

## ДИНАМИКА ДОМЕННЫХ СТЕНОК В КИРАЛЬНЫХ МАГНЕТИКАХ

*Е. Г. Галкина*<sup>a</sup>, *Б. А. Иванов*<sup>b,c,d\*</sup>, *Н. Е. Кулагин*<sup>e</sup>, *Л. М. Лерман*<sup>f,g</sup>, *И. А. Ястремский*<sup>c</sup>

<sup>a</sup> *Институт физики Национальной академии наук Украины  
03028, Киев, Украина*

<sup>b</sup> *Институт магнетизма Национальной академии наук и Министерства образования и науки Украины  
03142, Киев, Украина*

<sup>c</sup> *Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко  
03127, Киев, Украина*

<sup>d</sup> *Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»  
119049, Москва, Россия*

<sup>e</sup> *Институт физической химии и электрохимии им. А. Н. Фрумкина Российской академии наук  
119071, Москва, Россия*

<sup>f</sup> *Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
603155, Нижний Новгород, Россия*

<sup>g</sup> *Нижегородский национальный исследовательский университет им. Н. И. Лобачевского,  
Научный центр «Математика технологий будущего»  
603950, Нижний Новгород, Россия*

Поступила в редакцию 4 декабря 2020 г.,  
после переработки 4 декабря 2020 г.  
Принята к публикации 7 декабря 2020 г.

Теоретически исследовано движение доменных стенок в киральных магнетиках, для которых имеет место нарушение симметрии относительно пространственной инверсии. Такие стенки называют доменными стенками Дзялошинского [22], для них экспериментально обнаружены уникальные динамические свойства. Для киральных ферромагнетиков и антиферромагнетиков найдены нелинейные режимы движения стенок с немалой скоростью, вплоть до предельной. Динамика стенок в антиферромагнетиках допускает аналитическое описание, в то время как для ферромагнетиков необходимо использовать численный анализ. Для ферромагнетиков получены простые приближенные формулы, которые с высокой точностью описывают динамические характеристики стенок во всей области их существования. Определены законы дисперсии стенок, т. е. зависимости энергии стенки от ее импульса. Для ферромагнетиков с чисто одноосной анизотропией предельная скорость стенки определяется исключительно киральным взаимодействием и обращается в нуль, если это взаимодействие отсутствует. Для антиферромагнетиков роль кирального взаимодействия не столь очевидна: структура движущейся стенки, как и в стандартных моделях антиферромагнетиков, может быть получена преобразованием Лоренца с избранной скоростью, равной скорости магнонов на линейном участке спектра, но закон дисперсии более сложный и не описывается лоренц-инвариантными выражениями.

*Статья для специального выпуска ЖЭТФ, посвященного 90-летию И. Е. Дзялошинского*

DOI: 10.31857/S0044451021040088

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование киральных магнетиков, в которых нарушена симметрия спиновой системы относительно пространственной инверсии, было начато в классических работах Дзялошинского [1,2]. При феноме-

\* E-mail: bor.a.ivanov@gmail.com

нологическом описании таких магнетиков плотность энергии содержит вклады, линейные по градиентам намагниченности вида  $w_D = \gamma_{ikl} M_i (\partial M_k / \partial x_l)$ . В терминах атомных спинов киральные инварианты получаются при учете антисимметричного взаимодействия вида  $(\mathbf{d}_{1,2}[\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_2])$ , где  $\mathbf{S}_1$  и  $\mathbf{S}_2$  — спины соседних атомов, направление вектора  $\mathbf{d}_{1,2}$  определяется симметрией кристалла. В зависимости от распределения векторов  $\mathbf{d}_{1,2}$  для пар соседних спинов в кристалле такое взаимодействие (взаимодействие Дзялошинского) может приводить или к появлению киральных инвариантов, или к неколлинеарности спинов подрешеток антиферромагнетиков и появлению слабого ферромагнетизма [3–6]. Микроскопическое обоснование существования антисимметричного взаимодействия пары спинов предложил Мория [7]; и в настоящее время подобные слагаемые принято называть взаимодействием Дзялошинского – Мория.

Киральные магнетики долгое время ассоциировались с кристаллическими материалами, решетка которых не имеет центра симметрии, например MnSi, FeCoSi, FeGe с кристаллической группой B20, см., например, недавний обзор [8]. Исследования Дзялошинского [1, 2] были связаны с анализом спиральных структур с длинным периодом, которые были обнаружены в прошлом столетии и исследовались многими авторами [9–11].

В текущем столетии обнаружены новые интересные свойства киральных магнетиков, в связи с чем значительно вырос интерес к этим материалам. Было обнаружено, что взаимодействие Дзялошинского может быть получено практически для всех магнетиков, если приготовить их в виде сверхтонких (толщина менее 10 нм) пленок на немагнитной подложке. Для таких систем понижение симметрии обусловлено поверхностными эффектами, анизотропией контакта магнетик–подложка [12]. В этом случае плотность энергии взаимодействия Дзялошинского определяется инвариантом

$$M_z (\nabla \cdot \mathbf{M}) - (\mathbf{M} \cdot \nabla) M_z,$$

где ось  $z$  выбрана перпендикулярно поверхности пленки. Если в качестве подложки выбрать пленку немагнитного металла с сильным спин-орбитальным взаимодействием (платина, тантал), то можно получить достаточно высокие значения константы взаимодействия Дзялошинского [13, 14].

Нарушение киральной симметрии является неизбежным свойством нанопленок магнетиков, и киральные магнетики могут рассматриваться как стандартные материалы нанопластики магнетиков.

Даже если подобные вклады в энергию не так велики, как для некоторых тяжелых металлов, их роль следует оценить и обсудить. Для киральных магнетиков были обнаружены устойчивые состояния с нетривиальной топологией. Как пример, отметим топологические солитоны — скирмионы и скирмионные решетки [15, 16], киральные магнитные поплавки (chiral magnetic bobbars) [17], монополи (ежи) [18, 19] и многие другие, см. обзоры [20, 21].

Важно также, что для тонких пленок с достаточно сильным взаимодействием Дзялошинского возможно движение доменных стенок (их принято называть доменными стенками Дзялошинского [22]) с предельно высокими для ферромагнетиков скоростями (сотни м/с) [23–25]. Это свойство доменных стенок подчеркнуто в названии статьи Арне Братааса [26] «Spintronics: chiral domain walls move faster» (Спинтроника: киральные доменные стенки движутся быстрее). Возможность реализации движения доменных стенок с немалой скоростью в магнитных пленках толщиной порядка нанометров важна для приложений, в частности, систем записи информации [27, 28]. Поэтому поиск ферромагнетиков с высоким значением предельной скорости доменных стенок представляет собой важную проблему, обсуждению которой посвящено большое число работ, см. [29–32]. Не менее интересен и чисто теоретический аспект нелинейной динамики, прежде всего, динамики солитонов различного типа.

Настоящая работа посвящена теоретическому анализу динамики доменных стенок в тонких пленках киральных магнетиков, ферромагнетиков и антиферромагнетиков. Для ферромагнетиков на основе численного анализа построено простое приближенное решение, позволяющее описать структуру стенки в ферромагнетике и ее динамические характеристики, такие как зависимость энергии стенки от ее скорости или импульса. Показано, что для антиферромагнетиков наличие взаимодействия Дзялошинского нарушает стандартную лоренц-инвариантность спиновой динамики. Однако анализ движения стенки может быть проведен в достаточно полной мере. Оказалось, что многие свойства доменных стенок для лоренц-инвариантных моделей антиферромагнетиков сохраняются и для киральных антиферромагнетиков. В частности, изменение структуры стенки при движении сводится к лоренцевскому сокращению ее толщины. Кроме того, как и для стандартных моделей антиферромагнетиков, существуют две ветви зависимости энергии доменных стенок от их

импульса, одной из которых отвечают устойчивые стенки, а второй — неустойчивые.

## 2. МОДЕЛИ КИРАЛЬНЫХ МАГНЕТИКОВ

Динамика намагниченности ферромагнетиков описывается известным уравнением Ландау–Лифшица [33] (см. также монографию [34]), которое обычно записывается для намагниченности:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma[\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{eff}] + \mathbf{R}, \quad \mathbf{H}_{eff} = -\frac{\delta W[\mathbf{M}]}{\delta \mathbf{M}}, \quad (1)$$

где  $\gamma = g\mu_B/\hbar$  — гиромагнитное отношение,  $g$  — фактор Ланде ( $g$ -фактор),  $\mu_B$  — модуль магнетона Бора,  $\gamma \approx 2.8$  МГц/Э при  $g = 2$ . Эффективное поле  $\mathbf{H}_{eff}$  определяется как вариационная производная энергии ферромагнетика  $W = W[\mathbf{M}]$ , записанной в виде функционала плотности намагниченности  $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ . Слагаемое  $\mathbf{R}$  описывает диссипацию в системе. Обычно это слагаемое выбирается в форме Гильберта,

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_G = \frac{\alpha_G}{M_s} \left[ \mathbf{M} \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \right],$$

где  $M_s$  — намагниченность насыщения. При этом  $(\mathbf{M} \cdot \mathbf{R}) = 0$  и длина вектора  $\mathbf{M}$  сохраняется,  $\mathbf{M}^2 = M_s^2 = \text{const}$ . В этом случае удобно использовать нормированный (единичный) вектор  $\mathbf{m} = \mathbf{M}/M_s$ ,  $\mathbf{m}^2 = 1$ .

Запишем функционал энергии кирального ферромагнетика в простейшем виде, допускающем описание движения доменной стенки,

$$W = \int d\mathbf{r} \left[ \frac{A}{2} (\nabla \mathbf{m})^2 + \frac{K}{2} (m_x^2 + m_y^2) - D [m_z (\nabla \cdot \mathbf{m}) - (\mathbf{m} \cdot \nabla) m_z] \right]. \quad (2)$$

Эта энергия включает энергию неоднородного обмена с константой  $A$  и чисто одноосную анизотропию с константой  $K > 0$  и легкой осью, перпендикулярной к плоскости пленки (плоскости  $xy$ ); знак минус перед слагаемым с взаимодействием Дзялошинского с константой  $D$  выбран для удобства в дальнейшем.

