

# ЭФФЕКТИВНЫЙ КВАНТОВЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР РЕЗОНАТОРА С ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ ПАРАМЕТРАМИ

А. И. Трубилко<sup>a\*</sup>, А. М. Башаров<sup>b,c\*\*</sup>

<sup>a</sup> Санкт-Петербургский университет ГПС МЧС России  
196105, Санкт-Петербург, Россия

<sup>b</sup> Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»  
123182, Москва, Россия

<sup>c</sup> Московский физико-технический институт  
141701, Долгопрудный, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 11 августа 2020 г.,  
после переработки 21 сентября 2020 г.  
Принята к публикации 21 сентября 2020 г.

Введено понятие эффективного квантового осциллятора и найдена добавка к энергии основного состояния, обуславливающая дополнительный сдвиг энергетических состояний в условиях периодического изменения его частоты.

DOI: 10.31857/S0044451021020061

## 1. ВВЕДЕНИЕ

К настоящему времени существуют два экспериментально продемонстрированных физических эффекта, обусловленные проявлением основного вакуумного состояния бозонного поля, — эффект Казимира [1] и лэмбовский сдвиг [2] атомных уровней. Оба эффекта являются следствием существования флуктуаций вакуумного состояния электромагнитного поля, описываемого известными гейзенберговскими коммутационными соотношениями. И если лэмбовский сдвиг является прямым проявлением энергии взаимодействия атома с окружающим электромагнитным полем, то статический эффект Казимира является следствием изменения граничных условий задачи, дискретизирующих число возможных состояний полевого энергетического континуума в пространстве резонатора. Отметим, что этот эффект также зарегистрирован с высокой степенью точности современными экспериментальными методами [3].

Вместе с тем уже более полувека исследуется и динамический эффект Казимира, заключающийся в генерации квантов электромагнитного поля в усло-

виях периодического изменения параметров квантовой системы во времени [4, 5]. Его первое экспериментальное подтверждение осуществлено в работе [6]. Описание такой системы оказывается эквивалентным наличию в ней параметрического генератора, что было впервые продемонстрировано еще в работе [7] при условиях гармонического колебания одного из зеркал резонатора в вакууме. Однако создание безынерционного идеального зеркала, совершающего колебания, вызывает технические трудности. Поэтому в работе [8] предложен его аналог с помощью возбуждения в зеркале высокочастотных плазменных колебаний в течение некоторых промежутков времени, которые и продуцируют рождение фотонов внутри резонатора. Такая модуляция коэффициента отражения одного из зеркал и ее отсутствие отвечают условиям соответственно динамического и статического эффектов. Квантование классических уравнений Максвелла с изменяющимися граничными условиями приводит к модели Мура–Лоу–Додонова [9–11]. В типичном рассматриваемом случае периодического изменения граничных условий или коэффициента преломления среды [4, 5] модель в представлении взаимодействия содержит быстро меняющиеся во времени слагаемые.

Чтобы извлечь информацию о такой системе, ее необходимо рассматривать как открытую систему. При достаточно быстром изменении слагаемых

\* E-mail: trubilko.andrey@gmail.com

\*\* E-mail: basharov@gmail.com

во времени (в представлении взаимодействия) использование исходного гамильтониана некорректно в типичном случае моделирования взаимодействия с окружением белым шумом. Это доказано в работе [12], а значительно ранее исследователи подмечали, что использование точного исходного гамильтониана в теории открытых систем приводит к кинетическому уравнению для открытой системы, не отвечающему ее реальной динамике. В то же время использование в теории оптических открытых систем приближения вращающейся волны приводит к реалистичному кинетическому уравнению для открытой системы. Это отмечалось, например, в работе [13]. В работе [12] также доказано, что использование (вместо точного гамильтониана) эффективного гамильтониана в том представлении, как это сформулировано в работе [14], адекватно теории открытых оптических систем. Теория эффективного гамильтониана, в том виде как она представлена в [14] и в других работах авторов, является алгебраической формулировкой теории возмущений, уточняющей и обобщающей приближение вращающейся волны, включая ее как частный случай первого порядка по взаимодействию. Поэтому представляется естественным применить алгебраическую теорию возмущений и к задаче о резонаторе с колеблющимся зеркалом. В теории открытых квантовых систем об использовании указанной алгебраической теории возмущений говорят как о локальном подходе к теории открытых квантовых систем.

