

ОСОБЕННОСТИ ОСЦИЛЛЯЦИОННЫХ ЯВЛЕНИЙ ПРИ ПЕРЕСТРОЙКАХ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ ЭЛЕКТРОННЫХ ТРАЕКТОРИЙ НА СЛОЖНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ ФЕРМИ

А. Я. Мальцев*

Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук
119991, Москва, Россия

Поступила в редакцию 11 июля 2021 г.,
после переработки 11 июля 2021 г.
Принята к публикации 13 июля 2021 г.

Рассматривается поведение классических и квантовых осцилляций в металлах со сложными поверхностями Ферми вблизи направлений $\mathbf{B}$, отвечающих изменениям топологической структуры динамической системы, описывающей квазиклассическое движение квазичастиц по поверхности Ферми. Переход через границы изменения такой структуры сопровождается резкими изменениями в картине осцилляций, вид которых зависит самым существенным образом от топологического типа соответствующей перестройки. Мы перечисляем здесь основные особенности таких изменений для всех топологических типов элементарных перестроек и обсуждаем возможности экспериментальной идентификации таких типов, исходя из этих особенностей.

DOI: 10.31857/S0044451021110092

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе мы хотели бы рассмотреть особенности осцилляционных явлений, наблюдающихся при перестройках топологической структуры системы, описывающей квазиклассическое движение электронов на поверхности Ферми в присутствии внешнего магнитного поля. Как хорошо известно, эта система имеет вид

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}_{gr}(\mathbf{p}) \times \mathbf{B}] = \frac{e}{c} [\nabla \epsilon(\mathbf{p}) \times \mathbf{B}], \quad (1.1)$$

где $\epsilon(\mathbf{p})$ представляет собой электронное дисперсионное соотношение в кристалле для заданной зоны проводимости. Соотношение $\epsilon(\mathbf{p})$ представляет гладкую 3-периодическую функцию в $\mathbf{p}$ -пространстве с периодами, равными векторам обратной решетки. Как нетрудно видеть, система (1.1) сохраняет значение энергии $\epsilon(\mathbf{p})$ и проекцию квазиимпульса на направление магнитного поля, и, как следствие этого, ее траектории задаются пересечениями пери-

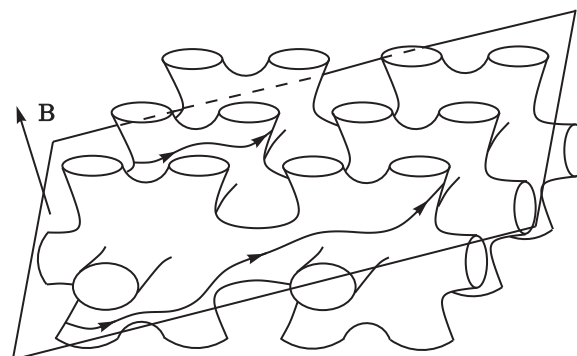


Рис. 1. Геометрия траекторий системы (1.1) в пространстве квазиимпульсов

одических поверхностей $\epsilon(\mathbf{p}) = \text{const}$ плоскостями, ортогональными $\mathbf{B}$ (рис. 1).

С физической точки зрения, точки в $\mathbf{p}$ -пространстве, различающиеся на векторы обратной решетки, представляют собой одно и то же физическое состояние, так что систему (1.1) можно рассматривать, в действительности, как систему на трехмерном торе $\mathbb{T}^3$, получаемом из $\mathbb{R}^3$ факторизацией по векторам обратной решетки. Периодические поверхности $\epsilon(\mathbf{p}) = \text{const}$ после такой факторизации также пред-

* E-mail: maltsev@itp.ac.ru

ставляют собой компактные двумерные поверхности, вложенные в $\mathbb{T}^3$ (как правило, топологически нетривиальным образом). Как хорошо известно, в теории нормальных металлов среди всех энергетических уровней наиболее важную роль играет энергия Ферми, и, таким образом, наиболее важной является структура траекторий системы (1.1) на поверхности Ферми $\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon_F$.

Огромная важность геометрии траекторий системы (1.1) для теории гальваномагнитных явлений в металлах была установлена в работах школы И. М. Лифшица в 1950-ые годы (см. [1–8]). В это же время было рассмотрено множество важных и интересных примеров нетривиального поведения траекторий системы (1.1) на сложных поверхностях Ферми, а также рассмотрены соответствующие им режимы поведения магнитопроводимости в сильных магнитных полях. В общем случае, геометрия траекторий системы (1.1) начинает играть определяющую роль при условии $\omega_B \tau \gg 1$, что подразумевает также достаточную чистоту исследуемого образца, а также его низкую температуру ($T \sim 1$ К) в процессе соответствующих измерений.

Несколько позднее, в работе Новикова [9] была поставлена задача общей классификации траекторий системы (1.1) для произвольных соотношений $\epsilon(\mathbf{p})$, которая затем весьма плодотворно исследовалась в его топологической школе (см. [10–16]). Топологические результаты, полученные в школе Новикова, позволили, в частности, определить новые топологические характеристики, наблюдаемые в проводимости нормальных металлов [17, 18], а также привели к открытию новых неизвестных ранее типов траекторий системы (1.1) [15, 19], приводящих к новым режимам поведения магнитопроводимости [20, 21]. В целом же, к настоящему моменту можно констатировать, что исследования задачи Новикова привели в конечном итоге к полной классификации всех типов траекторий системы (1.1), а также описанию соответствующих режимов поведения магнитопроводимости в сильных магнитных полях (см., например, [16, 18, 22–25]).

Надо сказать, что весьма важную роль при исследовании задачи Новикова играет исследование множества замкнутых траекторий системы (1.1) на поверхности Ферми. Более того, можно утверждать даже, что знание структуры множества замкнутых траекторий на заданной поверхности Ферми определяет в действительности также типы всех остальных траекторий на ней и, в частности, позволяет описать их глобальные геометрические свойства. Можно отметить также, что множество несингуляр-

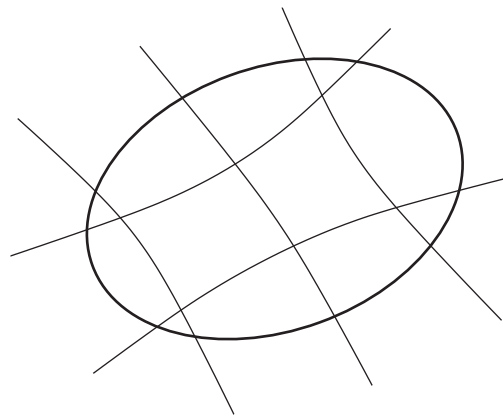


Рис. 2. Области на единичной сфере, отвечающие различным топологическим структурам системы (1.1) на поверхности Ферми и границы перестроек этой структуры, разделяющие эти области (схематично)

ных замкнутых траекторий всегда представляет собой открытое множество на поверхности Ферми и является локально устойчивым по отношению к малым изменениям параметров задачи (в частности, малым изменениям энергии Ферми или направления магнитного поля). Из приведенного факта вытекает, в действительности, что обычно рассматриваемое пространство параметров, определяющих систему (1.1), должно разделяться на области, в которых топологическая структура системы (1.1) может считаться неизменной, в то время как на границах таких областей происходят скачкообразные изменения структуры (1.1). Изменение структуры траекторий (1.1) на поверхности Ферми при этом всегда связано с перестройкой структуры замкнутых траекторий на ней, определяющей, в действительности, также структуру других траекторий.

В данной работе нас будет интересовать прежде всего зависимость топологической структуры системы (1.1) от направления магнитного поля (рис. 2). Типичная картина границ, разделяющих различные топологические структуры (1.1) на соответствующей угловой диаграмме (на единичной сфере S^2), обсуждалась в самом общем случае в работе [26], где было также указано, что наиболее удобным инструментом ее наблюдения является исследование осцилляционных явлений (классических или квантовых) при различных направлениях $\mathbf{B}$. Последнее обстоятельство обусловлено тем, что при изменениях топологической структуры системы (1.1) всегда происходит исчезновение (и появление новых) экстремальных траекторий, играющих центральную роль в описании осцилляционных явле-

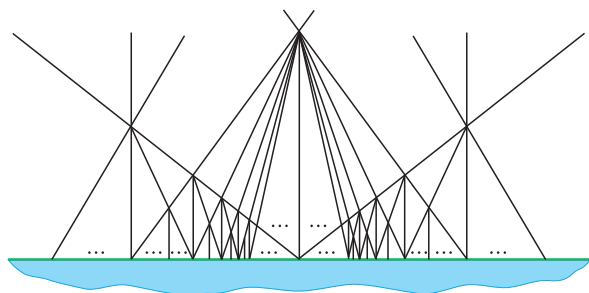


Рис. 3. Плотная сеть границ элементарных перестроек структуры (1.1), накапливающихся вблизи границы появления открытых траекторий на поверхности Ферми (схематично)

ний в сильных магнитных полях (циклотронного резонанса, эффекта де Гааза – ван Альфена, эффекта Шубникова – де Гааза и др.). Таким образом, границы, разделяющие различные топологические структуры системы (1.1), являются в действительности также границами, на которых происходят резкие изменения картины классических или квантовых осцилляций при изменении направления $\mathbf{B}$.