Отметим интересное свойство легкоосного кирального магнетика: наличие взаимодействия Дзялошинского не проявляется в спектре спиновых волн. Закон дисперсии спиновых волн для модели (2) можно представить в виде

$$\omega(k) = \frac{\gamma}{M_s} (K + Ak^2) = \omega_0 (1 + x_0^2 k^2), \quad (3)$$

где активация магнонов  $\omega_0 = \gamma H_a$ ,  $H_a = K/M_s$  — поле анизотропии и  $x_0 = \sqrt{A/K}$ . Отметим, что намагниченность и константу анизотропии для пленок толщиной порядка нанометров можно экспериментально определить с помощью стандартной магнитометрии или резонансными методами. Определение константы неоднородного обмена  $A$  и константы Дзялошинского  $D$  для таких пленок является более сложной задачей. Одной из проблем является то, что зачастую для определения одной из констант нужно знать и точное значение другой. Независимость спектра спиновых волн легкоосного кирального магнетика от  $D$  была использована для определения  $A$  путем анализа температурных зависимостей намагниченности сверхтонких киральных ферромагнитных пленок [35].

Без учета диссипативных процессов уравнение Ландау–Лифшица можно записать в лагранжевой форме с лагранжианом вида

$$L[\mathbf{m}] = G - W, \quad G[\mathbf{m}] = \int \mathbf{A}(\partial \mathbf{m}/\partial t) d\mathbf{r},$$

где гироскопическое слагаемое записывается через сингулярную векторную функцию, вектор-потенциал поля монополя Дирака

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{m}), \quad \text{rot}_{\mathbf{m}} \mathbf{A} \propto \mathbf{m},$$

см. [36, 37]. Вектор-потенциал  $\mathbf{A}$  определен с точностью до некоторой калибровки, в то время как фиктивное магнитное поле  $\text{rot}_{\mathbf{m}} \mathbf{A}$ , входящее в уравнения движения, является калибровочно-инвариантным. Для поля монополя можно выбрать выражение

$$\mathbf{A} = \frac{M_s}{\gamma} \frac{(\mathbf{n} \times \mathbf{m})}{(1 + \mathbf{n} \cdot \mathbf{m})}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{n}$  — произвольный постоянный единичный вектор. Вектор-потенциал поля монополя Дирака имеет сингулярность, для выражения (4) сингулярность (струна Дирака) расположена на полупрямой  $\mathbf{m} = -\mathbf{n}$ , см. [36, 37].

Можно выписать интегралы движения поля намагниченности ФМ, при этом энергия совпадает со значением функционала  $W[\mathbf{M}]$ , рассчитанным для данного распределения намагниченности. Импульс поля намагниченности  $\mathbf{P}$  можно записать в виде

$$P_i = - \int \mathbf{A}(\partial \mathbf{m}/\partial x_i).$$

Это выражение не обладает калибровочной инвариантностью, и значение импульса зависит от калибровки.

Проблема определения импульса магнитных солитонов является достаточно сложной, см. работы [38–43] и обсуждение ниже для конкретных решений. Поскольку нас интересует движение плоской доменной стенки, т.е. одномерная задача с  $\mathbf{m} = \mathbf{m}(x, t)$ , отлична от нуля только одна компонента импульса,  $\mathbf{P} = P\mathbf{e}_x$ . С учетом конкретного выбора вектор-потенциал  $\mathbf{A}$  можно записать

$$P = S \frac{M_s}{\gamma} \int \left( \frac{(\mathbf{m} \times \mathbf{n})}{(1 + \mathbf{n} \cdot \mathbf{m})} \cdot \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x} \right) dx, \quad (5)$$

где  $S = LL_y$  — площадь стенки,  $L$  и  $L_y$  — толщина пленки и ее размер вдоль оси  $y$ . Понятно, что значение импульса зависит от калибровки; в частности, если выбрать  $\mathbf{A}$  в виде (4), импульс зависит от направления струны Дирака  $\mathbf{n}$ .

Кроме энергии и импульса, для анализа магнитных солитонов предельно важно наличие или отсутствие еще одного интеграла движения. Для чисто одноосных магнетиков без киральных свойств имеет место симметрия относительно поворота спинов вокруг оси  $z$ , что приводит к сохранению суммарной  $z$ -проекции намагниченности,

$$M_z^{(tot)} = \int M_z d\mathbf{r}.$$

Наличие такого интеграла принципиально важно для физики магнитных солитонов.

С одной стороны, сохранение

$$M_z^{(tot)} = \int M_z dx$$

несовместимо с существованием одномерных движущихся топологических солитонов, описывающих в бездиссипативном пределе движение доменных стенок. Действительно, такое движение должно сопровождаться изменением относительных размеров доменов с  $M_z = M_s$  и  $M_z = -M_s$ . Формально, при условии  $M_z^{(tot)} = \text{const}$  обращается в нуль величина предельной скорости стенки  $v_c$ , т.е. только неподвижные стенки. Величина  $v_c$  в одноосном ферромагнетике определяется тем взаимодействием, которое нарушает сохранение суммарной  $z$ -проекции намагниченности. Такие взаимодействия могут быть связаны с кристаллической анизотропией в базисной плоскости, магнитным дипольным взаимодействием, а также наличием внешнего магнитного поля, перпендикулярного легкой оси.

Для плоской 180-градусной стенки в достаточно толстой пленке (толщина много больше  $x_0 = \sqrt{A/K}$ ) магнитное дипольное взаимодействие описывается плотностью  $2\pi(\mathbf{M}\mathbf{e}_x)_z^2$ ,  $\mathbf{e}_x$  — орт вдоль

направления движения стенки, которое перпендикулярно легкой оси  $\mathbf{e}_z$ . Этот источник движения стенки рассматривали Ландау и Лифшиц в классической работе [33], в которой впервые было рассмотрено движение доменной стенки, а также Уокер [44], который исследовал движение стенки с немалыми скоростями и нашел ее предельную скорость. Для толстых пленок дипольная энергия эквивалентна энергии магнитной анизотропии с осью в базисной плоскости магнетика. Если эти взаимодействия слабые, предельная скорость линейно зависит от характерного параметра («неодноосного» эффективного поля  $H_{non-uniaxial}$ ),  $v_c/v_0 \propto H_{non-uniaxial}/H_a$  и мала, здесь и ниже  $v_0 = \omega_0 x_0$  — характерная скорость магнонов в модели (3). Таким образом, несохранение  $M_z^{(tot)}$  является фактором, способствующим возможности эффективного применения движущихся солитонов типа доменных стенок.

В сверхтонких пленках (толщина которых меньше  $x_0 = \sqrt{A/K}$ ) вклад дипольного взаимодействия подавлен, см. [22, 45]. Создание нанопленок ферромагнетиков с достаточно сильной кристаллической двухосной анизотропией, а также использование сильных магнитных полей в наноприборах является непростой задачей. Однако легко видеть, что взаимодействие Дзялошинского не имеет симметрии относительно поворотов в спиновом пространстве и не сохраняет  $M_z^{(tot)}$ . Как отмечалось, взаимодействие Дзялошинского может присутствовать в достаточно тонких пленках, при этом значение характерного поля, обусловленного этим взаимодействием, не мало. Это определяет возможность достаточно быстрого движения доменных стенок в киральных магнетиках и открывает перспективы повышения предельной скорости стенки в нанопленках магнетиков.

Интересно отметить, что сохранение  $M_z^{(tot)}$  не препятствует движению солитонов другого типа, а именно, локализованных солитонов, для которых вдали от центра солитона намагниченность имеет одно и то же направление, например,  $M_z \rightarrow M_s$ ,  $M_{x,y} \rightarrow 0$ , см. [46–51]. Такому солитону отвечают двухпараметрические состояния (движущиеся магнонные капли) с фиксированным значением  $M_z^{(tot)}$  [46, 48–50]. Они описываются решениями, зависящими от двух параметров, скорости солитона  $\mathbf{v}$  и частоты прецессии спинов  $\omega$  в системе отсчета, движущейся вместе с солитоном со скоростью  $\mathbf{v}$ . Эти солитоны можно интерпретировать как связанные состояния большого числа магнонов  $N$  с заданным импульсом  $\mathbf{P}$ ,  $N = M_z^{(tot)}/g\mu_B$ . Особо важно, что могут существовать неодномерные прецессионные солито-

ны такого типа, и эти солитоны устойчивы относительно коллапса [47–51]. В данном случае роль еще одного, помимо энергии и импульса, интеграла движения абсолютно иная, чем для доменных стенок. Наличие такого интеграла способствует существованию неоднородных магнитных солитонов.

Отметим, что неоднородные магнитные солитоны могут быть устойчивыми и для одноосного кирального магнетика, для которого не сохраняется  $M_z^{(tot)}$ . Дело в том, что энергия (2), несимметричная относительно поворотов спинов, для двумерного или трехмерного магнетика обладает симметрией относительно одновременного поворота спинов и координат в плоскости  $xy$  на один и тот же угол. Такой симметрии соответствует сохранение  $z$ -проекции полного момента импульса магнетика

$$J_z^{(tot)} = S_z^{(tot)} + L_z^{(tot)},$$

где  $L_z^{(tot)}$  и  $S_z^{(tot)} = M_z^{(tot)}/g\mu_B$  — значения соответственно  $z$ -проекции момента импульса поля намагниченности (орбитального момента) и полного спина [52]. Для  $L_z^{(tot)}$  можно выбрать выражение, согласованное с определением импульса поля намагниченности,

$$L_z^{(tot)} = - \int \varepsilon_{ijz} x_i \mathbf{A} \left( \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x_j} \right) d\mathbf{r},$$

здесь  $\varepsilon_{ijk}$  — абсолютный антисимметричный тензор.