В условиях, когда гамильтониан резонатора меняется со временем, его описание как открытой системы во внешнем поле (колеблющееся зеркало) выделяет в рассматриваемой модели эффективный квантовый осциллятор как самостоятельный объект, характеризующийся своей частотой. Эта частота оказывается сдвинутой по сравнению с частотой осциллятора с неподвижным зеркалом, причем этот сдвиг может быть экспериментально зарегистрирован. Если резонатор с колеблющимся зеркалом будет участвовать в обычных для квантовой оптики взаимодействиях с электромагнитными полями, например, взаимодействуя с ними на неподвижном зеркале, то при его описании в рамках локального подхода эффективный осциллятор проявится в качестве основного самостоятельного объекта взаимодействия, так что его параметры могут быть при их помощи зарегистрированы. Подчеркнем, что рассмотрение резонатора с колеблющимся зеркалом как открытой системы необходимо для извлечения спектроскопической информации о нем, а без введения понятия эффективного осциллятора невозмож-

но корректно говорить об изменениях в спектральных характеристиках микрорезонатора с осциллирующими параметрами. Такая точка зрения отсутствовала в предыдущих работах.

Рассмотрение резонаторной моды в условиях внешнего модулирования колебаний одного из зеркал как эффективного осциллятора во внешнем поле в некотором смысле оказывается аналогичным описанию динамики атома в классическом заданном высокочастотном электромагнитном поле. В обеих задачах гамильтониан системы оказывается зависящим от времени, и затруднительно говорить о спектре гамильтониана всей системы. Можно пользоваться методом Флоке [15], представлениями о квазиэнергии и усредненном гамильтониане, но в данной задаче они, скорее, затушевывают физику процессов. В случае атома периодическое классическое поле (как резонансное, так и нерезонансное) вызывает так называемые динамические штарковские сдвиги атомных уровней за счет высокочастотного эффекта Штарка [16]. При этом становится возможным говорить о спектре атома и энергии его основного состояния. Аналогично, локальный подход к задаче о динамическом эффекте Казимира позволяет говорить о спектре эффективного осциллятора и энергии его основного состояния. Гамильтониан эффективного осциллятора в дальнейшем будем также именовать эффективным гамильтонианом осциллятора, полагая, что это естественно с точки зрения теории эффективного гамильтониана и не вызовет недоразумений.

Метод эффективного гамильтониана эквивалентен суммированию бесконечного числа членов обычной теории возмущений, а по сравнению с приближением вращающейся волны устанавливает жесткие ограничения на условия справедливости последнего и дает поправки, что часто называют выходом за приближение вращающейся волны или учетом антивращающихся слагаемых. Эти поправки могут быть существенными и иметь экспериментальное проявление. Например, в случае взаимодействия атома и вакуумного электромагнитного поля в электродипольном приближении эти поправки дают альтернативный вывод лэмбовского сдвига, а в случае атомного ансамбля — учет диполь-дипольного взаимодействия. Подчеркнем, что применяемый нами локальный подход не использует каких-либо искусственных приближений и соображений, а позволяет естественным образом учитывать основные используемые приближения, отделяя медленную и быстровременную динамику задачи. Используемая методика позволяет провести корректный учет эффектов

второго порядка, определяемых квантовой интерференцией от различных каналов взаимодействий. Именно эта естественная адекватность и раскрывает в полной мере его преимущества по сравнению с другими методами решения, зачастую выявляя новые явления, как, например, рассматриваемое ниже в этой статье.