Как было показано в [26], «сеть» границ, разделяющих угловую диаграмму на области фиксированной топологической структуры системы (1.1), является в общем случае довольно сложной и состоит из «элементарных» сегментов, каждый из которых соответствует некоторой «элементарной» перестройке структуры системы (1.1). Число «элементарных» сегментов может быть в общем случае бесконечным, в частности, плотность таких сегментов становится бесконечной вблизи направлений $\mathbf{B}$, соответствующих появлению открытых траекторий на поверхности Ферми (рис. 3). В работе [26] были также описаны все «элементарные» перестройки топологической структуры (1.1) на поверхности Ферми, возникающие в ситуации общего положения. Каждой из таких перестроек соответствует, в частности, исчезновение и появление экстремальных траекторий весьма специальной формы, определяемой ее топологическим типом. Как мы уже сказали, каждая из границ перестроек структуры (1.1) (одномерных кривых на рис. 2 и 3) соответствует элементарной перестройке определенного топологического типа, при этом топологические типы перестроек, отвечающих разным кривым, вообще говоря, различны.

Основной целью данной работы является рассмотрение особенностей наблюдения осцилляционных явлений в момент изменения топологической структуры системы (1.1) на поверхности Ферми. Как мы увидим, каждая из «элементарных» пере-

строек этой структуры обладает при этом своими собственными особенностями в поведении осцилляций, что, в частности, может быть весьма полезным при экспериментальном определении топологических типов таких перестроек.

2. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ТИПЫ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПЕРЕСТРОЕК И ОСОБЕННОСТИ КАРТИНЫ ОСЦИЛЛЯЦИОННЫХ ЯВЛЕНИЙ ДЛЯ ПЕРЕСТРОЕК РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ

Как мы уже сказали, перестройки топологической структуры системы (1.1) на поверхности Ферми будут для нас означать топологические перестройки множества замкнутых траекторий на этой поверхности. В действительности, как мы уже отмечали выше, знание множества замкнутых траекторий на поверхности Ферми позволяет описать также и траектории других типов на ней. Множество замкнутых траекторий для направлений $\mathbf{B}$ общего положения представляет собой при этом конечный набор (неэквивалентных) цилиндров, ограниченных сингулярными замкнутыми траекториями на своих основаниях (рис. 4). Структура множества цилиндров замкнутых траекторий (их положение на поверхности Ферми и схема их склейки с носителями других траекторий и между собой) является локально устойчивой при малых вращениях направления $\mathbf{B}$ и может изменяться лишь при специальных направлениях $\mathbf{B}$, когда она становится структурой необщего положения. Более точно, для перестройки топологической структуры (1.1) необходимо изменить направление $\mathbf{B}$ таким образом, чтобы высота одного (или нескольких) цилиндров замкнутых траекторий обратилась в нуль, т. е. произошло исчезновение цилиндра замкнутых траекторий с последующим появлением нового цилиндра малой высоты (или нескольких цилиндров). Множества направлений $\mathbf{B}$, отвечающих моменту перестройки, представляют собой одномерные кривые на угловой диаграмме (на единичной сфере S^2), объединение которых и образует «сеть» направлений $\mathbf{B}$, соответствующих перестройкам структуры (1.1) на поверхности Ферми.

Как и в работе [26], мы не будем уделять здесь внимания исчезновению и появлению «тривиальных» цилиндров замкнутых траекторий, т. е. цилиндров, хотя бы одно из оснований которого стягивается в единственную особую точку (рис. 5), и будем рассматривать только перестройки цилиндров, оба основания которых «нетривиальны» (рис. 4). В

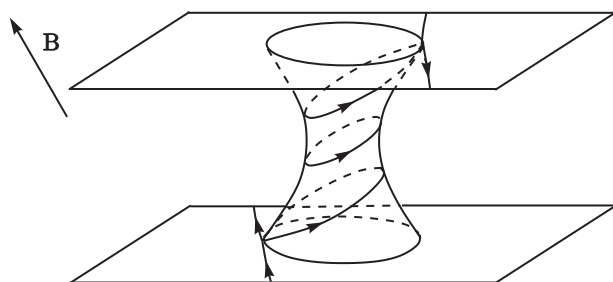


Рис. 4. «Нетривиальный» цилиндр замкнутых траекторий, ограниченный сингулярными траекториями на своих основаниях

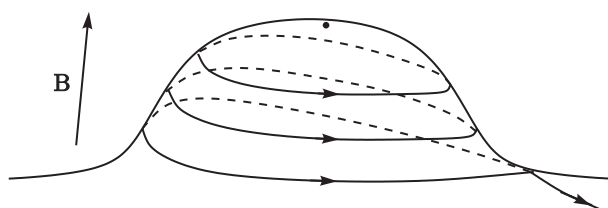


Рис. 5. «Тривиальный» цилиндр замкнутых траекторий на поверхности Ферми

случае общего положения можно считать, что на каждом из оснований таких цилиндров присутствует ровно одна особая точка системы (1.1), а каждое из оснований представляет собой одну из фигур, изображенных на рис. 6. В момент перестройки структуры системы (1.1) возникает «цилиндр нуле-

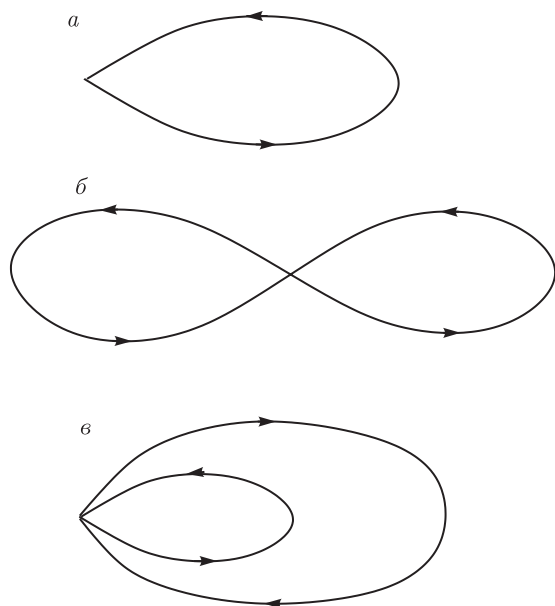


Рис. 6. Возможные типы оснований «нетривиальных» цилиндров замкнутых траекторий

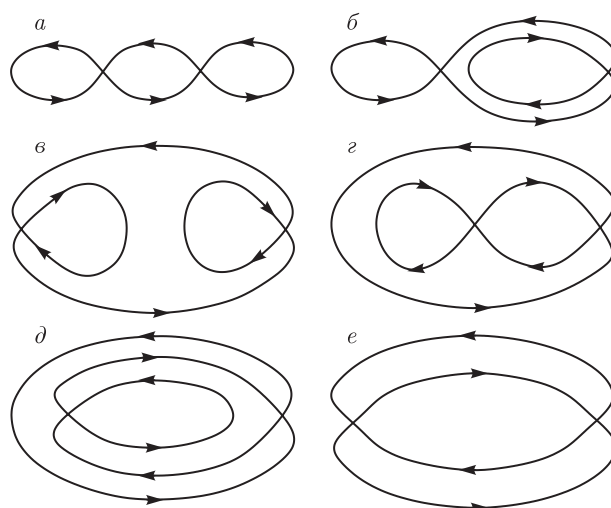


Рис. 7. «Цилиндры нулевой высоты», возникающие в моменты перестройки топологической структуры системы (1.1) на поверхности Ферми

вой высоты», содержащий две особые точки системы (1.1), соединенные сингулярными траекториями. Для каждой из «элементарных» перестроек структуры (1.1) соответствующий «цилиндр нулевой высоты» представляет собой плоский граф, лежащий в плоскости, ортогональной $\mathbf{B}$, и топологически эквивалентный одной из фигур, изображенных на рис. 7. Как было показано в [26], для определения топологического типа соответствующего «цилиндра нулевой высоты» достаточно зафиксировать топологический тип соответствующего «цилиндра нулевой высоты» и указать, являются ли групповые скорости в его особых точках сонаправленными, или направленными противоположно друг другу.

Важнейшим обстоятельством в рассматриваемой ситуации является то, что на каждом из цилиндров малой высоты вплоть до его исчезновения присутствуют экстремальные замкнутые траектории системы (1.1) (имеющие экстремальный период обращения или площадь по сравнению с близкими траекториями), исчезающие вместе с соответствующим цилиндром (рис. 8). При появлении нового цилиндра замкнутых траекторий на нем появляются новые экстремальные траектории, отличающиеся от исчезнувших своей геометрией. Как следствие этого, при каждой перестройке топологической структуры системы (1.1) происходит резкое изменение картины осцилляционных явлений в сильном магнитном поле, что является удобным инструментом для наблюдения описанной выше «сети» направлений $\mathbf{B}$ на угловой диаграмме. Надо сказать, что экс-

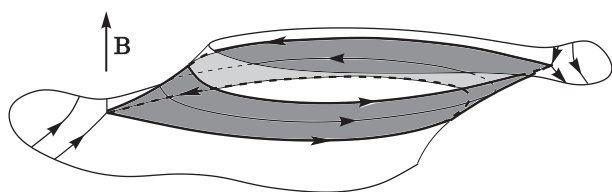


Рис. 8. Экстремальная замкнутая траектория на исчезающем (появляющемся) цилиндре замкнутых траекторий вблизи момента перестройки топологической структуры системы (1.1) на поверхности Ферми

тремальные замкнутые траектории, возникающие на цилиндрах малой высоты, обладают определенными особенностями по сравнению с обычными экстремальными траекториями, а именно, они содержат участки, очень близкие к особым точкам системы (1.1). Данное обстоятельство приводит, в частности, к неограниченному увеличению периода обращения по таким траекториям при уменьшении высоты цилиндра, а также к ряду других особенностей, возникающих, к примеру, при наблюдении явления циклотронного резонанса (см., например, [26]).

