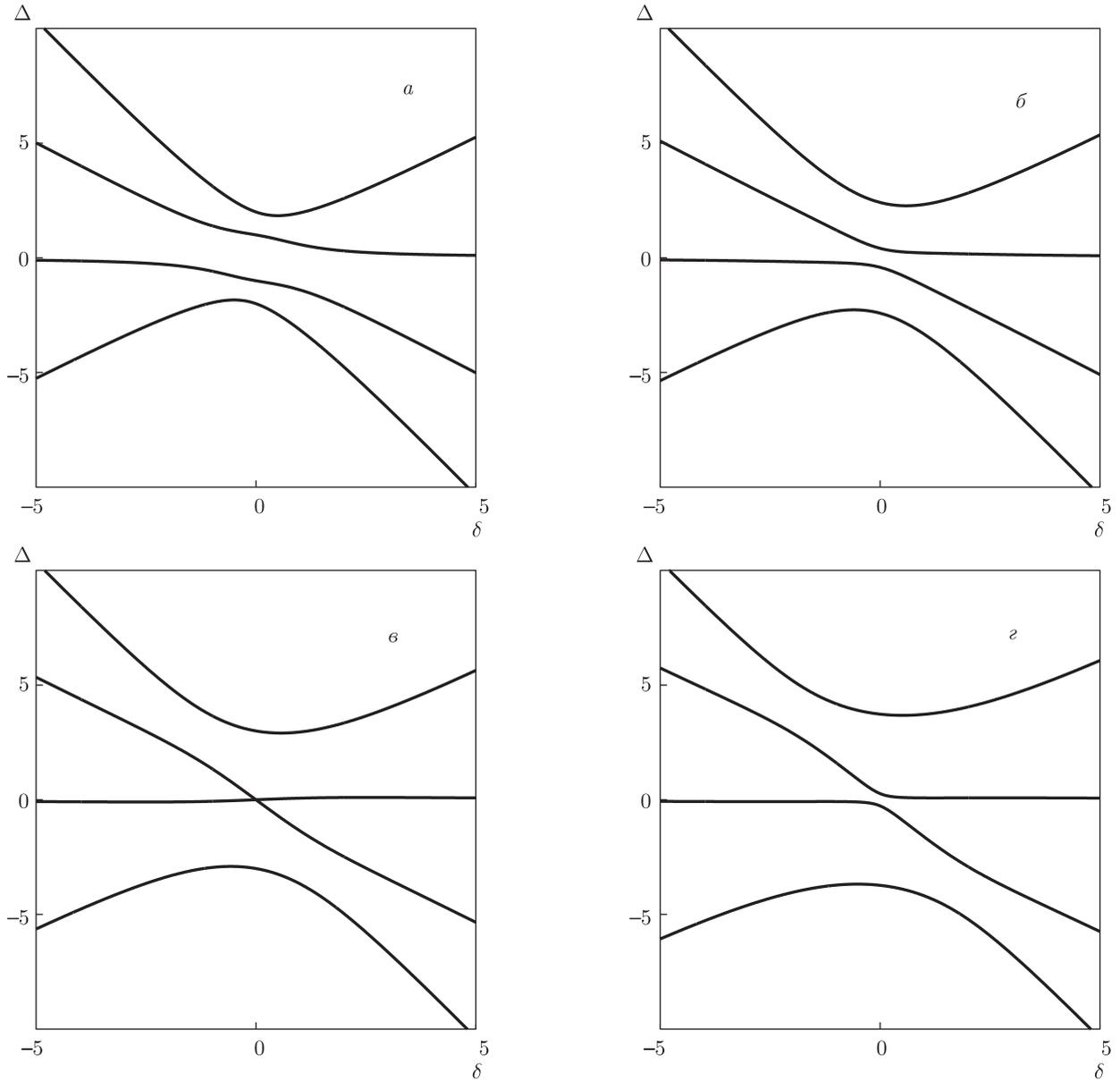


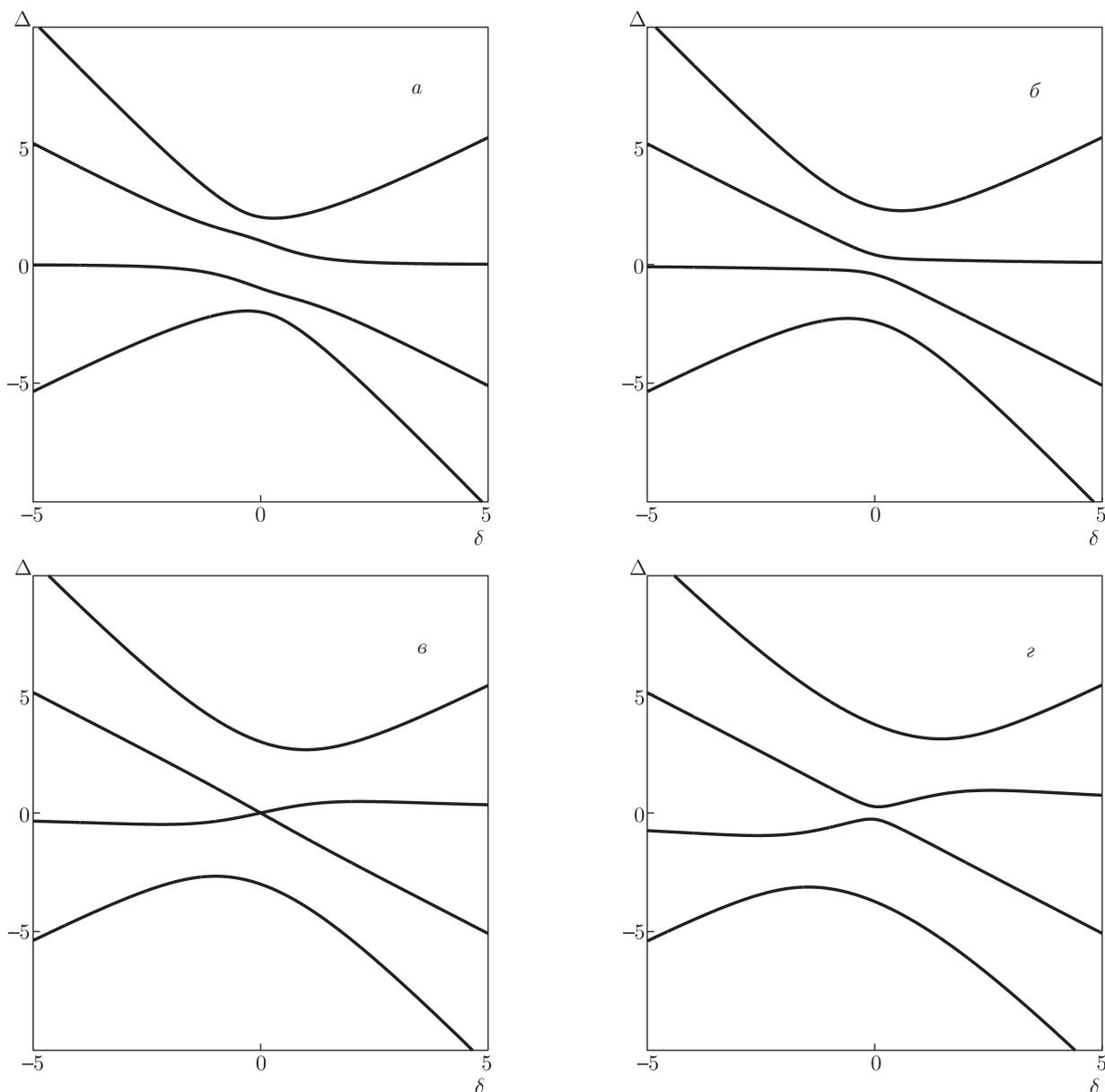
Рис. 12. Законы дисперсии  $\Delta(\delta)$  при разности фаз  $\Theta_i = \pi/2$  и нормированных частотах Раби  $\omega_{23} = \omega_{34} = 1$  и  $\omega_{13} = \omega_{24} = 0$  при различных значениях  $\omega_{14}$ : 0 (а), 0.65 (б), 1 (в), 2 (г), 3 (д)