Экспериментальные исследования состояния поля в динамическом эффекте Казимира обычно проводят или прямыми спектроскопическими методами, или посредством регистрации состояния атома, помещенного в пространство между двумя зеркалами резонатора. Вторая постановка получила название квантовой электродинамики резонатора [17] и обычно осуществляется на ридберговских высоковозбужденных состояниях. Аналогичная физическая ситуация реализуется в спазере [18], описывающем взаимодействие плазмонов с выделенной квантовой точкой, отвечающей двухуровневой модели. В работе [19] найден эффект, согласно которому быстрая модуляция параметров резонатора приводит к дополнительному лэмбовскому сдвигу рабочих уровней атома в резонаторе, что влияет на генерируемое состояние поля и приводит к дополнительному механизму рождения квантов.

В этой работе мы обращаем внимание на достаточно простой, но в то же время неучтенный эффект. Он заключается в появлении в режиме периодической модуляции параметров системы дополнительного сдвига собственной частоты эффективного осциллятора в основном состоянии. Экспериментальная регистрация вакуумного состояния эффективного осциллятора вполне осуществима методами спектроскопии [20]. Отметим, что в большинстве работ рассмотрен и реализован случай резонансного взаимодействия, где представленный здесь эффект оказывается завалуирован процессом радиационного давления порождаемого излучения и резонатора. Мы уделяем особое внимание также и случаю нерезонансного взаимодействия, где представленный и выявленный эффект проявится в эксперименте в значительно большей мере. В некотором смысле найденный эффект дополняет результаты работы [19], полученные для атомного осциллятора на случай квантового осциллятора. При этом впервые локальный подход квантовой теории применен к задаче о динамическом эффекте Казимира.

## 2. ЛОКАЛЬНЫЙ ПОДХОД К ЗАДАЧЕ О ДИНАМИЧЕСКОМ ЭФФЕКТЕ КАЗИМИРА

Рассмотрим резонатор в модели Мура – Лоу – Додонова [9–11] для самой простой ситуации одно-

модового приближения. Гамильтониан такой системы, в отличие от общего случая действия всех допустимых резонатором осцилляторов на выделенный, зависит от операторов рождения  $a^\dagger$  и уничтожения  $a$  только избранного осциллятора и описывается следующим полным гамильтонианом системы:

$$H = H_1 + H_2, \tag{1}$$

$$H_1 = \hbar\omega(t)a^\dagger a, H_2 = i\hbar\chi(t)[a^{\dagger 2} - a^2].$$

При записи выражений (1) мы учли модуляцию константы параметрического взаимодействия

$$\chi(t) = \frac{1}{4\omega(t)} \frac{d\omega}{dt},$$

которая моделируется гармонической зависимостью частоты  $\omega(t) = \omega_0(1 + \epsilon \sin \eta t)$ , где  $\omega_0$  — собственная частота рассматриваемой моды в статическом режиме,  $\eta$  — частота модуляции, а глубина модуляции  $\epsilon$  считается малым параметром,  $\epsilon \ll 1$ . Такой закон может быть обеспечен адекватной зависимостью от времени какого-либо параметра системы — это может быть как гармоническое колебание одного из зеркал, созданное, например, колебаниями поверхностной плазмонной моды, так и соответствующая зависимость его характеристик, например коэффициента пропускания от времени. Заметим, что мы выбираем традиционный вид гамильтониана для рассматриваемой задачи, который обычно используется в задачах квантовой оптики [21] и квантовой электродинамики [22] резонаторов для генерации электромагнитных полей в квантовых состояниях.