В данной работе, однако, нам хотелось бы рассмотреть более подробно особенности экстремальных траекторий и соответствующих им осцилляционных явлений, возникающие при каждой из элементарных перестроек структуры (1.1), что, с нашей точки зрения, может оказаться весьма полезным при экспериментальном изучении полной картины перестроек топологии этой системы на сложных поверхностях Ферми. Как хорошо известно (см., например, [7, 27, 28]), при описании осцилляционных явлений в действительности оказываются важными замкнутые экстремальные траектории двух типов, а именно, траектории, обладающие экстремальным периодом обращения и траектории, обладающие экстремальной площадью по сравнению с близкими к ним траекториями. Траектории первого типа, как правило, играют при этом определяющую роль в описании классических осцилляционных явлений (классический циклотронный резонанс), в то время как траектории второго типа являются важными при описании квантовых осцилляционных явлений (эффект де Гааза–ван Альфена, эффект Шубникова–де Гааза и др.). Нередко, в действительности, одна и та же траектория может быть экстремальной как с первой, так и со второй точки зрения, как правило, это имеет место для центрально-симметричных сечений поверхности Ферми. В большинстве из ситуаций, рассматриваемых нами ниже, однако, это не будет иметь места, поэтому нам надо сразу провести разделение

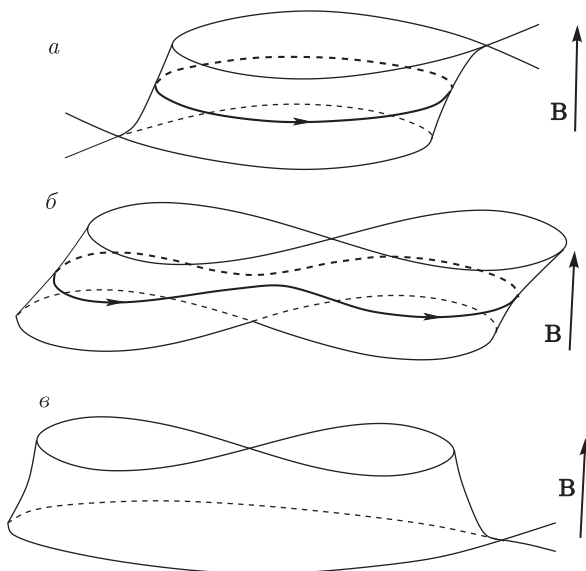


Рис. 9. Цилиндры замкнутых траекторий, содержащие траектории экстремальной (минимальной и максимальной) площади (а, б), и цилиндр, не содержащий траекторий экстремальной площади (в)

экстремальных траекторий на два указанных типа.

Как мы уже сказали, мы будем рассматривать здесь цилиндры замкнутых траекторий с «нетривиальными» основаниями, содержащими по одной особой точке системы (1.1). Нетрудно видеть, что период обращения по замкнутым траекториям на каждом из таких цилиндров неограниченно (логарифмически) возрастает при приближении к каждому из оснований. Как следствие этого, на каждом из таких цилиндров должна присутствовать по крайней мере одна экстремальная траектория, обладающая минимальным периодом обращения по сравнению с близкими к ней траекториями.

Что касается площади замкнутых траекторий, легко видеть, что она остается конечной на основаниях цилиндров. Ее производная по расстоянию до соответствующего основания, однако, обращается в бесконечность (по логарифмическому закону) и может иметь положительный или отрицательный знак в зависимости от геометрии цилиндра. Как и для траекторий первого типа, данное обстоятельство здесь также обусловлено наличием особых точек на основаниях цилиндров и связано с локальной геометрией траекторий вблизи этих точек. В зависимости от знаков производной площади по расстоянию (высоте) до основания цилиндра на обоих основаниях цилиндр замкнутых траекторий может как содержать экстремальные траектории второго типа, так и не содержать их. На рис. 9 представ-

лены примеры как цилиндров, содержащих экстремальные траектории второго типа (а,б), так и цилиндра, не содержащего такой траектории (в). Можно отметить здесь, что экстремальная траектория на рис. 9а, имеет минимальную площадь, в то время как экстремальная траектория на рис. 9б имеет максимальную площадь по сравнению с близкими к ним траекториями.

Можно видеть, таким образом, что любая перестройка структуры (1.1) всегда сопровождается резким изменением, например, картины осцилляций при наблюдении циклотронного резонанса, в то время как в картине осцилляций де Гааза – ван Альфена или Шубникова – де Гааза может и не происходить резких изменений (если цилиндры малой высоты по обе стороны от перестройки не содержат траекторий экстремальной площади). Можно особо отметить при этом перестройки (1.1), обладающие центральной симметрией. В этом случае центральные сечения цилиндров малой высоты всегда являются экстремальными траекториями как первого, так и второго типов.

В самом общем случае цилиндры малой высоты могут содержать экстремальные траектории обоих типов, которые, однако, не совпадают друг с другом. В этом случае, хотя перестройка структуры (1.1) сопровождается резким изменением картины осцилляций всех типов, можно наблюдать различие в параметрах соответствующих исчезающих или возникающих осцилляционных членов. Так, например, при наблюдении явления циклотронного резонанса происходит непосредственное измерение периода обращения по экстремальным траекториям, дающим главные члены в общую картину осцилляций. Вместе с тем, период обращения может быть измерен и для траекторий экстремальной площади, например, по температурной зависимости соответствующих квантовых осцилляций [7, 29]. Легко видеть, что эти величины должны совпадать в случае, когда оба типа осцилляций порождаются одной и той же траекторией и отличаются, если разные типы осцилляций отвечают разным экстремальным траекториям.

В качестве примера можно рассмотреть две различные перестройки, приведенные на рис. 10 и 11. Обе перестройки соответствуют в действительности одной и той же топологии «цилиндра нулевой высоты» (первой из приведенных на рис. 7) и отличаются лишь направлениями групповых скоростей в двух седловых особых точках системы (1.1) (разнонаправленные и сонаправленные скорости в особых точках).

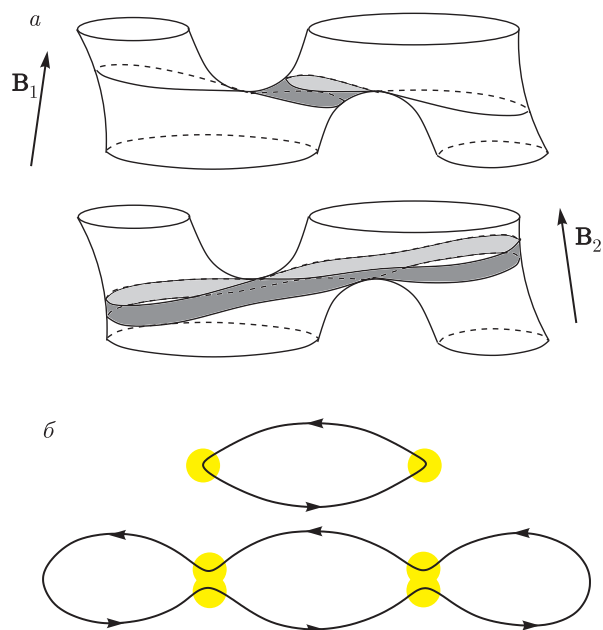


Рис. 10. Одна из наиболее распространенных перестроек топологической структуры системы (1.1) на поверхности Ферми и экстремальные траектории на цилиндрах малой высоты до и после перестройки (цветом обозначены участки, близко подходящие к особым точкам системы (1.1))

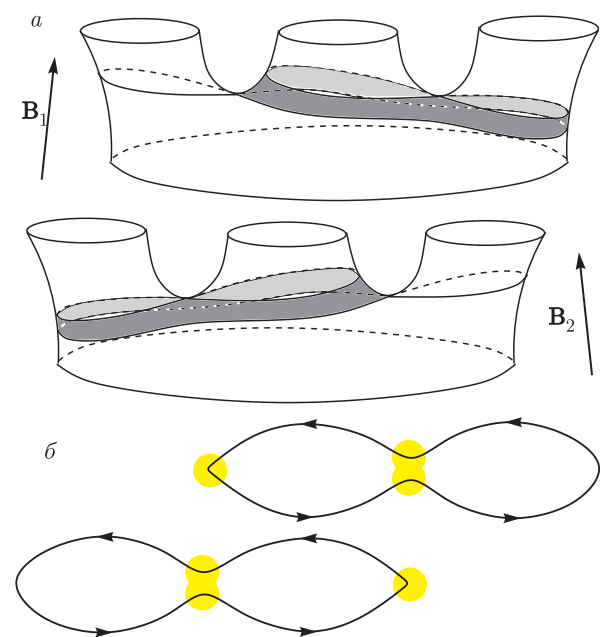


Рис. 11. Одна из возможных перестроек топологической структуры системы (1.1) на поверхности Ферми и экстремальные траектории на цилиндрах малой высоты до и после перестройки (цветом обозначены участки, близко подходящие к особым точкам системы (1.1))