Появление киральных свойств тонких магнитных пленок на подложке из тяжелого металла не является свойством только ферромагнетиков. Действительно, инварианты типа (2) квадратичны по степеням намагниченностей, т.е. они допустимы для антиферромагнетиков и ферримагнетиков. Наиболее простое и удобное описание динамики антиферромагнетиков базируется на использовании так называемой сигма-модели (см., например, книги и обзоры [49, 50, 53, 54]). В рамках этого подхода основной динамической переменной при описании антиферромагнетика является нормированный вектор антиферромагнетизма

$$\mathbf{l} = (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2)/|\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2|,$$

где  $\mathbf{M}_1$  и  $\mathbf{M}_2$  — намагниченности подрешеток. При этом вектор суммарной намагниченности  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$  играет роль вспомогательной переменной и выражается простой формулой через  $\mathbf{l}$  и  $\partial\mathbf{l}/\partial t$ . Таким образом, вместо двух уравнений для намагниченностей подрешеток можно использовать одно уравнение для  $\mathbf{l}$ .

В отличие от ферромагнетиков, спиновая динамика антиферромагнетика является инерционной. Лагранжиан простейшей версии сигма-модели для антиферромагнетика включает слагаемое, квадратичное по временной производной  $(\partial\mathbf{l}/\partial t)^2$ , которое можно интерпретировать как кинетическую энергию  $T$  и записать в виде

$$T = \frac{A}{2c^2} \int d\mathbf{r} \left( \frac{\partial\mathbf{l}}{\partial t} \right)^2, \quad (6)$$

где  $c$  — фазовая скорость магнонов в той области спектра, где их закон дисперсии является линейным,

$$c = \gamma \sqrt{\frac{AH_{ex}}{2M_0}}. \quad (7)$$

Здесь  $H_{ex}$  — обменное поле антиферромагнетика, определенное из условия, что для изотропного антиферромагнетика во внешнем поле антиферромагнитный порядок существует (вектор  $\mathbf{l} \neq 0$ ) только при  $H_0 < H_{ex}$  и разрушается ( $|\mathbf{M}| = 2M_0$  и  $\mathbf{l} = 0$ ) при  $H_0 \geq H_{ex}$  (об определении обменного поля см. монографию [53]). Скорость  $c$  определяется только обменными взаимодействиями и значительно превышает характерную скорость магнонов для ферромагнетика, например, величину  $v_0 = \omega_0 x_0 = \gamma \sqrt{AH_a/M_s}$  для модели (2). Действительно, значение  $c/v_0 \sim \sqrt{H_{ex}/H_a}$  и содержит отношение энергии однородного обмена к энергии анизотропии. Это свойство является важным примером обменного усиления динамических параметров антиферромагнетиков.

Для «чистого» антиферромагнетика лагранжиан включает только кинетическую энергию (6) и потенциальную энергию  $W$ ,  $L^{(AFM)}[\mathbf{l}] = T - W$ . Отметим, что наличие сильного магнитного поля приводит к появлению в лагранжиане антиферромагнетика специфических гироскопических слагаемых, линейных по компонентам  $\partial\mathbf{l}/\partial t$ . Гироскопические слагаемые в принципе могут возникать и для некоторых антиферромагнетиков, допускающих слабый ферромагнетизм, но они запрещены для киральных магнетиков, см. [53]. Выражение для статической энергии  $W$  кирального антиферромагнетика в терминах единичного вектора  $\mathbf{l}$  имеет такую же структуру, как для ферромагнетика, и может быть получено из формулы (2) заменой  $\mathbf{m} \rightarrow \mathbf{l}$ .

Важно заметить, что в обычных (не киральных) антиферромагнетиках пространственные и временные производные вектора  $\mathbf{l}$  входят в лагранжиан в комбинации  $(\partial\mathbf{l}/\partial t)^2 - c^2(\nabla\mathbf{l})^2$ . Наличие такой формальной лоренц-инвариантности значительно упрощает анализ динамики солитонов, см. некоторые



примеры в работах [55, 56] и недавний обзор [54]. В частности, если известно решение для неподвижного солитона любого типа, движущееся решение можно получить преобразованием Лоренца с характерной скоростью  $c$ . В частности, предельная скорость любого солитона совпадает со значением  $c$ . Однако для киральных магнетиков наличие слагаемых, линейных по градиентам  $\mathbf{l}$ , разрушает эту лоренц-инвариантность, см. [57]. В частности, это приводит к тому, что предельная скорость двумерных топологических солитонов (скирмионов) в киральных антиферромагнетиках меньше, чем  $c$  [57]. С другой стороны, выражения для интересующих нас интегралов движения, энергии и импульса солитона определяются производными  $\partial L/\partial(\partial\mathbf{l}/\partial t)$ , и киральные инварианты не изменяют их формы.

Как и в любой лоренц-инвариантной теории, энергия поля вектора  $\mathbf{l}$  для антиферромагнетика является суммой кинетической и потенциальной энергий,

$$E^{(AFM)} = T + W.$$

Величина импульса (на единицу площади стенки) не содержит вклада кирального инварианта и определяется выражением, характерным для лоренц-инвариантной теории

$$P^{(AFM)} = -\frac{A}{c^2} \int \left( \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial x} \right) dx. \quad (8)$$

Заметим, однако, что наличие кирального инварианта приводит к нарушению стандартных для лоренц-инвариантной теории соотношений между импульсом и энергией, см. ниже разд. 4.

### 3. ДИНАМИКА ДОМЕННОЙ СТЕНКИ В ФЕРРОМАГНЕТИКЕ

Для конкретного анализа солитонных решений удобно использовать угловые переменные для единичного вектора  $\mathbf{m}$  (или вектора  $\mathbf{l}$  для антиферромагнетика), например

$$\begin{aligned} m_z &= \cos \theta, & m_x &= \sin \theta \cos \varphi, \\ m_y &= \sin \theta \sin \varphi. \end{aligned} \quad (9)$$

Приведем явный вид функционала энергии кирального магнетика (2) через эти угловые переменные для одномерного решения:

$$\begin{aligned} W[\theta, \varphi] &= \int dx \left[ \frac{A}{2} [(\theta')^2 + (\varphi')^2 \sin^2 \theta] + \frac{K}{2} \sin^2 \theta, \right. \\ &\quad \left. - D(\theta' \cos \varphi - \varphi' \sin \theta \cos \theta \sin \varphi) \right]. \quad (10) \end{aligned}$$

Здесь и далее штрихом обозначена производная по  $\xi$ , все величины приводятся на единицу площади стенки. Движущаяся 180-градусная плоская доменная стенка описывается решениями типа простой волны, для которой

$$\theta = \theta(\xi), \quad \varphi = \varphi(\xi), \quad \xi = x - vt,$$

$v$  — скорость стенки. Уравнения для  $\theta$  и  $\varphi$  принимают вид системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Ось  $z$  является легкой осью магнетика, т. е.  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$  по обе стороны от доменной стенки. Для определенности, будем считать что  $\theta \rightarrow \pi$  при  $\xi \rightarrow +\infty$  и  $\theta \rightarrow 0$  при  $\xi \rightarrow -\infty$ . Уравнения для  $\theta$  и  $\varphi$  принимают вид

$$\begin{aligned} A\theta'' - \sin \theta \cos \theta [K + A(\varphi')^2] - \\ - 2D\varphi' \sin^2 \theta \sin \varphi + v(M_s/\gamma)\varphi' \sin \theta = 0, \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(\varphi' \sin^2 \theta)' + 2D\theta' \sin^2 \theta \sin \varphi - \\ - v(M_s/\gamma)\theta' \sin \theta = 0. \quad (12) \end{aligned}$$

Эта система уравнений формально эквивалентна механической задаче о движении материальной точки по поверхности сферы при наличии двух гироскопических слагаемых различной природы, одно из которых пропорционально параметру киральности  $D$ , а другое — скорости стенки  $v$ . Здесь переменная  $\xi$  играет роль времени, константа  $A$  — роль массы, а скорость  $v$  является параметром, который, в частности, определяет характер особых точек уравнений. Эта задача имеет две степени свободы, для нее можно построить один первый интеграл

$$Q = \frac{A}{2} [(\theta')^2 + (\varphi')^2 \sin^2 \theta] - \frac{K}{2} \sin^2 \theta, \quad (13)$$

на решении типа стенки значение  $Q = 0$ . Доменной стенке отвечает гетероклиническая сепаратрисная траектория, соединяющая два положения равновесия,  $\mathbf{m} = \mathbf{e}_z$ ,  $\partial\mathbf{m}/\partial\xi = 0$  и  $\mathbf{m} = -\mathbf{e}_z$ ,  $\partial\mathbf{m}/\partial\xi = 0$ . Второй интеграл движения, находящийся в инволюции к (13), для системы (11), (12) построить не удастся. Как будет показано ниже, данная механическая задача (в отличие, например, от задачи Уокера, которая описывает движение стенки в двухосном ферромагнетике) не является интегрируемой. В этом случае ее общий анализ может быть проведен только численно.

Исключением является случай неподвижной доменной стенки ( $v = 0$ ). В этом случае легко найти два решения, которым соответствуют постоянные значения  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$ . Для обоих решений

профиль стенки  $\theta(\xi)$  не зависит от выбора значения угла  $\varphi$  и определяется стандартной формулой

$$\cos \theta(\xi) = -\text{th}(\xi/x_0), \quad x_0 = \sqrt{A/K}, \quad (14)$$

где  $x_0$  определяет толщину доменной стенки. Далее для определенности считается, что  $\theta(\xi \rightarrow -\infty) \rightarrow 0$ ,  $\theta(\xi \rightarrow +\infty) \rightarrow \pi$ , то есть в стенке  $\theta'(\xi) \geq 0$ .

Легко показать, что энергия неподвижной доменной стенки определяется формулой  $E(v=0) = 2E_0 - \pi D \cos \varphi_0$ , где  $E_0 = \sqrt{AK}$  и  $\varphi_0$  обозначает два значения угла  $\varphi$  в стенке с  $v=0$ ,  $\varphi_0 = 0$  или  $\varphi_0 = \pi$ . Легко видеть, что при  $D > D_c$ , где критическое значение

$$D_c = \frac{2}{\pi} \sqrt{AK}, \quad (15)$$

энергия стенки с минимальной энергией становится отрицательной. Действительно, при  $D > D_c$  термодинамически устойчива спиральная структура. Однородное состояние с  $\theta = 0, \pi$ , в котором может существовать уединенная стенка, является основным состоянием системы только при  $D < D_c$ , и далее ограничимся исследованием таких магнетиков. Отметим, однако, что магнонные частоты вещественны при любом значении  $D$ , т. е. при  $D > D_c$  однородное состояние устойчиво относительно малых возмущений, т. е. является метастабильным.