**Рис. 13.** Законы дисперсии  $\Delta(\delta)$  при разности фаз  $\Theta_i = \pi/2$  и нормированных частотах Раби  $\omega_{23} = \omega_{34} = 1, \omega_{24} = \omega_{14} = 1$  при различных значениях  $\omega_{13}$ : 0 (а), 1 (б), 2 (в), 3 (г)

новой области при  $\Theta_i = \pi$ ; двух средних ветвей при  $\Theta_i = 0, \pi$  и  $\omega_{13} = \omega_{24} = \omega_{14} = 1$ , т.е. при условии равенства частот Раби  $\Omega_{12}, \Omega_{23}, \Omega_{23}, \Omega_{13}, \Omega_{24}$  и  $\Omega_{14}$ ; средних ветвей закона дисперсии в точке  $\delta = 0$  при  $\Theta_i = \pi/2$  и  $\omega_{13} = \omega_{14} = 1, \omega_{24} = 2$  или  $\omega_{24} = \omega_{14} = 1$ , а  $\omega_{13} = 2$ , т.е. при условии равенства частот Раби  $\Omega_{23}, \Omega_{34}, \Omega_{13}, \Omega_{14}$  и отличной частоте двухфотонного перехода  $\Omega_{24}$  или  $\Omega_{34}, \Omega_{23}, \Omega_{24}, \Omega_{14}$  и отличной частоте двухфотонного перехода  $\Omega_{13}$ .

На рис. 12в видно, что учет трехфотонного процесса возбуждения атома при отсутствии двухфотонных процессов  $\omega_{13} = \omega_{24} = 0$  приводит к возникновению эффекта пересечений верхней и I средней, а также II средней и нижней поляритонных ветвей при  $\omega_{14} = 1$  и  $\Theta_i = \pi/2$  и при условии равенства частот Раби  $\Omega_{12}, \Omega_{23}, \Omega_{34}$  и  $\Omega_{14}$ . Наличие таких пересечений свидетельствует о существовании одной частоты нутационных колебаний при условии точ-



**Рис. 14.** Законы дисперсии  $\Delta(\delta)$  при разности фаз  $\Theta_i = \pi/2$  и нормированных частотах Раби  $\omega_{23} = \omega_{34} = 1, \omega_{13} = \omega_{14} = 1$  при различных значениях  $\omega_{24}$ : 0 (а), 1 (б), 2 (в), 3 (г)

ной расстройке резонанса  $\delta = 0$ . Если рассмотреть случай, когда включены в рассмотрение взаимодействие атома с фотонами на оптически разрешенных двухфотонных переходах  $1 \leftrightarrow 3$  и  $2 \leftrightarrow 4$ , т. е.  $\omega_{24} \neq 0$  и  $\omega_{13} \neq 0$ , и пренебречь четырехчастичной корреляцией, описанной уравнением (9), то можно сделать вывод, что важную роль в поведении ветвей закона дисперсии играют процессы корреляции между константами взаимодействия всех учтенных переходов, обусловленные четырехчастичными процессами. Анализ уравнения (9) показал, что отсутствие этого слагаемого приводит к исчезновению эффек-

тов пересечения ветвей закона дисперсии и изменение интенсивности излучения приводит к спектральному смещению уровней.