Перестройка, приведенная на рис. 10, может обладать центральной симметрией и, таким образом, возможно ее появление на одном участке поверхности Ферми (наиболее распространенный случай). Впрочем, топологическая структура на рис. 10 может и не обладать центральной симметрией. В этом случае она должна возникать одновременно на двух участках поверхности Ферми, переходящих друг в друга при инверсии в $\mathbf{p}$ -пространстве. Независимо от того, обладает ли структура на рис. 10 центральной симметрией или нет, на соответствующих цилиндрах малой высоты, как до, так и после перестройки, возникают траектории экстремальной площади, при этом одна из них (до перестройки) имеет минимальную площадь, а вторая (после перестройки) — максимальную площадь по сравнению с близкими к ним траекториями. Таким образом, перестройка, приведенная на рис. 10, должна всегда сопровождаться как резким скачком одного из осциллирующих членов в классических осцилляциях (изменение геометрии траектории экстремального периода), так и резким скачком в одном из осциллирующих членов в квантовых осцилляциях (изменении геометрии траектории экстремальной площади). Как траектории экстремального периода, так и траектории экстремальной площади имеют здесь форму, приведенную на рис. 10, при этом в случае наличия центральной симметрии они просто совпадают. Как мы уже говорили выше, в последнем случае периоды обращения, измеренные из классических осцилляций и температурной зависимости квантовых осцилляций соответствующих осцилляционных членов обязаны совпадать.

Перестройка, представленная на рис. 11, не может обладать центральной симметрией и ее появление возможно лишь парами, на участках поверхности Ферми, переходящих друг в друга при инверсии в $\mathbf{p}$ -пространстве. Цилиндры малой высоты, как до, так и после перестройки, совпадают с изображенным на рис. 9б и не содержат траекторий экстремальной площади. На этих цилиндрах, тем не менее, всегда присутствуют траектории с экстремальным периодом обращения, форма которых представлена на рис. 11. При переходе через границу такой перестройки, таким образом, происходит скачок (резкое изменение одного из осцилляционных членов) лишь в картине классических осцилляций (классический циклотронный резонанс и т. п.).

Ниже, на рис. 12–21 представлены все оставшиеся топологические типы «элементарных» перестроек системы (1.1). Кроме изображений самой перестройки на рис. 12–21 приведены также форма ниж-

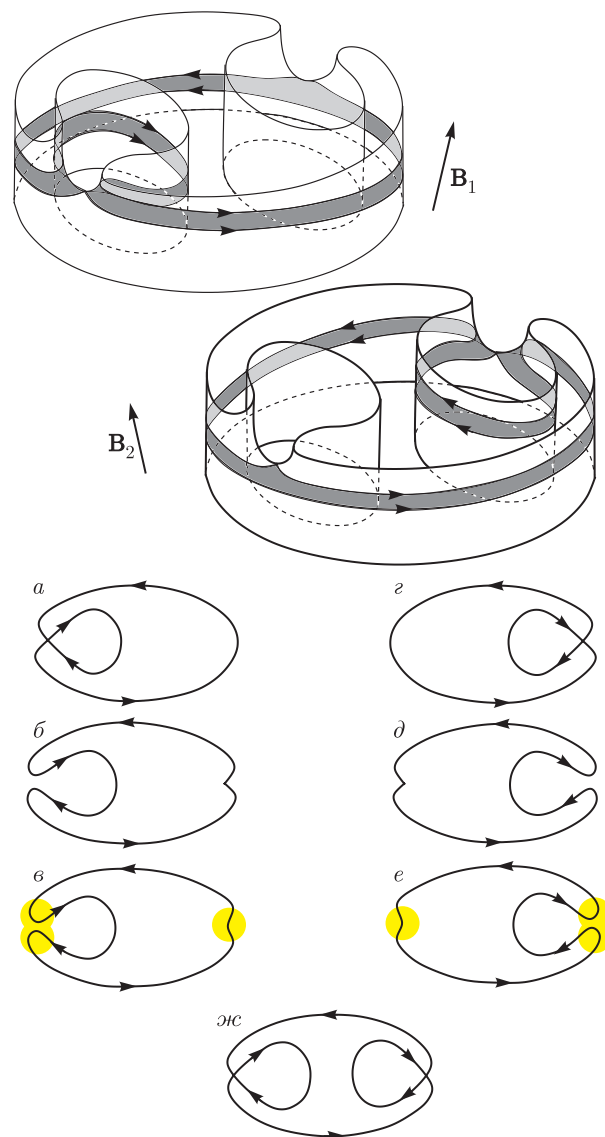


Рис. 12. Перестройка структуры (1.1), не обладающая центральной симметрией. Траектории экстремальной площади на цилиндрах малой высоты отсутствуют как до перестройки, так и после нее. Траектории минимального периода обращения по разные стороны от перестройки имеют один и тот же тип (электронный или дырочный)

него и верхнего оснований цилиндров малой высоты до и после перестройки (а, б и г, д), форма экстремальных траекторий на цилиндрах малой высоты (в и е), а также структура «цилиндра нулевой высоты», возникающего непосредственно в момент перестройки (жс). Строго говоря, приведенные рисунки точно передают локальную геометрию экстремальных траекторий вблизи упомянутых выше «участков замедления» на них (закрашенные участки), а также топологию их соединения оставшимися

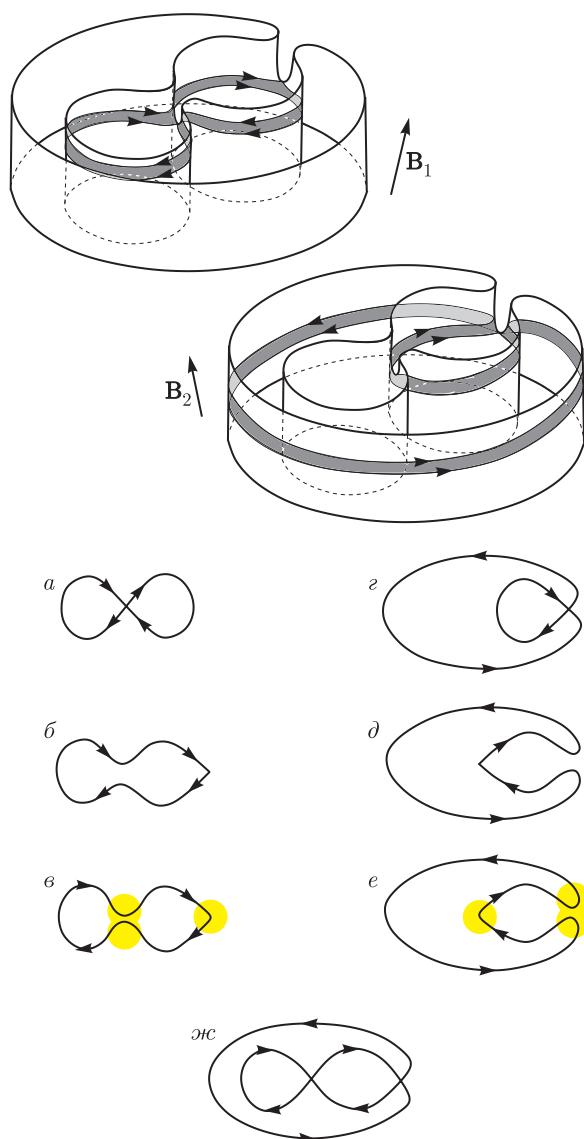


Рис. 13. Перестройка структуры (1.1), не обладающая центральной симметрией. Траектории экстремальной площади на цилиндрах малой высоты отсутствуют как до перестройки, так и после нее. Траектории минимального периода обращения по разные стороны от перестройки имеют различные типы (электронный — с одной стороны от перестройки и дырочный — с другой)

участками траектории, а в остальном могут быть сложнее геометрически. Для рассматриваемых цилиндров малой высоты экстремальные траектории обоих типов при этом геометрически очень близки друг к другу в $\mathbf{p}$ -пространстве (если оба типа траекторий присутствуют на цилиндре), однако могут заметно отличаться друг от друга другими параметрами (например, величиной периода обращения по траектории). Как мы уже говорили выше, ос-