Удобно переписать выражение (1) в виде

$$H = H_0 + V_1 + V_2, \tag{2}$$

где выделены гамильтониан стационарной задачи  $H_0 = \hbar\omega_0 a^\dagger a$  и два зависящих от времени слагаемых, отвечающих малым возмущениям:

$$V_1 = -i \frac{\hbar\omega_0}{2} \epsilon (e^{i\eta t} - e^{-i\eta t}) a^\dagger a,$$

$$V_2 = i \frac{\hbar\epsilon\eta \cos \eta t}{4} (a^{\dagger 2} - a^2).$$

Указанное разделение полного гамильтониана и выделение слагаемых, отвечающих малому возмущению системы и параметрическому взаимодействию, позволяют построить эффективный гамильтониан системы. Для этого воспользуемся методами алгебраической теории возмущений [14]. Его основная парадигма состоит в нахождении такого вида

оператора унитарного преобразования, применение которого к гамильтониану системы и ее волновой функции позволяет провести усреднение по быстропротекающим процессам. Основным критерием применения метода является получение гамильтониана такого вида, в котором отсутствуют быстро меняющиеся во времени слагаемые в представлении взаимодействия. Совершим унитарное преобразование  $\hat{T}$  над вектором состояния  $|\Psi\rangle$  системы,  $|\tilde{\Psi}\rangle = \hat{T}|\Psi\rangle$ , который теперь описывается уравнением

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\tilde{\Psi}\rangle = \tilde{H} |\tilde{\Psi}\rangle$$

с преобразованным гамильтонианом

$$\tilde{H} = \hat{T} H \hat{T}^\dagger - i\hbar \hat{T} \frac{d}{dt} \hat{T}^\dagger. \quad (3)$$

Для дальнейшего рассмотрения удобно перейти к представлению взаимодействия Дирака, отмечая вектор состояния  $|\Psi(t)\rangle$  аргументом  $t$  и представляя уравнение Шредингера как

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = (V_1(t) + V_2(t)) |\Psi(t)\rangle, \quad (4)$$

где выделенные взаимодействия имеют следующий вид:

$$V_1(t) = -i \frac{\hbar\omega_0}{2} \times \\ \times \epsilon \{ \exp[i(2\omega_0 + \Delta)t] - \exp[-i(2\omega_0 + \Delta)t] \} a^\dagger a, \\ V_2(t) = i \frac{\hbar\epsilon\eta \cos(2\omega_0 + \Delta)t}{4} \times \\ \times [a^{\dagger 2} \exp(2i\omega_0 t) - a^2 \exp(-2i\omega_0 t)].$$

При записи последних мы представили частоту модуляции как  $\eta = 2\omega_0 + \Delta$ .

Рассмотрим два случая — наличие и отсутствие в системе каких-либо резонансов.

В случае отсутствия резонансов считаем отстройку  $\Delta$  большой, и слагаемые, содержащие функции  $\exp(-i\omega_0 t)$ ,  $\exp(-i\Delta t)$ , являются быстроменяющимися функциями времени.

Совершая унитарное преобразование уравнения (4), найдем уравнение для преобразованного вектора  $|\tilde{\Psi}(t)\rangle$ :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\tilde{\Psi}(t)\rangle = \tilde{V}^{eff}(t) |\tilde{\Psi}(t)\rangle, \quad (5)$$

которое определяется искомым эффективным гамильтонианом  $\tilde{V}^{eff}(t)$  системы. Последний, в свою

очередь, зависит от количества слагаемых, которые учитываются в разложениях по малым параметрам задачи,

$$\tilde{V}^{eff}(t) = \tilde{V}^{(1,0)}(t) + \tilde{V}^{(0,1)}(t) + \tilde{V}^{(1,1)}(t) + \dots, \quad (6)$$

где первый верхний индекс указывает порядок разложения по взаимодействию  $V_1(t)$ , а правый — по взаимодействию  $V_2(t)$ . Представим оператор унитарного преобразования через генератор  $\hat{T} = \exp(-iS(t))$ ,  $S(t) = S^\dagger(t)$ , который также разложим в ряд по этим же параметрам:

$$S(t) = S^{(1,0)}(t) + S^{(0,1)}(t) + S^{(1,1)}(t) + \dots \quad (7)$$

Воспользовавшись известной формулой разложения Бейкера – Кемпбелла – Хаусдорфа для произвольного оператора  $O$  и эрмитова оператора  $R$ ,

$$e^{iRt} O e^{-iRt} = O + i[R, O] + \frac{i^2}{2!} [R, [R, O]] + \\ + \frac{i^3}{3!} [R, [R, [R, O]]] + \dots,$$

приравняв соответствующие порядки в уравнении (3).