Наличие эффектов сближения и расталкивания ветвей и пересечения ветвей закона дисперсии при изменении значений частот Раби многофотонных переходов  $\Omega_{13}, \Omega_{24}, \Omega_{14}$  можно интерпретировать как изменение силы связи фотонов с атомом. Таким образом, перенормировка энергетического спектра поляритонов ярко проявляется в эффекте возникновения сильной связи в длинноволновой (коротковолновой) области и ослаблении в коротковолновой

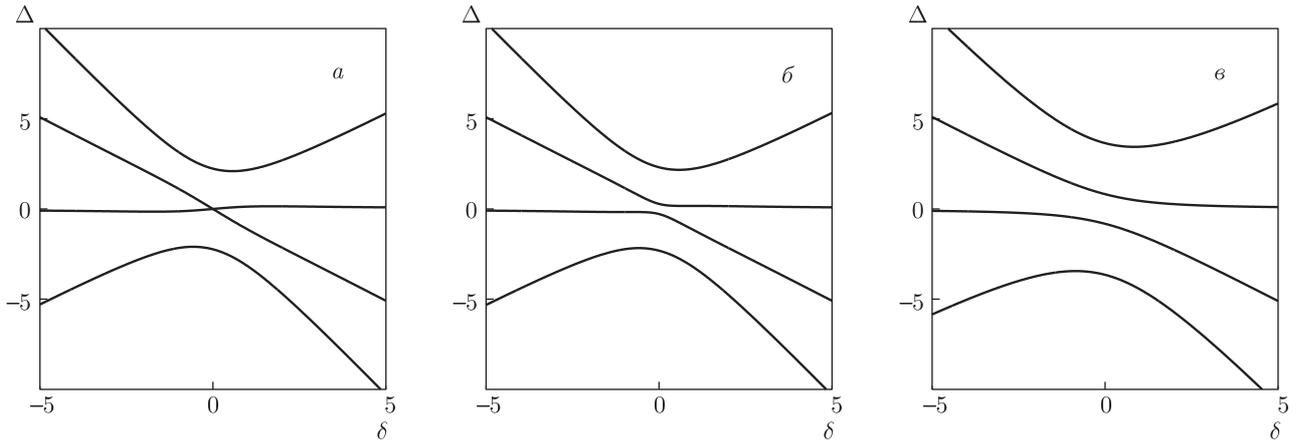


Рис. 15. Законы дисперсии  $\Delta(\delta)$  при разности фаз  $\Theta_i = \pi/2$  и нормированных частотах Раби  $\omega_{23} = \omega_{34} = 1, \omega_{13} = \omega_{24} = 1$  при различных значениях  $\omega_{14}$ : 0 (а), 0.65 (б), 3 (в)

(длинноволновой) области в зависимости от частоты  $\omega_0$ . Это указывает также на смещение актуальных точек  $k$ -пространства. Эффект пересечения ветвей закона дисперсии можно, по-видимому, наблюдать экспериментально, если изменять интенсивность излучения — это приведет к изменению силы связи фотона с атомом и к спектральному смещению уровней. Отмеченные особенности можно интерпретировать как изменение силы связи фотона с атомом на переходе  $1 \leftrightarrow 2$ .

Таким образом, структура ветвей закона дисперсии существенно определяется волновым вектором  $k = \omega_c/c$  падающего из вакуума излучения. Собственные частоты четырех ветвей поляритонов  $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \tilde{\omega}_3, \tilde{\omega}_4$  являются корнями уравнения (7), существенно зависят от интенсивности падающего излучения и определяют частоты нутации  $\tilde{\Omega}_{12}, \tilde{\Omega}_{23}, \tilde{\Omega}_{34}, \tilde{\Omega}_{13}, \tilde{\Omega}_{24}, \tilde{\Omega}_{14}$  (новые частоты Раби) поляритонов, которые описываются выражениями

$$\tilde{\Omega}_{12} = \tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2, \quad \tilde{\Omega}_{23} = \tilde{\omega}_2 - \tilde{\omega}_3, \quad \tilde{\Omega}_{34} = \tilde{\omega}_3 - \tilde{\omega}_4,$$

$$\tilde{\Omega}_{13} = \tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_3, \quad \tilde{\Omega}_{24} = \tilde{\omega}_2 - \tilde{\omega}_4, \quad \tilde{\Omega}_{14} = \tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_4.$$

