

# ГИДРОМАГНИТНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В НЕОДНОРОДНО ВРАЩАЮЩЕМСЯ СЛОЕ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ НАНОЖИДКОСТИ

*М. И. Копн*<sup>a\*</sup>, *А. В. Тур*<sup>c\*\*</sup>, *В. В. Яновский*<sup>a,b\*\*\*</sup>

<sup>a</sup> *Институт монокристаллов Национальной академии наук Украины  
61001, Харьков, Украина*

<sup>b</sup> *Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина  
61000, Харьков, Украина*

<sup>c</sup> *Université de Toulouse [UPS], CNRS, Institut de Recherche en Astrophysique et Planétologie  
BP 44346, 31028 Toulouse Cedex 4, France*

Поступила в редакцию 15 декабря 2020 г.,  
после переработки 15 декабря 2020 г.  
Принята к публикации 11 января 2021 г.

Исследуется устойчивость замагниченных потоков неоднородно вращающегося слоя электропроводящей наножидкости с учетом эффектов броуновской диффузии и термофореза. В отсутствие градиента температуры рассмотрены новые виды магнитовращательной неустойчивости в аксиальном, азимутальном и спиральном магнитных полях в тонких слоях наножидкости. Получены инкременты и области развития этих неустойчивостей в зависимости от профиля угловой скорости вращения (числа Россби  $Ro$ ) и радиального волнового числа  $k$ . При наличии градиентов температуры и концентрации наночастиц исследуются стационарные режимы неоднородно вращающейся конвекции в аксиальном и спиральном магнитных полях. Получены выражения для критических чисел Рэлея  $Ra_{st}$  и построены кривые нейтральной устойчивости в зависимости от профиля угловой скорости вращения, профиля внешнего азимутального магнитного поля (магнитного числа Россби  $Rb$ ) и радиального волнового числа  $k$ . Определены условия стабилизации и дестабилизации стационарной конвекции в аксиальном и спиральном магнитных полях.

DOI: 10.31857/S0044451021060080

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время, в связи с ростом производительности электронных устройств и развитием высокоэнергетичных технологий, возникает необходимость создания эффективных охлаждающих систем. Перспективным направлением интенсификации теплообмена является повышение теплопроводности жидкости (газа) путем добавления наночастиц с высокой теплопроводностью. Такая смесь жидкости (газа) с частицами твердой фазы получила название наножидкости [1]. В качестве наночастиц используются керамические частицы (оксиды алюминия, меди, кремния), металлические частицы (алюминий, железо, медь) и углеродные нанотрубки,

в качестве базовых жидкостей — вода, этиленгликоль, машинное масло. Добавление наночастиц приводит к повышению теплопроводности базовой жидкости на десятки процентов, а в случае углеродных нанотрубок — в несколько раз. Исследования, проведенные в [2] (см. цитируемую там литературу), показали, что коэффициенты переноса наножидкостей зависят не только от концентрации наночастиц, но и от их размера и материала. В работе [3] было показано, что на перенос тепла может оказывать влияние пространственная неоднородность концентрации наночастиц, которая возникает под действием броуновской диффузии и термофореза (возникновения потока частиц под действием градиента температуры). В связи с этим исследование влияния диффузии и термофореза наночастиц на вынужденную конвекцию наножидкостей в теплообменных устройствах является актуальной задачей.

\* E-mail: michaelkopp0165@gmail.com

\*\* E-mail: Anatoly.Tour@irap.omp.eu

\*\*\* E-mail: yanovsky@isc.kharkov.ua

Наряду с вязкостью и теплопроводностью наножидкостей для различных приложений большую роль играет свойство электропроводности наножидкостей. В недавней работе [4] проведены экспериментальные исследования электропроводности наножидкостей на основе воды и этиленгликоля с частицами меди и алюминия. Там же было показано, что электропроводность наножидкостей практически линейно растет с увеличением концентрации наночастиц и, в отличие от теплопроводности, растет с уменьшением размера частиц. С учетом этого был сделан вывод [4], что механизмы электропроводности и теплопроводности наножидкостей существенно различаются.

Кроме того, возрастает интерес к исследованиям механизма теплопередачи электропроводящих наножидкостей под воздействием магнитного поля с эффектами броуновской диффузии и термофореза [5, 6]. Конвективная неустойчивость в наножидкостном слое с вертикальным магнитным полем для свободных, жестких-жестких и жестких-свободных границ изучалась в работе [7]. Там же показано, что устойчивость наножидкости возрастает с увеличением значения магнитного поля, в то время как увеличение концентрации наночастиц приводит к ускорению начала конвекции. Условия возникновения конвекции в чистых средах в поле силы тяжести при наличии однородного вращения и внешнего магнитного поля изучены достаточно подробно [8–10]. Поэтому представляет интерес исследование конвективной неустойчивости во вращающемся слое наножидкости в присутствии магнитного поля. Впервые эта задача была рассмотрена в работе [11], где исследовано совместное влияние вращения и магнитного поля на возникновение конвекции в горизонтальном слое электропроводящей наножидкости с учетом эффекта броуновского движения наночастиц и термофореза. В работе [11] было установлено, что критическое число Рэлея  $Ra_c$  для наножидкости ниже по сравнению с  $Ra_c$  для обычной жидкости при одинаковых значениях числа Чандрасекара  $Q$  (характеризует меру влияния силы Лоренца) и числа Тейлора  $Ta$  (характеризует меру влияния силы Кориолиса). Как было показано [11], увеличение концентрации наночастиц оказывает дестабилизирующее влияние на начало конвекции, а вращение — стабилизирующее.

В работах [12–14] впервые рассматривалась конвективная неустойчивость неоднородно вращающегося слоя электропроводящей жидкости в постоянном вертикальном магнитном поле  $\mathbf{H}_0 = \text{const}$ , а

в работе [15] — в спиральном магнитном поле. Результаты работ [12–15] показали, что при отсутствии градиента температуры  $Ra = 0$ , т. е. когда нет подогрева, критерии конвективной неустойчивости переходят в известные критерии возникновения стандартной магнитовращательной неустойчивости (МВН) и спиральной МВН в диссипативной электропроводящей среде (плазме) [16, 17]. Еще одним фактором, влияющим на устойчивость неоднородно вращающейся электропроводящей жидкости, является градиент концентрации наночастиц в жидкости. Использование электропроводящих наножидкостей, возможно, решит проблемы, возникающие при использовании жидких металлов для лабораторного моделирования МВН. Кратко остановимся на основных проблемах лабораторного моделирования МВН.

В лабораторных экспериментах неоднородное (дифференциальное) вращение среды моделируется течением Куэтта, заключенным между двумя вращающимися с разной угловой скоростью цилиндрами. Угловая скорость вращения жидкости в такой конфигурации описывается соотношением

$$\Omega(R) = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R^2 (R_2^2 - R_1^2)} = a + \frac{b}{R^2},$$

где  $R_{1,2}$  и  $\Omega_{1,2}$  — соответственно радиус и угловая скорость вращения внутреннего и внешнего цилиндров. Устойчивость такого течения для идеальной проводящей среды в магнитном поле была впервые рассмотрена в работах [19, 20]. Там же показано, что слабое осевое магнитное поле дестабилизирует азимутальное дифференциальное вращение плазмы и при выполнении условия  $d\Omega^2/dR < 0$  в бездиссипативной плазме возникает МВН, или стандартная МВН. Поскольку это условие выполняется и для кеплеровских течений ( $\Omega \propto R^{-3/2}$ ), МВН является наиболее вероятным источником турбулентности в аккреционных дисках. Открытие МВН послужило толчком к многочисленным теоретическим и лабораторным исследованиям по вращению жидких металлов (натрия, галлия) [21–27]. В этих работах показано, что из-за сильного стабилизирующего эффекта, обусловленного магнитной диффузией или малыми значениями магнитного числа Прандтля ( $Pm \ll 1$ ) МВН возникает лишь при достаточно больших угловых скоростях жидкого металла, для которых число Рейнольдса  $Re = \Omega_1 R_1 (R_2 - R_1) / \nu$  ( $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости) является величиной порядка  $10^6$ . При таких больших числах Рейнольдса ламинарность течения жидкос-

ти маловероятна, так как оно становится турбулентным из-за нелинейных неустойчивостей и из-за взаимодействия с цилиндрами.

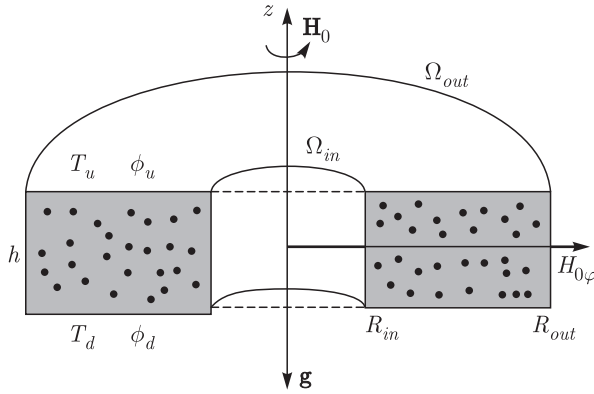
Теоретический анализ, выполненный в работах [22–24, 26], показал, что среди гидродинамически устойчивых профилей вращения самый низкий порог устойчивости имеет место для профиля угловой скорости вращения  $a = 0$ , соответствующего границе гидродинамической устойчивости (линия Рэлея). При этом критическое число Рейнольдса оказывается по величине на два порядка меньше, т. е.  $Re \sim 10^4$  для жидкого натрия. Однако из-за малости магнитного числа Прандтля  $Rm$  порог МВН возрастает на два порядка с  $Re \approx 10^4$  до  $Re \approx 10^6$  при малейшем отклонении профиля угловой скорости вращения от  $\Omega \propto R^{-2}$  в область гидродинамической устойчивости:  $\Omega \propto R^{-2} \rightarrow \Omega \propto R^{-2+\alpha}$ ,  $\alpha > 0$  [27]. В силу недостижимости поддержания профиля вращения в эксперименте с такой точностью в работе [27] было сделано утверждение о невозможности наблюдения МВН в эксперименте с профилем угловой скорости, соответствующим линии Рэлея  $\Omega = b/R^2$ , но эта проблема была решена в работах [28, 29]. Там же было показано, что рост величины аксиального магнитного поля приводит к тому, что изменение порога МВН при отклонении профиля вращения от линии Рэлея перестает быть таким резким, как в случае слабого поля. Вместе с тем, сам порог неустойчивости на линии Рэлея увеличивается пропорционально величине магнитного поля.

В работах [30, 31] было предложено изучать неустойчивость азимутального вращения жидкого галлия в спиральном магнитном поле, т. е. наряду с аксиальным магнитным полем приложено дополнительное внешнее азимутальное магнитное поле. Численные расчеты, проведенные в этих работах, показали, что критическое число Рейнольдса  $Re_c$  в спиральном магнитном поле уменьшается по величине на два порядка. Анализ природы наблюдаемых в эксперименте мод был выполнен в работах [17, 32]. В последней было получено выражение для порога спиральной МВН.

Однако малость магнитного числа Прандтля ( $Rm \ll 1$ ) для жидких металлов является также препятствием для дестабилизации кеплеровских потоков в экспериментах с азимутальными и спиральными полями. Поэтому эксперименты с жидкими металлами нуждаются в дальнейшем улучшении [33]. Аналог астрофизической МВН рассматривался в работе [34], где исследовалось течение Куэтта в вязко-упругой полимерной жидкости. Как утверж-

далось в работах [35, 36], лабораторные эксперименты с полимерными жидкостями позволяют лучше понять физический механизм магнитогидродинамических неустойчивостей.

На основании проведенных в настоящей работе теоретических исследований по реализации стандартной МВН, азимутальной МВН и спиральной МВН в неоднородно вращающемся слое электропроводящей наножидкости предлагается использование электропроводящих наножидкостей для лабораторного моделирования МВН. Содержание работы изложено в следующих разделах. В разд. 2 описана постановка задачи и получены уравнения эволюции малых возмущений в приближении Буссинеска во вращающемся слое несжимаемой электропроводящей наножидкости, находящейся в поле силы тяжести с постоянными градиентами температуры и концентрации наночастиц. Неоднородно вращающийся слой наножидкости находится во внешнем спиральном магнитном поле. В разд. 3 решается задача Рэлея – Бенара для слоя электропроводящей наножидкости, заключенной между двумя вращающимися цилиндрами и подогреваемой снизу. Получено общее дисперсионное уравнение для осесимметричных возмущений с учетом эффектов броуновской диффузии наночастиц и термофореза. В разд. 4–6 рассматриваются гидромагнитные неустойчивости при условии равенства температуры ( $Ra = 0$ ) на границах слоя наножидкости. В разд. 4 проведен анализ дисперсионного уравнения для случая, когда отсутствует азимутальная компонента магнитного поля,  $H_{0\varphi} = 0$ . Получен критерий развития аналога стандартной МВН в тонком слое наножидкости. В разд. 5 проведен анализ дисперсионного уравнения для случая, когда отсутствует аксиальная компонента магнитного поля,  $H_{0z} = 0$ , и получен критерий развития аналога азимутальной МВН в тонком слое наножидкости. В разд. 6 проведен анализ дисперсионного уравнения при наличии внешнего спирального магнитного поля. Также получены критерии развития аналога спиральной МВН в тонком слое наножидкости. В разд. 7 исследуются стационарные режимы конвекции в однородном аксиальном и неоднородном спиральном магнитных полях. Там же получены критические значения чисел Рэлея для стационарной конвективной неустойчивости. Проведен анализ развития этих неустойчивостей для различных профилей угловой скорости вращения  $\Omega(R)$  в зависимости от профиля внешнего азимутального магнитного поля  $B_{0\varphi}(R)$ . В заключении приводятся основные выводы, полученные в настоящей работе.



**Рис. 1.** Электропроводящая наножидкость заполняет слой между двумя вращающимися цилиндрами с угловыми скоростями  $\Omega_{in}$  и  $\Omega_{out}$  и находится в спиральном магнитном поле  $\mathbf{H}_0 = H_{0\varphi}(R)\mathbf{e}_\varphi + H_{0z}\mathbf{e}_z$ . Нижняя поверхность слоя имеет температуру  $T_d$  и объемную долю наночастиц  $\phi_d$ , а верхняя —  $T_u$  и  $\phi_u$ ;  $T_d > T_u$ ,  $\phi_d < \phi_u$

**2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И УРАВНЕНИЯ ЭВОЛЮЦИИ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ**

Рассмотрим слой несжимаемой вязкой электропроводящей наножидкости толщины  $h$ , которая заключена между двумя вращающимися цилиндрами с внутренним  $R_{in}$  и внешним  $R_{out}$  радиусами, причем  $h \ll (R_{out} - R_{in})$ . Наножидкость заключена между двумя параллельными плоскостями  $z = 0$  и  $z = h$ , где температура  $T$  и объемная доля  $\phi$  наночастиц поддерживаются постоянными:  $T = T_d$ ,  $\phi = \phi_d$  при  $z = 0$  и  $T = T_u$ ,  $\phi = \phi_u$  при  $z = h$ , причем  $T_d > T_u$ ,  $\phi_u > \phi_d$  (рис. 1). Считаем, что жидкость находится в постоянном гравитационном поле  $\mathbf{g}$ , направленном по оси  $z$  вертикально вниз:  $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ . Электропроводящая жидкость вращается с угловой скоростью  $\Omega$ , направленной вертикально вверх по оси  $z$ . Вращение жидкости создает стационарный поток в азимутальном направлении:  $\mathbf{V}_0 = \mathbf{e}_\varphi \Omega(R)R$ , где  $\Omega(R)$  — угловая скорость вращения с произвольной зависимостью от координаты  $R$ . Кроме того, мы полагаем, что наножидкость находится в спиральном магнитном поле  $\mathbf{H}_0$ , которое представимо в виде суммы неоднородного азимутального  $H_{0\varphi}(R)$  и однородного аксиального  $H_{0z}$  полей:

$$\mathbf{H}_0 = H_{0\varphi}(R)\mathbf{e}_\varphi + H_{0z}\mathbf{e}_z, \quad H_{0z} = \text{const.} \quad (1)$$

Топологической характеристикой силовых линий спирального магнитного поля (1) является псевдоскалярная величина — магнитная спиральность [37]:

$$\mathbf{H}_0 \cdot \text{rot } \mathbf{H}_0 = \frac{H_{0z}}{R} \frac{\partial}{\partial R}(RH_{0\varphi}). \quad (2)$$

Очевидно, что для исследования данного типа течения удобно использовать цилиндрическую систему координат  $(R, \varphi, z)$ , выбор которой обусловлен возможностью практического применения развиваемой здесь теории.

Для описания конвективных процессов будем использовать уравнения гидродинамики Буссинеска–Обербека несжимаемой электропроводящей наножидкости [7], записанные для цилиндрической системы координат:

$$\begin{aligned} & \rho_0 \left( \frac{\partial V_R}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)V_R - \frac{V_\varphi^2}{R} \right) - \\ & - \frac{\mu_e}{4\pi} \left( (\mathbf{H} \cdot \nabla)H_R - \frac{H_\varphi^2}{R} \right) = -\frac{\partial}{\partial R} \left( P + \frac{\mu_e H^2}{8\pi} \right) + \\ & + \mu \left( \nabla^2 V_R - \frac{2}{R^2} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{V_R}{R^2} \right), \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \rho_0 \left( \frac{\partial V_\varphi}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)V_\varphi + \frac{V_\varphi V_R}{R} \right) - \\ & - \frac{\mu_e}{4\pi} \left( (\mathbf{H} \cdot \nabla)H_\varphi + \frac{H_\varphi H_R}{R} \right) = \\ & = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( P + \frac{\mu_e H^2}{8\pi} \right) + \\ & + \mu \left( \nabla^2 V_\varphi + \frac{2}{R^2} \frac{\partial V_R}{\partial \varphi} - \frac{V_\varphi}{R^2} \right), \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \rho_0 \left( \frac{\partial V_z}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)V_z \right) - \frac{\mu_e}{4\pi} (\mathbf{H} \cdot \nabla)H_z = \\ & = -\frac{\partial}{\partial z} \left( P + \frac{\mu_e H^2}{8\pi} \right) + \mu \nabla^2 V_z - \\ & - [\phi \rho_p + (1 - \phi)\rho_0(1 - \beta(T - T_u))]g, \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\rho c)_f \left( \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)T \right) = k_f \nabla^2 T + \\ & + (\rho c)_p \left( D_B \nabla \phi \cdot \nabla T + D_T \frac{\nabla T \cdot \nabla T}{T_u} \right), \quad (6) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\phi = D_B \nabla^2 \phi + \frac{D_T}{T_u} \nabla^2 T, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial H_R}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)H_R - (\mathbf{H} \cdot \nabla)V_R = \\ & = \eta \left( \nabla^2 H_R - \frac{2}{R^2} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{H_R}{R^2} \right), \quad (8) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial H_\varphi}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) H_\varphi - (\mathbf{H} \cdot \nabla) V_\varphi + \frac{1}{R} (V_\varphi H_R - V_R H_\varphi) = \eta \left( \nabla^2 H_\varphi + \frac{2}{R^2} \frac{\partial H_R}{\partial \varphi} - \frac{H_\varphi}{R^2} \right), \quad (9)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) H_z - (\mathbf{H} \cdot \nabla) V_z = \eta \nabla^2 H_z, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_R}{\partial R} + \frac{V_R}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial H_R}{\partial R} + \frac{H_R}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial H_z}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где скалярное произведение  $\mathbf{A} \cdot \nabla$  и лапласиан  $\Delta \equiv \nabla^2$  соответственно равны

$$\mathbf{A} \cdot \nabla = A_R \frac{\partial}{\partial R} + \frac{A_\varphi}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} + A_z \frac{\partial}{\partial z},$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Здесь  $\rho_0 = \phi \rho_p + (1 - \phi) \rho_f$  — плотность наножида при контрольной температуре  $T_u$ ,  $\rho_p$  — плотность наночастиц,  $\rho_f$  — плотность базовой жидкости при температуре  $T_u$ ,  $\phi$  — объемная доля наночастиц,  $\beta$  — коэффициент теплового расширения,  $(\rho c)_f$  и  $(\rho c)_p$  — эффективные теплоемкости базовой жидкости и наночастиц,  $D_B$  — коэффициент броуновской диффузии,  $D_T$  — коэффициент термофоретической диффузии. Знаки коэффициентов  $D_B$  и  $D_T$  положительные, а сами коэффициенты равны

$$D_B = \frac{k_B T}{3\pi \mu d_p}, \quad D_T = \frac{\mu}{\rho_f} \frac{0.26 k_f}{2k_f + k_p},$$

где  $d_p$  — диаметр наночастиц,  $k_B$  — постоянная Больцмана,  $k_f$  и  $k_p$  — коэффициенты теплопроводности базовой жидкости и наночастиц,  $\mu$  — вязкость базовой жидкости. Коэффициенты магнитной проницаемости  $\mu_e$ , магнитной вязкости  $\eta$  и электропроводности равны

$$\mu_e = \phi \mu_{ep} + (1 - \phi) \mu_{ef}, \quad \eta = \frac{1}{4\pi \mu_e \sigma} = \phi \eta_p + (1 - \phi) \eta_f,$$

$$\sigma = \phi \sigma_p + (1 - \phi) \sigma_f,$$

где  $\mu_{ep}$  и  $\mu_{ef}$  — магнитные проницаемости наночастиц и базовой жидкости,  $\eta_p$  и  $\eta_f$  — магнитные вязкости наночастиц и базовой жидкости,  $\sigma_p$  и  $\sigma_f$  — коэффициенты электропроводности наночастиц и базовой жидкости.