Убывание отклонения намагниченности от равновесного значения вдали от солитонов любого типа (доменных стенок или локализованных солитонов) является экспоненциальным,  $\sin \theta \propto \exp(-\kappa|\xi|)$  при  $\xi \rightarrow \pm\infty$ . Это поведение проще всего исследовать с помощью аналитического продолжения спектра спиновых волн  $\omega(k)$  в область комплексных волновых векторов и частот,  $k \rightarrow i\kappa$ ,  $\omega \rightarrow i\kappa v$  [58, 59]. В общем случае для моделей ферромагнетиков и ферримагнетиков существуют две характерные скорости,  $v^{(-)}$  и  $v^{(+)}$ ,  $v^{(-)} < v^{(+)}$ . При скоростях солитона  $0 \leq |v| < v^{(-)}$  величина  $\kappa$  вещественная. В терминах фазового пространства системы уравнений (11), (12) это означает, что положениям равновесия  $\theta = 0$  или  $\theta = \pi$  отвечают особые точки типа седло. При  $v^{(-)} < v < v^{(+)}$  величина  $\kappa$  имеет ненулевую мнимую часть,  $\kappa = \kappa' \pm i\kappa''$ , т. е. асимптотика содержит затухающие осцилляции и положения равновесия представляют собой особые точки типа седло-фокус. Если же  $|v| > v^{(+)}$ , то величина  $\kappa$  чисто мнимая, т. е. волновой вектор вещественный и солитоны типа простой волны отсутствуют. Скорость  $v^{(+)}$  совпадает с минимальной фазовой скоростью магнонов, т. е. отсутствие солитонных решений со скоростями  $|v| > v^{(+)}$  отвечает естественному условию отсутствия черенковского излучения магнонов.

Для уокеровского решения в двухосном ферромагнетике Шлеман [58] отметил, что величина  $v^{(-)}$  совпадает с предельной скоростью доменной стенки. Это предположение использовалось при анализе различных магнетиков со сложной магнитной структурой [59]. Впоследствии было показано, что совпадение  $v^{(-)}$  и  $v_c$  является в некотором смысле случайным и обусловлено тем, что система уравнений (11), (12) для задачи Уокера является точно интегрируемой гамильтоновой системой. Для этой задачи был построен дополнительный интеграл движения, находящийся в инволюции к (13) [60–63]. Детальный анализ общих свойств фазового пространства гамильтоновых интегрируемых систем с двумя степенями свободы показал [64–66], что если для таких систем особые точки являются седло-фокусами, что имеет место при  $v^{(-)} < |v| < v^{(+)}$ , то все траектории, выходящие из некоторого седло-фокуса, в него же и возвращаются. При этом не существует траекторий, идущих из одного седло-фокуса в другой, т. е. решения типа стенок отсутствуют. Гетероклинические сепаратрисные фазовые траектории, описывающие стенки, существуют только для особых точек типа седло, что соответствует условию  $|v| < v^{(-)}$ . Таким образом, для всех интегрируемых систем предельная скорость стенки совпадает с  $v^{(-)}$ .

Если же для некоторого магнетика уравнения для  $\theta(\xi)$ ,  $\varphi(\xi)$  не обладают свойством точной интегрируемости, то величина предельной скорости доменной стенки может не совпадать с  $v^{(-)}$ , она может быть больше, чем  $v^{(-)}$ . В частности, такое поведение найдено для доменной стенки в ферромагнетике во внешнем магнитном поле, перпендикулярном оси легкого намагничивания [67]. Рассмотренный в данной работе киральный ферромагнетик с одноосной анизотропией является ярким примером таких систем. Для него аналитическое продолжение (3) дает  $i\kappa v = \omega_0(1 - x_0^2 \kappa^2)$ , т. е.

$$2x_0\kappa = iv/v_0 \pm \sqrt{(v/v_0)^2 - 4}, \quad (16)$$

где использовано введенное выше значение  $v_0 = \gamma x_0 K/M_s = \gamma H_a x_0 = \omega_0 x_0$ . Таким образом, значения  $v^{(-)} = 0$  и  $v^{(+)} = 2v_0$ , т. е. монотонное поведение решения, при котором  $M_x, M_y \propto \exp(-\xi/x_0)$ , см. (14), имеет место только при  $v = 0$ .

Для численного исследования удобно использовать безразмерные переменные, измеряя  $\xi$  в единицах  $x_0$ , скорость  $v$  в единицах  $v_0$ , а константу Дзялошинского  $D$  в единицах  $E_0 = \sqrt{AK}$ . Таким образом, при данной скорости характер решения определяется одним безразмерным параметром  $D/E_0$  (напомним, что критическое значение  $D_c/E_0 = 2/\pi$ ).

Численное построение решений, описывающих движущуюся доменную стенку, упрощается тем, что в рамках уравнений (11), (12) они имеют определенную симметрию, а именно,  $\cos\theta(\xi)$  является нечетной, а  $\varphi(\xi)$  и  $\sin\theta(\xi)$  являются четными функциями  $\xi$ . Следовательно, фазовые траектории, определяющие доменные стенки, проходят через поверхность симметрии  $\cos\theta = 0$ ,  $\varphi' = 0$ . У состояния равновесия  $\theta = 0$  имеется двумерное неустойчивое многообразие, т. е. существует однопараметрическое семейство траекторий, выходящих из него при  $\xi \rightarrow -\infty$ . Для всех этих траекторий существует точка, в которой  $\cos\theta = 0$ . Эти траектории можно параметризовать значением величины  $\varphi_{out}$ . Чтобы найти решение типа стенки, надо так подобрать значение величины  $\varphi_{out}$ , чтобы в той же точке  $\xi$ , где  $\cos\theta = 0$ , одновременно обращалась бы в нуль величина  $\varphi' = 0$ . Для этого, фактически, надо решить одно уравнение с одним неизвестным, что легко реализовать численно. Различные примеры решения задач о движении доменных стенок можно найти в работах [67–69]. В данной работе использовался надежный и простой метод продолжения по параметру (метод продолжения Келлера [70]). В результате применения этого метода для каждого значения  $D/E_0$ , т. е. для различных магнетиков в рамках модели (2), можно построить все многообразие доменных стенок. Если решение найдено, можно вычислить интегралы движения, энергию  $E$  и импульс  $P$  доменной стенки. Обсудим результаты анализа структуры, энергии и импульса доменных стенок.

Прежде всего, отметим, что одному значению скорости соответствуют два типа стенок с различными энергиями, т. е. зависимость  $E = E(v)$  изображается замкнутой кривой, содержащей две ветви — верхнюю и нижнюю, см. рис. 1. Это свойство является общим для известных нам стенок в различных ферромагнетиках, в частности, блоховской и неелевской ветвям стенок для уокеровского решения для двухосного ферромагнетика. Эти ветви начинаются с описанных выше доменных стенок с  $v = 0$ . Стенка с энергией  $E(v = 0) = 2E_0 - \pi D$  и значением  $\varphi = 0$  соответствует наименьшему значению энергии и нижней ветви, а стенка с  $E(v = 0) = 2E_0 + \pi D$  и  $\varphi = \pi$  — наибольшему значению энергии и верхней ветви зависимости  $E = E(v)$ . Напомним, что значения всех экстенсивных величин, таких как энергия или импульс, приводятся на единицу площади стенки.

При увеличении скорости движения стенки энергия для стенок нижней ветви увеличивается, а для стенок верхней ветви уменьшается. Анализ показал,

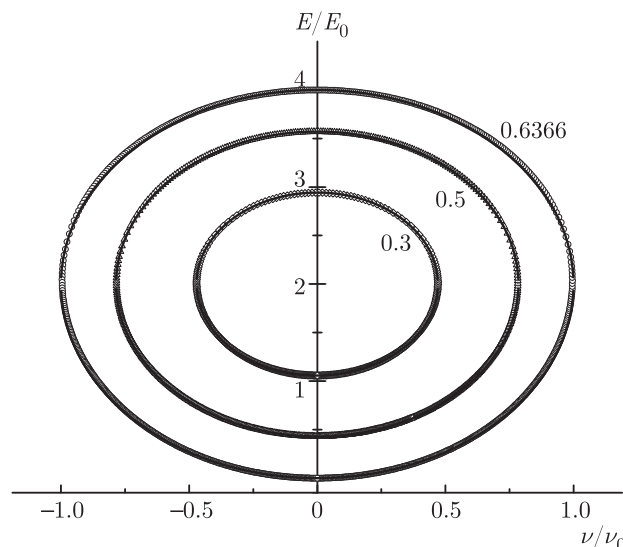


Рис. 1. Зависимость энергии доменной стенки (в единицах  $E_0$ ) от ее скорости (в единицах  $v_0$ ) при различных значениях  $D/E_0$  (указаны около кривых, значение  $D/E_0 = 0.6366$  близко к критическому,  $D_c/E_0 = 2/\pi$ ). Символы — данные численного счета, линии проведены согласно приближенной формуле (21)

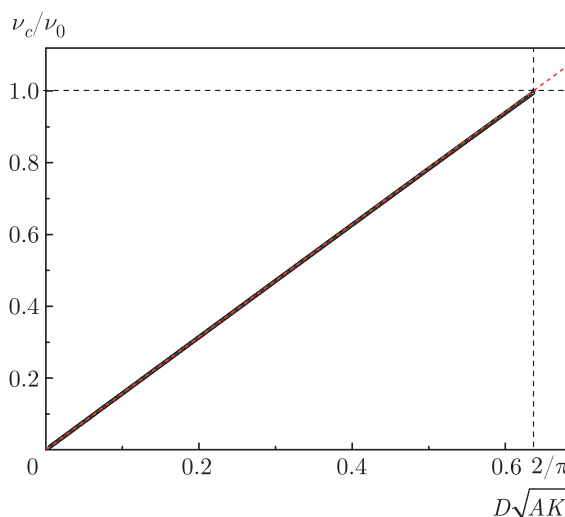


Рис. 2. Зависимость предельной скорости доменной стенки  $v_c$  (в единицах  $v_0$ ) от константы Дзялошинского  $D$  (в единицах  $E_0$ ). Символы — данные численного счета, штриховая красная прямая линия отвечает линейной зависимости (16)

что решения типа доменных стенок исчезают при достаточно больших значениях параметра  $|v|$ , т. е. возможные значения скоростей стенки  $v$  не могут превышать предельного значения  $v_c$ ,  $|v| \leq v_c$ . При  $v = v_c$  две ветви зависимости  $E = E(v)$  сливаются, т. е. доменные стенки с  $v = v_c$  идентичны, см. рис. 1.