Если собственные частоты, например, верхнего  $\tilde{\omega}_1$  и первого среднего  $\tilde{\omega}_2$  поляритонов совпадают, то частота нутации  $\tilde{\Omega}_{12} = 0$  и, следовательно,  $\tilde{\Omega}_{23} = \tilde{\Omega}_{13}$ . Если совпадают собственные частоты второго  $\tilde{\omega}_2$  и третьего  $\tilde{\omega}_3$  поляритонов, то  $\tilde{\Omega}_{23} = 0$ , а частоты нутации  $\tilde{\Omega}_{13} = \tilde{\Omega}_{24}$ . Если совпадают собственные частоты третьего  $\tilde{\omega}_3$  и четвертого  $\tilde{\omega}_4$  поляритонов, то  $\tilde{\Omega}_{34} = 0$ , а частоты  $\tilde{\Omega}_{13} = \tilde{\Omega}_{14}$  и т. д. В этом случае процесс нутации не является результатом биеения между четырьмя поляритонными ветвями, а представляет собой нутационные колебания на соответствующих частотах.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что в статье представлены результаты теоретического исследования особенностей поведения закона дисперсии атомных поляритонов для четырехуровневого атома с эквидистантным энергетическим спектром, взаимодействующего с фотонами ультракороткого импульса резонансного лазерного излучения с частотой  $\omega_c$ , при одновременном учете трех последовательных однофотонных переходов и многофотонных переходов — двухфотонных и трехфотонного, в приближении заданной плотности фотонов. Показано, что закон дисперсии поляритонов в окрестности второго уровня (первого возбужденного) состоит из четырех ветвей, положение и форма которых определяются шестью частотами Раби указанных оптических переходов. Непосредственный учет многофотонных переходов, наряду с однофотонными, приводит к зависимости закона дисперсии атомных поляритонов от квантовых параметров — разностей фаз. Найдены значения параметров системы, при которых возможно пересечение ветвей закона дисперсии. Результаты исследования генерации и способов управления оптическим спектром, обусловленным когерентным взаимодействием атома и фотонов с образованием атомных поляритонов, играют принципиально важную роль в создании современных устройств квантовой оптоэлектроники и могут быть использованы в практических приложениях квантовых вычислений и оптической обработки информации.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. C. W. Gardiner and M. J. Collett, Phys. Rev. A **31**, 3761 (1985).