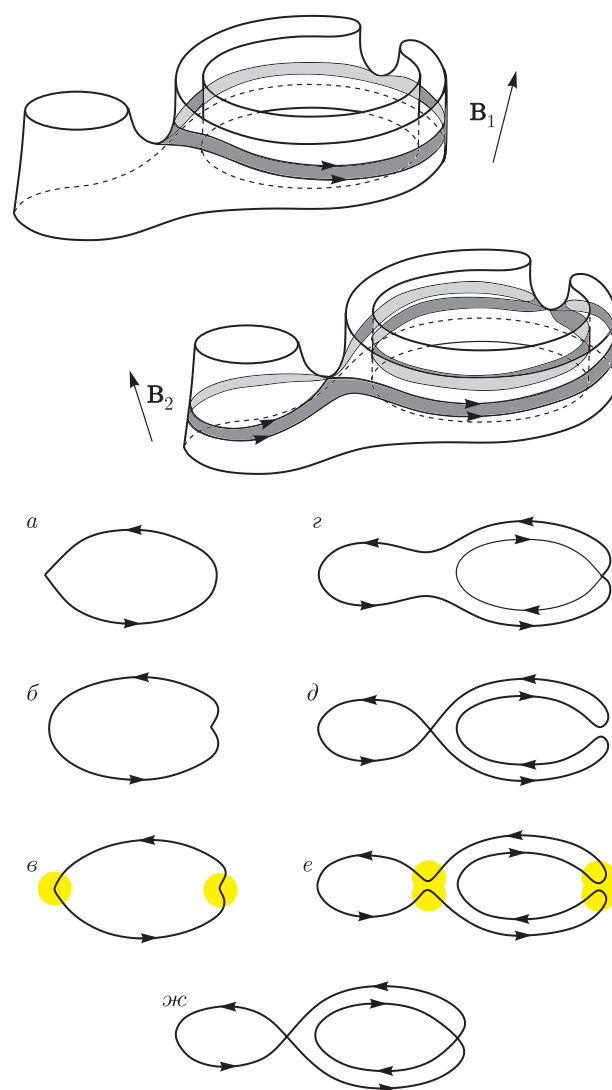


Рис. 14. Перестройка структуры (1.1), не обладающая центральной симметрией. Траектории экстремальной площади на цилиндрах малой высоты отсутствуют как до перестройки, так и после нее. Траектории минимального периода обращения по разные стороны от перестройки имеют один и тот же тип (электронный или дырочный)

новной целью настоящей работы является описание особенностей осцилляционных (и других) явлений, позволяющих опознавать различные типы «элементарных» перестроек системы (1.1) при их экспериментальном наблюдении.

На рис. 12–16 приведены перестройки, во время которых не появляются и не исчезают траектории экстремальной площади на соответствующих цилиндрах малой высоты. Экстремальные траектории, показанные на этих рисунках, обладают только минимальным периодом обращения среди всех тра-

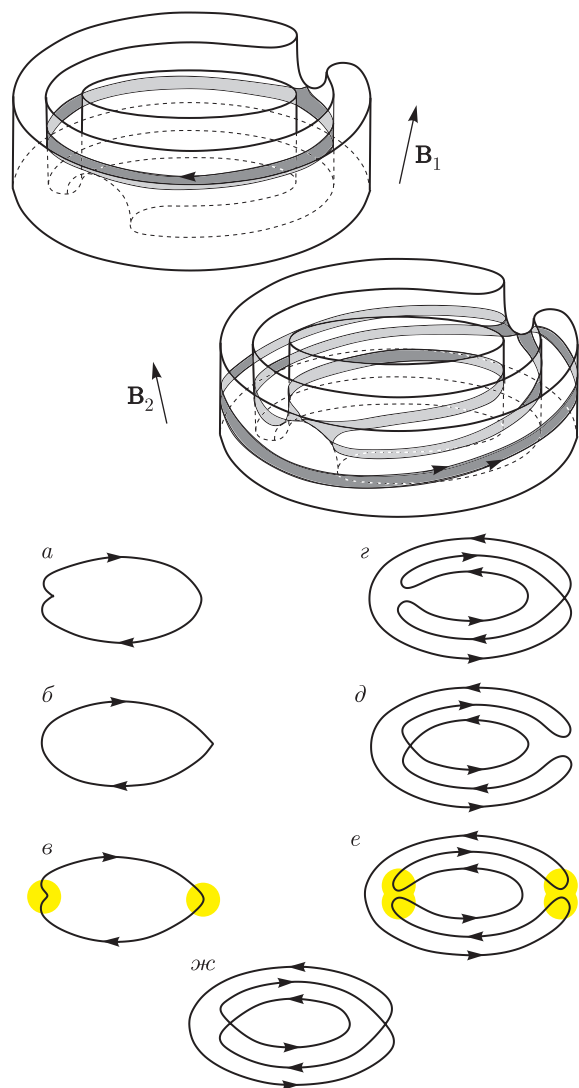


Рис. 15. Перестройка структуры (1.1), не обладающая центральной симметрией. Траектории экстремальной площади на цилиндрах малой высоты отсутствуют как до перестройки, так и после нее. Траектории минимального периода обращения по разные стороны от перестройки имеют различные типы (электронный — с одной стороны от перестройки и дырочный — с другой)

екторий цилиндра. Вместе с перестройкой, приведенной на рис. 11, такие перестройки можно отнести к перестройкам первой группы. Как мы уже говорили выше, перестройки такого типа отличаются тем, что происходит резкая замена части осцилляционных членов лишь в картине классических осцилляций.

Как нетрудно проверить, во всех перестройках, представленных на рис. 11–16, групповые скорости в двух седловых особых точках сонаправлены друг

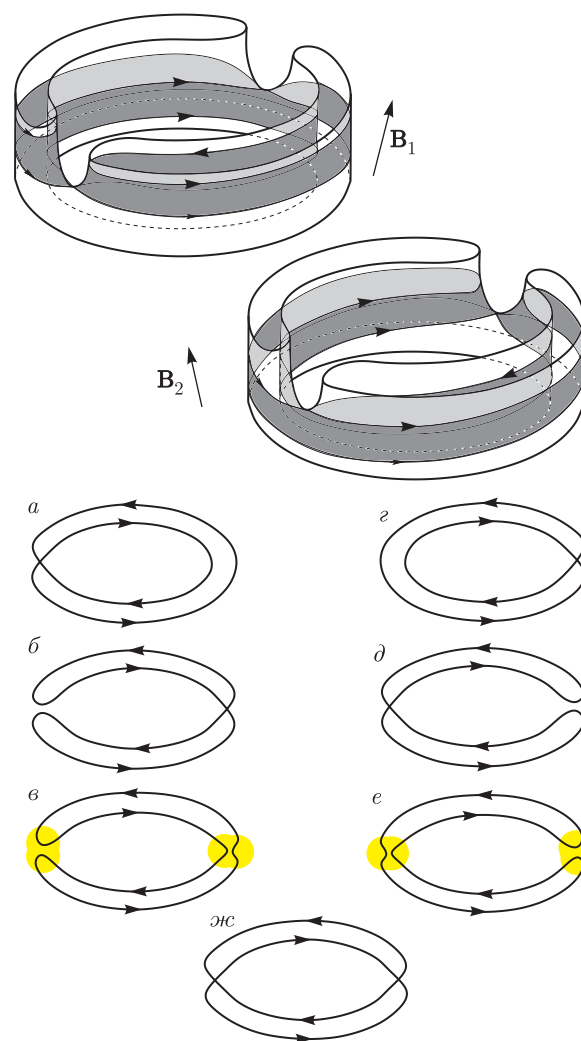


Рис. 16. Перестройка структуры (1.1), не обладающая центральной симметрией. Траектории экстремальной площади на цилиндрах малой высоты отсутствуют как до перестройки, так и после нее. Траектории минимального периода обращения по разные стороны от перестройки имеют один и тот же тип (электронный или дырочный)

другу. Возвращаясь к описанию элементарных перестроек в терминах топологии «цилиндров нулевой высоты» (рис. 7), легко сформулировать простое правило. А именно, для любого из типов «цилиндров нулевой высоты», приведенных на рис. 7, на соответствующих цилиндрах малой высоты (как до, так и после перестройки) возникают траектории экстремальной площади, если групповые скорости в его особых точках направлены противоположно друг другу.

Приведенное выше правило легко обосновать, используя хорошо известную формулу

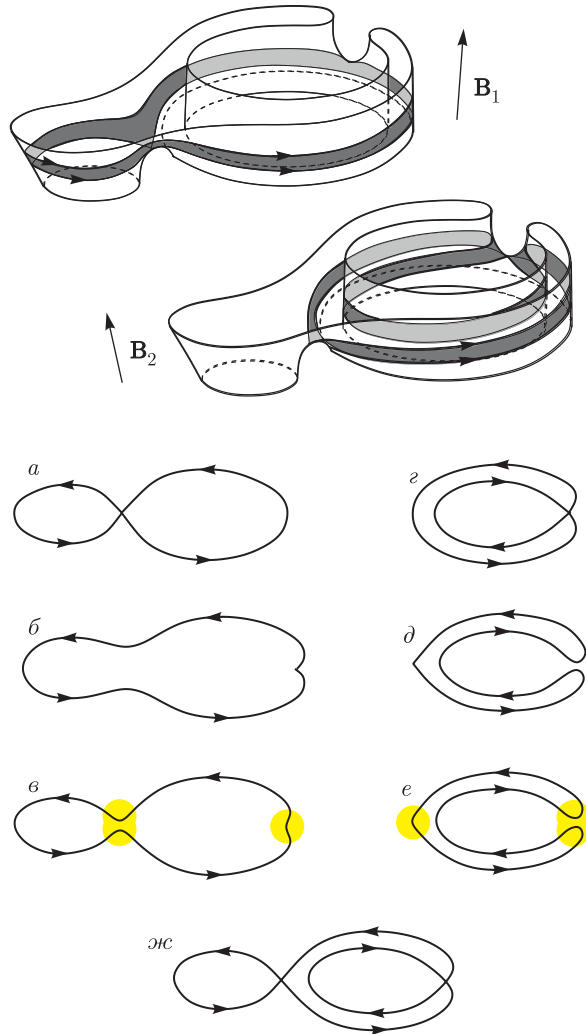


Рис. 17. Перестройка структуры (1.1), не обладающая центральной симметрией. Траектории экстремальной площади на цилиндрах малой высоты присутствуют как до перестройки (траектория максимальной площади), так и после нее (траектория минимальной площади). Площадь экстремальной траектории до перестройки всегда больше площади экстремальной траектории после перестройки. Экстремальные траектории по обе стороны от перестройки имеют один и тот же (электронный или дырочный) тип

$$\frac{\partial S}{\partial p_z} = \frac{eB}{c} \oint v_{gr}^z dt$$

(где t — время движения по траектории) для площади замкнутой траектории в $\mathbf{p}$ -пространстве $S(p_z)$. Поскольку особые точки вблизи перестройки находятся на основаниях цилиндров малой высоты, а время их прохождения стремится к бесконечности при приближении к основаниям цилиндра, данное соотношение определяет знаки $\partial S/\partial p_z$ вблизи оснований цилиндров. Как также хорошо известно, на