Оказалось, что во всей допустимой области значений  $D \leq D_c$  зависимость предельной скорости от константы Дзялошинского с очень высокой точностью является линейной, см. рис. 2.

Эту зависимость можно описать формулой

$$v_c = \frac{\pi\gamma D}{2M_s} = v_0 \frac{D}{D_c}, \quad (17)$$

т. е. при  $D = D_c$  значение  $v_c = v_0$  и составляет половину минимальной фазовой скорости магнонов.

При вычислении импульса стенки  $P$  имеет место проблема, связанная с сингулярностью вектор-потенциала  $\mathbf{A}$ . Положение сингулярной точки для потенциала вида (4) определяется направлением вектора  $\mathbf{n}$  (струны Дирака),  $\mathbf{m}_{sing} = -\mathbf{n}$ . Доменную стенку можно наглядно представить как траекторию на сфере  $\mathbf{m}^2 = 1$ , выходящую из одного полюса (скажем,  $\mathbf{m} = -\mathbf{e}_z$ ) и входящую в другой ( $\mathbf{m} = \mathbf{e}_z$ ). Величину  $P$  можно записать в виде интеграла по этой траектории:

$$P = - \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(\mathbf{m})(\partial\mathbf{m}/\partial\xi) d\xi = - \int_{\mathbf{m}=\mathbf{e}_z}^{\mathbf{m}=-\mathbf{e}_z} \mathbf{A}(\mathbf{m}) d\mathbf{m}. \quad (18)$$

Для данного магнетика при любом выборе  $\mathbf{n}$  хотя бы одна из траекторий, отвечающих стенке с некоторой скоростью  $-v_c \leq v \leq v_c$  попадет на такую сингулярную точку. Кроме того, возникает зависимость  $P$  от выбора калибровки.

Прямое вычисление импульса на основе формулы (5) и численного интегрирования решения показало, однако, что для таких траекторий, которые не попадают в малую окрестность сингулярной точки  $\mathbf{m}_{sing}$  (обычно это значения  $\Delta v \leq 0.01v_0$ ), интеграл легко находится и импульс является регулярной функцией скорости доменной стенки. Реально использовались расчеты для двух направлений  $\mathbf{n}$ , а именно,  $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$  и  $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$ . Далее для восстановления зависимости импульса от скорости можно использовать тот факт, что разность величин  $P$  для двух различных стенок,  $P_1$  и  $P_2$ , определяется интегралом по замкнутому контуру

$$\Delta P = P_2 - P_1 = \oint \mathbf{A}(\mathbf{m}) d\mathbf{m}.$$

По теореме Стокса этот интеграл равен потоку векторного поля  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$  через область, ограниченную этими двумя траекториями, т. е.  $\Delta P$  является калибровочно-инвариантной величиной [40, 41]. С

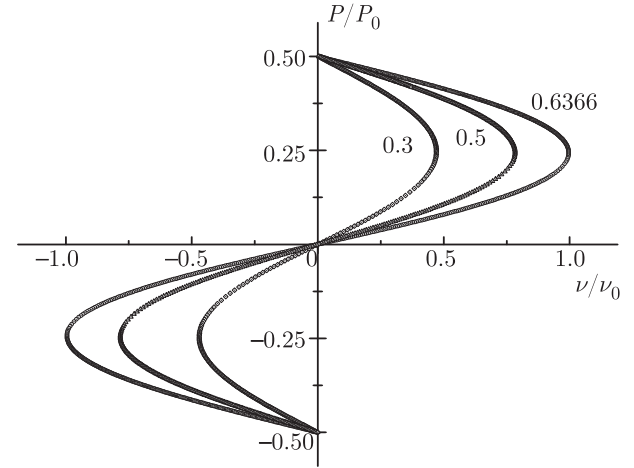


Рис. 3. Полученная численно зависимость импульса доменной стенки (в единицах  $P_0$ ) от ее скорости (в единицах  $v_0$ ) для тех же значений  $D/E_0$ , что на рис. 1

учетом того, что  $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{m}M_s/\gamma$ , эта величина определяется интегралом по участку сферы,

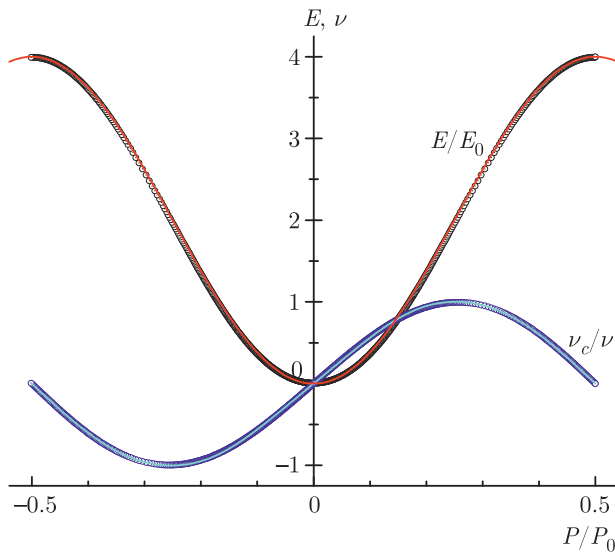
$$\Delta P = (M_s/\gamma) \int \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Интеграл для  $\Delta P$ , в отличие от содержащего вектор-потенциал  $\mathbf{A}$  интеграла для  $P$ , является изотропным в плоскости  $m_x, m_y$ . В силу этих соображений можно найти разность значений импульса при разных направлениях струны. В частности, для двух использованных выше направлений значения импульса для некоторой стенки должны различаться на величину  $\pi M_s/\gamma$ . Это позволяет восстановить значения импульса для стенок с траекториями, проходящими вблизи сингулярности для одной из калибровок, за счет использования данных для другой калибровки. Найденная таким образом зависимость  $P(v)$  представлена на рис. 3. Для наглядности использовано условие, что стенке с минимальной энергией ( $v = 0, \varphi = 0$ ) отвечает значение  $P = 0$ .

Разность импульсов неподвижных стенок верхней и нижней ветвей отвечает половине площади сферы и равна величине  $P = 2\pi M_s/\gamma = P_0/2$ , а зависимость энергии доменной стенки от ее импульса является периодической,

$$E(P + P_0) = E(P), \quad P_0 = 4\pi M_s/\gamma. \quad (19)$$

Значение периода  $P_0$  для стенки в киральном магнетике в два раза больше, чем для ферромагнетика с двухосной анизотропией. Заметим, что значения периода по импульсу для стенки в чисто од-



**Рис. 4.** Зависимость энергии (в единицах  $E_0$ ) и скорости (в единицах  $v_c$ ) доменной стенки от ее импульса (в единицах  $P_0$ ), символы — данные численного расчета, сплошная красная линия — зависимость  $E(P)$ , найденная с помощью полученной ниже приближенной формулы (22). Голубая линия — зависимость  $v(P)$ , построенная дифференцированием найденной численно функции  $E(P)$  на основе уравнения Гамильтона  $v = dE(P)/dP$

номерном магнетике (спиновой цепочке) можно записать как  $P_{0,chain} = 4\pi\hbar s/a$ , где  $s$  — спин атома и  $a$  — расстояние между спинами в цепочке. Чтобы привести в соответствие данные для объемного магнетика и цепочки использовано соотношение  $M_s = g\mu_B S/aS_0$ , где объем, приходящийся на один спин, записан как  $aS_0$ ,  $S_0$  — площадь поперечного сечения кристалла, приходящаяся на одну цепочку, а также учтено, что  $\gamma = g\mu_B/\hbar$ . Интересно отметить, что для спина  $s = 1/2$  величина периода совпадает с размером первой зоны Бриллюэна атомной цепочки.

Зависимость  $E(P)$  (закон дисперсии стенки) представлена на рис. 4. Для демонстрации правильности выбора формы выражения для импульса и контроля точности счета построена также зависимость  $v(P)$ , найденная дифференцированием численной зависимости  $E(P)$  и уравнения Гамильтона  $v = dE(P)/dP$ . Рисунок 4 демонстрирует хорошее согласие всех данных.

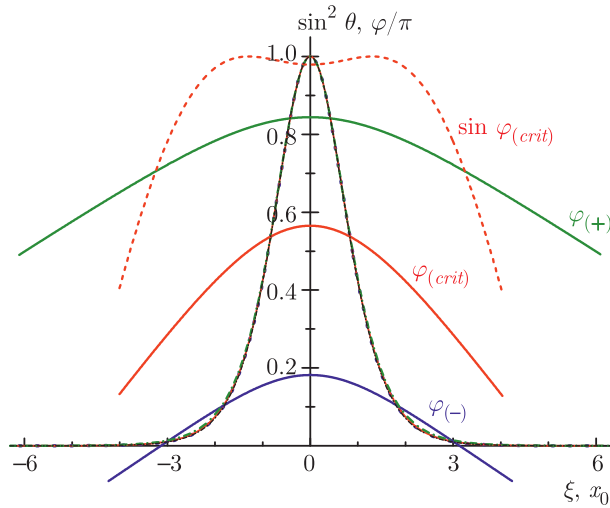
Принципиально важно, что зависимость  $E(P)$  для доменных стенок в ферромагнетике в пределах одного периода однозначная, т. е. каждому значению импульса отвечает только одно значение энергии. Фактически, верхней и нижней ветвям функции  $E(v)$  соответствуют различные значения им-

пульса  $P$ , что обуславливает устойчивость всех стенок, в том числе относящихся к верхней ветви двузначной зависимости  $E(v)$ , см. рис. 1.