Представим все величины в уравнениях (3)–(11) в виде суммы стационарной и возмущенной частей:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} V_R \\ V_\varphi \\ V_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega(R)R \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_R \\ u_\varphi \\ u_z \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} H_R \\ H_\varphi \\ H_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ H_{0\varphi} \\ H_{0z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_R \\ b_\varphi \\ b_z \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$P = P_b + p, \quad T = T_b + T', \quad \phi = \phi_b + \phi'.$$

Равновесие стационарного течения обеспечивается балансом сил в радиальном направлении:

$$\Omega^2 R = \frac{1}{\rho_0} \frac{dP_b}{dR} + \frac{\mu_e H_{0\varphi}}{4\pi \rho_0 R} \frac{d}{dR} (R H_{0\varphi}). \quad (13)$$

В вертикальном направлении стационарному состоянию удовлетворяет уравнение гидростатики

$$\frac{dP_b}{dz} = -g[\phi_b(\rho_p - \rho_0) + \rho_0 - \rho_0 \beta(T_b - T_u)]. \quad (14)$$

Стационарные профили температуры  $T_b = T_b(z)$  и объемной доли наночастиц  $\phi_b = \phi_b(z)$  находятся из решений уравнений

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{k_f}{(\rho c)_f} \frac{d^2 T_b}{dz^2} + \frac{(\rho c)_p}{(\rho c)_f} \times \\ &\times \left( D_B \frac{d\phi_b}{dz} \frac{dT_b}{dz} + \frac{D_T}{T_u} \left( \frac{dT_b}{dz} \right)^2 \right), \quad (15) \\ 0 &= D_B \frac{d^2 \phi_b}{dz^2} + \frac{D_T}{T_u} \frac{d^2 T_b}{dz^2}. \end{aligned}$$

С учетом граничных условий находим линейные зависимости от  $z$  для  $T_b(z)$  и  $\phi_b(z)$ :

$$T_b(z) = T_d - \frac{T_d - T_u}{h} z, \quad \phi_b(z) = \phi_d - \frac{\phi_d - \phi_u}{h} z.$$

Далее нас будет интересовать вопрос об устойчивости малых возмущений физических величин  $\mathbf{u} = (u_R, u_\varphi, u_z)$ ,  $\mathbf{b} = (b_R, b_\varphi, b_z)$ ,  $p, T', \phi'$  на фоне стационарного состояния. Подставляя уравнения (12) в (3)–(11), получим уравнения эволюции малых возмущений в линейном приближении:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_R}{\partial t} + \Omega \frac{\partial u_R}{\partial \varphi} - 2\Omega u_\varphi - \frac{\mu_e}{4\pi \rho_0} \times \\ \times \left( \frac{H_{0\varphi}}{R} \frac{\partial b_R}{\partial \varphi} - \frac{2H_{0\varphi} b_\varphi}{R} + H_{0z} \frac{\partial b_R}{\partial z} \right) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial R} + \\ + \nu \left( \nabla^2 u_R - \frac{2}{R^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{u_R}{R^2} \right), \quad \nu = \frac{\mu}{\rho_0}, \quad (16) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + \Omega \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + 2\Omega(1 + \text{Ro})u_R - \\ & - \frac{1}{4\pi\rho_0} \left( \frac{H_{0\varphi}}{R} \frac{\partial b_R}{\partial \varphi} + \frac{2H_{0\varphi}}{R} (1 + \text{Rb}) + H_{0z} \frac{\partial b_\varphi}{\partial z} \right) = \\ & = -\frac{1}{\rho_0 R} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \varphi} + \nu \left( \nabla^2 u_\varphi + \frac{2}{R^2} \frac{\partial u_R}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{R^2} \right), \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_z}{\partial t} + \Omega \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} - \frac{\mu_e}{4\pi\rho_0} \left( \frac{H_{0\varphi}}{R} \frac{\partial b_z}{\partial \varphi} + H_{0z} \frac{\partial b_\varphi}{\partial z} \right) = \\ & = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + \nu \nabla^2 u_z - \frac{g}{\rho_0} [\phi'(\rho_p - \rho_0) - \rho_0 \beta T'], \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial T'}{\partial t} + \Omega \frac{\partial T'}{\partial \varphi} - u_z \left( \frac{T_d - T_u}{h} \right) = \chi_f \nabla^2 T' - \\ & - \frac{(\rho c)_p}{(\rho c)_f} \left[ D_B \left( \frac{T_d - T_u}{h} \right) \frac{d\phi'}{dz} + D_B \left( \frac{\phi_d - \phi_u}{h} \right) \frac{dT'}{dz} + \right. \\ & \left. + \frac{2D_T}{T_u} \left( \frac{T_d - T_u}{h} \right) \frac{dT'}{dz} \right], \quad \chi_f = \frac{k_f}{(\rho c)_f}, \quad (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \phi'}{\partial t} + \Omega \frac{\partial \phi'}{\partial \varphi} + u_z \left( \frac{\phi_u - \phi_d}{h} \right) = \\ & = D_B \nabla^2 \phi' + \frac{D_T}{T_u} \nabla^2 T', \quad (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial b_R}{\partial t} + \Omega \frac{\partial b_R}{\partial \varphi} - \frac{H_{0\varphi}}{R} \frac{\partial u_R}{\partial \varphi} - H_{0z} \frac{\partial u_R}{\partial z} = \\ & = \eta \left( \nabla^2 b_R - \frac{2}{R^2} \frac{\partial b_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{b_R}{R^2} \right), \quad (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial b_\varphi}{\partial t} + \Omega \frac{\partial b_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{H_{0\varphi}}{R} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - H_{0z} \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} - 2\Omega \text{Rb} b_R + \\ & + \frac{2H_{0\varphi}}{R} \text{Rb} u_R = \eta \left( \nabla^2 b_\varphi + \frac{2}{R^2} \frac{\partial b_R}{\partial \varphi} - \frac{b_\varphi}{R^2} \right), \quad (22) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial b_z}{\partial t} + \Omega \frac{\partial b_z}{\partial \varphi} - \frac{H_{0\varphi}}{R} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} - H_{0z} \frac{\partial u_z}{\partial z} = \eta \nabla^2 b_z, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_R}{\partial R} + \frac{u_R}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \\ & \frac{\partial b_R}{\partial R} + \frac{b_R}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial b_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial b_z}{\partial z} = 0, \quad (24) \end{aligned}$$

где  $\tilde{p} = p + (1/4\pi) \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{b}$  — общее возмущенное давление,

$$\text{Ro} = \frac{R}{2\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial R}$$

— гидродинамическое число Россби, характеризующее неоднородность вращения среды,

$$\text{Rb} = \frac{R}{2H_{0\varphi} R^{-1}} \frac{\partial}{\partial R} (H_{0\varphi} R^{-1})$$

— магнитное число Россби, характеризующее свойства азимутального магнитного поля [17].

Отметим, что для твердотельного вращения параметр Россби равен нулю,  $\text{Ro} = 0$ , в случае кеплеровского вращения,  $\Omega(R) \propto R^{-3/2}$ , параметр Россби равен  $\text{Ro} = -3/4$ , для рэлеевского профиля угловой скорости  $\Omega(R) \propto R^{-2}$ , соответственно,  $\text{Ro} = -1$ . Если азимутальная составляющая  $H_{0\varphi}(R) = 2I/R$  магнитного поля  $\mathbf{H}_0$  создается внешним аксиальным током  $I$ , изолированным от жидкости, то для такой зависимости ( $H_{0\varphi} \propto R^{-1}$ ) магнитное число Россби  $\text{Rb} = -1$ . В этом случае спиральность магнитного поля равна нулю:  $\mathbf{H}_0 \cdot \text{rot} \mathbf{H}_0 = 0$ . Магнитное число Россби равно нулю,  $\text{Rb} = 0$ , при линейной зависимости азимутального магнитного поля от радиальной координаты,  $H_{0\varphi}(R) \propto R$ , но спиральность магнитного поля при этом не исчезает:  $\mathbf{H}_0 \cdot \text{rot} \mathbf{H}_0 = 2H_{0z}H_{0\varphi}/R$ . Магнитному числу Россби  $\text{Rb} = 1/2$  соответствует квадратичная зависимость азимутального магнитного поля от радиального направления,  $H_{0\varphi}(R) \propto R^2$ . Для этого случая спиральность магнитного поля равна  $\mathbf{H}_0 \cdot \text{rot} \mathbf{H}_0 = 3H_{0z}H_{0\varphi}/R$ . Отметим, что для случая однородного азимутального магнитного поля  $H_{0\varphi} = \text{const}$  спиральность не исчезает,  $\mathbf{H}_0 \cdot \text{rot} \mathbf{H}_0 = H_{0z}H_{0\varphi}/R$ , а магнитное число Россби принимает значение  $\text{Rb} = -1/2$ .

### 3. ЛОКАЛЬНОЕ ВКБ-ПРИБЛИЖЕНИЕ И ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Систему уравнений (16)–(24) будем использовать для исследования вопроса устойчивости малых осесимметричных возмущений. Поскольку характерный масштаб неоднородности среды в горизонтальной плоскости больше, чем в вертикальном направлении,  $L_R \gg L_h$ , мы можем применить локальный метод ВКБ для возмущений, зависящих от радиальных координат  $R$ . Для этой цели разложим все величины в ряд Тейлора в окрестности фиксированной точки  $R_0$ , оставляя члены нулевого порядка по локальным координатам  $\tilde{R} = R - R_0$ . В результате получим систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с учетом следующих соотношений:

$$\Omega_0 = \Omega(R_0), \quad \nabla^2 \rightarrow \hat{D}^2 + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{R}^2} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial}{\partial \tilde{R}}, \quad \hat{D} \equiv \frac{\partial}{\partial z},$$

$$\left( \nabla^2 \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \right)_R = \nabla^2 \begin{pmatrix} u_R \\ b_R \end{pmatrix} - \frac{1}{R_0^2} \begin{pmatrix} u_R \\ b_R \end{pmatrix},$$

$$\left(\nabla^2 \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}\right)_\varphi = \nabla^2 \begin{pmatrix} u_\varphi \\ b_\varphi \end{pmatrix} - \frac{1}{R_0^2} \begin{pmatrix} u_\varphi \\ b_\varphi \end{pmatrix}.$$

Все возмущения в системе уравнений (16)–(24) представим в виде плоских волн:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{b} \\ T' \\ \phi' \\ \tilde{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}(z) \\ \mathbf{B}(z) \\ \Theta(z) \\ \Phi(z) \\ \tilde{P}(z) \end{pmatrix} \exp(\gamma t + ik\tilde{R}). \quad (25)$$

Подставляя (25) в систему уравнений (16)–(24), в коротковолновом приближении  $k \gg 1/R_0$ , пренебрегая членами  $ik/R_0 - 1/R_0^2$ , находим

$$\hat{L}_\nu U_R + \frac{2\Omega}{\nu} U_\varphi - \frac{\mu_e H_{0\varphi}}{2\pi\rho_0\nu R_0} B_\varphi + \frac{\mu_e H_{0z}}{4\pi\rho_0\nu} \hat{D} B_R - \frac{ik}{\nu\rho_0} \tilde{P} = 0, \quad (26)$$

$$\hat{L}_\nu U_\varphi - \frac{2\Omega}{\nu} (1+Ro) U_R + \frac{\mu_e H_{0\varphi}}{2\pi\rho_0\nu R_0} (1+Rb) B_R + \frac{\mu_e H_{0z}}{4\pi\rho_0\nu} \hat{D} B_\varphi = 0, \quad (27)$$

$$\hat{L}_\nu U_z + \frac{\mu_e H_{0z}}{4\pi\rho_0\nu} \hat{D} H_z - \frac{\hat{D}}{\nu\rho_0} \tilde{P} - \frac{g}{\rho_0\nu} (\Phi(\rho_p - \rho_0) - \rho_0\beta\Theta) = 0, \quad (28)$$

$$\hat{L}_\chi \Theta + \left(\frac{T_d - T_u}{\chi_f h}\right) U_z - \frac{(\rho c)_p D_B}{(\rho c)_f \chi_f} \left(\frac{T_d - T_u}{h}\right) \hat{D} \Phi - \frac{(\rho c)_p}{(\rho c)_f \chi_f} \left[ D_B \left(\frac{\phi_d - \phi_u}{h}\right) + \frac{2D_T}{T_u} \left(\frac{T_d - T_u}{h}\right) \right] \hat{D} \Theta = 0, \quad (29)$$

$$\hat{L}_\phi \Phi + \left(\frac{\phi_d - \phi_u}{D_B h}\right) U_z + \frac{D_T}{D_B T_u} (\hat{D}^2 - k^2) \Theta = 0, \quad (30)$$

$$\hat{L}_\eta B_R + \frac{H_{0z}}{\eta} \hat{D} U_R = 0, \quad (31)$$

$$\hat{L}_\eta B_\varphi + \frac{H_{0z}}{\eta} \hat{D} U_\varphi - \frac{2H_{0\varphi}}{\eta R_0} Rb U_R + \frac{2\Omega}{\eta} Ro B_R = 0, \quad (32)$$

$$\hat{L}_\eta B_z + \frac{H_{0z}}{\eta} \hat{D} U_z = 0. \quad (33)$$

Здесь введены следующие обозначения для операторов:

$$\hat{L}_\nu = \hat{D}^2 - \left(\frac{\gamma}{\nu} + k^2\right), \quad \hat{L}_\eta = \hat{D}^2 - \left(\frac{\gamma}{\eta} + k^2\right),$$

$$\hat{L}_\chi = \hat{D}^2 - \left(\frac{\gamma}{\chi_f} + k^2\right), \quad \hat{L}_\phi = \hat{D}^2 - \left(\frac{\gamma}{D_B} + k^2\right).$$

Для последующего анализа системы уравнений (26)–(33) удобно привести ее к безразмерному виду, вводя безразмерные величины, которые отметим звездочкой:

$$(R_0^*, z^*) = h^{-1}(R_0, z),$$

$$(U_R^*, U_\varphi^*, U_z^*) = \frac{h}{\chi_f}(U_R, U_\varphi, U_z),$$

$$(B_R^*, B_\varphi^*, B_z^*) = H_0^{-1}(B_R, B_\varphi, B_z), \quad H_0 = H_{0z},$$

$$\varphi^* = \varphi, \quad \Theta^* = \frac{\Theta}{T_d - T_u}, \quad \Phi^* = \frac{\Phi}{\phi_u - \phi_d},$$

$$\tilde{P}^* = \tilde{P} \left(\frac{h^2}{\rho_0 \nu \chi_f}\right), \quad t^* = t \left(\frac{\nu}{h^2}\right), \quad \frac{\partial}{\partial t^*} = \frac{h^2}{\nu} \frac{\partial}{\partial t}.$$

Опуская звездочку, получим следующую систему безразмерных уравнений:

$$\hat{L}_\nu U_R + \sqrt{\text{Ta}} U_\varphi - 2 \text{Pr Pm}^{-1} \text{Q} \xi B_\varphi + \text{Pr Pm}^{-1} \text{Q} \hat{D} B_R - ik \tilde{P} = 0, \quad (34)$$

$$\hat{L}_\nu U_\varphi - \sqrt{\text{Ta}} (1+Ro) U_R + 2 \text{Pr Pm}^{-1} \text{Q} \xi (1+Rb) B_R + \text{Pr Pm}^{-1} \text{Q} \hat{D} B_\varphi = 0, \quad (35)$$

$$\hat{L}_\nu U_z + \text{Pr Pm}^{-1} \text{Q} \hat{D} B_z - \hat{D} \tilde{P} + \text{Ra} \Theta - R_n \Phi = 0, \quad (36)$$

$$\hat{L}_\chi \Theta + U_z + \frac{N_B}{L_e} (\hat{D} \Theta - \hat{D} \Phi) - \frac{2N_A N_B}{L_e} \hat{D} \Theta = 0, \quad (37)$$

$$\hat{L}_\phi \Phi - L_e U_z + N_A (\hat{D}^2 - k^2) \Theta = 0, \quad (38)$$

$$\hat{L}_\eta B_R + \text{Pr}^{-1} \text{Pm} \hat{D} U_R = 0, \quad (39)$$

$$\hat{L}_\eta B_\varphi + \text{Pr}^{-1} \text{Pm} \hat{D} U_\varphi - 2 \text{Pr}^{-1} \text{Pm} \xi Rb U_R + \text{Pm Ro} \sqrt{\text{Ta}} B_R = 0, \quad (40)$$

$$\hat{L}_\eta B_z + \text{Pr}^{-1} \text{Pm} \hat{D} U_z = 0, \quad (41)$$

где операторы  $\hat{L}_\nu, \hat{L}_\eta, \hat{L}_\chi, \hat{L}_\phi$  в безразмерных переменных имеют вид

$$\hat{L}_\nu = \hat{D}^2 - \gamma - k^2, \quad \hat{L}_\eta = \hat{D}^2 - \text{Pm} \gamma - k^2,$$

$$\hat{L}_\chi = \hat{D}^2 - \text{Pr} \gamma - k^2, \quad \hat{L}_\phi = \hat{D}^2 - \text{Pr} L_e \gamma - k^2.$$

В уравнениях (34)–(41) введены безразмерные параметры  $\text{Ta} = 4\Omega^2 h^4 / \nu^2$  — число Тейлора,  $\text{Pr} = \nu / \chi_f$  — число Прандтля,  $\text{Pm} = \nu / \eta$  — магнитное число Прандтля,  $\text{Q} = \mu_e H_0^2 h^2 / 4\pi\rho_0\nu\eta$  —

число Чандрасекара,  $\xi = H_{0\varphi}h/R_0H_0$  — отношение азимутального магнитного поля к аксиальному,  $Ra = (T_d - T_u)\rho_0g\beta h^3/\mu\chi_f$  — число Рэлея,  $R_n = (\rho_p - \rho_f)(\phi_u - \phi_d)gh^3/\mu\chi_f$  — концентрационное число Рэлея,  $L_e = \chi_f/D_B$  — число Льюиса,

$$N_B = (\phi_u - \phi_d) \frac{(\rho c)_p}{(\rho c)_f}$$

— коэффициент, характеризующий прирост плотности наночастиц, и

$$N_A = \frac{D_T(T_d - T_u)}{D_B T_u (\phi_u - \phi_d)}$$

— коэффициент модифицированной диффузии.