2. D. A. Steck, *Quantum and Atom Optics*, available online at <http://steck.us/teaching> (revision 0.13.4, 24 September 2020).
3. H. Deng, H. Haug, and Y. Yamamoto, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 1489 (2010).
4. I. Carusotto and C. Ciuti, *Rev. Mod. Phys.* **85**, 299 (2013).
5. Y. Kasprzak, M. Richard, S. Kindermann, A. Baas, P. Jeambrun, J. M. J. Keeling, F. M. Marchetti, M. H. Szymanska, R. Andre, J. L. Staehli, V. Savona, P. B. Littlewood, B. Deveaud, and L. S. Dang, *Nature* **443**, 409 (2006).
6. R. Balili, V. Hartwell, D. Snoke, L. Pfeiffer, and K. West, *Science* **316**, 1007 (2007).
7. A. Kogar, M. S. Rak, S. Vig, A. A. Husain, F. Flicker, Y. I. Joe, L. Venema, G. J. MacDougall, T. C. Chiang, E. Fradkin, Y. van Vezel, and P. Abbamonte, *Science* **358**, 1314 (2017).
8. F. Ge, X. Han, and J. Xu, *Laser Photon. Rev.* **15**, 2000514 (2021).
9. V. Agranovich, H. Benisty, and C. Weisbuch, *Sol. St. Comm.* **102**, 631 (1997).
10. О. А. Дубовский, В. М. Агранович, *ФТТ* **58**, 1371 (2016).
11. О. А. Дубовский, В. М. Агранович, *ЖЭТФ* **155**, 963 (2019).
12. R. F. Ribeiro, J. A. Campos-Gonzales-Angulo, N. C. Giebink, W. Xiong, and J. Yuen-Zhou, arXiv:2006.08519v1 [physics.chem-ph].
13. М. Л. Тер-Микаелян, *УФН* **167**, 1249 (1997).
14. Н. Б. Делоне, В. П. Крайнов, *УФН* **124**, 619 (1978).
15. Н. Б. Делоне, В. П. Крайнов, *УФН* **169**, 753 (1999).
16. Э. Г. Канецян, *Научные труды НУАСА III(5)*, 144 (2014).
17. S. N. Sandhya, *J. Phys. B: Atom. Mol. Opt. Phys.* **40**, 837 (2007).
18. G. Solookinejad, M. Jabbari, M. Nafar, E. Ahmadi Sangachin, and S. H. Asadpour, *Int. J. Theor. Phys.* **58**, 1359 (2019).
19. P. Kumar and Sh. Dasgupta, *Phys. Rev. A* **94**, 023851 (2016).
20. E. O. Nyakang'o, D. Shylla, K. Indumathi et al., *Eur. Phys. J. D* **74**, 187 (2020).
21. T. M. Autry, G. Nardin, C. L. Smallwood, K. Silverman, D. Bajoni, A. Lemaitre, S. Bouchoule, J. Bloch, and S. Cundif, arXiv:2004.10845v1.
22. E. D. Valle, S. Zippilli, F. P. Laussy, A. Gonzalez-Tudela, G. Morigi, and C. Tejedor, *Phys. Rev. B* **81**, 035302 (2010).
23. S. M. Yoshida, S. Endo, J. Levinsen, and M. M. Parish, *Phys. Rev. X* **8**, 011024 (2018).
24. Z. Tan, L. Wang, M. Liu, Y. Zhu, J. Wang, and M. Zhan, arXiv:1901.00127v1.
25. F. E. Zimmer, J. Otterbach, R. G. Unanyan et al., *Phys. Rev. A* **77**, 063823 (2008).
26. B. K. Dutta and P. Panchadhyayee, *Laser Phys.* **28**, 045201 (2018).
27. K. Sawicki, T. J. Sturges, M. Ściesiek, T. Kazmierczuk, K. Sobczak, A. Golnik, W. Pacuski, and J. Suffczyński, *Nanophotonics* **10**, 2421 (2021).
28. Е. А. Якшина, Д. Б. Третьяков, В. М. Энтин, И. И. Бегеров, И. И. Рябцев, *КЭ* **48**, 10, 886 (2018).
29. H. M. Kwak, T. Jeong, Y. -S. Lee, and H. S. Moon, *Opt. Comm.* **380**, 168 (2016).
30. S. K. Nath, V. Naik, A. Chakrabarti, and A. Ray, *J. Opt. Soc. Amer. B* **36**, 2610 (2019).
31. J. Tang, Yu. Deng, and C. Lee, *Phys. Rev. Appl.* **12**, 044065 (2019).
32. S. Gasparinetti, J.-C. Besse, M. Pechal, R. D. Buijs, C. Eichler, H. J. Carmichael, and A. Wallraff, *Phys. Rev. A* **100**, 033802 (2019).
33. П. И. Хаджи, *Нелинейные оптические процессы в системе экситонов и биэкситонов в полупроводниках*, ШТИИИЦа, Кишинев (1985), с. 209.
34. П. И. Хаджи, Л. Ю. Надькин, Д. А. Марков, *ФТТ* **60**, 660 (2018).
35. Л. Ю. Надькин, О. В. Коровай, Д. А. Марков, *Опт. и спектр.* **3**, 272 (2021).
36. П. И. Хаджи, О. В. Коровай, Л. Ю. Надькин, *ЖЭТФ* **155**, 620 (2019).
37. П. И. Хаджи, О. В. Коровай, Л. Ю. Надькин, *Письма в ЖЭТФ* **107**, 623 (2018).
38. О. В. Коровай, *ЖЭТФ* **160**, 620 (2021).
39. П. И. Хаджи, Л. Ю. Надькин, *КЭ* **36**, 415 (2018).
40. M. D. Yacoub and G. Fraidenaich, *Math. Gazette* **96(536)**, 271 (2012).
41. W. F. Carpenter, *Math. Magazine* **39**, 28 (1966).