Численный анализ задачи позволяет установить основные закономерности динамики доменных стенок в одноосном киральном ферромагнетике для каждого конкретного значения параметра  $D/E_0$ . Однако весьма желательно иметь простые аналитические формулы, описывающие динамические характеристики стенок. Такая возможность всегда присутствует в том случае, когда взаимодействие, разрушающее сохранение  $M_z^{(tot)}$ , является слабым по сравнению с одноосной анизотропией,  $H_{non-uniaxial} \ll H_a$ . Если  $H_{non-uniaxial} = 0$ , то  $v_c = 0$  и стенка не может двигаться, при этом структура доменной стенки  $\theta(\xi)$  описывается формулой для неподвижной стенки, а значение угловой переменной  $\varphi(\xi) = \text{const}$  может быть произвольным. Если же  $H_{non-uniaxial}$  не равно нулю, но  $H_{non-uniaxial}/H_a \ll 1$ , предельная скорость, которая линейно зависит от характерного параметра «неодноосности», мала. При малых  $H_{non-uniaxial}$  структура доменной стенки  $\theta(\xi)$  приближенно описывается той же формулой (14), что для неподвижной стенки. Можно также считать, что угловая переменная  $\varphi(\xi)$  медленно меняется в пределах стенки, и можно заменить ее на постоянное значение при расчете энергии и импульса стенки. Естественно, при этом энергия стенки слабо зависит от параметра  $H_{non-uniaxial}/H_a \ll 1$  и от скорости стенки. Подробный анализ применимости этих приближений проведен для неинтегрируемой задачи о движении доменной стенки в ферромагнетике при наличии внешнего поля  $H_{\perp}$ , перпендикулярного легкой оси [67]. Как и ожидалось, все эти приближения хорошо соответствуют данным численного анализа при  $H_{\perp} < 0.4H_a$ .

В нашем случае одноосного кирального магнетика имеет место интересная особенность: описанные выше приближения справедливы не только при малых  $D$ , но и для всех актуальных значений  $D \leq D_c$  (напомним, что при  $D = D_c$  энергия стенки  $E$  обращается в нуль, так что это значение никак нельзя считать малым). Это позволило построить приближенное решение, найти зависимости энергии и импульса доменной стенки от ее скорости и записать закон дисперсии стенки  $E(P)$  в виде простых аналитических функций. Одним из указаний на эту специфику является линейная зависимость предельной скорости от  $D$  при всех  $D \leq D_c$ , см. рис. 2.

Чтобы пояснить эту особенность, обсудим найденную численно структуру доменной стенки в наи-



**Рис. 5.** Распределения намагниченности в доменных стенках, движущихся с разными скоростями, а именно,  $v = 0.5v_c$  для нижней и верхней ветвей и  $v = v_c$  для кирального ферромагнетика с максимально возможным значением  $D = D_c$ . Вид функций  $\sin^2 \theta$  для всех трех стенок, а также для случая  $v = 0$ , представлен разными линиями, так что хорошо видно их почти идеальное совпадение; различия заметны только вдали от центра стенки. Зависимости  $\varphi(\xi)$  отмечены как  $\varphi_{(-)}$  и  $\varphi_{(+)}$  для стенок нижней и верхней ветви с  $v = 0.5v_c$  и для  $\varphi_{(crit)}$  для стенки  $v = v_c$ . В последнем случае отклонение  $\varphi(\xi)$  от модельного  $\varphi = \text{const}$  максимально, однако актуальная величина,  $\sin \varphi$  (представлена красной штриховой линией) практически постоянная в пределах доменной стенки ( $|\xi| < 3x_0$ , когда  $\sin^2 \theta < 10^{-2}$ )

более критичном случае максимально возможного значения  $D = D_c$  при различных значениях скорости  $v \leq v_c$  для стенок верхней и нижней ветвей, см. рис. 5. Видно, что при изменении скорости стенки от нуля до предельного значения  $v = v_c$  структура доменной стенки  $\theta(\xi)$  с высокой точностью такая же, как для чисто одноосной модели; она описывается той же формулой (14), см. рис. 5. Используя выражение для первого интеграла (13), получаем, что в этом случае значение  $(\varphi')^2 \sin^2 \theta$  должно быть пренебрежимо мало. По этой причине можно ожидать, что решение описывается с очень высокой точностью в рамках приближения  $\varphi = \text{const}$  при всех допустимых значениях параметров задачи,  $v \leq v_c$  и  $D \leq D_c$ . Напомним, что обычно такое условие имеет место только при малых  $H_{non-uni-axial}$ .

Условие  $\varphi = \text{const}$  кажется противоречивым для нашей задачи при немалых  $D$ , поскольку из асимптотик решения (16) следует, что вдали от стенки значение  $\varphi \sim \kappa'' \xi$ , где  $\kappa'' = v/(2x_0 v_0)$ , и не мало

при немалых скоростях. Эта зависимость видна из численного решения, но области такой асимптотики находятся далеко от центра доменной стенки. Как следует из численного решения, условие  $\varphi = \text{const}$  выполняется с меньшей точностью, чем  $x_0^2(\theta')^2 = \sin^2 \theta$ , особенно для  $v = v_c$ . Однако переменная  $\varphi$  входит в уравнения только в виде комбинации  $\varphi' \sin \theta$  и функции  $\sin \varphi$ ; для последней отклонение от постоянного значения намного меньше, чем для самой  $\varphi$ , см. рис. 5. Поэтому можно ожидать, что при расчете интегральных характеристик стенки условие  $\varphi = \text{const}$  достаточно адекватно. Такое свойство доменной стенки достаточно неожиданное; вероятно, оно возникает потому, что при  $\varphi = \text{const}$  в рамках модели (9) энергия взаимодействия Дзялошинского сводится к полной производной и, хотя дает вклад в энергию стенки, не проявляется в вариации энергии.

Для получения замкнутых формул в рамках данного приближения проинтегрируем (12) по  $\xi$  от  $-\infty$  до  $\infty$ , и получаем  $\pi D \sin \varphi = 2vM_s/\gamma$ , т. е. связь скорости с параметром  $\varphi$  можно записать в виде

$$\sin \varphi = v/v_c, \tag{20}$$

где значение предельной скорости определяется приведенной выше формулой (17). Далее легко вычислить энергию доменной стенки как функцию  $\varphi$  в виде  $E = 2E_0 - \pi D \cos \varphi$ . Зависимость энергии от скорости дается формулой

$$E(v) = 2E_0 \pm \pi D \sqrt{1 - \left(\frac{v}{v_c}\right)^2}, \tag{21}$$

где знаки « $\pm$ » отвечают верхней и нижней ветвям этой зависимости. На плоскости  $vE$  кривые, представляющие зависимость  $E(v)$ , являются эллипсами с полуосями  $v_c$  и  $E_0$  и с центрами в точках  $v = 0$  и  $E = 2E_0$ , что с высокой точностью описывает численные данные, см. рис. 1.

Важной характеристикой доменной стенки является ее импульс. При расчете энергии стенки в рамках приближения  $\varphi = \text{const}$  естественным образом получается зависимость  $E = E(\varphi)$ . В рамках подхода коллективных переменных энергия стенки, записанная через ее импульс  $P$ , имеет смысл функции Гамильтона. Поэтому импульс  $P$ , канонически сопряженный координате стенки  $X$ , должен быть связан с переменной  $\varphi$ , см. подробнее [49, 50]. Связь  $P$  и  $\varphi$  легко установить, используя уравнение Гамильтона

$$v \equiv dX/dt = dE(P)/dP.$$

Учитывая, что  $dE/d\varphi = \pi D \sin \varphi$  и применяя формулу (20) легко записать  $P = 2M_s\varphi/\gamma = \varphi P_0/2\pi$ , где величина  $P_0 = 4\pi M_s/\gamma$  равна периоду зависимости  $E(P)$ , см. (19). Искомая зависимость энергии доменной стенки от ее импульса (закон дисперсии стенки  $E(P)$ ) в рамках этого приближения определяется формулой

$$E(P) = 2E_0 - \pi D \cos \left( \frac{2\pi P}{P_0} \right). \quad (22)$$

Тот факт, что энергия является периодической функцией импульса, следует из анализа на основе полевого подхода с использованием конкретной формулы для плотности полевого импульса поля намагниченности (5). Здесь такой же результат (22) получается в рамках подхода коллективных переменных. Полезно сопоставить данные этих подходов. Поскольку расчет в рамках подхода коллективных переменных проводился в приближении  $\varphi = \text{const}$ , это позволяет также оценить точность этого приближения.

Зависимость  $E(P)$ , построенная с использованием найденных численно зависимостей  $E(v)$  и  $P(v)$  с использованием формул для  $E$  (2) и  $P$  (5) для стенок с различными скоростями, с высокой точностью описывается формулой (22), см. рис. 4. Зависимость  $v(P)$ , найденная обращением численной функции  $P(v)$ , хорошо согласуется с той, что получается из уравнения Гамильтона  $v = dE(P)/dP$ . Таким образом, значения энергии и импульса солитона типа доменной стенки, полученные на основе полевого подхода с использованием выражений для плотностей этих величин, хорошо согласуются с данными, полученными на основе гамильтонового подхода в рамках метода коллективных переменных. Ранее такое соответствие было установлено только для модели Уокера, которая является точно интегрируемой. Поскольку последние данные получены в приближении  $\varphi = \text{const}$ , тем самым проверена высокая точность этого приближения для задачи о движении доменной стенки в киральном магнетике с одноосной анизотропией.