Уравнения (34)–(41) дополняются уравнениями соленоидальности полей  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{b}$ :

$$\widehat{D}U_z + ikU_R = 0, \quad \widehat{D}B_z + ikB_R = 0. \quad (42)$$

Используя условие (42), из уравнений (34) и (36) исключаем давление  $\tilde{P}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{P} = & \frac{1}{\widehat{D}^2 - k^2} \left[ \sqrt{\text{Ta}} ik U_\varphi - \right. \\ & - 2Q\xi ik \left( -\frac{\widehat{D}U_\varphi}{\widehat{L}_\eta} + 2\xi Rb \frac{U_R}{\widehat{L}_\eta} + \text{PmRo} \sqrt{\text{Ta}} \frac{\widehat{D}}{\widehat{L}_\eta^2} U_R \right) - \\ & - \text{Ra} \frac{\widehat{D}}{\widehat{L}} \left( \widehat{L}_\phi - \frac{N_B}{L_e} \widehat{D} \right) U_z - \\ & - R_n \frac{\widehat{D}}{\widehat{L}\widehat{L}_\phi} \left( \widehat{L}L_e + N_A (\widehat{D}^2 - k^2) \times \right. \\ & \left. \times \left( \widehat{L}_\phi - \frac{N_B}{L_e} \widehat{D} \right) \right) U_z \Big], \quad (43) \end{aligned}$$

где оператор

$$\widehat{L} = \widehat{L}_\chi \widehat{L}_\phi + \frac{N_B}{L_e} (1 - 2N_A) \widehat{L}_\phi \widehat{D} + \frac{N_A N_B}{L_e} (\widehat{D}^2 - k^2) \widehat{D}.$$

Подставляя выражение (43) в систему линейных уравнений (34)–(41), в результате несложных, но громоздких преобразований получим одно дифференциальное уравнение для  $U_z$ :

$$\begin{aligned} & [\widehat{a}_{33} (\widehat{a}_{11} \widehat{a}_{22} - \widehat{a}_{21} \widehat{a}_{12}) + \\ & + \widehat{a}_{13} (\widehat{a}_{21} \widehat{a}_{32} - \widehat{a}_{31} \widehat{a}_{22})] U_z = 0, \quad (44) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \widehat{a}_{11} = & \widehat{L}_\nu - Q \frac{\widehat{D}^2}{\widehat{L}_\eta} - \\ & - 2Q\xi \left( 2\xi Rb + \sqrt{\text{Ta}} \text{RoPm} \frac{\widehat{D}}{\widehat{L}_\eta} \right) \frac{\widehat{D}^2}{\widehat{L}_\eta (\widehat{D}^2 - k^2)}, \end{aligned}$$

$$\widehat{a}_{12} = \frac{\widehat{D}^2}{\widehat{D}^2 - k^2} \left( \sqrt{\text{Ta}} + 2Q\xi \frac{\widehat{D}}{\widehat{L}_\eta} \right),$$

$$\begin{aligned} \widehat{a}_{13} = & \frac{ik\widehat{D}}{\widehat{D}^2 - k^2} \left[ \text{Ra} \frac{\widehat{L}_\phi - \frac{N_B}{L_e} \widehat{D}}{\widehat{L}} + \right. \\ & \left. + \frac{R_n}{\widehat{L}\widehat{L}_\phi} \left( \widehat{L}L_e + N_A (\widehat{D}^2 - k^2) \left( \widehat{L}_\phi - \frac{N_B}{L_e} \widehat{D} \right) \right) \right], \end{aligned}$$

$$\widehat{a}_{21} = -\sqrt{\text{Ta}}(1 + \text{Ro}) + Q\text{RoPm} \sqrt{\text{Ta}} \frac{\widehat{D}^2}{\widehat{L}_\eta^2} - 2Q\xi \frac{\widehat{D}}{\widehat{L}_\eta},$$

$$\widehat{a}_{22} = \widehat{L}_\nu - Q \frac{\widehat{D}^2}{\widehat{L}_\eta},$$

$$\widehat{a}_{31} = \frac{2Q\xi ik}{\widehat{D}^2 - k^2} \left( 2\xi Rb \frac{\widehat{D}}{\widehat{L}_\eta} + \sqrt{\text{Ta}} \text{RoPm} \frac{\widehat{D}^2}{\widehat{L}_\eta^2} \right),$$

$$\widehat{a}_{32} = -\frac{ik\widehat{D}}{\widehat{D}^2 - k^2} \left( \sqrt{\text{Ta}} + 2Q\xi \frac{\widehat{D}}{\widehat{L}_\eta} \right),$$

$$\begin{aligned} \widehat{a}_{33} = & \widehat{L}_\nu - Q \frac{\widehat{D}^2}{\widehat{L}_\eta} + \frac{k^2 \text{Ra}}{\widehat{L}(\widehat{D}^2 - k^2)} \left( \widehat{L}_\phi - \frac{N_B}{L_e} \widehat{D} \right) + \\ & + \frac{k^2 R_n}{\widehat{L}\widehat{L}_\phi (\widehat{D}^2 - k^2)} \left( \widehat{L}L_e + N_A (\widehat{D}^2 - k^2) \left( \widehat{L}_\phi - \frac{N_B}{L_e} \widehat{D} \right) \right). \end{aligned}$$

Уравнение (44) дополняется граничными условиями только в  $z$ -направлении:

$$U_z = \frac{d^2 U_z}{dz^2} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \quad z = 1. \quad (45)$$

Уравнение (44) описывает конвективные явления в тонком слое неоднородно вращающейся электропроводящей наножидкости во внешнем спиральном магнитном поле.

Выберем функцию  $U_z$ , удовлетворяющую свободным граничным условиям (45), в следующем виде:

$$U_z = U_{0z} \sin n\pi z \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (46)$$

где  $U_{0z} = \text{const}$  — амплитуда возмущений  $z$ -компоненты скорости. Подставляя (46) в (44) и проводя интегрирование по толщине слоя  $z = (0, 1)$ , получим дисперсионное уравнение для одномодового приближения ( $n = 1$ ):



$$\begin{aligned} \text{Ra} = & \left[ a^2 \Gamma_A^4 \Gamma_\eta (a^2 \Gamma_A^2 \Gamma_\phi^2 \Gamma_\chi - m_0) + a^2 \Gamma_A^2 \Gamma_\phi^2 \Gamma_\chi m_1 - \right. \\ & \left. - \pi^2 a^2 \Gamma_A^2 \Gamma_\phi \left( \frac{N_B}{L_e} (1 - 2N_A) \Gamma_\phi + \frac{N_A N_B}{L_e} a^2 \right) m_2 \right] \times \\ & \times \left[ k^2 \Gamma_\eta \Gamma_\phi (a^2 \Gamma_\eta \Gamma_\phi \Gamma_A^4 + \frac{\pi^2}{L_e} (N_B - N_A) m_2) \right]^{-1}, \quad (47) \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\Gamma_A^2 = (\gamma + a^2)(\gamma \text{Pm} + a^2) + \pi^2 \text{Q}, \quad \Gamma_\chi = \gamma \text{Pr} + a^2,$$

$$\Gamma_\eta = \gamma \text{Pm} + a^2, \quad \Gamma_\phi = \gamma \text{Pr} L_e + a^2,$$

$$a^2 = \pi^2 + k^2, \quad m_0 = k^2 \text{R}_n \Gamma_\eta \Gamma_\phi (L_e \Gamma_\chi + a^2 N_A),$$

$$\begin{aligned} m_1 = & \pi^2 \text{Ta} (1 + \text{Ro}) \Gamma_\eta^3 + \pi^4 \text{Q} \text{Ta} \text{Ro} \text{Pm} \Gamma_\eta - \\ & - 4\pi^4 \text{Q}^2 \xi^2 \Gamma_\eta - 4\pi^2 \text{Q} \xi^2 \Gamma_A^2 \text{Rb} \Gamma_\eta, \end{aligned}$$

$$m_2 = 2\pi^2 \text{Q} \xi \sqrt{\text{Ta}} [(2 + \text{Ro}) \Gamma_\eta^2 + \text{Pm} \text{Ro} (\pi^2 \text{Q} - \Gamma_A^2)].$$

В отсутствие азимутального магнитного поля ( $\xi = 0$ ) и наночастиц ( $\text{R}_n = N_B = 0$ ) дисперсионное уравнение (47) совпадает с результатами работы [12], а при  $\xi \neq 0$  и  $\text{R}_n = N_B = 0$  — с результатами работы [15].

#### 4. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ СТАНДАРТНОЙ МВН В ТОНКИХ СЛОЯХ НАНОЖИДКОСТИ

Рассмотрим случай, когда температура на границах слоя наножидкости одинаковая ( $\text{Ra} = N_A = 0$ ) и внешнее азимутальное магнитное поле отсутствует ( $\xi = 0$ ). Тогда из уравнения (47) мы получим дисперсионное уравнение для стандартной МВН в тонком слое наножидкости в виде полинома шестой степени по  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\gamma) \equiv & a_0 \gamma^6 + a_1 \gamma^5 + a_2 \gamma^4 + a_3 \gamma^3 + \\ & + a_4 \gamma^2 + a_5 \gamma + a_6 = 0, \quad (48) \end{aligned}$$

где коэффициенты  $a_j$  ( $j = 0, \dots, 6$ ) имеют вид

$$a_0 = \text{Pr}^2 \text{Pm}^2 L_e a^2,$$

$$a_1 = 2\text{Pr}^2 \text{Pm} L_e a^4 (1 + \text{Pm}) + \text{Pr} (1 + L_e) a^4 \text{Pm}^2,$$

$$\begin{aligned} a_2 = & \text{Pr}^2 L_e [a^6 (1 + 4\text{Pm} + \text{Pm}^2) + 2a^2 \text{Pm} \pi^2 \text{Q} + \\ & + \pi^2 \text{Pm}^2 \text{Ta} (1 + \text{Ro})] + 2a^6 (1 + L_e) \text{Pr} \text{Pm} (1 + \text{Pm}) + \\ & + a^6 \text{Pm}^2 - k^2 \text{R}_n L_e \text{Pm}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 = & \text{Pr}^2 L_e [2a^8 (1 + \text{Pm}) + 2\pi^2 a^4 \text{Q} (1 + \text{Pm}) + \\ & + 2\pi^2 a^2 \text{Pm} \text{Ta} (1 + \text{Ro})] + a^2 (1 + L_e) \times \\ & \times \text{Pr} [a^6 (1 + 4\text{Pm} + \text{Pm}^2) + 2a^2 \text{Pm} \pi^2 \text{Q} + \\ & + \pi^2 \text{Pm}^2 \text{Ta} (1 + \text{Ro})] + 2a^8 \text{Pm} (1 + \text{Pm}) - \\ & - k^2 \text{R}_n L_e (\text{Pr} \text{Pm} a^2 (2 + \text{Pm}) + a^2 \text{Pm}^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_4 = & a^2 \text{Pr} (1 + L_e) [2a^8 (1 + \text{Pm}) + 2\pi^2 a^4 \text{Q} (1 + \text{Pm}) + \\ & + 2\pi^2 a^2 \text{Pm} \text{Ta} (1 + \text{Ro})] + \text{Pr}^2 L_e [a^2 (a^4 + \pi^2 \text{Q})^2 + \\ & + \pi^2 a^4 \text{Ta} (1 + \text{Ro}) + \pi^4 \text{Pm} \text{Ro} \text{Ta} \text{Q}] + \\ & + a^4 [a^6 (1 + 4\text{Pm} + \text{Pm}^2) + 2a^2 \text{Pm} \pi^2 \text{Q} + \\ & + \pi^2 \text{Pm}^2 \text{Ta} (1 + \text{Ro})] - k^2 \text{R}_n L_e (\text{Pr} (a^4 (1 + 2\text{Pm}) + \\ & + \pi^2 \text{Q} \text{Pm}) + a^4 \text{Pm} (2 + \text{Pm})), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_5 = & a^2 (1 + L_e) \text{Pr} [a^2 (a^4 + \pi^2 \text{Q})^2 + \pi^2 a^4 \text{Ta} (1 + \text{Ro}) + \\ & + \pi^4 \text{Pm} \text{Ro} \text{Ta} \text{Q}] + a^4 [2a^8 (1 + \text{Pm}) + 2\pi^2 a^4 \text{Q} (1 + \text{Pm}) + \\ & + 2\pi^2 a^2 \text{Pm} \text{Ta} (1 + \text{Ro})] - k^2 \text{R}_n L_e (a^2 \text{Pr} (a^4 + \pi^2 \text{Q}) + \\ & + a^6 (1 + 2\text{Pm}) + \pi^2 a^2 \text{Q} \text{Pm}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_6 = & a^4 [a^2 (a^4 + \pi^2 \text{Q})^2 + \pi^2 a^4 \text{Ta} (1 + \text{Ro}) + \\ & + \pi^4 \text{Pm} \text{Ro} \text{Ta} \text{Q}] - k^2 a^4 (a^4 + \pi^2 \text{Q}) \text{R}_n L_e. \end{aligned}$$

В предельном случае, когда нет наночастиц, т. е. для «чистой» электропроводящей жидкости, дисперсионное уравнение (48) совпадает с результатами работы [13]. Аналитическое решение уравнения (48) в общем случае невозможно. Однако вывод об устойчивости возмущений, описываемых уравнением (48) с действительными коэффициентами, можно сделать, не решая его, а лишь анализируя его коэффициенты с применением критериев Рауса–Гурвица или Лъенара–Шипара [38]. В последнем критерии число детерминантных неравенств примерно вдвое меньше, чем в условиях Рауса–Гурвица, поэтому целесообразно его использование. Критерий Лъенара–Шипара асимптотической устойчивости возмущений, описываемых алгебраическим уравнением (48), состоит в следующем. Для того чтобы многочлен  $\mathcal{P}(\gamma)$  имел все корни с отрицательными вещественными частями, необходимо и достаточно, чтобы

а) все коэффициенты многочлена  $\mathcal{P}(\gamma)$  были положительны:  $a_j > 0, j = 0, \dots, 6$ ;

б) имели место неравенства для определителей Гурвица:  $\Delta_{j-1} > 0, \Delta_{j-3} > 0, \dots$ , где  $\Delta_m$  — обозначает определитель Гурвица порядка  $m$ :

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots \\ \dots & \dots & a_m & \dots \end{vmatrix}.$$

Используя алгоритм Льенара–Шипара, получим необходимые и достаточные условия устойчивости:

$$a_j > 0, \quad j = 0, \dots, 6, \quad \Delta_3 > 0, \quad \Delta_5 > 0. \quad (49)$$

Подставляя значения коэффициентов  $a_j$  в условия (49), находим следующие неравенства:

$$1. (a_0 > 0) \Rightarrow \text{Pr}^2 \text{Pm}^2 L_e a^2 > 0,$$

$$(a_1 > 0) \Rightarrow 2\text{Pr}^2 \text{Pm} L_e a^4 (1 + \text{Pm}) + \text{Pr} (1 + L_e) a^4 \text{Pm}^2 > 0.$$

Эти неравенства выполняются автоматически.

$$2. (a_2 > 0) \Rightarrow \text{Pr}^2 L_e [a^6 (1 + 4\text{Pm} + \text{Pm}^2) + 2a^2 \text{Pm} \pi^2 Q + \pi^2 \text{Pm}^2 \text{Ta} (1 + \text{Ro})] + 2a^6 (1 + L_e) \text{Pr} \text{Pm} (1 + \text{Pm}) + a^6 \text{Pm}^2 > k^2 R_n L_e \text{Pm}^2.$$

Отсюда видно, что диссипативные процессы естественно приводят к стабилизации устойчивости течений наножидкости. Стабилизирующими факторами также выступают однородное магнитное поле и неоднородное вращение, если профиль угловой скорости вращения соответствует положительным числам Россби ( $\text{Ro} > 0$ ). Напротив, концентрация наночастиц приводит к дестабилизации течения наножидкости.

$$3. (a_3 > 0) \Rightarrow \text{Pr}^2 L_e [2a^8 (1 + \text{Pm}) + 2\pi^2 a^4 Q (1 + \text{Pm}) + 2\pi^2 a^2 \text{Pm} \text{Ta} (1 + \text{Ro})] + a^2 (1 + L_e) \text{Pr} \times [a^6 (1 + 4\text{Pm} + \text{Pm}^2) + 2a^2 \text{Pm} \pi^2 Q + \pi^2 \text{Pm}^2 \text{Ta} (1 + \text{Ro})] + 2a^8 \text{Pm} (1 + \text{Pm}) > k^2 R_n L_e \times (\text{Pr} \text{Pm} a^2 (2 + \text{Pm}) + a^2 \text{Pm}^2).$$

Отсюда мы видим, что однородное магнитное поле и неоднородное вращение с положительными числами Россби ( $\text{Ro} > 0$ ) также оказывают стабилизирующее действие, а концентрация наночастиц (члены с концентрационным числом Рэлея  $R_n$ ) оказывает дестабилизирующее влияние. Для «чистой», идеально электропроводящей, жидкости в однородном магнитном поле это неравенство совпадает с известным критерием устойчивости Велихова [20]:

$$2\pi^2 Q \text{Pm}^{-1} + \frac{\pi^2}{a^2} \text{Ta} (1 + \text{Ro}) > 0,$$

или, при переходе к размерным переменным

$$\frac{\pi^2 Q}{\text{Pm}} \rightarrow \frac{h^4}{\nu^2} \omega_A^2, \quad \text{Ta} (1 + \text{Ro}) \rightarrow \frac{4\Omega^2 h^4}{\nu^2} (1 + \text{Ro}),$$

$$\frac{\pi^2}{a^2} \rightarrow \xi^2 = \frac{k_z^2}{k_z^2 + k_R^2},$$

получим

$$\omega_A^2 + 2\Omega^2 \xi^2 (1 + \text{Ro}) > 0,$$

где  $\omega_A = \sqrt{\mu_e k_z^2 H_0^2 / 4\pi\rho_0}$  — альфвеновская частота.

4. Неравенства  $a_4 > 0$  и  $a_5 > 0$  не содержат новых условий стабилизации возмущений.

5. Неравенство  $a_6 > 0$  запишем в виде

$$\text{Ro} > -\frac{a^2 (a^4 + \pi^2 Q)^2 + \pi^2 a^4 \text{Ta}}{\pi^2 \text{Ta} (a^4 + \pi^2 Q \text{Pm})} + \frac{k^2 (a^4 + \pi^2 Q) R_n L_e}{\pi^2 \text{Ta} (a^4 + \pi^2 Q \text{Pm})} = \text{Ro}_{cr}, \quad (50)$$

где параметр  $\text{Ro}_{cr}$  — критическое число Россби на границе устойчивости, соответствующее нейтральному состоянию  $\gamma = 0$ . Выражение (50) в предельном случае «чистой» электропроводящей жидкости переходит в известное выражение для критического числа Россби  $\text{Ro}$  [17]:

$$\text{Ro}_{cr} = -\frac{a^2 (a^4 + \pi^2 Q)^2 + \pi^2 a^4 \text{Ta}}{\pi^2 \text{Ta} (a^4 + \pi^2 Q \text{Pm})},$$

или, при переходе к размерным переменным

$$\frac{\pi^2 Q}{a^4} \rightarrow \frac{\omega_A^2}{\omega_\nu \omega_\eta}, \quad \frac{\pi^2 Q \text{Pm}}{a^4} \rightarrow \frac{\omega_A^2}{\omega_\eta^2}, \quad \frac{\text{Ta}}{a^4} \rightarrow \frac{4\Omega^2}{\omega_\nu^2},$$

$$\frac{\pi^2}{a^2} \rightarrow \alpha^2 = \left( \frac{k_z}{|\mathbf{k}|} \right)^2,$$

находим

$$\text{Ro}_{cr} = -\frac{(\omega_A^2 + \omega_\nu \omega_\eta)^2 + 4\alpha^2 \Omega^2 \omega_\eta^2}{4\Omega^2 \alpha^2 (\omega_A^2 + \omega_\eta^2)}.$$

Здесь  $\omega_\nu = \nu |\mathbf{k}|^2$ ,  $\omega_\eta = \eta |\mathbf{k}|^2$  — частоты вязкостной и омической диссипаций,  $|\mathbf{k}|^2 = k_R^2 + k_z^2$ .

Перейдем теперь к условиям устойчивости, состоящим из неравенств с определителями Гурвица (49). Для определителя  $\Delta_3$ ,

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3 + a_0 a_1 a_5 - a_1^2 a_4 - a_0 a_3^2,$$

критерий устойчивости имеет вид

$$a_1 a_2 a_3 + a_0 a_1 a_5 > a_1^2 a_4 + a_0 a_3^2. \quad (51)$$

Для второго определителя Гурвица из условия (49),

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 \end{vmatrix} = a_1 a_2 (a_3 a_4 a_5 - a_2 a_5^2) -$$

$$- a_1 a_4 (a_1 a_4 a_5 - a_0 a_5^2) + a_1 a_6 (a_1 a_2 a_5 - a_0 a_3 a_5) -$$

$$- a_3 a_0 (a_3 a_4 a_5 - a_2 a_5^2) + a_5 a_0 (a_1 a_4 a_5 - a_0 a_5^2),$$

получим следующий критерий устойчивости:

$$a_4 a_5 (a_1 a_2 a_3 + a_0 a_1 a_5 - a_1^2 a_4 - a_0 a_3^2) +$$

$$+ a_1^2 a_2 a_5 a_6 + a_0 a_5^2 (a_2 a_3 + a_1 a_4) >$$

$$> a_0 a_1 a_3 a_5 a_6 + a_5^2 (a_1 a_2^2 + a_0^2 a_5). \quad (52)$$

Критерии устойчивости (51) и (52) показывают, что концентрация наночастиц оказывает дестабилизирующее действие на устойчивость осесимметричных возмущений.

Используя выражение для критического числа Россби (50), численным методом определим области развития стандартной МВН в «чистой» жидкости и наножидкости. На рис. 2 выделены области неустойчивости для чисел Россби  $Ro < Ro_{cr}$  при изменении параметра вращения  $Ta$  (числа Тейлора) в плоскости  $(k, Ro)$ , где  $k$  — безразмерное радиальное волновое число. Черным цветом на рис. 2 показаны области неустойчивости в «чистой» жидкости, а серым цветом — в наножидкости. На рис. 2 видно, что при небольших числах Тейлора  $Ta = 100, 300$  область развития стандартной МВН в наножидкости (рис. 2а, б) намного больше области неустойчивости для «чистой» жидкости,  $R_n = 0$ . Напротив, при больших числах Тейлора  $Ta = 2000$  области неустойчивости для наножидкости и «чистой» жидкости уже не так сильно различаются. Значения параметров  $R_n = 0.122, L_e = 5000, Pr = 5, N_A = 5, N_B = 7.5 \cdot 10^{-4}$  для наножидкости (например  $Al_2O_3$ -вода) взяты из работы [11].