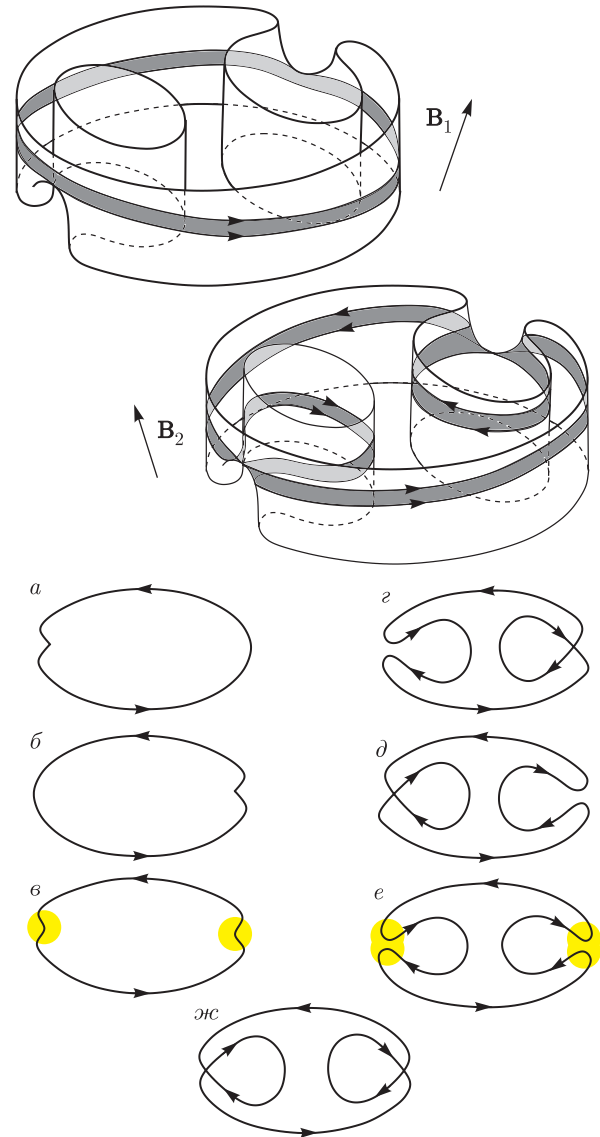


Рис. 18. Перестройка структуры (1.1), которая может обладать центральной симметрией. Траектории экстремальной площади на цилиндрах малой высоты присутствуют как до перестройки (траектория максимальной площади), так и после нее (траектория минимальной площади). Площадь экстремальной траектории до перестройки всегда больше площади экстремальной траектории после перестройки. Экстремальные траектории по обе стороны от перестройки имеют один и тот же (электронный или дырочный) тип

траекториях экстремальной площади мы имеем при этом соотношение

$$\oint v_{gr}^z dt = 0.$$

Можно отметить при этом, что экстремальные траектории, приведенные на рис. 12, 13, так же как

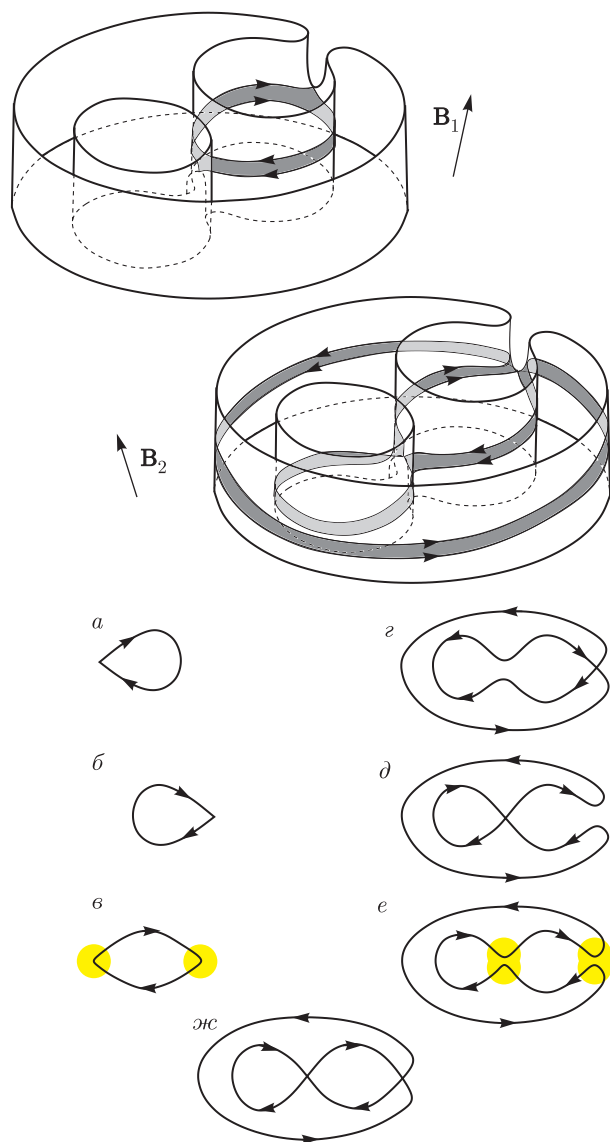


Рис. 19. Перестройка структуры (1.1), не обладающая центральной симметрией. Траектории экстремальной площади на цилиндрах малой высоты присутствуют как до перестройки (траектория минимальной площади), так и после нее (траектория минимальной площади). Экстремальные траектории по разные стороны от перестройки имеют различные типы (электронный — с одной стороны от перестройки и дырочный — с другой)

и траектории, приведенные на рис. 11, приближаются к седловым особым точкам системы (1.1) три раза (дважды к одной из особых точек и один раз ко второй). При этом по разные стороны от перестройки кратность подхода особой траектории к каждой из особых точек изменяется (до перестройки траектория подходит дважды к одной из особых точек, а после перестройки — к другой). Каждое приближе-

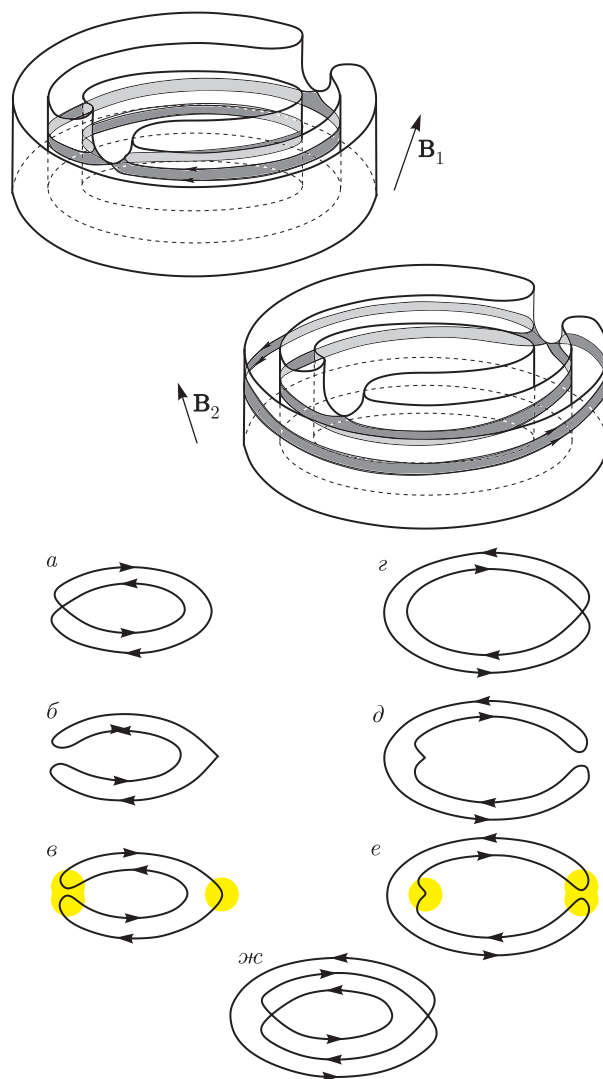


Рис. 20. Перестройка структуры (1.1), не обладающая центральной симметрией. Траектории экстремальной площади на цилиндрах малой высоты присутствуют как до перестройки (траектория минимальной площади), так и после нее (траектория минимальной площади). Экстремальные траектории по разные стороны от перестройки имеют различные типы (электронный — с одной стороны от перестройки и дырочный — с другой)