#### 4. ДИНАМИКА ДОМЕННОЙ СТЕНКИ В КИРАЛЬНОМ АНТИФЕРРОМАГНЕТИКЕ

Для анализа движения плоской доменной стенки в антиферромагнетике ограничимся одномерными решениями,  $\mathbf{l} = \mathbf{l}(x, t)$ , и запишем уравнения сигма-модели в угловых переменных  $\theta$  и  $\varphi$ :

$$A \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) - \sin \theta \cos \theta \left\{ K + A \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right] \right\} - 2D \frac{\partial \varphi}{\partial x} \sin^2 \theta \sin \varphi = 0, \quad (23)$$

$$A \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \sin^2 \theta \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \sin^2 \theta \right) \right] + 2D \frac{\partial \theta}{\partial x} \sin^2 \theta \sin \varphi = 0. \quad (24)$$

Начнем с исследования структуры движущейся доменной стенки, для которой  $\theta = \theta(x - vt)$ ,  $\varphi = \varphi(x - vt)$ . Заметим, что уравнение (24) для любой функции  $\theta = \theta(x - vt)$  имеет точное решение  $\sin \varphi = 0$ , т. е.  $\varphi = \text{const}$ ,  $d\varphi/dx = 0$ . Таким образом, величина угла  $\varphi = 0, \pi, \dots$  не зависит от скорости стенки. При этом уравнение (23) для  $\theta$  принимает точно такой же вид, как и для статического случая, если заменить  $A \rightarrow A(v) = A(1 - v^2/c^2)$ . Следовательно, структура доменной стенки определяется выражением

$$\cos \theta = - \text{th} \left( \frac{x - vt}{x_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}} \right), \quad (25)$$

где, как и ранее,  $x_0 = \sqrt{A/K}$  — толщина неподвижной стенки.

Таким образом, несмотря на отсутствие лоренц-инвариантности для киральных антиферромагнетиков, эффект движения доменной стенки сводится только к лоренцевскому сокращению ее ширины, а скорость стенки ограничена сверху только величиной  $c$ . Важно также, что как структура доменной стенки, так и предельная скорость не зависят от константы Дзялошинского  $D$ . В отличие от стандартных лоренц-инвариантных моделей антиферромагнетиков с произвольным видом энергии анизотропии этот результат не очевиден; в частности, лоренц-инвариантное поведение отсутствует для двумерных топологических солитонов, предельная скорость которых меньше  $c$  и зависит от  $D$ , см. [57].

Предельная скорость доменной стенки в антиферромагнетике не зависят от константы Дзялошинского  $D$ , а для ферромагнетика предельная скорость пропорциональна  $D$  и обращается в нуль при  $D \rightarrow 0$ . Этот результат можно объяснить, отметив, что для антиферромагнетика доменная стенка разделяет области магнетика с различными направлениями вектора  $\mathbf{l}$  и нулевой намагниченностью. В

отличие от намагниченности ферромагнетика, суммарная  $z$ -проекция вектора  $\mathbf{l}$ ,

$$l_z^{(tot)} = \int l_z dx,$$

не сохраняется даже для изотропного или одноосного антиферромагнетика. Таким образом, для движения доменной стенки никаких специальных условий типа несохранения  $z$ -проекции намагниченности не требуется.

Несмотря на лоренц-инвариантный характер структуры движущейся доменной стенки, нарушение этой инвариантности проявляется при вычислении интегралов движения стенки. Используя форму энергии антиферромагнетика,

$$E^{(AFM)} = T + W,$$

энергию доменной стенки, движущейся со скоростью  $v$ , легко записать в виде

$$E(v) = \frac{2E_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \pi D \cos \varphi_0, \quad (26)$$

где  $\varphi_0$  принимает фиксированные значения, скажем,  $\varphi_0 = 0$  или  $\varphi_0 = \pi$ , так что  $\cos \varphi_0 = \pm 1$ . Таким образом, зависимость  $E(v)$ , как и для ферромагнетика, содержит две ветви, энергии стенок верхней и нижней ветвей различаются на величину  $2\pi D$ . Вычисляя импульс доменной стенки по формуле (8), получаем выражение, характерное для лоренц-инвариантных моделей

$$P = 2E_0 \frac{v}{c\sqrt{c^2-v^2}}, \quad (27)$$

в которое, однако, входит только та часть «энергии покоя» стенки, которая не зависит от константы Дзялошинского  $D$ . Зависимость энергии стенки от ее импульса  $P$ , т. е. закон дисперсии  $E(P)$ , легко представить в виде

$$E(P) = \sqrt{(2E_0)^2 + c^2 P^2} - \pi D \cos \varphi_0, \quad (28)$$

где, как и в формуле для  $E(v)$ ,  $\cos \varphi_0 = \pm 1$ .

Формулы (26) и (27) определяют искомую зависимость энергии  $E$  и импульса  $P$  от скорости стенки, т. е. их поведение при преобразованиях Лоренца. В лоренц-инвариантной теории ( $D = 0$ ) достаточно ограничиться анализом неподвижных решений и потом получить движущиеся решения из неподвижных с помощью преобразований Лоренца. При этом энергия и импульс представляют собой две компоненты четырехмерного вектора энергии-импульса  $P_\mu = (E/c, \mathbf{P})$ , точнее, его двумерного аналога. Если же  $D \neq 0$ , то энергию можно представить как

сумму двух слагаемых, первое из которых есть компонента четырехмерного вектора, а второе — четырехмерный скаляр (инвариант преобразования Лоренца). Таким образом, хотя в киральном антиферромагнетике лоренц-инвариантность разрушена, существуют простые правила получения энергии и импульса движущегося солитона из их значений для неподвижного солитона. Отметим, что такое же поведение имеет место для другой системы с нарушенной лоренц-инвариантностью, антиферромагнетика во внешнем магнитном поле, направленном вдоль легкой оси [56].

Наличие двух типов стенок, т. е. двух ветвей зависимости  $E(v)$  или  $E(P)$ , ставит вопрос об устойчивости одной из них. Для ферромагнетика ситуация понятна: зависимость  $E = E(P)$  однозначна и обе стенки устойчивы. Для лоренц-инвариантной модели двухосного антиферромагнетика зависимость  $E(P)$  содержит две ветви и стенки верхней ветви неустойчивы для всех значений скорости доменной стенки [55]. Для кирального антиферромагнетика лоренц-инвариантность нарушена и ответ на этот вопрос заранее не очевиден.

Для анализа устойчивости движущейся доменной стенки рассмотрим малые возмущения на ее фоне,

$$\theta(\xi, \tau) = \theta(\xi) + \vartheta(\xi, \tau), \quad \varphi(\xi, \tau) = \varphi_0 + \psi(\xi, \tau),$$

и исследуем поведение малых добавок  $\vartheta(\xi, \tau)$  и  $\psi(\xi, \tau)$ . Для этого в полных уравнениях для  $\theta(x, t)$ ,  $\varphi(x, t)$  (23), (24) сделаем преобразование Лоренца

$$x \rightarrow \xi = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad t \rightarrow \tau = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Понятно, что форма основных слагаемых с производными не поменяется, например,

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \rightarrow \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2},$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 \rightarrow \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\right)^2,$$

но может измениться, вообще говоря, функциональный вид слагаемых, связанных со взаимодействием Дзялошинского. Однако оказывается, что в линейном приближении по переменным  $\vartheta(\xi, \tau)$  и  $\psi(\xi, \tau)$  эти слагаемые дают вклад только в уравнение для  $\psi(\xi, \tau)$ , причем остается только слагаемое с  $d\theta(\xi)/d\xi$  и не возникает производных  $\psi(\xi, \tau)$  и  $\vartheta(\xi, \tau)$  по  $\tau$ .

Для конкретного анализа удобно записать

$$\vartheta(\xi, \tau) = f(\xi) \exp(i\omega\tau),$$

$$\psi(\xi, \tau) = [g(\xi)/\sin \theta(\xi)] \exp(i\omega\tau),$$



где  $\theta(\xi)$  описывают невозмущенную доменную стенку. Далее будем использовать безразмерную переменную  $x = \xi/l_0(v)$  и измерять скорость и частоту в единицах соответственно  $c$  и  $\sqrt{c^2 - v^2}/x_0$ . Линеаризованные уравнения для  $f$  и  $g$  образуют пару независимых уравнений на собственные значения, они имеют вид

$$\hat{H}f = \omega^2 f, \quad \left( \hat{H} + 2D \frac{\cos \varphi_0}{\operatorname{ch} x} \right) g = \omega^2 g. \quad (29)$$

При записи этих уравнений считалось, что величина  $d\theta(\xi)/d\xi \propto 1/\operatorname{ch} \xi > 0$  имеет определенный знак, такой же, как выше при записи энергии доменной стенки.

Уравнения (29) содержат простой оператор Шредингера  $\hat{H}$  с безотражательным потенциалом,

$$\hat{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + 1 - \frac{2}{\operatorname{ch}^2 x},$$

для которого известен полный набор собственных функций. Этот набор включает одно локализованное состояние  $\psi_0$ ,

$$\hat{H}\psi_0 = 0, \quad \psi_0 \propto \frac{1}{\operatorname{ch} x},$$

и состояния непрерывного спектра,  $\hat{H}\psi_k = (1 + k^2)\psi_k$ , см., например, [55].

Легко видеть, что локализованные возмущения переменной  $\theta(\xi, \tau)$ , которые описывают трансляционную голдстоуновскую моду с  $\omega = 0$ , не нарушают устойчивости доменной стенки. Эволюцию второй переменной  $\varphi(\xi, \tau)$  определяют решения  $g \propto \psi_0$ ,  $f = 0$ ; для нее знак  $\omega^2$  определяется знаком  $D \cos \varphi_0$ . Для стенки с меньшей энергией  $D \cos \varphi_0 > 0$  и возмущения  $\varphi$  на фоне стенки определяют собственную моду колебаний с ненулевой частотой,  $\omega^2 > 0$ . Для стенки верхней ветви  $D \cos \varphi_0 < 0$ ,  $\omega^2 < 0$ , т.е. отклонение  $\varphi$  от равновесного значения экспоненциально нарастают, что определяет нестабильность доменной стенки верхней ветви. Получается, что стенки нижней ветви зависимости  $E(P)$  или  $E(v)$ , для которых  $D \cos \varphi_0 > 0$ , устойчивы, а стенки верхней ветви — неустойчивы при всех допустимых значениях скорости доменной стенки. Таким образом, характер устойчивости доменной стенки такой же, как для простейшей лоренц-инвариантной модели [55]: из двух стенок с тем же значением импульса устойчива только одна, у которой энергия ниже.