На рис. 3 представлены численные результаты темпа роста стандартной МВН, т.е. для положительного вещественного корня ( $Re \gamma > 0$ ) дисперсионного уравнения (48), в зависимости от радиального волнового числа  $k$ . Считая параметры наножидкости фиксированными ( $Pr = 5, R_n = 0.122, L_e = 5000$ , рис. 3а), видим, что темпы роста осесимметричных возмущений в случае рэлеевского профиля вращения ( $Ro = -1$ ) выше, чем для случая кеплеровского ( $Ro = -3/4$ ) профиля вращения при

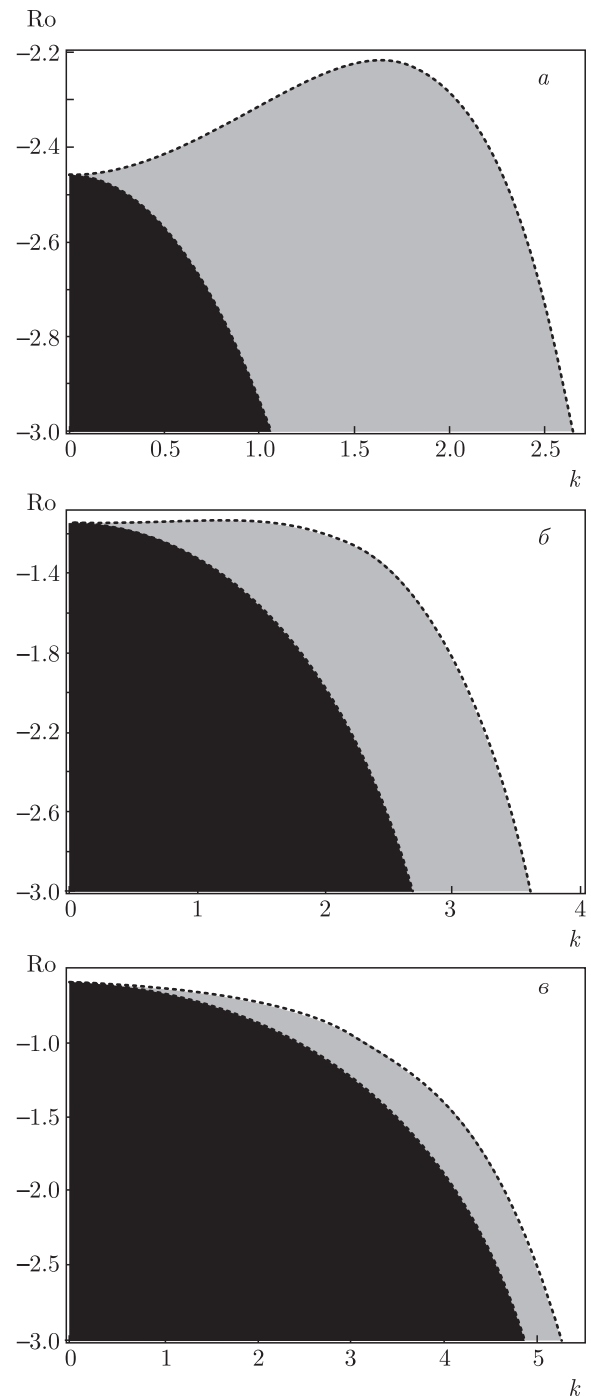


Рис. 2. Черным цветом показаны области, в которых возникает стандартная МВН в «чистой» жидкости, и серым цветом — в наножидкости для параметров  $Q = 10, Pm = 1, R_n = 0.122, L_e = 5000$  и чисел Тейлора  $Ta = 100$  (а), 300 (б), 2000 (е)

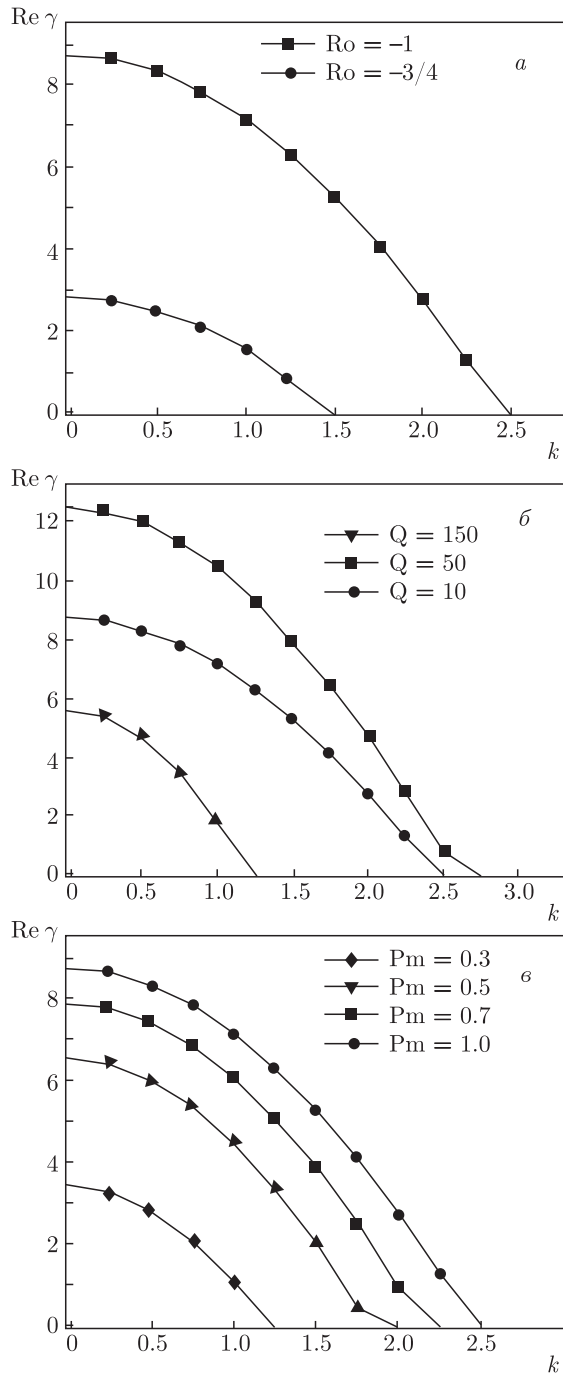


Рис. 3. Зависимости инкремента ( $\text{Re } \gamma > 0$ ) стандартной МВН в наножидкости от радиального волнового числа  $k$ . Показаны темпы роста возмущений для рэлеевского ( $\text{Ro} = -1$ ) и кеплеровского ( $\text{Ro} = -3/4$ ) профилей вращения (а), для разных значений величины аксиального магнитного поля (числа Чандрасекара)  $Q = 10, 50, 150$  (б) и для различных значений магнитного числа Прандтля  $\text{Pm} = 0.3, 0.5, 0.7, 1.0$  (в)

числах Тейлора  $\text{Ta} = 2000$ . На рис. 3б показаны темпы роста стандартной МВН при различных значениях аксиального магнитного поля  $Q = 10, 50, 150$  для рэлеевского профиля вращения ( $\text{Ro} = -1$ ) и числа Тейлора  $\text{Ta} = 2000$ . Здесь мы видим, что увеличение напряженности аксиального магнитного поля  $H_{0z}$  может приводить как к увеличению инкремента неустойчивости ( $Q = 10 \rightarrow Q = 50$ ), так и к уменьшению инкремента при  $Q = 50 \rightarrow Q = 150$ . Вариации магнитного числа Прандтля  $\text{Pm}$  также могут существенно повлиять на развитие стандартной МВН в наножидкости (рис. 3в). Для фиксированных параметров  $\text{Ta} = 2000, Q = 10, \text{Ro} = -1$  мы наблюдаем, что темпы роста возмущений значительно ниже при числах Прандтля  $\text{Pm} \ll 1$ .

Отметим, что при изменении физических характеристик наножидкости, например электропроводности  $\sigma$ , теплопроводности  $\chi$  и вязкости  $\nu$ , от которых зависят безразмерные параметры  $Q, \text{Pr}, \text{Pm}, \text{Ta}, \text{R}_n$ , при рэлеевском профиле вращения ( $\text{Ro} = -1$ ) вполне возможно развитие стандартной МВН.

### 5. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ АЗИМУТАЛЬНОЙ МВН В ТОНКИХ СЛОЯХ НАНОЖИДКОСТИ

Рассмотрим неоднородно вращающийся слой наножидкости с постоянной и одинаковой температурой на границах слоя во внешнем азимутальном магнитном поле  $H_{0\varphi}$ . В этом случае осевое магнитное поле равно нулю,  $H_{0z} = 0$ , и  $\text{Ra} = N_A = 0$ . При этом стационарный поток наножидкости совпадает с направлением магнитного поля. Таким образом, такая геометрия задачи соответствует азимутальной МВН [17]. Дисперсионное уравнение для азимутальной МВН в тонких слоях наножидкости получим из уравнения (47), полагая  $H_{0z} = 0$ :

$$\mathcal{P}(\gamma) \equiv a_0\gamma^6 + a_1\gamma^5 + a_2\gamma^4 + a_3\gamma^3 + a_4\gamma^2 + a_5\gamma + a_6 = 0, \quad (53)$$

где коэффициенты  $a_j$  ( $j = 0, \dots, 6$ ) имеют вид

$$a_0 = \text{Pr}^2 \text{Pm}^2 L_e a^2, \quad a_1 = \text{Pr}(1 + L_e) a^4 \text{Pm}^2,$$

$$a_2 = a^6 [\text{Pm}^2 + 2\text{Pm}(1 + \text{Pm}) \text{Pr}(1 + L_e) + \text{Pr}^2 L_e (1 + \text{Pm}^2) + 4\text{Pm} \text{Pr}^2 L_e] + \pi^2 \text{Pm}^2 \text{Pr}^2 \text{Ta}(1 + \text{Ro}) L_e - k^2 \text{R}_n L_e \text{Pr} \text{Pm}^2 - 4\pi^2 Q_\varphi \text{Rb} \text{Pm} \text{Pr}^2 L_e,$$

$$a_3 = a^8[2\text{Pm}(1+\text{Pm}) + \text{Pr}(1+L_e)(1+4\text{Pm}+\text{Pm}^2)] + \pi^2 a^2 \text{Ta}(1+\text{Ro})(2\text{PmPr}^2 L_e + \text{Pm}^2 \text{Pr}(1+L_e)) - k^2 a^2 \text{R}_n L_e (\text{Pm}^2 + \text{Pm} \text{Pr}(2+\text{Pm})) - 4\pi^2 a^2 \text{Q}_\varphi \text{Rb} (\text{Pr}^2 L_e (1+\text{Pm}) + \text{Pm} \text{Pr}(1+L_e)),$$

$$a_4 = a^{10}[2 \text{Pr}(1+\text{Pm})(1+L_e) + \text{Pr}^2 L_e] + \pi^2 a^4 \text{Ta}(1+\text{Ro})(\text{Pr}^2 L_e + 2\text{PmPr}(1+L_e) + \text{Pm}^2) - k^2 a^4 \text{R}_n L_e (\text{Pm}(2+\text{Pm}) + \text{Pr}(2\text{Pm}+1)) - 4\pi^2 a^4 \text{Q}_\varphi \text{Rb} (\text{Pr}^2 L_e + \text{Pr}(1+\text{Pm})(1+L_e) + \text{Pm}),$$

$$a_5 = a^{12}[2(1+\text{Pm}) + \text{Pr}(1+L_e)] + \pi^2 a^6 \text{Ta}(1+\text{Ro}) \times (\text{Pr}(1+L_e) + 2\text{Pm}) - k^2 a^6 \text{R}_n L_e (\text{Pr} + 2\text{Pm} + 1) - 4\pi^2 a^6 \text{Q}_\varphi \text{Rb} (\text{Pr}(1+L_e) + 1 + \text{Pm}),$$

$$a_6 = a^{14} + \pi^2 a^8 \text{Ta}(1+\text{Ro}) - k^2 a^8 \text{R}_n L_e - 4\pi^2 a^8 \text{Q}_\varphi \text{Rb}.$$

Здесь  $\text{Q}_\varphi = \mu_e H_{0\varphi}^2 h^4 / 4\pi \rho_0 R_0^2 \nu \eta$  — азимутальное число Чандрасекара. Вещественность коэффициентов  $a_j$  в уравнении (53) позволяет нам использовать критерий асимптотической устойчивости Ляпуна — Шипара, из которого следует положительность коэффициентов  $a_j > 0$  и определителей Гурвица  $\Delta_3, \Delta_5 > 0$ . Из явного вида коэффициентов  $a_j$  следует, что неоднородное вращение с положительными числами Россби ( $\text{Ro} > 0$ ) оказывает стабилизирующее действие, а концентрация наночастиц (члены с концентрационным числом Рэлея  $\text{R}_n$ ) — дестабилизирующее влияние. Азимутальное магнитное поле  $H_{0\varphi}$  оказывает как стабилизирующее, так и дестабилизирующее влияние в зависимости от знака магнитного числа Россби  $\text{Rb}$ . Условие  $a_6 > 0$  дает следующий критерий устойчивости:

$$\text{Ro} > -1 - \frac{a^6}{\pi^2 \text{Ta}} + \frac{k^2 \text{R}_n L_e}{\pi^2 \text{Ta}} + \frac{4\text{Q}_\varphi \text{Rb}}{\text{Ta}} = \text{Ro}_{cr}, \quad (54)$$

или, в размерных переменных,

$$\text{Ro} > -1 - \frac{\omega_\nu^2}{4\alpha^2 \Omega^2} + \text{Rb} \frac{\omega_{A\varphi}^2}{\Omega^2} \frac{\omega_\nu}{\omega_\eta} + (1 - \alpha^2) \frac{\text{R}_n L_e \omega_\nu^2}{4\alpha^2 \Omega^2 (|\mathbf{k}|h)^4}.$$

Для случая «чистой» электропроводящей жидкости критерий устойчивости (54) при  $\text{R}_n = 0$  переходит в более простой критерий, полученный в работе [39]. При  $\omega_{A\varphi} = 0$  и  $\text{R}_n = 0$  критерий устойчивости (54) согласуется с результатом работы [40]. Очевидно, что вращающийся поток идеальной наножидкости при  $\omega_\nu = \omega_\eta$  и  $\omega_\nu \rightarrow 0$ , на который действует азимутальное магнитное поле, устойчив относительно осесимметричных возмущений, если выполняется неравенство

$$\text{Ro} > -1 + \text{Rb} \frac{\omega_{A\varphi}^2}{\Omega^2}. \quad (55)$$

Течение идеальной «чистой» жидкости было рассмотрено в работе [19], в которой кинетическая и магнитная энергии равны друг другу:

$$\frac{\rho_0 (\Omega R)^2}{2} = \frac{H_{0\varphi}^2}{4\pi}.$$

В [19] было найдено точное стационарное решение идеальной магнитной гидродинамики:  $\Omega = H_{0\varphi} / R \sqrt{2\pi\rho_0}$ ,  $P = \text{const}$ , называемое чандрасекаровской эквипартицией. Там же было доказано, что это течение предельно устойчиво. Из эквипартиции Чандрасекара следует, что [17]

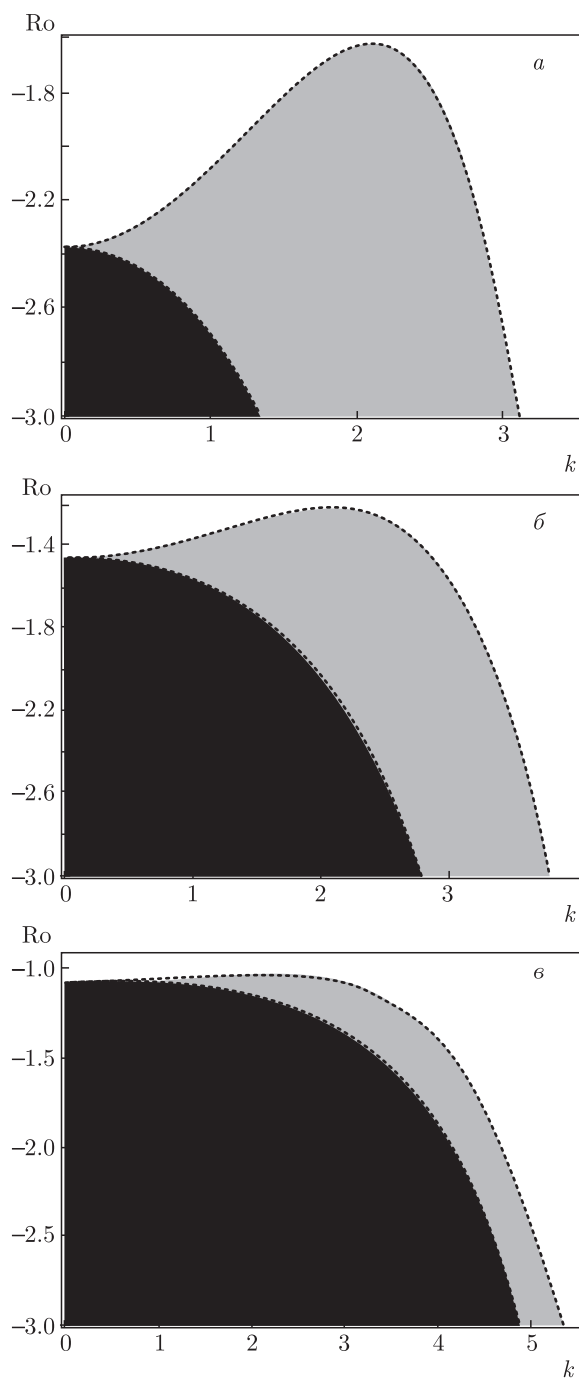
$$\omega_{A\varphi} = \frac{\mu_e H_{0\varphi}^2}{4\pi \rho_0 R_0^2} = \Omega, \quad \text{Ro} = \text{Rb} = -1. \quad (56)$$

Случай чандрасекаровской эквипартиции (56) удовлетворяет неравенству (55). Следовательно, критерии устойчивости для идеальных наножидкостей и «чистых» жидкостей совпадают с (55).

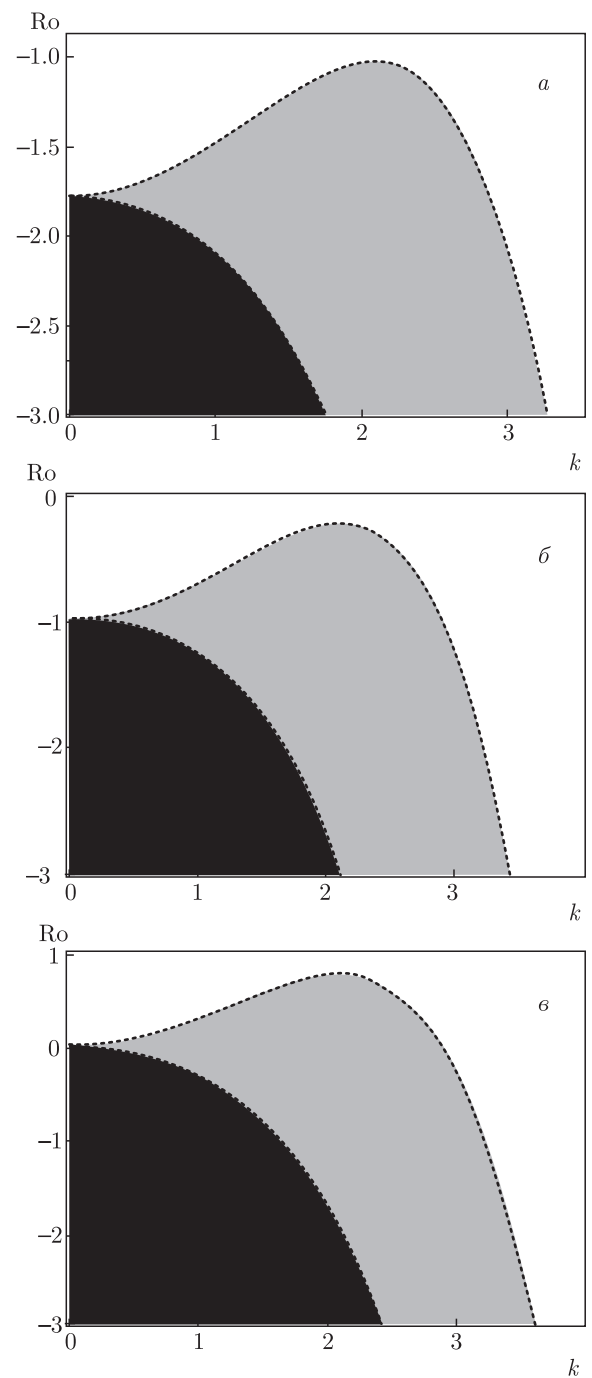
Приступим к исследованию вопроса о развитии азимутальной МВН в наножидкости для осесимметричных возмущений при числах Россби  $\text{Ro} < \text{Ro}_{cr}$ . Для этой цели численным способом построим области развития неустойчивости для различных значений параметров вращения  $\text{Ta}$  (числа Тейлора), азимутального магнитного поля  $\text{Q}_\varphi$  (азимутальное число Чандрасекара) и магнитного числа Россби  $\text{Rb}$ . Для параметров  $\text{Rb} = -1$ ,  $\text{Q}_\varphi = 10$ ,  $\text{R}_n = 0.122$ ,  $L_e = 5000$  на рис. 4 показаны области развития азимутальной МВН в плоскости  $(k, \text{Ro})$  для различных чисел Тейлора  $\text{Ta} = 100, 300, 2000$ . На рис. 4 видно, что наличие концентрации наночастиц способствует увеличению области неустойчивости по сравнению с «чистой» электропроводящей средой. На рис. 5 показаны области развития азимутальной МВН с положительным профилем неоднородного магнитного поля ( $\text{Rb} = 1/2$ ) в плоскости  $(k, \text{Ro})$  для различных азимутальных чисел Чандрасекара  $\text{Q}_\varphi = 10, 50, 100$ . Остальные параметры,  $\text{Ta} = 100$ ,  $\text{R}_n = 0.122$ ,  $L_e = 5000$ , считались фиксированными. Здесь мы также видим (см. рис. 5), что наличие концентрации наночастиц способствует увеличению области неустойчивости по сравнению с «чистой» электропроводящей средой. Кроме того, при увеличении величины азимутального магнитного поля (числа  $\text{Q}_\varphi$ ) граница области неустойчивости смещается в сторону положительных чисел Россби ( $\text{Ro} > 0$ ).