ние к особой точке (1.1) означает наличие «участка замедления» на данном участке траектории, т.е. конечной добавки к периоду обращения по траектории. Соответствующая добавка к периоду обращения растет логарифмически при уменьшении угла α между направлением $\mathbf{B}$ и границей перестройки системы (1.1) и при $\alpha \ll 1$ может быть записана в виде

$$\Delta T_i \simeq \frac{c}{eBv_{gr}^{(i)}} \frac{1}{\sqrt{G_i}} \ln \frac{1}{\alpha},$$

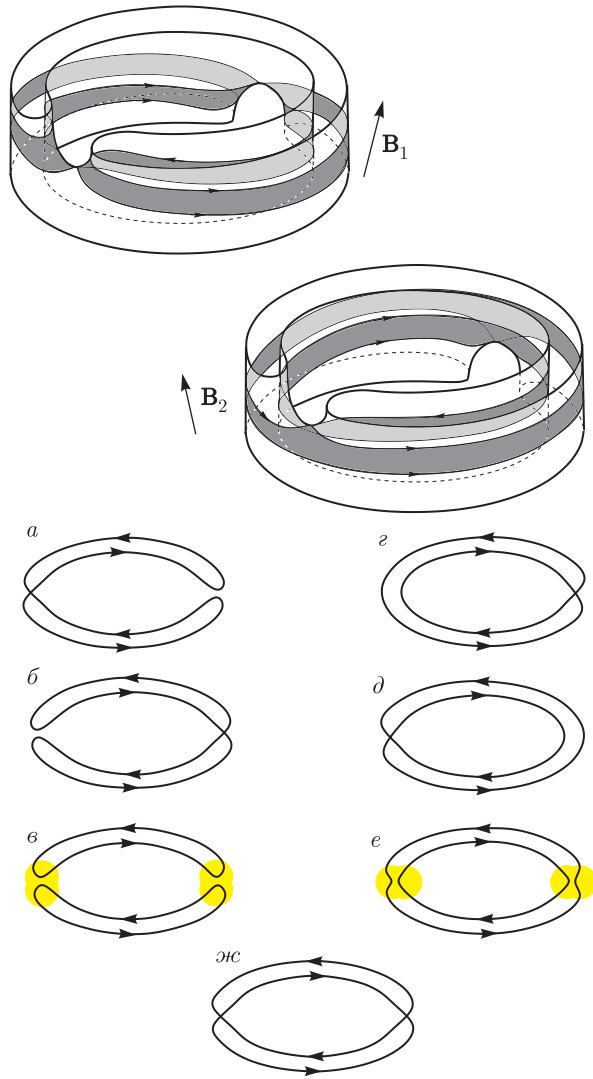


Рис. 21. Перестройка структуры (1.1), которая может обладать центральной симметрией. Траектории экстремальной площади на цилиндрах малой высоты присутствуют как до перестройки (пара траекторий минимальной площади), так и после нее (одна траектория минимальной площади и одна траектория максимальной площади). Пара экстремальных траекторий с одной стороны от перестройки обладает одним и тем же типом. После перестройки возникает пара экстремальных траекторий противоположных типов, причем тип траекторий большей площади совпадает с типом экстремальных траекторий до перестройки

где $v_{gr}^{(i)}$ и G_i — значения соответственно групповой скорости и гауссовой кривизны поверхности Ферми в каждой из особых точек ($i = 1, 2$).

Полные значения $\Delta T(\alpha)$ могут быть измерены при достаточно точном измерении периода обращения в классических осцилляционных явлениях и достаточно близком приближении направления $\mathbf{B}$ к границе перестройки структуры системы (1.1).

Нетрудно видеть при этом, что при пересечении границы соответствующая полная добавка к периоду обращения по экстремальной траектории меняется с величины

$$\Delta T(\alpha) = 2T_1(\alpha) + T_2(\alpha)$$

на величину

$$T_1(\alpha) + 2T_2(\alpha),$$

что выделяет перестройки на рис. 11–13 среди всех перестроек, изображенных на рис. 11–16. Для различения перестроек на рис. 11–13 между собой может, например, использоваться тест на возможность попадания участков замедления на траектории в скин-слой с каждой из сторон от линии соответствующей перестройки (см. [26]).

Для перестроек, приведенных на рис. 14, 15, мы имеем другую ситуацию. А именно, теперь экстремальные траектории имеют по два «участка замедления» с одной стороны от перестройки и по четыре «участка замедления» с другой. Легко видеть, что при переходе через соответствующую границу перестройки полная добавка к периоду обращения за счет «участков замедления» меняется с величины

$$\Delta T(\alpha) = T_1(\alpha) + T_2(\alpha)$$

на величину

$$2(T_1(\alpha) + T_2(\alpha)),$$

что также позволяет выделить эти перестройки среди шести перестроек первой группы.

Для различения перестроек на рис. 14, 15 могут быть использованы, например, их геометрические (и топологические) различия в $\mathbf{p}$ -пространстве, которые переносятся также и в координатное пространство. Например для траектории, изображенной на рис. 14в, большинство ее участков могут находиться в скин-слое у границы образца как до пересечения границы перестройки, так и непосредственно после ее пересечения (мы считаем, что магнитное поле направлено параллельно границе образца). Для траектории, приведенной на рис. 15в, таких участков не существует, что обусловлено существенно другой топологией ее перестройки. Приведенное различие для рассматриваемых перестроек может быть установлено, например, по отсутствию или наличию скачка в направлении $\mathbf{v}_{gr}$ на участке, попадающем в скин-слой, при пересечении границы перестройки. Отметим здесь также, что измерение соответствующего направления $\mathbf{v}_{gr}$ практически всегда проводится при наблюдении классического циклотронного резонанса.

Перестройка, приведенная на рис. 16, отличается от всех других перестроек, рассмотренных выше, а именно, здесь каждая из экстремальных траекторий имеет четыре «участка замедления» (с каждой из сторон от границы перестройки). При переходе через соответствующую границу перестройки полная добавка к периоду обращения за счет «участков замедления» при этом не меняется и остается равной $2(T_1(\alpha) + T_2(\alpha))$. Легко видеть, что данное свойство позволяет однозначно идентифицировать приведенную перестройку среди всех перестроек первой группы.

Приведенные на рис. 17–21 оставшиеся типы перестроек системы (1.1), напротив, обладают тем свойством, что в них на цилиндрах малой высоты присутствуют траектории экстремальной площади, как до, так и после перестройки. Вместе с перестройкой, показанной на рис. 10, они образуют второй класс перестроек, дополняющий класс перестроек, приведенных на рис. 11–16. Все эти перестройки экспериментально легко отличимы от перестроек из первого класса, поскольку наряду со скачком в картине классических осцилляций в них происходит также скачок в картине квантовых осцилляций (резкая замена одних осцилляционных членов другими). Для экспериментального различения перестроек этого класса между собой могут быть также использованы описанные выше (а также другие) особенности осцилляционной картины при наблюдении классических осцилляций. Но, конечно, эти перестройки также отличаются друг от друга особенностями изменений в картине квантовых осцилляций, на которых нам и хотелось бы остановиться ниже.

Отметим сразу, что перестройки, приведенные на рис. 10, 17, 18, отличаются от перестроек, приведенных на рис. 19–21. А именно, для всех перестроек, изображенных на рис. 10, 17, 18, траектории экстремальной площади имеют минимальную площадь с одной стороны от перестройки и максимальную с другой стороны. В данном случае минимальность (максимальность) площади траектории означает, что площади траекторий увеличиваются (уменьшаются) при приближении к основаниям соответствующего цилиндра замкнутых траекторий при фиксированном направлении $\mathbf{B}$. Это, как мы уже говорили, происходит из-за наличия особых точек на основании таких цилиндров. В действительности, по той же причине, такое же увеличение (уменьшение) минимальной (максимальной) площади траектории (с неограниченно растущей производной) происходит и при приближении направле-

ния магнитного поля к границе перестройки структуры системы (1.1) (и уменьшении высоты соответствующего цилиндра замкнутых траекторий до нуля). Данное обстоятельство позволяет легко идентифицировать описываемые нами здесь траектории минимальной и максимальной площади, и, в частности, отличать экспериментально перестройки, приведенные на рис. 10, 17, 18, от перестроек, приведенных на рис. 19–21. Как также видно на рис. 10, 17, 18, во всех этих случаях траектории максимальной площади имеют большую площадь, нежели траектории минимальной площади.

Кроме указанного выше обстоятельства, можно еще отметить, что во всех перестройках, приведенных на рис. 10, 17, 18, траектории экстремальной площади имеют один и тот же тип (электронный или дырочный) до и после перестройки. Это обстоятельство может также быть легко установлено экспериментально по поведению квантовых осцилляций поперечной (холловской проводимости), что также позволяет отличить эти перестройки от приведенных на рис. 19–21.