Таким образом, можно сделать общий вывод, что нарушение пространственной инверсии влияет на динамику одномерных антиферромагнитных солитонов в значительно меньшей степени, чем на динамику солитонов в ферромагнетиках. Однако для

двумерных топологических солитонов (скирмионов) такое влияние более существенно [57].

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Начатые более шестидесяти лет назад исследования киральных магнетиков в настоящее время привели к формированию бурно развивающейся области физики магнетизма, имеющей большое влияние на развитие прикладной физики. В значительной мере это связано с солитонными аспектами проблемы, а именно, с возможностью реализации движения солитонов типа доменных стенок или скирмионов с немалыми скоростями. Для киральных магнетиков динамика солитонов качественно иная, чем для изученных ранее случаев стандартных ферромагнетиков и антиферромагнетиков. Не менее интересен и чисто теоретический аспект нелинейной динамики, прежде всего солитонной динамики, для киральных упорядоченных сред с нарушенной фундаментальной симметрией относительно пространственной инверсии (Р-инверсии). Принимая во внимание то, что для любых магнетиков нарушена симметрия относительно отражения времени (Т-инверсии), возникает интересная возможность исследования, в том числе экспериментальной реализации, динамики солитонов в нелинейных средах с нарушением симметрии относительно Р-инверсии и Т-инверсии. Авторы надеются, что анализ различных аспектов этой проблемы для магнетиков различного типа поможет понять специфику общей проблемы и увидеть возможные пути ее реализации и практического применения.

**Финансирование.** Работа выполнена в рамках программы НИТУ «МИСиС» (проект №К2-2019-006), осуществляемой постановлением правительства РФ от 16 марта 2013 г. № 211.

## ЛИТЕРАТУРА

1. И. Е. Дзялошинский, ЖЭТФ **46**, 1420 (1964).
2. И. Е. Дзялошинский, ЖЭТФ **47**, 992 (1964).
3. И. Е. Дзялошинский, ЖЭТФ **32**, 1547 (1957).
4. И. Е. Дзялошинский, ЖЭТФ **33**, 807 (1958).
5. И. Е. Дзялошинский, ЖЭТФ **33**, 1454 (1958).
6. I. Dzyaloshinsky, J. Phys. Chem. Sol. **4**, 241 (1958).
7. T. Moriya, Phys. Rev. **120**, 91 (1960).

8. С. М. Стишов, А. Е. Петрова, ЖЭТФ **158**, 213 (2020).
9. B. Lebech, J. Bernhard, and T. Freltoft, J. Phys. Condens. Matter **1**, 6105 (1989).
10. T. Ohyama and A. E. Jacobs, Phys. Rev. B **52**, 4389 (1995).
11. A. Zheludev, S. Maslov, G. Shirane et al., Phys. Rev. Lett. **78**, 4857 (1997).
12. A. Fert, Mater. Sci. Forum **59–60**, 439 (1990).
13. C. Moreau-Luchaire, C. Moutafis, N. Reyren et al., Nat. Nanotech. **11**, 444 (2016).
14. O. Boulle, J. Vogel, H. Yang et al., Nat. Nanotech. **11**, 449 (2016).
15. A. Fert, V. Cros, and J. Sampaio, Nat. Nanotech. **8**, 152 (2013).
16. R. Wiesendanger, Nat. Rev. Mater. **1**, 16044 (2016).
17. F. Zheng, F. N. Rybakov, A. B. Borisov et al., Nat. Nanotech. **13**, (2018).
18. G. P. Mueller, F. N. Rybakov, H. Jonsson et al., Phys. Rev. B **101**, 84405 (2020).
19. Y. Fujishiro, N. Kanazawa, and Y. Tokura, Appl. Phys. Lett. **116**, 090501 (2020).
20. *Skyrmions: Topological Structures, Properties, and Applications*, ed. by J. Liu, Z. Zhang, and G. Zhao, Series in Materials Science and Engineering, CRC, Boca Raton, FL (2016).
21. D. Sander, S. O. Valenzuela, D. Makarov et al., J. Phys. D: Appl. Phys. **50**, 363001 (2017).
22. A. Thiaville, S. Rohart, E. Jue et al., Europhys. Lett. **100**, 57002 (2012).
23. I. M. Miron, T. Moore, H. Szambolics et al., Nat. Mater. **10**, 419 (2011).
24. L. Thomas, K. S. Ryu, S. H. Yang, and S. S. P. Parkin, Nat. Nanotech. **8**, 527 (2013).
25. S. Emori, U. Bauer, S. M. Ahn et al., Nat. Mater. **12**, 611 (2013).
26. A. Brataas, Nat. Nanotech. **8**, 485 (2013).
27. S. S. P. Parkin, M. Hayashi, and L. Thomas, Science **320**, 190 (2008).
28. S. S. P. Parkin and S.-H. Yang, Nat. Nanotech. **10**, 195 (2015).
29. V. V. Slastikov, C. B. Muratov, J. M. Robbins and O. A. Tretiakov, Phys. Rev. B **99**, 100403(R) (2019).
30. S. Komineas, C. Melcher, and S. Venakides, Nonlinearity **32**, 2392 (2019).
31. O. Boulle, S. Rohart, L. D. Buda-Prejbeanu et al., Phys. Rev. Lett. **111**, 217203 (2013).
32. V. P. Kravchuk, J. Magn. Magn. Mater. **367**, 9 (2014).
33. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Phys. Zs. Sowjet. **8**, 153 (1935); Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *К теории магнитной проницаемости ферромагнитных тел*, Л. Д. Ландау, Собр. тр. Т. 1, Наука, Москва (1969), с. 128.
34. А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский, *Спиновые волны*, Наука, Москва (1967).
35. I. A. Yastremsky, O. M. Volkov, M. Kopte et al., Phys. Rev. Appl. **12**, 064038 (2019).
36. E. Fradkin, *Field Theories of Condensed Matter Systems*, in *Frontiers in Physics*, Addison–Wesley (1991).
37. R. Rajaraman, *Solitons and Instantons: An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory*, North-Holland, Amsterdam (1982).
38. A. A. Thiele, Phys. Rev. Lett. **30**, 230 (1973).
39. N. Papanicolaou and T. N. Tomaras, Nucl. Phys. B **360**, 425 (1991).
40. Е. Г. Галкина, Б. А. Иванов, Письма в ЖЭТФ **71**, 372 (2000).
41. E. G. Galkina, B. A. Ivanov, S. Savel'ev, and F. Nori, Phys. Rev. B **77**, 134425 (2008).
42. O. Tchernyshyov, Ann. Phys. (N. Y.) **363**, 98 (2015).
43. S. Dasgupta and O. Tchernyshyov, Phys. Rev. B **98**, 224401 (2018).
44. L. R. Walker, in: *Magnetism*, Vol. 3, ed. by G. T. Rado and H. Suhl, Pergamon, New York (1963), p. 451.
45. S. V. Tarasenko, A. Stankiewicz, V. V. Tarasenko, and J. Ferré, J. Magn. Magn. Mater. **189**, 19 (1998).
46. А. М. Косевич, Б. А. Иванов, А. С. Ковалев, Письма в ЖЭТФ **25**, 516 (1977).
47. В. П. Воронов, Б. А. Иванов, А. М. Косевич, ЖЭТФ **84**, 2235 (1983).
48. А. М. Косевич, Б. А. Иванов, and А. S. Kovalev, Physica D **3**, 363 (1981).
49. А. М. Косевич, Б. А. Иванов, and А. S. Kovalev, Phys. Rep. **194**, 117 (1990).

50. А. М. Косевич, Б. А. Иванов, А. С. Ковалев, *Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны*, Наукова думка, Киев (1983).
51. А. Б. Борисов, В. В. Киселев, *Нелинейные волны, солитоны и локализованные структуры в магнетиках*, в двух томах, УроРАН, Екатеринбург (2009).
52. А. А. Жмудский, Б. А. Иванов, ЖЭТФ **115**, 1511 (1999).
53. Е. А. Туров, А. В. Колчанов, В. В. Меньшенин, И. Ф. Мирсаев, В. В. Николаев, *Симметрия и физические свойства антиферромагнетиков*, Физматлит, Москва (2001).
54. E. G. Galkina and B. A. Ivanov, *Low Temp. Phys.* **44**, 618 (2018).
55. В. Г. Барьяхтар, Б. А. Иванов, А. Л. Сукстанский, ЖЭТФ **78**, 1509 (1980).
56. В. Г. Барьяхтар, Б. А. Иванов, ЖЭТФ **85**, 328 (1983).
57. S. Komineas and N. Papanicolaou, *SciPost Phys.* **8**, 086 (2020).
58. E. Schlömann, *Appl. Phys. Lett.* **19**, 274 (1971).
59. В. Г. Барьяхтар, Б. А. Иванов, А. Л. Сукстанский, Письма в ЖЭТФ **27**, 226 (1978).
60. В. М. Елеонский, Н. Н. Кирова, Н. Е. Кулагин, ЖЭТФ **75**, 2210 (1978).
61. В. М. Елеонский, Н. Н. Кирова, Н. Е. Кулагин, ЖЭТФ **77**, 409 (1979).
62. В. М. Елеонский, Н. Е. Кулагин, ЖЭТФ **84**, 616 (1983).
63. В. М. Елеонский, Н. Е. Кулагин, ЖЭТФ **85**, 1437 (1983).
64. L. M. Lerman, *Selecta Math. Sovietica* **12**, 333 (1993).
65. Л. М. Лерман, Письма в ЖЭТФ **51**, 336 (1990).
66. Л. М. Лерман, Я. Л. Уманский, *Прикл. матем. мех.* **47**, 395 (1983).
67. Б. А. Иванов, Н. Е. Кулагин, ЖЭТФ **112**, 953 (1997).
68. В. М. Елеонский, Н. Н. Кирова, Н. Е. Кулагин, ЖЭТФ **71**, 2349 (1976).
69. В. М. Елеонский, Н. Н. Кирова, Н. Е. Кулагин, ЖЭТФ **74**, 1814 (1978).
70. T. F. C. Chan and H. B. Keller, *SIAM* **3**, 173 (1982).