С помощью численного анализа дисперсионного уравнения (53) определим зависимость инкремента ( $\text{Re } \gamma > 0$ ) азимутальной МВН от радиального волнового числа  $k$  для ранее приведенных па-

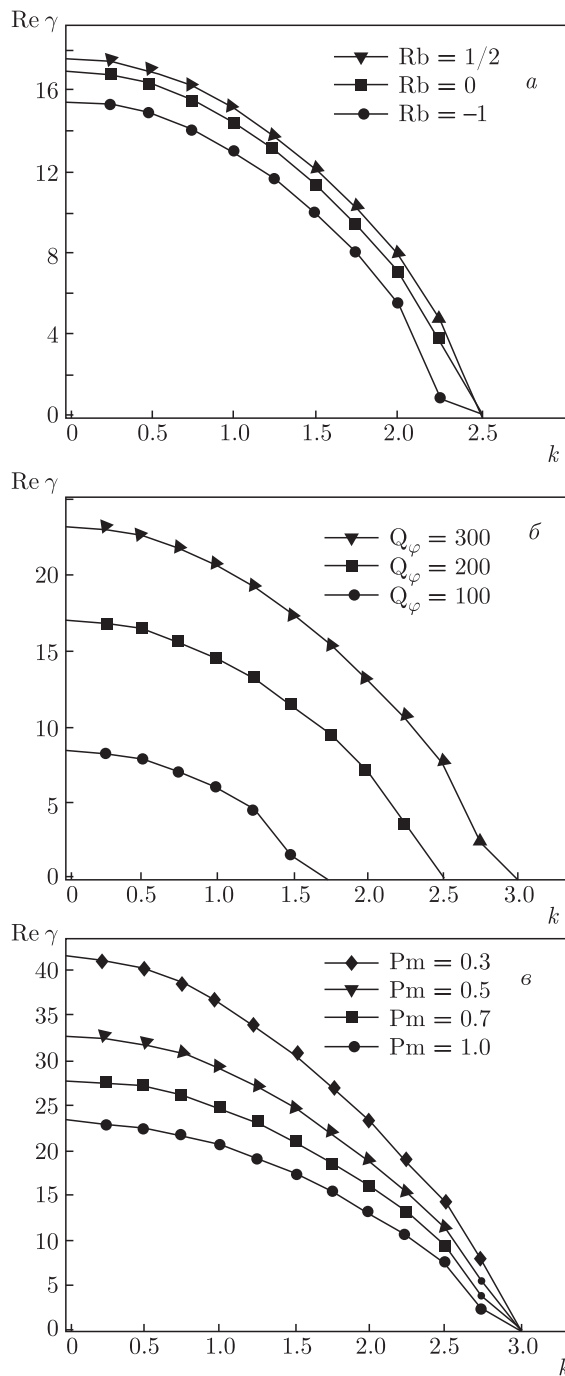




**Рис. 4.** Черным цветом показаны области, в которых возникает азимутальная МВН в «чистой» жидкости, и серым цветом — в наножидкости. Графики построены для чисел Тейлора  $Ta = 100$  (а),  $300$  (б),  $2000$  (в) при фиксированных параметрах  $Q_\varphi = 10$ ,  $Rb = -1$ ,  $R_n = 0.122$ ,  $L_e = 5000$



**Рис. 5.** Черным цветом показаны области, в которых возникает азимутальная МВН в «чистой» жидкости, и серым цветом — в наножидкости. Графики построены для азимутальных чисел Чандрасекара  $Q_\varphi = 10$  (а),  $50$  (б),  $100$  (в) при фиксированных параметрах  $Ta = 100$ ,  $Rb = 1/2$ ,  $R_n = 0.122$ ,  $L_e = 5000$



**Рис. 6.** Зависимости инкремента ( $\text{Re } \gamma > 0$ ) азимутальной МВН в наножидкости от радиального волнового числа  $k$ . Показаны эффекты влияния неоднородного азимутального магнитного поля при  $Rb = -1, 0, 1/2$  (а), величины азимутального магнитного поля при  $Q_\varphi = 100, 200, 300$  (б) и магнитного числа Прандтля при  $Pm = 0.3, 0.5, 0.7, 1.0$  (в) на азимутальную МВН

раметров наножидкости. На рис. 6а показано влияние различных профилей неоднородного азимутального магнитного поля (магнитные числа Россби  $Rb = -1, 0, 1/2$ ) на инкремент азимутальной МВН для следующих параметров:  $Ta = 2000, Ro = -1.2, Q_\varphi = 10, Pm = 1$ . Отсюда мы видим, что темпы роста возмущений здесь выше для положительных магнитных чисел Россби ( $Rb > 0$ ). Далее, исследуем влияние эффекта усиления азимутального магнитного поля (азимутальные числа Чандрасекара  $Q_\varphi = 100, 200, 300$ ) на развитие азимутальной МВН для фиксированных параметров  $Ta = 300, Ro = -1, Rb = 1/2, Pm = 1$ . Как следует из результатов, показанных на рис. 6б, темпы роста возмущений становятся выше с увеличением напряженности азимутального магнитного поля  $H_{0\varphi}$ . На рис. 6в приведены численные результаты для инкремента  $\text{Re } \gamma(k)$  азимутальной МВН, полученные для различных значений магнитного числа Прандтля  $Pm = 0.3, 0.5, 0.7, 1.0$  при фиксированной величине азимутального магнитного поля  $Q_\varphi = 300$  и  $Ta = 300, Ro = -1, Rb = 1/2$ . На рис. 6в видно увеличение темпов роста возмущений для магнитных чисел Прандтля  $Pm < 1$ .

Таким образом, азимутальная МВН в наножидкости реализуется при увеличении неоднородного азимутального магнитного поля  $H_{0\varphi} = CR^\alpha$  ( $\alpha > 1$ ) с положительным профилем  $Rb > 0$  для магнитных чисел Прандтля  $Pm \leq 1$ .

### 6. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ СПИРАЛЬНОЙ МВН В ТОНКИХ СЛОЯХ НАНОЖИДКОСТИ

В случае  $Ra = N_A = 0$  из уравнения (47) мы получим дисперсионное уравнение для спиральной МВН в тонких слоях наножидкости:

$$\mathcal{P}(\gamma) \equiv a_0\gamma^7 + a_1\gamma^6 + a_2\gamma^5 + a_3\gamma^4 + a_4\gamma^3 + a_5\gamma^2 + a_6\gamma + a_7 = 0, \quad (57)$$

где коэффициенты  $a_j$  ( $j = 0, \dots, 7$ ) имеют вид

$$a_0 = A_0, \quad a_1 = A_1, \quad a_2 = A_2 - k^2 R_n L_e \text{Pr} Pm^3,$$

$$a_3 = A_3 - k^2 a^2 R_n L_e (Pm^3 + \text{Pr} Pm^2 (3 + Pm)),$$

$$a_4 = A_4 - C_0 - k^2 R_n L_e (\text{Pr} Pm^2 (a^4 + \pi^2 Q) + a^4 Pm (\text{Pr} + Pm) (3 + Pm)),$$

$$a_5 = A_5 - C_1 - k^2 R_n L_e (\text{Pr} (2a^2 Pm (a^4 + \pi^2 Q) + a^6 (1 + Pm)) + a^2 Pm^2 (a^4 + \pi^2 Q) + a^6 Pm (3 + Pm)),$$

$$a_6 = A_6 - C_2 - k^2 R_n L_e (2a^4 Pm (a^4 + \pi^2 Q) + a^8 (1 + Pm) + a^4 (a^4 + \pi^2 Q) Pr),$$

$$a_7 = A_7 - C_3 - k^2 a^6 R_n L_e (a^4 + \pi^2 Q).$$

Здесь введены следующие обозначения для  $A_n$  ( $n = 0, \dots, 7$ ) и  $C_m$  ( $m = 0, \dots, 3$ ):

$$A_0 = a^2 Pr^2 Pm^3 L_e,$$

$$A_1 = a^4 Pm^2 Pr [2 Pr L_e (1 + Pm) + Pr L_e + Pm (1 + L_e)],$$

$$A_2 = a^6 [Pm^2 (Pm + Pr (1 + L_e)) + 2 Pm (1 + Pm) \times Pr (Pr L_e + Pm (1 + L_e))] + (a^6 (1 + 4 Pm + Pm^2) + 2 a^2 Pm \pi^2 Q + \pi^2 Pm^2 Ta (1 + Ro) - 4 \pi^2 Q \xi^2 Rb Pm) Pm Pr^2 L_e,$$

$$A_3 = a^8 [Pm^2 + 2 Pm (1 + Pm) (Pm + Pr (1 + L_e))] + a^2 Pr (a^6 (1 + 4 Pm + Pm^2) + 2 a^2 Pm \pi^2 Q + \pi^2 Pm^2 Ta (1 + Ro) - 4 \pi^2 Q \xi^2 Rb Pm) \times (Pr L_e + Pm (1 + L_e)) + (2 a^4 (1 + Pm) (a^4 + \pi^2 Q) + 2 a^2 \pi^2 Ta (1 + Ro) Pm - 4 \pi^2 a^2 Q \xi^2 Rb (1 + Pm)) Pm Pr^2 L_e,$$

$$A_4 = 2 a^{10} Pm (1 + Pm) + a^4 (a^6 (1 + 4 Pm + Pm^2) + 2 a^2 Pm \pi^2 Q + \pi^2 Pm^2 Ta (1 + Ro) - 4 \pi^2 Q \xi^2 Rb Pm) \times (Pm + Pr (1 + L_e)) + a^2 Pr (2 a^4 (1 + Pm) (a^4 + \pi^2 Q) + 2 a^2 \pi^2 Ta (1 + Ro) Pm - 4 \pi^2 a^2 Q \xi^2 Rb (1 + Pm)) \times (Pr L_e + Pm (1 + L_e)) + (a^2 (a^4 + \pi^2 Q)^2 + \pi^2 a^4 Ta (1 + Ro) + \pi^4 Pm Ro Ta Q - 4 \pi^2 Q \xi^2 Rb (a^4 + \pi^2 Q) - 4 \pi^4 Q^2 \xi^2) Pm Pr^2 L_e,$$

$$A_5 = a^6 (a^6 (1 + 4 Pm + Pm^2) + 2 a^2 Pm \pi^2 Q + \pi^2 Pm^2 Ta (1 + Ro) - 4 \pi^2 Q \xi^2 Rb Pm) + a^4 (2 a^4 (1 + Pm) (a^4 + \pi^2 Q) + 2 a^2 \pi^2 Ta (1 + Ro) Pm - 4 \pi^2 a^2 Q \xi^2 Rb (1 + Pm)) (Pm + Pr (1 + L_e)) + a^2 Pr (a^2 (a^4 + \pi^2 Q)^2 + \pi^2 a^4 Ta (1 + Ro) + \pi^4 Pm Ro Ta Q - 4 \pi^2 Q \xi^2 Rb (a^4 + \pi^2 Q) - 4 \pi^4 Q^2 \xi^2) (Pr L_e + Pm (1 + L_e)),$$

$$A_6 = a^6 (2 a^4 (1 + Pm) (a^4 + \pi^2 Q) + 2 a^2 \pi^2 Ta (1 + Ro) Pm - 4 \pi^2 a^2 Q \xi^2 Rb (1 + Pm)) + a^4 (Pm + Pr (1 + L_e)) \times (a^2 (a^4 + \pi^2 Q)^2 + \pi^2 a^4 Ta (1 + Ro) + \pi^4 Pm Ro Ta Q - 4 \pi^2 Q \xi^2 Rb (a^4 + \pi^2 Q) - 4 \pi^4 Q^2 \xi^2),$$

$$A_7 = a^6 (a^2 (a^4 + \pi^2 Q)^2 + \pi^2 a^4 Ta (1 + Ro) + \pi^4 Pm Ro Ta Q - 4 \pi^2 Q \xi^2 Rb (a^4 + \pi^2 Q) - 4 \pi^4 Q^2 \xi^2),$$

$$C_0 = 4 \pi^4 Q \xi \sqrt{Ta} N_B Pr Pm^2,$$

$$C_1 = 2 \pi^4 a^2 Q Pm \xi \sqrt{Ta} \times \left[ N_B Pr (4 + Ro (1 - Pm)) + \frac{2 N_B}{L_e} Pm \right],$$

$$C_2 = 2 \pi^4 a^4 Q \xi \sqrt{Ta} \left[ N_B Pr (2 + Ro (1 - Pm)) + \frac{N_B}{L_e} Pm (4 + Ro (1 - Pm)) \right],$$

$$C_3 = 2 \pi^4 a^6 Q \xi \sqrt{Ta} \frac{N_B}{L_e} (2 + Ro (1 - Pm)).$$

В предельных случаях, когда  $H_{0\varphi} = 0$ , дисперсионное уравнение (57) совпадает с дисперсионным уравнением (48) для стандартной МВН, а при  $H_{0z} = 0$  — с дисперсионным уравнением (54) для азимутальной МВН. К дисперсионному уравнению (57) с действительными коэффициентами  $a_j$  ( $j = 0, \dots, 7$ ) применим классический критерий устойчивости Лъенара — Шипара [38]. Из явного вида коэффициентов следует, что дестабилизация осесимметричных возмущений может быть вызвана неоднородным вращением с отрицательным профилем ( $Ro < 0$ ), спиральным магнитным полем с положительным профилем неоднородного азимутального магнитного поля ( $Rb > 0$ ), концентрацией наночастиц ( $R_n \neq 0$ ), а также совместным эффектом спирального магнитного поля и прироста наночастиц ( $N_B \neq 0$ ), если магнитное число Прандтля  $Pm \neq 1$ . Поскольку переход к неустойчивости происходит через точку  $\gamma = 0$ , получаем необходимое и достаточное условие устойчивости вращающейся наножидкости по отношению к осесимметричным возмущениям:

$$Ro > \frac{-a^2 (a^4 + \pi^2 Q)^2 - \pi^2 a^4 Ta + k^2 (a^4 + \pi^2 Q) R_n L_e}{\pi^2 Ta (a^4 + \pi^2 Q Pm) - 2 \pi^4 Q \xi \sqrt{Ta} \frac{N_B}{L_e} (1 - Pm)} + \frac{4 Q \xi^2 (Rb (a^4 + \pi^2 Q) + \pi^2 Q) + 4 \pi^2 Q \xi \sqrt{Ta} \frac{N_B}{L_e}}{Ta (a^4 + \pi^2 Q Pm) - 2 \pi^2 Q \xi \sqrt{Ta} \frac{N_B}{L_e} (1 - Pm)} = Ro_{cr}, \quad (58)$$

или, в размерных переменных,

$$\begin{aligned} \text{Ro} > \frac{-(\omega_A^2 + \omega_\nu \omega_\eta)^2 - 4\alpha^2 \Omega^2 \omega_\eta^2 + (1 - \alpha^2)(\omega_A^2 + \omega_\nu \omega_\eta) \text{Rn} L_e \frac{\omega_\nu \omega_\eta}{(|\mathbf{k}|h)^4}}{4\alpha^2 \Omega^2 (\omega_A^2 + \omega_\eta^2) - 4\alpha^3 \Omega \omega_A \omega_{A\varphi} \frac{\omega_\eta}{(|\mathbf{k}|h)} \frac{N_B}{L_e} (1 - \text{Pm})} + \\ + \frac{\omega_{A\varphi}^2 (\text{Rb}(\omega_A^2 + \omega_\nu \omega_\eta) + \omega_A^2) + 2\alpha \Omega \omega_A \omega_{A\varphi} \frac{\omega_\eta}{(|\mathbf{k}|h)} \frac{N_B}{L_e}}{\Omega^2 (\omega_A^2 + \omega_\eta^2) - \alpha \Omega \omega_A \omega_{A\varphi} \frac{\omega_\eta}{(|\mathbf{k}|h)} \frac{N_B}{L_e} (1 - \text{Pm})} = \text{Ro}_{cr}. \end{aligned}$$

Условие устойчивости (58) включает в себя полученные в предыдущих разделах критерии устойчивости для стандартной МВН при  $H_{0\varphi} = 0$  и азимутальной МВН при  $H_{0z} = 0$ . Если  $\text{Ro} = 0$  и  $\text{Ta} = 0$ , то необходимое и достаточное условие устойчивости наножидкости по отношению к осесимметричным возмущениям дает ограничение на профиль неоднородного азимутального магнитного поля:

$$\begin{aligned} \text{Rb} > \text{Rb}_{cr}, \\ \text{Rb}_{cr} = \frac{a^2(a^4 + \pi^2 Q)^2 - 4\pi^4 Q^2 \xi^2 - k^2 \text{Rn} L_e (a^4 + \pi^2 Q)}{4\pi^2 Q \xi^2 (a^4 + \pi^2 Q)}, \end{aligned} \quad (59)$$

или, в размерных переменных,

$$\begin{aligned} \text{Rb} > \frac{(\omega_A^2 + \omega_\nu \omega_\eta)^2 - 4\alpha^2 \omega_A^2 \omega_{A\varphi}^2}{4\alpha^2 \omega_{A\varphi}^2 (\omega_A^2 + \omega_\nu \omega_\eta)} - \\ - \frac{(1 - \alpha^2) \frac{\omega_\nu \omega_\eta}{(|\mathbf{k}|h)^4} \text{Rn} L_e (\omega_A^2 + \omega_\nu \omega_\eta)}{4\alpha^2 \omega_{A\varphi}^2 (\omega_A^2 + \omega_\nu \omega_\eta)} = \text{Rb}_{cr}. \end{aligned}$$

Выражение (59) переходит в передельном случае «чистой» жидкости при  $\text{Rn} = 0$  в известное выражение для критического магнитного числа Россби  $\text{Rb}_{cr}$ , которое было получено в работе [41].

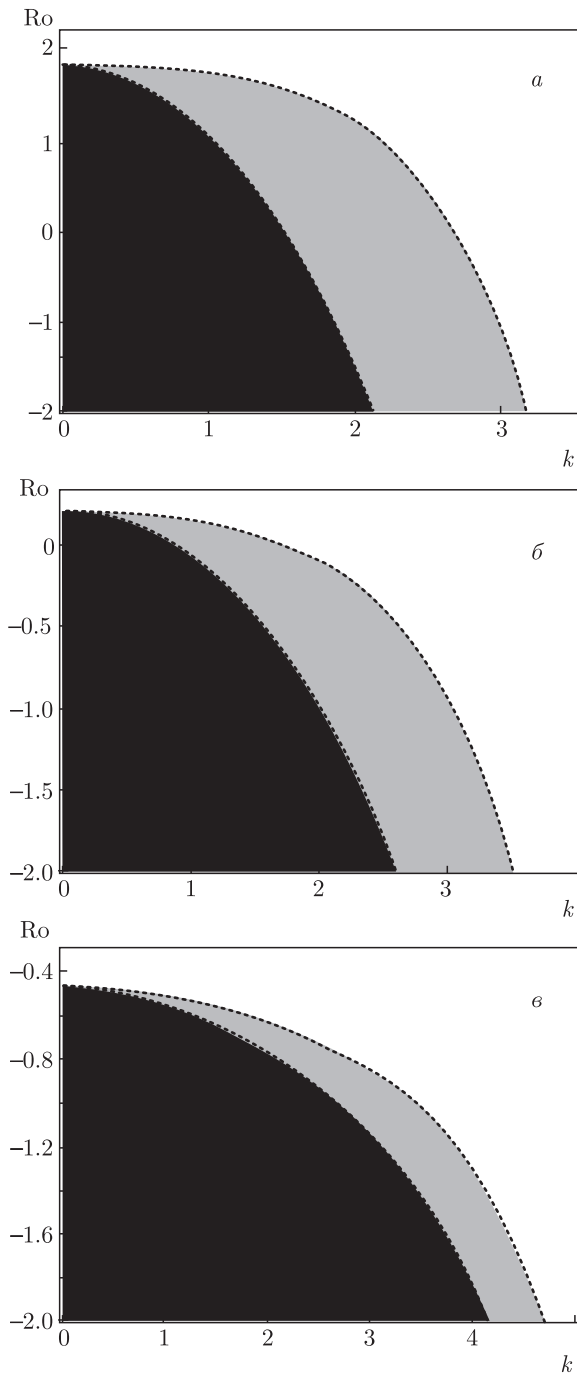
Определим область развития спиральной МВН в тонком слое наножидкости, которая возникает для чисел Россби  $\text{Ro} < \text{Ro}_{cr}$ . С помощью численного анализа из выражения (58) для критического числа Россби определим области развития спиральной МВН в «чистой» жидкости и наножидкости. На рис. 7 серым цветом выделены области неустойчивости наножидкости для чисел Россби  $\text{Ro} < \text{Ro}_{cr}$  при изменении параметра вращения  $\text{Ta} = 100, 300, 2000$  (числа Тейлора) в плоскости  $(k, \text{Ro})$ . Остальные параметры наножидкости считались фиксированными:  $Q = 10, Q_\varphi = 100, \text{Pm} = 0.7, \text{Rb} = 1/2, \text{Rn} = 0.122, L_e = 5000, N_B = 7.5 \cdot 10^{-4}$ . На рис. 7 видно, что наличие концентрации наночастиц способствует увеличению области неустойчивости по сравнению с «чистой» электропроводящей средой, для которой области неустойчивости показаны черным цветом на рис. 7. На рис. 8 показаны области раз-

вития спиральной МВН с положительным профилем неоднородного магнитного поля ( $\text{Rb} = 1/2$ ) в плоскости  $(k, \text{Ro})$  для различных азимутальных чисел Чандрасекара  $Q_\varphi = 30, 50, 80$  при фиксированных параметрах  $Q = 10, \text{Ta} = 100, \text{Pm} = 0.7, \text{Rb} = 1/2, \text{Rn} = 0.122, L_e = 5000, N_B = 7.5 \cdot 10^{-4}$ . Здесь мы также видим (см. рис. 8), что наличие концентрации наночастиц способствует увеличению области неустойчивости по сравнению с «чистой» электропроводящей средой. Кроме того, при увеличении величины азимутального магнитного поля (числа  $Q_\varphi$ ), как и в случае азимутальной МВН, граница области неустойчивости смещается в сторону положительных чисел Россби ( $\text{Ro} > 0$ ).