Для случая отсутствия резонансов в системе операторы  $V_1(t)$  и  $V_2(t)$  отвечают объединенному оператору  $V(t) = V_1(t) + V_2(t)$ , характеризующему одним малым параметром  $\epsilon$ . Введем соотношения

$$\tilde{V}^{(1)}(t) = \tilde{V}^{(1,0)}(t) + \tilde{V}^{(0,1)}(t), \\ S^{(1)}(t) = S^{(1,0)}(t) + S^{(0,1)}(t), \\ \tilde{V}^{(2)}(t) = \tilde{V}^{(2,0)}(t) + \tilde{V}^{(0,2)}(t), \\ \tilde{V}^{(1,1)}(t) = 0, \quad S^{(2)}(t) = S^{(2,0)}(t) + S^{(0,2)}(t).$$

Тогда первый порядок теории возмущений отвечает уравнению

$$\tilde{V}^{(1)}(t) = V(t) + \hbar \frac{d}{dt} S^{(1)}(t) = 0,$$

которое определяет следующий явный вид оператора  $S^{(1)}(t)$  в условиях адиабатического начала осцилляции:

$$S^{(1)}(t) = \frac{\epsilon\omega_0}{2\eta} (e^{i\eta t} - e^{-i\eta t}) a^\dagger a - \\ - \frac{\epsilon\eta}{8} a^{\dagger 2} \left( \frac{\exp[i(2\omega_0 + \eta)t]}{2\omega_0 + \eta} + \frac{\exp[i(2\omega_0 - \eta)t]}{2\omega_0 - \eta} \right) - \\ - \frac{\epsilon\eta}{8} a^2 \left( \frac{\exp[-i(2\omega_0 - \eta)t]}{2\omega_0 - \eta} + \frac{\exp[-i(2\omega_0 + \eta)t]}{2\omega_0 + \eta} \right).$$

Для второго порядка следует уравнение

$$\tilde{V}^{(2)}(t) = -\frac{i}{2} [S^{(1)}(t), V(t)]',$$

где штрих означает, что в выражении оставлены только медленно меняющиеся во времени слагаемые. Обратим внимание, что в приведенной формуле перед коммутатором стоит множитель  $-i/2$  вместо  $-i$ , если было бы использовано только второе слагаемое разложения Бейкера – Кемпбелла – Хаусдорфа. Различие связано с корректным учетом слагаемого второго порядка в последнем слагаемом правой части уравнения (3).

Явное выражение для  $\tilde{V}^{(2)}(t)$  имеет простой вид:

$$\tilde{V}^{(2)}(t) = -\hbar \frac{(\epsilon\eta)^2}{16} \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \times \left[ \frac{1}{2\omega_0 + \eta} + \frac{1}{2\omega_0 - \eta} \right]. \quad (8)$$

Для случая нерезонансного взаимодействия выражение (8) является единственным слагаемым первого неисчезающего порядка в картине взаимодействия и определяет динамику системы. В картине Шредингера ему отвечает эффективный гамильтониан  $H_0 + \tilde{V}^{(2)}$ , описывающий эффективный осциллятор. Здесь  $\tilde{V}^{(2)} = \tilde{V}^{(2)}(t)$  и мы опустили знак аргумента, поскольку явное наличие аргумента времени отмечает представление взаимодействия.