Что касается различия перестроек, приведенных на рис. 10, 17, 18, то здесь, как и выше, можно сразу отметить отличие перестройки на рис. 17, состоящее в наличии трех участков замедления на траекториях цилиндров малой высоты, как по одну, так и по другую сторону от перестройки. Это обстоятельство позволяет сразу отличить перестройку на рис. 17 от двух других, например, по измерению периода обращения по траектории при наблюдении классических осцилляций или температурной зависимости квантовых осцилляций (замена $\Delta T(\alpha) = 2T_1(\alpha) + T_2(\alpha)$ на $T_1(\alpha) + 2T_2(\alpha)$). Но в действительности, этот факт легко установить также и при простом наблюдении квантовых осцилляций по поведению площади $S(\alpha)$ экстремальной траектории вблизи границы перехода, где ее главная зависимость от α обусловлена именно подходами к особым точкам системы (1.1). Для различения перестроек, приведенных на рис. 10 и рис. 18, можно, например, исследовать возможность попадания участка замедления в скин-слой у границы образца [26] при наблюдении циклотронного резонанса (оно возможно с одной стороны от перестройки для перестройки на рис. 10 и невозможно для перестройки на рис. 18 в силу особенностей геометрии траекторий).

Для перестроек, представленных на рис. 19, 20, экстремальные траектории имеют минимальную площадь как на исчезающем, так и на появляющемся цилиндре замкнутых траекторий. В обеих этих перестройках экстремальные траектории име-

ют разные типы (электронный и дырочный) по разные стороны от перестройки. Оба указанных обстоятельства могут быть легко установлены при наблюдении квантовых осцилляций различного типа (эффект Де Гааза – ван Альфена, эффект Шубникова – Де Гааза) и отличают перестройки на рис. 19, 20 от всех остальных перестроек. Различие между перестройками, приведенными на рис. 19 и рис. 20, заключается, например, в количестве участков замедления на соответствующих траекториях до и после перестройки. Как мы уже видели выше, это различие может быть также легко установлено при наблюдении как классических, так и квантовых осцилляций.

Перестройка, приведенная на рис. 21, как легко видеть, во многих аспектах отличается от всех рассмотренных нами ранее перестроек. В этой перестройке происходит исчезновение и появление сразу пары экстремальных траекторий. С одной стороны от перестройки обе траектории имеют один тип (электронный или дырочный), в то время как с другой стороны возникает пара траекторий различных типов. Данное обстоятельство может быть, в частности, установлено при наблюдении квантовых осцилляций проводимости, что позволяет сразу идентифицировать данную перестройку экспериментально. Отметим здесь также, что перестройка, приведенная на рис. 21, может обладать центральной симметрией, что позволяет практически всегда предполагать такую симметрию для реальных поверхностей Ферми.

Все наши рассуждения выше проводились без учета спина электронов. Легко видеть, что учет спиновых состояний приводит к расщеплению каждого из осцилляционных членов на два в соответствии с направлением спина вдоль или против направления **B**. Кроме того, в рассмотрении мы не учитывали также влияния фазы Берри, которое может проявляться в материалах с отсутствием центра инверсии или симметрии по отношению к обращению времени. Возникновение ненулевой кривизны Берри в таких материалах может также привести к ряду интересных эффектов в рассматриваемой ситуации.

В заключение, нам хотелось бы упомянуть здесь еще явление магнитного пробоя, которое может наблюдаться в описываемой ситуации. Как хорошо известно, явление (внутризонного) магнитного пробоя наблюдается во многих веществах в достаточно сильных магнитных полях и, в частности, может приводить ко многим интересным эффектам, возникая на траекториях системы (1.1) различной геометрии (см., например, [7, 30–35]). Можно ожидать,

таким образом, что возникновение магнитного пробоя на описанных выше специальных экстремальных траекториях также должно привести к интересным явлениям, в частности, существенно повлиять на квантование электронных уровней для траекторий экстремальной площади. Надо сказать, однако, что возникновение магнитного пробоя на описанных траекториях может происходить лишь при довольно больших значениях B и лишь при очень точном приближении направления магнитного поля к границе перестройки топологической структуры системы (1.1) (см. [26]). Как следствие этого, ясная картина соответствующих эффектов должна наблюдаться лишь в весьма прецизионных экспериментах, позволяющих задавать направления магнитного поля с весьма большой точностью (и может быть отмечена лишь как некоторое размытие описанных выше резких изменений в осцилляционной картине в весьма узкой области вблизи границы перестройки при меньшем разрешении). В этой ситуации, безусловно, зависимость картины осцилляций (в особенности квантовых) от топологического типа перестройки в условиях развитого магнитного пробоя также представляет большой интерес.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены особенности осцилляционных явлений в металлах вблизи границ перестройки топологической структуры системы, описывающей адиабатическую динамику квазичастиц на сложных поверхностях Ферми. Каждая элементарная перестройка такой структуры связана с изменением картины замкнутых траекторий на поверхности Ферми, состоящей в исчезновении части цилиндров замкнутых траекторий и возникновением новых. Каждая из таких перестроек обладает своей топологической структурой, при этом имеется конечное число топологических типов таких перестроек. Важнейшим обстоятельством в каждой из перестроек является исчезновение части замкнутых траекторий, обладающих экстремальными значениями площади или периода обращения, что приводит к резким наблюдаемым изменениям в картине осцилляционных явлений в процессе перестройки. Особенности таких изменений при этом непосредственно связаны с геометрией исчезающих и появляющихся экстремальных траекторий, определяемой топологическим типом перестройки. В работе представлено детальное сопоставление особенностей изменения картины классических и квантовых ос-

цилляций в момент перестройки с ее топологическим типом и предложены методы идентификации топологических типов по этим особенностям. Предложенные методы, на наш взгляд, могут оказаться весьма полезными при исследовании геометрии достаточно сложных поверхностей Ферми с помощью классических или квантовых осцилляций в сильных магнитных полях.

Финансирование. Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 21-11-00331).

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, ЖЭТФ **31**, 63 (1956).
2. И. М. Лифшиц, В. Г. Песчанский, ЖЭТФ **35**, 1251 (1958).
3. И. М. Лифшиц, В. Г. Песчанский, ЖЭТФ **38**, 188 (1960).
4. И. М. Лифшиц, М. И. Каганов, УФН **69**, 419 (1959).
5. И. М. Лифшиц, М. И. Каганов, УФН **78**, 411 (1962).
6. И. М. Лифшиц, М. И. Каганов, УФН **87**, 389 (1965).
7. И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, *Электронная теория металлов*, Наука, Москва (1971).
8. M. I. Kaganov and V. G. Peschansky, Phys. Rep. **372**, 445 (2002).
9. С. П. Новиков, УМН **37**, 3 (1982).
10. А. В. Зорич, УМН **39**, 235 (1984).
11. И. А. Дынников, УМН **47**, 161 (1992).
12. И. А. Дынников, Математические заметки **53**, 57 (1993).
13. A. V. Zorich, Proc. *Geometric Study of Foliations*, (Tokyo, November 1993), ed. by T. Mizutani et al., World Scientific, Singapore (1994), p. 479.
14. I. A. Dynnikov, *Surfaces in 3-torus: Geometry of Plane Sections*, Proc. of ECM2, BuDA (1996).
15. I. A. Dynnikov, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, Vol. 179, AMS, Providence, RI (1997), p. 45.
16. И. А. Дынников, УМН **54**, 21 (1999).
17. С. П. Новиков, А. Я. Мальцев, Письма в ЖЭТФ **63**, 809 (1996).
18. С. П. Новиков, А. Я. Мальцев, УФН **168**, 249 (1998).
19. С. П. Царев, Частное сообщение (1992-93).
20. А. Я. Мальцев, ЖЭТФ **112**, 1710 (1997).
21. А. Я. Мальцев, С. П. Новиков, Труды МИАН **302**, 296 (2018).
22. A. Ya. Maltsev and S. P. Novikov, Solid State Phys., *Bulletin of Braz. Math. Society*, New Series **34**, 171 (2003).
23. A. Ya. Maltsev and S. P. Novikov, J. Stat. Phys. **115**, 31 (2004).
24. А. Я. Мальцев, С. П. Новиков, УМН **74**, 149 (2019).
25. С. П. Новиков, Р. Де Лео, И. А. Дынников, А. Я. Мальцев, ЖЭТФ **156**, 761 (2019).
26. А. Я. Мальцев, ЖЭТФ **158**, 1139 (2020).
27. Ч. Киттель, *Квантовая теория твердых тел*, Наука, Москва (1967).
28. А. А. Абрикосов, *Основы теории металлов*, Наука, Москва (1987).
29. И. М. Лифшиц, А. М. Косевич, ДАН СССР **96**, 963 (1954).
30. Г. Е. Зильберман, ЖЭТФ **32**, 296 (1957).
31. Г. Е. Зильберман, ЖЭТФ **33**, 387 (1958).
32. Г. Е. Зильберман, ЖЭТФ **34**, 748 (1958).
33. М. Я. Азбель, ЖЭТФ **39**, 1276 (1960).
34. А. А. Слуцкий, ЖЭТФ **53**, 767 (1967).
35. A. Alexandradinata and L. Glazman, Phys. Rev. B **97**, 144422 (2018).