Приступим к численному анализу дисперсионного уравнения (57). На рис. 9 показана зависимость инкремента спиральной МВН от радиальных волновых чисел  $k$  для различных вариаций физических параметров наножидкости. На рис. 9а видно, что темп роста возмущений повышается с увеличением эффекта вращения — числа Тейлора  $\text{Ta} = 100, 300, 2000$ . Остальные параметры наножидкости считались фиксированными:  $Q = 10, Q_\varphi = 100, \text{Pm} = 0.7, \text{Pr} = 5, \text{Rb} = 1/2, \text{Ro} = -1, \text{Rn} = 0.122, L_e = 5000, N_B = 7.5 \cdot 10^{-4}$ . Для этих же параметров на рис. 9б показаны графики инкремента спиральной МВН для вращающейся наножидкости с числом Тейлора  $\text{Ta} = 100$  и различными числами Россби  $\text{Ro} = 0, -3/4, -1$ . Отсюда следует, что темпы роста осесимметричных возмущений выше для отрицательных чисел Россби ( $\text{Ro} < 0$ ), чем в случае однородного вращения ( $\text{Ro} = 0$ ):

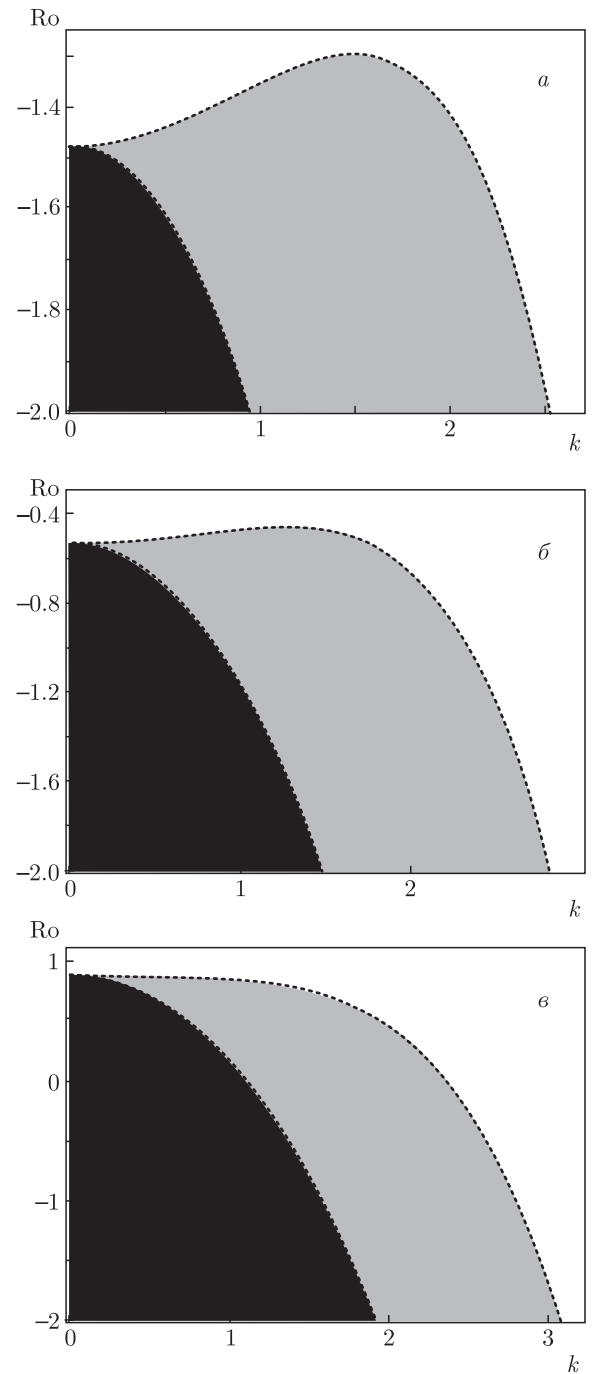
$$\gamma(k)|_{\text{Ro}=-1} > \gamma(k)|_{\text{Ro}=-3/4} > \gamma(k)|_{\text{Ro}=0}.$$

На рис. 9в показаны темпы роста спиральной МВН при различных значениях аксиального магнитного поля  $Q = 10, 50, 150$  для рэлеевского профиля вращения ( $\text{Ro} = -1$ ) и числа Тейлора  $\text{Ta} = 2000$ . Отсюда мы видим, что увеличение напряженности аксиального магнитного поля  $H_{0z}$  может приводить как к увеличению инкремента неустойчивости ( $Q = 10 \rightarrow Q = 50$ ), так и к уменьшению инкремента при  $Q = 50 \rightarrow Q = 150$ .



**Рис. 7.** Черным цветом показаны области, в которых возникает спиральная МВН в «чистой» жидкости, и серым цветом — в наножидкости. Графики построены для чисел Тейлора  $Ta = 100$  (а),  $300$  (б),  $2000$  (е) при фиксированных параметрах  $Q = 10$ ,  $Q_\varphi = 100$ ,  $Pm = 0.7$ ,  $Rb = 1/2$ ,  $R_n = 0.122$ ,  $L_e = 5000$ ,  $N_B = 7.5 \cdot 10^{-4}$

Аналогичная ситуация наблюдалась и для стандартной МВН. Эффект влияния азимутального магнитного поля  $Q_\varphi = 100, 200, 300$  на спиральную



**Рис. 8.** Черным цветом показаны области, в которых возникает спиральная МВН в «чистой» жидкости, и серым цветом — в наножидкости. Графики построены для азимутального числа Chandrasekhara  $Q_\varphi = 30$  (а),  $50$  (б),  $80$  (в) при фиксированных параметрах  $Q = 10$ ,  $Ta = 100$ ,  $Pm = 0.7$ ,  $Rb = 1/2$ ,  $R_n = 0.122$ ,  $L_e = 5000$ ,  $N_B = 7.5 \cdot 10^{-4}$

МВН для параметров  $Ta = 2000$  и  $Ro = -1$  показан на рис. 10а. Здесь, как и для случая азимутальной МВН, темпы роста возмущений становятся выше с увеличением напряженности азимутального



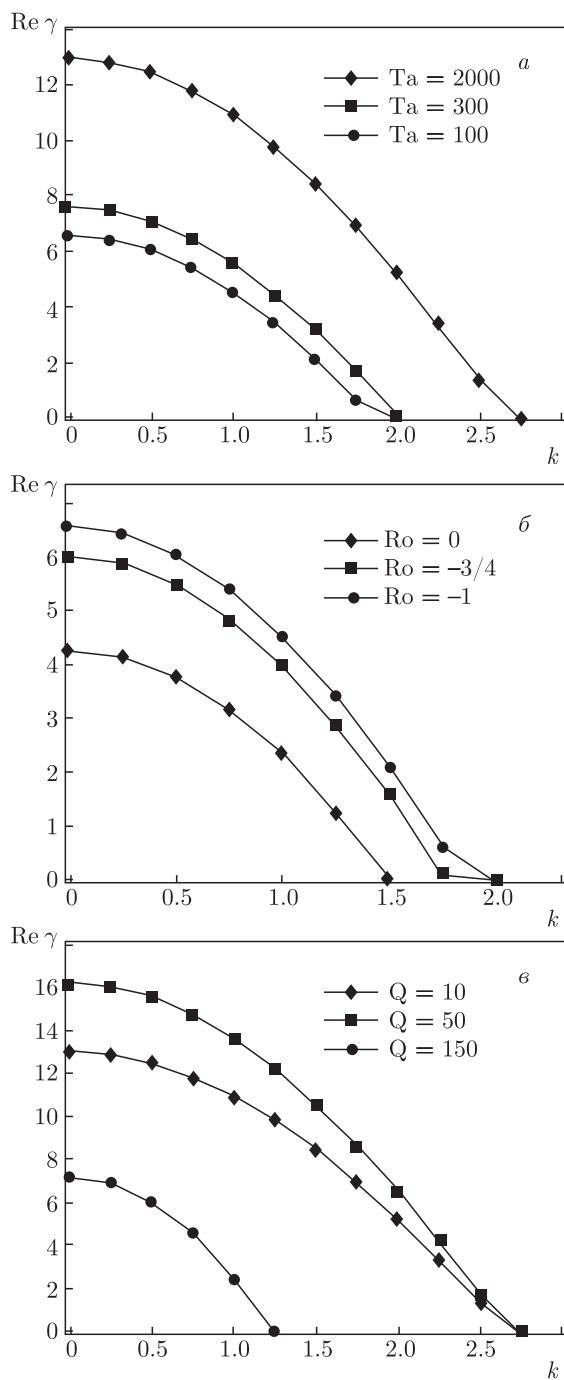


Рис. 9. Зависимости инкремента ( $\text{Re } \gamma > 0$ ) спиральной МВН в наножидкости от радиального волнового числа  $k$ . Показано влияние эффекта вращения  $Ta = 100, 300, 2000$  (а), числа Россби  $Ro = 0, -3/4, -1$  (б) и аксиального магнитного поля  $Q = 10, 50, 150$  (в)

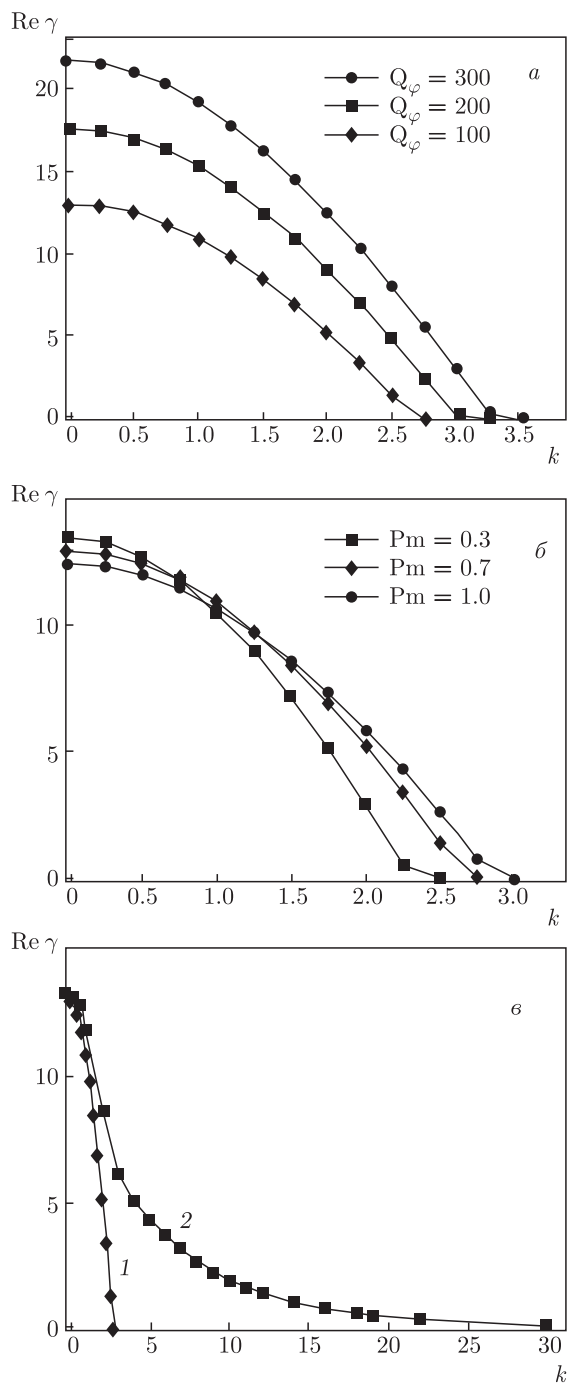


Рис. 10. Зависимости инкремента ( $\text{Re } \gamma > 0$ ) спиральной МВН в наножидкости от радиального волнового числа  $k$ . Показано влияние азимутального магнитного поля  $Q_\varphi = 100, 200, 300$  (а), магнитного числа Прандтля  $Pm = 0.3, 0.7, 1.0$  (б) и концентрации наночастиц на спиральную МВН (в)

магнитного поля  $H_{0\varphi}$ . На рис. 10б показаны графики инкремента спиральной МВН для значений магнитного числа Прандтля  $Pm = 0.3, 0.7, 1.0$ . Из этих результатов следует, что увеличение темпов роста  $Re \gamma(k)$  для магнитных чисел Прандтля  $Pm < 1$  происходит при смещении в длинноволновую (малые  $k$ ) область спектра возмущений. Результаты влияния на спиральную МВН эффекта концентрации наночастиц приведены на рис. 10в. Кривая 1 построена для следующих параметров наножидкости:  $Q = 10$ ,  $Q_\varphi = 100$ ,  $Ta = 2000$ ,  $Pm = 0.7$ ,  $Pr = 5$ ,  $Rb = 1/2$ ,  $Ro = -1$ ,  $R_n = 0.122$ ,  $L_e = 5000$ ,  $N_B = 7.5 \cdot 10^{-4}$ . При увеличении концентрации наночастиц, т. е. при увеличении объемной доли наночастиц на верхней границе слоя,  $\phi_u$ , мы принимаем, что изменяются параметры для следующих величин: концентрационного числа Рэлея  $R_n = 1200$ , рождения наночастиц  $N_B = 750$  и числа Льюиса  $L_e = 1000$ , а остальные безразмерные числа ( $Q, Q_\varphi, Ta, Pm, Pr, Rb, Ro$ ) остаются без изменений. Кривая 2 на рис. 10в соответствует результатам повышенной концентрации наночастиц. Здесь видно, что при повышенной концентрации наночастиц инкремент спиральной МВН выше,  $\gamma_2(0) = 13.28 > \gamma_1(0) = 12.9$ , и неустойчивость уже начинает развиваться в коротковолновой (большие  $k$ ) части спектра возмущений.

В результате повышения концентрации наночастиц увеличиваются темпы роста спиральной МВН из-за совместного эффекта прироста наночастиц,  $N_B \gg 1$ , и спирального магнитного поля для магнитных чисел Прандтля  $Pm < 1$ .

## 7. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕЖИМЫ МАГНИТНОЙ КОНВЕКЦИИ

Приступим к исследованию случая, когда есть разности температур и концентраций наночастиц на границах слоя наножидкости ( $Ra \neq 0, N_A \neq 0$ ), который неоднородно вращается ( $Ro \neq 0$ ) в спиральном магнитном поле ( $\xi \neq 0$ ). Будем рассматривать конвективное течение в плоском неоднородно вращающемся слое в виде валов (ячеек). Скорость  $\gamma$  роста возмущений в общем случае является комплексной,  $\gamma = \gamma_r + i\omega_i$ . Очевидно, что система устойчива, если  $\gamma_r < 0$ , и неустойчива, если  $\gamma_r > 0$ . Перейдем к определению границы устойчивости для монотонных ( $\omega_i = 0$ ) и колебательных ( $\omega_i \neq 0$ ) возмущений. На границе устойчивости (нейтральные состояния)  $\gamma_r = 0$ , поэтому, сделав в уравнении (47) замену  $\gamma = i\omega_i$ , находим

$$Ra = Ra_r + i\omega_i Ra_i, \quad (60)$$

где  $Ra_r$  и  $Ra_i$  — действительная и мнимая части дисперсионного уравнения для  $Ra$ . Так как величина  $Ra$  является действительной, мнимая часть в (60) должна обращаться в нуль. При этом возможна ситуация  $\omega_i = 0$  или  $Ra_i = 0$ . Рассмотрим случай  $\omega_i = 0$ . В результате получаем критическое значение числа Рэлея  $Ra_c$  для монотонных или стационарных возмущений:  $Ra_c = Ra_{st}$ .

### 7.1. Стационарный режим конвекции в аксиальном магнитном поле

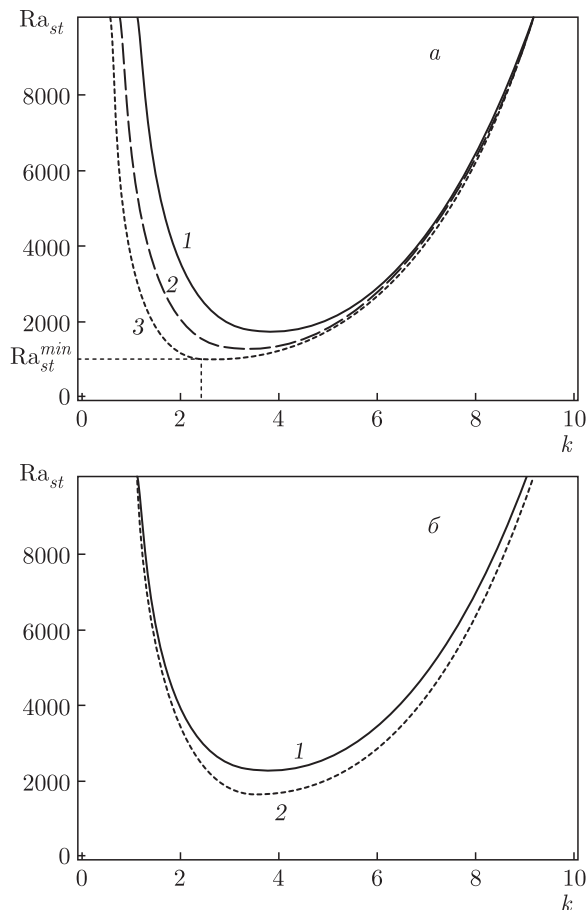
Из дисперсионного уравнения (60) найдем критическое значение числа Рэлея  $Ra_{st}$  для стационарной ( $\gamma = 0$ ) конвекции в аксиальном магнитном поле:

$$Ra_{st} = \frac{a^6}{k^2} + \frac{\pi^2 a^2 Q}{k^2} + \frac{\pi^2 a^4 Ta}{k^2(a^4 + \pi^2 Q)} + \frac{\pi^2 Ta Ro(a^4 + \pi^2 Q Pm)}{k^2(a^4 + \pi^2 Q)} - R_n(L_e + N_A). \quad (61)$$

Минимальное значение критического числа Рэлея находится из условия  $\partial Ra_{st} / \partial k = 0$  и соответствует волновым числам  $k = k_c$ , удовлетворяющим уравнению

$$\begin{aligned} \frac{2k_c^2 - \pi^2}{k_c} - \frac{\pi^4 Q}{k_c(\pi^2 + k_c^2)^2} + \\ + \frac{2\pi^2 k_c Ta(1 + Ro)}{(\pi^2 + k_c^2)((\pi^2 + k_c^2)^2 + \pi^2 Q)} - \\ - \frac{\pi^2 Ta((\pi^2 + k_c^2)^2 + \pi^2 Q + 2k_c^2(\pi^2 + k_c^2))}{k_c((\pi^2 + k_c^2)^2 + \pi^2 Q)^2} - \\ - \frac{\pi^2 Ta Ro((\pi^2 + k_c^2)^2 + \pi^2 Q Pm)}{k_c(\pi^2 + k_c^2)^2((\pi^2 + k_c^2)^2 + \pi^2 Q)^2} \times \\ \times ((\pi^2 + k_c^2)^2 + \pi^2 Q + 2k_c^2(\pi^2 + k_c^2)) = 0. \quad (62) \end{aligned}$$

Из уравнения (62) видно, что критическое волновое число не зависит от параметров наножидкостей и совпадает с результатом работы [12]. На рис. 11а минимальному значению критического числа Рэлея  $Ra_{st}^{min}$  соответствует точка на нейтральной кривой, разделяющей области устойчивых и неустойчивых возмущений. Здесь видно, что для положительного профиля числа Россби ( $Ro \geq 0$ ) минимальное значение критического числа Рэлея  $Ra_{st}^{min}$  больше, чем для отрицательных профилей вращения, например рэлеевского ( $Ro = -1$ ). Следовательно, для отрицательных профилей вращения мы получаем более низкий порог развития неустойчивости по сравнению со случаем однородного ( $Ro = 0$ ) и неоднородного ( $Ro = 2$ ) вращения. На рис. 11б показано, что



**Рис. 11.** Зависимости стационарного числа Рэлея  $Ra_{st}$  от волновых чисел  $k$  для неоднородно вращающейся наножидкости в аксиальном магнитном поле: *a* — для чисел Россби  $Ro = 2$  (кривая 1),  $0$  (кривая 2),  $-1$  (кривая 3); *б* — кривая 1 соответствует «чистой» электропроводящей жидкости, кривая 2 — электропроводящей наножидкости для числа Россби  $Ro = 2$

концентрация наночастиц способствует понижению порога стационарной конвекции. Здесь кривые 1, 2 построены для числа Россби  $Ro = 2$ , но сделанные выводы остаются в силе при любых числах  $Ro$ .

В некоторых предельных случаях выражение (61) содержит уже известные результаты. При отсутствии наночастиц ( $R_n = 0$ ) из (61) получаем критическое число Рэлея для стационарной неоднородно вращающейся ( $Ro \neq 0$ ) конвекции в постоянном аксиальном магнитном поле [12]. Если в (61) положить  $Ro = 0$ , то мы получим результат работы [11]. Для случая  $Ro = 0$  и  $R_n = 0$  мы получаем классический результат Чандрасекара [8]. При отсутствии вращения и магнитного поля ( $Ta = Q = 0$ ) выражение (61) дает результат работы [42].

Для исследования эффектов вращения, числа Россби, магнитного поля, числа Люиса, модифицированного коэффициента диффузии и концентрации наночастиц вычислим производные

$$\frac{dR_1}{dT_1}, \frac{dR_1}{dRo}, \frac{dR_1}{dQ_1}, \frac{dR_1}{dL_e}, \frac{dR_1}{dN_A}, \frac{dR_1}{dR_n}$$

в переменных Чандрасекара

$$R_1 = \frac{Ra_{st}}{\pi^4}, \quad T_1 = \frac{Ta}{\pi^4}, \quad Q_1 = \frac{Q}{\pi^2}, \quad x = \frac{k^2}{\pi^2}.$$

Для этих переменных выражение (61) примет вид

$$R_1 = \frac{(1+x)((1+x)^2+Q_1)^2+(1+x)^2(1+Ro)T_1}{x((1+x)^2+Q_1)} + \frac{RoPmQ_1T_1}{x((1+x)^2+Q_1)} - R_n(L_e + N_A). \quad (63)$$

Из выражения (63) находим производные

$$\frac{dR_1}{dT_1} = \frac{(1+x)^2}{x((1+x)^2+Q_1)} + \frac{Ro((1+x)^2+Q_1Pm)}{x((1+x)^2+Q_1)}, \quad (64)$$

$$\frac{dR_1}{dRo} = \frac{T_1((1+x)^2+Q_1Pm)}{x((1+x)^2+Q_1)}, \quad (65)$$

$$\frac{dR_1}{dQ_1} = \frac{1+x}{x} - \frac{(1+x)^2T_1(1+Ro(1-Pm))}{x((1+x)^2+Q_1)^2}, \quad (66)$$

$$\frac{dR_1}{dL_e} = \frac{dR_1}{dN_A} = -R_n, \quad (67)$$

$$\frac{dR_1}{dR_n} = -(L_e + N_A). \quad (68)$$

Из формулы (64) видно, что в случае однородного вращения ( $Ro = 0$ ) сила Кориолиса всегда оказывает стабилизирующее действие на конвекцию [8, 9]. Однако при неоднородном вращении (даже в отсутствие внешнего магнитного поля,  $Q_1 = 0$  (см. формулу (64)) сила Кориолиса может оказывать дестабилизирующее действие на конвекцию в зависимости от профиля угловой скорости вращения. Для рэлеевского профиля вращения ( $Ro = -1$ ) угловая скорость уменьшается с расстоянием,  $\Omega = \text{const} \cdot R^{-2}$ . Наоборот, при положительных  $Ro > 0$ , например при  $Ro = 1$ , угловая скорость вращения увеличивается с расстоянием,  $\Omega = \text{const} \cdot R^2$ . Таким образом, вращение при  $Ro > 0$  стабилизирует конвекцию, а при  $Ro < 0$  дестабилизирует. Известно, что для конечной электропроводности среды

имеет место частичная «вмороженность» магнитного поля и неоднородное вращение приводит к искажению силовых линий магнитного поля [37]. В случае  $Ro > 0$  линии магнитного поля смещаются от оси вращения, т. е. в сторону увеличения  $\Omega$ , и наоборот, при  $Ro < 0$  происходит смещение к оси вращения. Эффекту влияния неоднородного (дифференциального) вращения на магнитное поле и, как следствие, на конвекцию, соответствуют члены, пропорциональные  $RoPm$  в выражениях (64), (66).

Аналогичные выводы следуют из соотношения (65): при увеличении параметра вращения  $T_1$  на стационарную конвекцию оказывает влияние профиль неоднородного вращения, от которого зависит знак числа Россби. Так, при числах Россби  $Ro > 0$  мы также получаем стабилизирующий эффект, поскольку производная  $dR_1/dRo$  всегда положительна, а при отрицательных числах Россби  $Ro < 0$  — дестабилизирующий эффект, так как производная  $dR_1/dRo$  отрицательная.

Из формулы (66) видно, что величина  $dR_1/dQ_1$  может быть положительной или отрицательной, т. е. аксиальное магнитное поле (число Чандрасекара  $Q_1$ ) оказывает стабилизирующее или дестабилизирующее действие на стационарную конвекцию. Поскольку магнитное поле тормозит движение проводящей жидкости (наножижкости), оно вполне может оказывать стабилизирующее действие. В свою очередь, взаимодействие между полем и токами, индуцируемыми в движущейся среде, оказывает влияние на конвективное движение, т. е. на устойчивость равновесия среды, подогреваемой снизу. Опять же из-за частичной «вмороженности» магнитного поля неоднородное вращение приводит к искажению силовых линий магнитного поля, что создает дестабилизирующий эффект, когда для профиля неоднородного вращения (числа Россби  $Ro$ ) выполняется условие

$$Ro(Pm - 1) < 1.$$

Это неравенство справедливо для положительных чисел Россби  $Ro \geq 0$  и магнитных числах Прандтля  $Pm < 1$  либо  $Ro < 0$  и  $Pm > 1$ , а также при  $Pm = 1$  для любых чисел Россби  $Ro$ .

Формула (67) показывает, что число Льюиса  $L_e$  и модифицированный коэффициент диффузии  $N_A$  имеют дестабилизирующий эффект, когда число Рэлея наночастиц положительно,  $R_n > 0$ . Поскольку для большинства наножидкостей сумма числа Льюиса и модифицированного коэффициента диффузии всегда положительна,  $L_e + N_A > 0$  [11], то из (68)

следует, что концентрационное число Рэлея всегда имеет дестабилизирующий эффект. Формулы (67) и (68) совпадают с результатами работы [11], где исследовалась конвективная неустойчивость однородно вращающегося слоя наножидкости в постоянном вертикальном магнитном поле.

Таким образом, влияние эффектов вращения, числа Россби, магнитного поля на стационарную конвекцию в аксиальном магнитном поле происходит независимо от концентрации наночастиц.

### 7.2. Стационарный режим конвекции в спиральном магнитном поле

Подобным образом из дисперсионного уравнения (60) найдем критическое значение числа Рэлея  $Ra_{st}$  для стационарной конвекции в спиральном магнитном поле:

$$Ra_{st} = \left[ Ra_{st}^{(0)} - R_n(L_e + N_A) + \frac{2\pi^4 Q \xi \sqrt{Ta} (2 + Ro(1 - Pm)) N_B (N_A - 1)}{k^2 (a^4 + \pi^2 Q) L_e} \right] \times \left[ 1 - \frac{2\pi^4 Q \xi \sqrt{Ta} (2 + Ro(1 - Pm)) (N_A - N_B)}{a^2 (a^4 + \pi^2 Q)^2 L_e} \right]^{-1} = D_1(k) D_2^{-1}(k), \quad (69)$$

где  $Ra_{st}^{(0)}$  — критическое число Рэлея для стационарной конвекции «чистой» жидкости в спиральном магнитном поле, совпадающее с результатом [15]

$$Ra_{st}^{(0)} = \frac{a^6}{k^2} + \frac{\pi^2 a^2 Q}{k^2} + \frac{\pi^2 a^4 Ta}{k^2 (a^4 + \pi^2 Q)} + \frac{\pi^2 Ta Ro (a^4 + \pi^2 Q Pm) - 4\pi^4 \xi^2 Q^2}{k^2 (a^4 + \pi^2 Q)} - \frac{4\pi^2}{k^2} \xi^2 Q R_b.$$

Минимальное значение критического числа Рэлея находится из условия  $\partial Ra_{st} / \partial k = 0$  и соответствует волновым числам  $k = k_c$ , удовлетворяющим следующему уравнению:

$$\left[ \left( \frac{\partial \text{Ra}_{st}^{(0)}}{\partial k} \right)_{k=k_c} - 4\pi^4 Q \xi \sqrt{\text{Ta}} (2 + \text{Ro}(1 - \text{Pm})) \right] \times N_B (N_A - 1) \frac{(\pi^2 + k_c^2)^2 + \pi^2 Q + 2k_c^2 (\pi^2 + k_c^2)}{k_c^3 ((\pi^2 + k_c^2)^2 + \pi^2 Q)^2 L_e} \times D_2^{-1}(k_c) - D_2^{-2}(k_c) \cdot 4k_c \pi^4 Q \xi \sqrt{\text{Ta}} (2 + \text{Ro}(1 - \text{Pm})) \times (N_A - N_B) \frac{(\pi^2 + k_c^2)^2 + \pi^2 Q + 2(\pi^2 + k_c^2)}{(\pi^2 + k_c^2)((\pi^2 + k_c^2)^2 + \pi^2 Q)^3 L_e} \times D_1(k_c) = 0, \quad (70)$$

где

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \text{Ra}_{st}^{(0)}}{\partial k} \right)_{k=k_c} &= \frac{2k_c^2 - \pi^2}{k_c} - \frac{\pi^4 Q}{k_c (\pi^2 + k_c^2)^2} + \\ &+ \frac{2\pi^2 k_c \text{Ta} (1 + \text{Ro})}{(\pi^2 + k_c^2) ((\pi^2 + k_c^2)^2 + \pi^2 Q)} - \\ &- \frac{\pi^2 \text{Ta} ((\pi^2 + k_c^2)^2 + \pi^2 Q + 2k_c^2 (\pi^2 + k_c^2))}{k_c ((\pi^2 + k_c^2)^2 + \pi^2 Q)^2} - \\ &- \frac{\pi^2 \text{Ta} \text{Ro} ((\pi^2 + k_c^2)^2 + \pi^2 Q \text{Pm})}{k_c (\pi^2 + k_c^2)^2 ((\pi^2 + k_c^2)^2 + \pi^2 Q)^2} \times \\ &\times ((\pi^2 + k_c^2)^2 + \pi^2 Q + 2k_c^2 (\pi^2 + k_c^2)) + \\ &+ 4\pi^4 \xi^2 Q^2 \frac{2((\pi^2 + k_c^2)^2 + \pi^2 Q) + 4k_c^4 (\pi^2 + k_c^2)}{k_c^3 ((\pi^2 + k_c^2)^2 + \pi^2 Q)^2} + \\ &+ 4\pi^2 \xi^2 Q \text{Rb} \frac{2}{k_c^3}. \end{aligned}$$

Если азимутальное магнитное поле отсутствует ( $\xi = 0$ ), то выражение (70) совпадает с (62) и результатом работы [15]. Следовательно, критическое волновое число  $k_c$  зависит от параметров наножидкости только в спиральном магнитном поле. На рис. 12 показаны зависимости стационарного числа Рэлея  $\text{Ra}_{st}$  от волновых чисел  $k$  для различных профилей неоднородного вращения ( $\text{Ro}$ ) и магнитного поля ( $\text{Rb}$ ). Численные результаты, представленные на рис. 12, получены при следующих фиксированных параметрах:  $\text{Ta} = 300$ ,  $Q = 50$ ,  $\text{Pm} = 0.7$ ,  $\text{R}_n = 0.122$ ,  $L_e = 5000$ ,  $N_A = 5$ ,  $N_B = 7.5 \cdot 10^{-4}$ . Минимальному числу  $\text{Ra}_{st}^{min}$  на рис. 12 соответствует точка на нейтральной кривой, разделяющей области устойчивых и неустойчивых возмущений. На рис. 12а показан случай однородного ( $\text{Rb} = -1/2$ ) азимутального магнитного поля с параметром  $\xi = 1$ . Здесь видно, что с возрастанием положительного профиля числа Россби  $\text{Ro}$  (кривая 1 —  $\text{Ro} = 2$ , кривая 2 —  $\text{Ro} = 0$ ) минимальное значение стационарного числа Рэлея  $\text{Ra}_{st}^{min}$  также возрастает, т. е. повышается порог развития неустойчивости. С другой стороны, для отрицательных профилей вращения: кеплеровского ( $\text{Ro} = -3/4$ ) (кривая 3) и рэлеевского

( $\text{Ro} = -1$ ) (кривая 4) наблюдаем уменьшение критического числа Рэлея, т. е. более низкий порог развития неустойчивости по сравнению со случаем однородного ( $\text{Ro} = 0$ ) и неоднородного ( $\text{Ro} = 2$ ) вращения. На рис. 13а показано, что концентрация наночастиц (кривая 2) способствует понижению порога стационарной конвекции по сравнению с «чистой» жидкостью (кривая 1). Здесь кривые 1, 2 построены для числа Россби  $\text{Ro} = -3/4$ , но сделанные выводы остаются в силе при любых числах  $\text{Ro}$ .

Проведем анализ влияния азимутального магнитного поля на стационарную конвекцию, фиксируя параметр  $\text{Ro}$  для различных магнитных чисел Россби ( $\text{Rb} = -1, -1/2, 0, 1/2$ ) и  $\xi = 1$ . На рис. 12б показаны результаты для случая однородного вращения ( $\text{Ro} = 0$ ). Здесь мы видим, что для положительных чисел  $\text{Rb} \geq 0$  (кривая 3 —  $\text{Rb} = 0$ , кривая 4 —  $\text{Rb} = 1/2$ ) критические числа Рэлея меньше, чем для отрицательных чисел  $\text{Rb} < 0$  (кривая 1 —  $\text{Rb} = -1$ , кривая 2 —  $\text{Rb} = -1/2$ ). Следовательно, в зависимости от профиля неоднородности азимутального магнитного поля  $H_{0\varphi}(R) = CR^\alpha$  ( $C = \text{const}$ ,  $\alpha$  — произвольное вещественное число) порог неустойчивости может либо увеличиваться ( $\text{Rb} < 0$ ), либо уменьшаться ( $\text{Rb} > 0$ ). На рис. 13б кривая 1 соответствует «чистой» электропроводящей жидкости, кривая 2 — электропроводящей наножидкости. Кривые 1, 2 построены для чисел Россби  $\text{Ro} = 0$ ,  $\text{Rb} = -1$ . Здесь мы видим, что концентрация наночастиц способствует понижению порога стационарной конвекции. Этот вывод остается в силе при любых профилях неоднородного азимутального магнитного поля (магнитного числа Россби  $\text{Rb}$ ). Аналогичная картина наблюдается для кеплеровского профиля вращения  $\text{Ro} = -3/4$  (см. рис. 12в и 13в). Сравнивая результаты на рис. 12б, 13б и рис. 12в, 13в можно заметить, что для профиля вращения  $\text{Ro} = -3/4$  пороги неустойчивости меньше, чем для случая  $\text{Ro} = 0$  при любых профилях неоднородного азимутального магнитного поля.

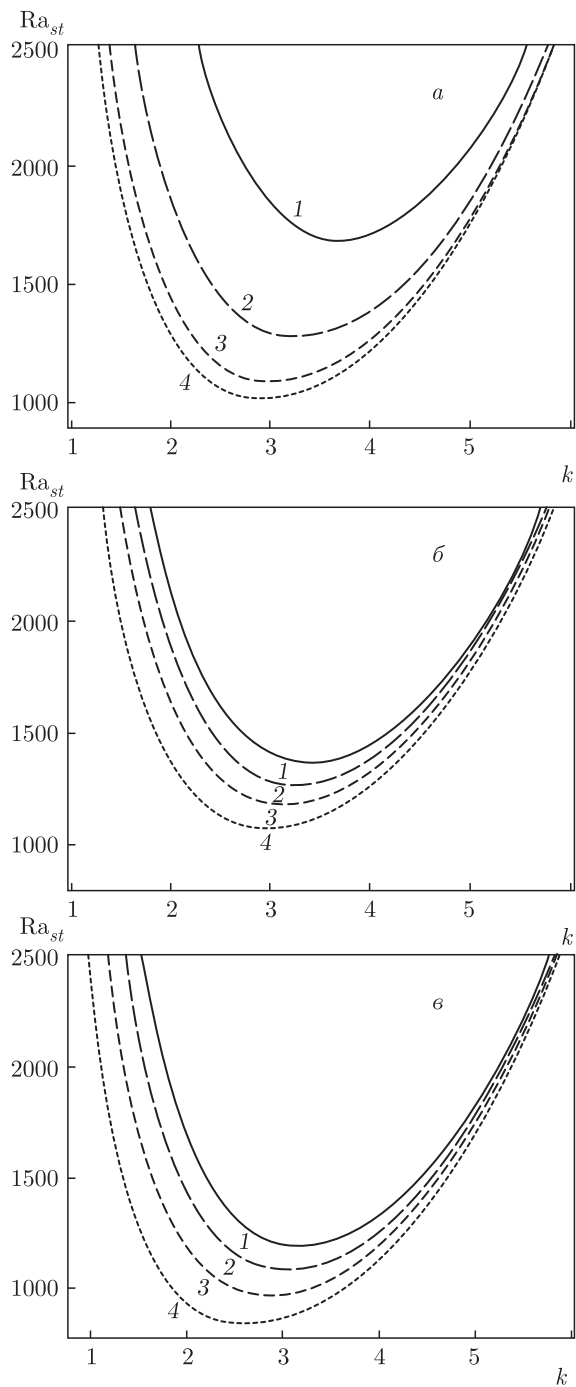
Приступим к исследованию влияния вращения, числа Россби, азимутального магнитного поля, спирального магнитного поля, числа Льюиса, модифицированного коэффициента диффузии и концентрации наночастиц на стационарную конвекцию. Для этой цели вычислим производные

$$\frac{d\tilde{\text{R}}}{d\tilde{\text{T}}}, \frac{d\tilde{\text{R}}}{d\tilde{\text{Ro}}}, \frac{d\tilde{\text{R}}}{d\tilde{\text{Q}}}, \frac{d\tilde{\text{R}}}{d\tilde{\xi}}, \frac{d\tilde{\text{R}}}{d\tilde{\text{Rb}}}, \frac{d\tilde{\text{R}}}{d\tilde{L}_e}, \frac{d\tilde{\text{R}}}{d\tilde{N}_A}, \frac{d\tilde{\text{R}}}{d\tilde{\text{R}}_n}.$$

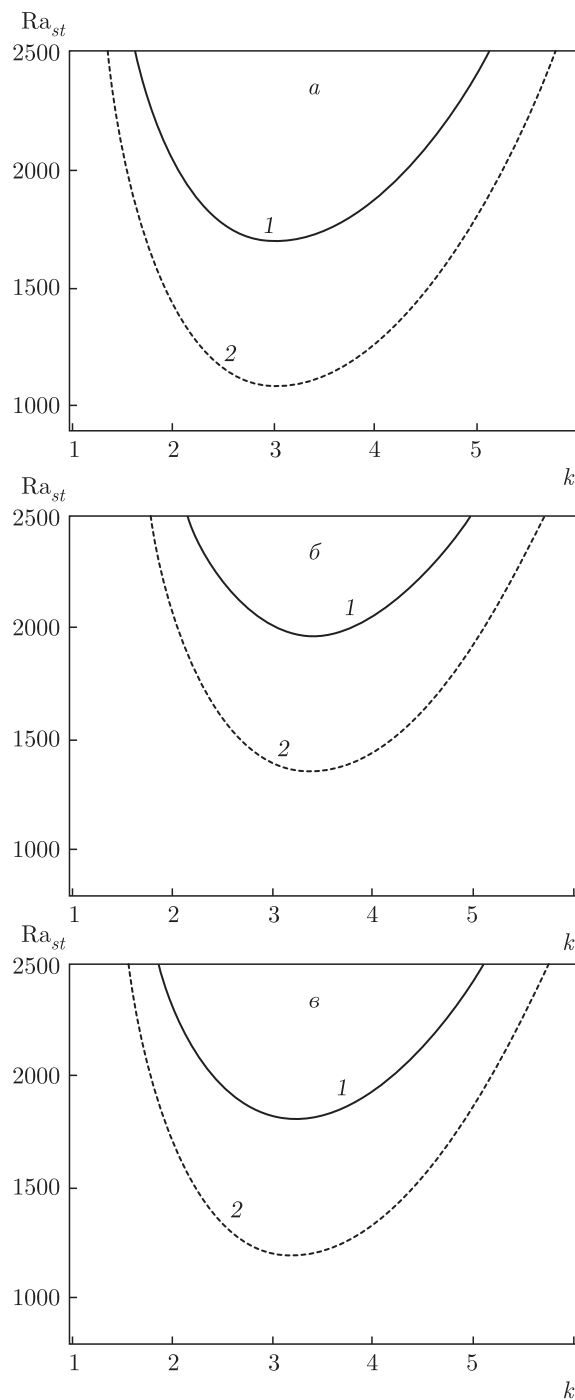
Здесь мы ввели переменные Чандрасекара

$$\tilde{\text{R}} = \frac{\text{Ra}_{st}}{\pi^4}, \quad \tilde{\text{T}} = \frac{\text{Ta}}{\pi^4}, \quad \tilde{\text{Q}} = \frac{Q}{\pi^2}, \quad x = \frac{k^2}{\pi^2}, \quad \tilde{\xi} = \frac{\xi}{\pi}.$$





**Рис. 12.** Зависимости стационарного числа Рэля  $Ra_{st}$  от волновых чисел  $k$  для неоднородно вращающейся наножидкости в спиральном магнитном поле: *a* —  $Rb = -1/2$ ,  $\xi = 1$  и  $Ro = 2$  (кривая 1), 0 (кривая 2),  $-3/4$  (кривая 3),  $-1$  (кривая 4); *б* —  $Ro = 0$ ,  $\xi = 1$  и  $Rb = -1$  (кривая 1),  $-1/2$  (кривая 2), 0 (кривая 3),  $1/2$  (кривая 4); *в* —  $Ro = -3/4$ ,  $\xi = 1$  и  $Rb = -1$  (кривая 1),  $-1/2$  (кривая 2), 0 (кривая 3),  $1/2$  (кривая 4)



**Рис. 13.** Зависимости стационарного числа Рэля  $Ra_{st}$  от волновых чисел  $k$ : *a* —  $Rb = -1/2$ ,  $Ro = -3/4$ ,  $\xi = 1$ ; *б* —  $Ro = 0$ ,  $Rb = -1$ ,  $\xi = 1$ ; *в* —  $Ro = -3/4$ ,  $Rb = -1$ ,  $\xi = 1$ . На всех графиках кривая 1 соответствует «чистой» электропроводящей жидкости, кривая 2 — электропроводящей наножидкости

В этих переменных выражение для критического числа Рэлея (69) принимает вид

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= \left[ \tilde{R}^{(0)} - R_n(L_e + N_A) + \frac{2\pi^3 \tilde{Q} \tilde{\xi} \sqrt{\tilde{T}} (2 + \text{Ro}(1 - \text{Pm})) N_B (N_A - 1)}{x((1+x)^2 + \tilde{Q}) L_e} \right] \times \\ &\times \left[ 1 - \frac{2\tilde{Q} \tilde{\xi} \sqrt{\tilde{T}} (2 + \text{Ro}(1 - \text{Pm})) (N_A - N_B)}{\pi(1+x)((1+x)^2 + \tilde{Q})^2 L_e} \right]^{-1} = \\ &= \tilde{D}_1(k) \tilde{D}_2^{-1}(k), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{R}^{(0)} &= \frac{(1+x)((1+x)^2 + \tilde{Q})^2 + \tilde{T}(1+x)^2(1+\text{Ro})}{x((1+x)^2 + \tilde{Q})} + \\ &+ \frac{\tilde{T} \text{Ro} \text{Pm} \tilde{Q} - 4\tilde{\xi}^2 \tilde{Q}^2}{x((1+x)^2 + \tilde{Q})} - \frac{4\tilde{\xi}^2 \tilde{Q}}{x} \text{Rb}. \end{aligned}$$

Используя эти выражения, нетрудно вычислить искомые производные

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{R}}{d\tilde{T}} &= \left[ \frac{d\tilde{R}^{(0)}}{d\tilde{T}} + \frac{\pi^3 \tilde{Q} \tilde{\xi} (2 + \text{Ro}(1 - \text{Pm})) N_B (N_A - 1)}{x((1+x)^2 + \tilde{Q}) L_e \sqrt{\tilde{T}}} \right] \tilde{D}_2^{-1} + \tilde{D}_2^{-2} \tilde{D}_1 \times \\ &\times \frac{\tilde{Q} \tilde{\xi} (2 + \text{Ro}(1 - \text{Pm})) (N_A - N_B)}{\pi(1+x)((1+x)^2 + \tilde{Q})^2 L_e \sqrt{\tilde{T}}}, \quad (71) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{R}^{(0)}}{d\tilde{T}} &= \frac{(1+x)^2}{x((1+x)^2 + \tilde{Q})} + \\ &+ \frac{\text{Ro}((1+x)^2 + \tilde{Q} \text{Pm})}{x((1+x)^2 + \tilde{Q})}, \quad (72) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{R}}{d\text{Ro}} &= \left[ \frac{d\tilde{R}^{(0)}}{d\text{Ro}} + \frac{2\pi^3 \tilde{Q} \tilde{\xi} \sqrt{\tilde{T}} (1 - \text{Pm}) N_B (N_A - 1)}{x((1+x)^2 + \tilde{Q}) L_e} \right] \times \\ &\times \tilde{D}_2^{-1} + \tilde{D}_2^{-2} \tilde{D}_1 \frac{2\tilde{Q} \tilde{\xi} \sqrt{\tilde{T}} (1 - \text{Pm}) (N_A - N_B)}{\pi(1+x)((1+x)^2 + \tilde{Q})^2 L_e}, \quad (73) \end{aligned}$$

$$\frac{d\tilde{R}^{(0)}}{d\text{Ro}} = \frac{\tilde{T}((1+x)^2 + \tilde{Q} \text{Pm})}{x((1+x)^2 + \tilde{Q})}, \quad (74)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{R}}{d\tilde{Q}} &= \left[ \frac{d\tilde{R}^{(0)}}{d\tilde{Q}} + \frac{2\pi^3 \tilde{\xi} \sqrt{\tilde{T}} (2 + \text{Ro}(1 - \text{Pm})) N_B (N_A - 1) (1+x)^2}{x((1+x)^2 + \tilde{Q}) L_e} \right] \times \\ &\times \tilde{D}_2^{-1} + \tilde{D}_2^{-2} \tilde{D}_1 \times \\ &\times \frac{2\tilde{\xi} \sqrt{\tilde{T}} (2 + \text{Ro}(1 - \text{Pm})) (N_A - N_B) ((1+x)^2 - \tilde{Q})}{\pi(1+x)((1+x)^2 + \tilde{Q})^2 L_e}, \quad (75) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{R}^{(0)}}{d\tilde{Q}} &= \frac{1+x}{x} - \frac{(1+x)^2 \tilde{T} (1 + \text{Ro}(1 - \text{Pm}))}{x((1+x)^2 + \tilde{Q})^2} - \\ &- \frac{4\tilde{\xi}^2}{x} \left( \text{Rb} + \frac{\tilde{Q} (2(1+x)^2 + \tilde{Q})}{(1+x)^2 + \tilde{Q}} \right), \quad (76) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{R}}{d\tilde{\xi}} &= \left[ \frac{d\tilde{R}^{(0)}}{d\tilde{\xi}} + \frac{2\pi^3 \tilde{Q} \sqrt{\tilde{T}} (2 + \text{Ro}(1 - \text{Pm})) N_B (N_A - 1)}{x((1+x)^2 + \tilde{Q}) L_e} \right] \tilde{D}_2^{-1} + \\ &+ \tilde{D}_2^{-2} \tilde{D}_1 \frac{2\tilde{Q} \sqrt{\tilde{T}} (2 + \text{Ro}(1 - \text{Pm})) (N_A - N_B)}{\pi(1+x)((1+x)^2 + \tilde{Q})^2 L_e}, \quad (77) \end{aligned}$$

$$\frac{d\tilde{R}^{(0)}}{d\tilde{\xi}} = -\frac{8\tilde{\xi} \tilde{Q}}{x} \frac{\tilde{Q} (1 + \text{Rb}) + \text{Rb} (1+x)^2}{(1+x)^2 + \tilde{Q}}, \quad (78)$$

$$\frac{d\tilde{R}}{d\text{Rb}} = \frac{d\tilde{R}^{(0)}}{d\text{Rb}} = -\frac{4\tilde{\xi}^2 \tilde{Q}}{x}, \quad (79)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{R}}{dL_e} &= \left[ -R_n - \frac{2\pi^3 \tilde{Q} \tilde{\xi} \sqrt{\tilde{T}} (2 + \text{Ro}(1 - \text{Pm})) N_B (N_A - 1)}{x((1+x)^2 + \tilde{Q}) L_e^2} \right] \tilde{D}_2^{-1} - \\ &- \tilde{D}_2^{-2} \tilde{D}_1 \frac{2\tilde{Q} \tilde{\xi} \sqrt{\tilde{T}} (2 + \text{Ro}(1 - \text{Pm})) (N_A - N_B)}{\pi(1+x)((1+x)^2 + \tilde{Q})^2 L_e^2}, \quad (80) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{R}}{dN_A} &= \left[ -R_n + \frac{2\pi^3 \tilde{Q} \tilde{\xi} \sqrt{\tilde{T}} (2 + \text{Ro}(1 - \text{Pm})) N_B}{x((1+x)^2 + \tilde{Q}) L_e} \right] \tilde{D}_2^{-1} + \\ &+ \tilde{D}_2^{-2} \tilde{D}_1 \frac{2\tilde{Q} \tilde{\xi} \sqrt{\tilde{T}} (2 + \text{Ro}(1 - \text{Pm}))}{\pi(1+x)((1+x)^2 + \tilde{Q})^2 L_e}, \quad (81) \end{aligned}$$

$$\frac{d\tilde{R}}{dR_n} = -(N_A + L_e)\tilde{D}_2^{-1}. \quad (82)$$

Нетрудно заметить, что в выражениях (71)–(82) содержатся члены порядка  $\tilde{Q}\tilde{\xi}N_B(N_A - 1)/L_e$ , которые связаны совместным действием эффектов прироста наночастиц ( $N_B$ ) и спирального магнитного поля ( $\tilde{Q}\tilde{\xi}$ ). Оценки этих эффектов при известных параметрах наножидкости ( $N_A, N_B, L_e$ ) дают достаточно малый вклад. Однако произведения типа  $\tilde{D}_1\tilde{Q}\tilde{\xi}N_B(N_A - 1)/L_e$  дают вклад в дестабилизацию конвекции, если концентрационное число Рэлея положительно,  $R_n > 0$ . Следовательно, во всех формулах (71)–(82) дестабилизирующим фактором является концентрация наночастиц (число  $R_n$ ).

Из формул (72), (74) следует, что неоднородное вращение оказывает стабилизирующий эффект ( $d\tilde{R}^{(0)}/d\tilde{T} > 0$ ,  $d\tilde{R}^{(0)}/dRo > 0$ ) в случае положительных чисел Россби,  $Ro > 0$ , и в обратном случае, для  $Ro < 0$ , неоднородное вращение может оказывать дестабилизирующий эффект ( $d\tilde{R}^{(0)}/d\tilde{T} < 0$ ,  $d\tilde{R}^{(0)}/dRo < 0$ ).

Из формулы (76) видно, что величина  $d\tilde{R}^{(0)}/d\tilde{Q}$  может быть положительной или отрицательной, т. е. аксиальное магнитное поле (число Чандрасекара  $\tilde{Q}$ ) оказывает стабилизирующее или дестабилизирующее действие на стационарную конвекцию. Дестабилизирующий эффект возникает при выполнении условий для профилей неоднородного вращения (числа Россби  $Ro$ ) и неоднородного азимутального магнитного поля (магнитного числа Россби  $Rb$ ):

$$Ro(Pm - 1) < 1,$$

$$Rb > \frac{\tilde{Q}(2(1+x)^2 + \tilde{Q})}{(1+x)^2 + \tilde{Q}^2} \quad (\text{при } Rb > 0),$$

$$Rb < \frac{\tilde{Q}(2(1+x)^2 + \tilde{Q})}{(1+x)^2 + \tilde{Q}^2} \quad (\text{при } Rb < 0).$$

Первое неравенство справедливо для положительных чисел Россби,  $Ro > 0$ , и магнитных числах Прандтля  $Pm < 1$ , либо  $Ro < 0$  и  $Pm > 1$ .

Влияние неоднородного азимутального магнитного поля на стационарную конвекцию выясним с помощью формул (78) и (79). В силу неоднородности азимутального магнитного поля в силе Лоренца появляется градиент магнитного поля, вызывающий дрейф течения жидкости. В зависимости от знака градиента магнитного поля (число  $Rb$ ) изменяется направление дрейфа течения, влияющего на устойчивость конвективных течений. Так, при  $Rb > 0$

(для профиля  $H_{0\varphi} = CR^\alpha$ ,  $\alpha > 1$ ) происходит дестабилизация конвекции, а при  $Rb < 0$  ( $\alpha < 1$ ) — стабилизация конвекции. Это явление наблюдается в стационарной неустойчивости (см. рис. 11).

Неоднородное азимутальное магнитное поле с профилем неоднородности  $Rb = -1$  оказывает стабилизирующий эффект, поскольку  $d\tilde{R}/d\tilde{\xi} > 0$ . Для магнитных чисел Россби  $Rb \geq 1$  неоднородное азимутальное магнитное поле оказывает дестабилизирующий эффект,  $d\tilde{R}/d\tilde{\xi} < 0$ . Из формулы (78) видно, что однородное азимутальное магнитное поле ( $Rb = -1/2$ ) может оказывать как стабилизирующее, так и дестабилизирующее действие на стационарную конвекцию. Формула (79) показывает, что эффекты стабилизации ( $Rb < 0$ ) и дестабилизации ( $Rb > 0$ ) зависят от знака магнитного числа Россби, т. е. от профиля неоднородного азимутального магнитного поля  $H_{0\varphi}(R)$ .

Из формул (80), (81) видно, что число Льюиса  $L_e$  и модифицированный коэффициент диффузии  $N_A$  имеют дестабилизирующий эффект, когда число Рэлея наночастиц положительно,  $R_n > 0$ . Для большинства видов наножидкостей сумма числа Льюиса и модифицированного коэффициента диффузии всегда положительна,  $L_e + N_A > 0$  [11], тогда из (82) следует, что концентрационное число Рэлея всегда имеет дестабилизирующий эффект.

В отличие от стационарной конвекции в аксиальном магнитном поле, влияние эффектов вращения, числа Россби, азимутального магнитного поля, спирального магнитного поля на стационарную неоднородно вращающуюся конвекцию наножидкости в спиральном магнитном поле происходит при дестабилизирующем вкладе концентрации наночастиц.

## 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получена линейная система магнитогидродинамических уравнений для неоднородно вращающейся наножидкости в спиральном магнитном поле с постоянными градиентами температуры и концентрации наночастиц в поле силы тяжести. Для этой системы уравнений в приближении локального метода ВКБ получено дисперсионное уравнение для эволюции малых возмущений в тонком слое наножидкости. Рассмотрены различные типы гидромагнитных неустойчивостей, возникающих в отсутствие градиента температуры, но с учетом градиента концентрации наночастиц. В случае, когда неоднородно вращающаяся наножидкость помещена только в аксиальное ( $H_{0z} \neq 0$ ) магнитное

поле, возникает стандартная МВН или просто МВН. Если наножидкость помещена только в неоднородное азимутальное ( $H_{0\varphi}(R) \neq 0$ ) магнитное поле, то возникает азимутальная МВН. При наличии спирального магнитного поля  $\mathbf{H}_0 = H_{0\varphi}(R)\mathbf{e}_\varphi + H_{0z}\mathbf{e}_z$  возникает спиральная МВН. Для каждого типа МВН получены дисперсионные уравнения и проведен анализ их асимптотической устойчивости с помощью критерия Льенара–Шипара. Используя этот критерий, мы определили области развития МВН, азимутальной и спиральной МВН в плоскости  $(k, Ro)$  для различных вариаций параметра вращения  $Ta$  и азимутального числа Чандрасекара  $Q_\varphi$ . Также получены критические числа Россби ( $Ro_{cr}, Rb_{cr}$ ), характеризующие пороговое значение для профилей неоднородного вращения (числа Россби  $Ro$ ) и неоднородного азимутального магнитного поля (магнитные числа Россби  $Rb$ ). Области развития МВН, азимутальной и спиральной МВН для наножидкости имеют большие размеры в плоскости  $(k, Ro)$ , чем для «чистой» жидкости.

При наличии градиентов температуры и концентрации наночастиц рассмотрены стационарные режимы конвекции в аксиальном и спиральном магнитных полях в зависимости от профилей неоднородного вращения (числа Россби  $Ro$ ) и неоднородного азимутального магнитного поля (магнитные числа Россби  $Rb$ ). Для обоих типов конвективной неустойчивости получены выражения для критических чисел Рэлея  $Ra_{st}$  и построены кривые нейтральной устойчивости. Показано, что при наличии концентрации наночастиц пороговое значение стационарного критического числа Рэлея  $Ra_{st}^{min}$  становится меньше как в аксиальной, так и в спиральной магнитоконвекции.

Развитая в настоящей работе теория может применяться для проведения лабораторных экспериментов с неоднородно вращающейся стратифицированной электропроводящей наножидкостью в магнитном поле.

## ЛИТЕРАТУРА

1. S. K. Das, S. U. S. Choi, W. Yu, and T. Pradeep, *Nanofluids: Science and Technology*, Wiley–Interscience, Hoboken, New Jersey (2008).
2. В. Я. Рудяк, А. В. Минаков, *Современные проблемы микро- и нанофлюидики*, Наука, Новосибирск (2016).
3. J. Buongiorno, *J. Heat Trans.* **128**, 240 (2006).
4. В. Я. Рудяк, А. В. Минаков, М. И. Пряжников, *Письма в ЖТФ* **45** (9), 36 (2019).
5. B. Ghasemi and S. M. Aminossadati, *Int. J. Therm. Sci.* **50**, 1748 (2011).
6. M. A. A. Hamada, I. Pop, and A. I. Md. Ismail, *Nonlinear Anal. Real World Appl.* **12**, 1338 (2011).
7. D. Yadav, R. Bhargava, and G. S. Agrawal, *J. Eng. Math.* **80**, 147 (2013).
8. S. Chandrasekhar, *Hydrodynamics and Hydromagnetic Stability*, Oxford Univ. Press, London (1961).
9. Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, *Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости*, Наука, Москва (1972).
10. А. В. Геглинг, *Конвекция Рэлея–Бенара. Структура и динамика*, Эдиториал УРСС, Москва (1999).
11. Dhananjay Yadav, R. Bhargava, G. S. Agrawal, Gyeong S. Hwang, Jinho Lee, and M. C. Kim, *Asia-Pac. J. Chem. Eng.* **9**(5), 663 (2014).
12. М. И. Копп, А. В. Тур, В. В. Яновский, *ЖЭТФ* **154**, 1281 (2018).
13. М. Копп, А. Тур, and V. Yanovsky, *East Eur. J. Phys.* **1**, 4 (2019).
14. М. И. Копп, А. В. Тур, В. В. Яновский, *ЖЭТФ* **157**, 901 (2020).
15. М. И. Копп, А. В. Тур, and V. V. Yanovsky, *Fluid Dyn. Res.* **53**, 015509 (2021).
16. В. П. Лахин, В. И. Ильгисонис, *ЖЭТФ* **137**, 783 (2010).
17. O. N. Kirillov and F. Stefani, *Proc. Internat. Astron. Union* **8**, 233 (2012).
18. O. N. Kirillov, F. Stefani, and Y. Fukumoto, *J. Fluid Mech.* **760**, 591 (2014).
19. S. Chandrasekhar, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **42**, 273 (1956).
20. Е. П. Велихов, *ЖЭТФ* **36**, 1398 (1959).
21. А. Б. Михайловский, Дж. Г. Ломинадзе, А. П. Чуриков, В. Д. Пустовитов, *Физика плазмы* **35**, 307 (2009).
22. H. Ji, J. Goodman and A. Kageyama, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **325**, L1 (2001).
23. K. Noguchi, V. I. Pariev, S. A. Colgate, H. F. Beckley, and J. Nordhaus, *Astrophys. J.* **575**, 1151 (2002).
24. G. Rüdiger and Y. Zhang, *Astron. Astroph.* **378**, 302 (2001).

25. J. Goodman and H. Ji, *J. Fluid. Mech.* **462**, 365 (2002).
26. A. P. Willis and C. F. Barenghi, *Astron. Astroph.* **388**, 688 (2002).
27. G. Rüdiger, M. Schultz, and D. Shalybkov, *Phys. Rev. E* **67**, 046312 (2003).
28. E. P. Velikhov, A. A. Ivanov, V. P. Lakhin, and K. S. Serebrennikov, *Phys. Lett. A* **356**, 357 (2006).
29. V. I. Ilgisonis, I. V. Khalzov, V. P. Lakhin, and A. I. Smolyakov, *AIP Conf. Proc.* **1242**, 23 (2010).
30. R. Hollerbach and G. Rüdiger, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 124501 (2005).
31. G. Rüdiger, R. Hollerbach, M. Schultz, and D. A. Shalybkov, *Astron. Nachr.* **326**, 409 (2005).
32. V. P. Lakhin and E. P. Velikhov, *Phys. Lett. A* **369**, 98 (2007).
33. H. Ji and S. Balbus, *Phys. Today* **66**(8), 27 (2013).
34. S. Boldyrev, D. Huynh, and V. Pariev, *Phys. Rev. E* **80**, 066310 (2009).
35. G. I. Ogilvie and J. E. Pringle, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **279**, 152 (1996).
36. G. I. Ogilvie and A. T. Potter, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 074503 (2008).
37. Г. Моффат, *Возбуждение магнитного поля в проводящей среде*, Мир, Москва (1980).
38. Ф. Р. Гантмахер, *Лекции по аналитической механике*, Физматлит, Москва (2005).
39. D. H. Michael, *Mathematika* **1**, 45 (1954).
40. B. Eckhardt and D. Yao, *Chaos Solitons Fractals* **5**(11), 2073 (1995).
41. G. Rüdiger and M. Schultz, *Astron. Nachr.* **331**, 121 (2010).
42. D. A. Nield and A. V. Kuznetsov, *Eur. J. Mech. B* **29**, 217 (2010).