Среднее значение оператора  $\tilde{V}^{(2)}(t)$  можно найти разными способами, поскольку оно определено средним значением оператора  $a^\dagger a$  числа возбуждений системы. Например, это можно сделать путем построения гейзенберговских уравнений движения в представлении взаимодействия. В данном случае очевидно, что исследуемый оператор  $a^\dagger a$  является интегралом движения, а его среднее определяется начальным значением в вакуумном состоянии, следовательно, равно нулю. Физически это означает, что вакуумное состояние не развивается в этом порядке разложения, а поправка к энергии основного состояния определена его флуктуациями и уже учтена.

Эта поправка к энергии основного состояния квантового осциллятора, производимая в динамическом эффекте, для случая отсутствия резонансов в системе равна

$$\Delta E = -\frac{(\epsilon\eta)^2}{32} \left[ \frac{1}{2\omega_0 + \eta} + \frac{1}{2\omega_0 - \eta} \right]. \quad (9)$$

Именно эта величина и характеризует дополнительный стационарный энергетический сдвиг основного состояния осциллятора резонатора, который здесь выступает в роли эффективного осциллятора. Подчеркнем, что она также продуцирована коммутационными соотношениями операторов рождения и уничтожения фотонов.

Рассмотрим случай двухфотонного резонанса в системе в условиях, когда  $\eta \approx 2\omega_0$ , а отстройка частот  $\Delta$  — величина малая. Тогда, используя разложения (6), (7) и применяя формулу Бейкера – Кемпбелла – Хаусдорфа, в первом порядке имеем

$$\begin{aligned} \tilde{V}^{(1,0)}(t) &= \hbar \frac{d}{dt} S^{(1,0)}(t) + \tilde{V}^{(1)}(t) = 0, \\ S^{(1,0)}(t) &= \epsilon\omega_0 \frac{\cos((2\omega_0 + \Delta)t)}{2\omega_0 + \Delta} a^\dagger a, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}^{(0,1)}(t) &= \hbar \frac{d}{dt} S^{(0,1)}(t) + \tilde{V}^{(2)}(t) = \\ &= i\hbar \frac{\epsilon\eta}{8} \left( e^{-i\Delta t} a^{\dagger 2} - e^{i\Delta t} a^2 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S^{(0,1)}(t) &= \frac{\epsilon\eta}{8} \left( \frac{\exp[i(4\omega_0 + \Delta)t]}{4\omega_0 + \Delta} a^{\dagger 2} + \right. \\ &\quad \left. + a^2 \frac{\exp[-i(4\omega_0 + \Delta)t]}{4\omega_0 + \Delta} \right). \end{aligned}$$

Представим выражения и для вторых порядков:

$$\begin{aligned} \tilde{V}^{(2,0)}(t) &= \tilde{V}^{(1,1)}(t) = 0, \\ \tilde{V}^{(0,2)}(t) &= -\frac{i}{2} \left[ S^{(0,1)}(t), V_2(t) \right]' = \\ &= -\hbar \frac{(\epsilon\eta)^2}{32} \frac{1 + 2a^\dagger a}{4\omega_0 + \Delta}. \end{aligned} \quad (11)$$

Заметим, что в представлении Шредингера эффективный гамильтониан резонатора имеет вид

$$\begin{aligned} H &= \tilde{H}_0^{eff} + i\hbar \frac{\epsilon\eta}{8} \left( a^{\dagger 2} \exp(-2i\omega_0 t) - a^2 \exp(2i\omega_0 t) \right), \\ \tilde{H}_0^{eff} &= H_0 - \hbar \frac{(\epsilon\eta)^2}{32} \frac{1 + 2a^\dagger a}{4\omega_0 + \Delta}. \end{aligned}$$

Здесь  $\tilde{H}_0^{eff}$  — гамильтониан эффективного осциллятора, а его взаимодействие с движущимся зеркалом описывается оператором

$$i\hbar \frac{\epsilon\eta}{8} \left( a^{\dagger 2} \exp(-2i\omega_0 t) - a^2 \exp(2i\omega_0 t) \right).$$

Необходимые для дальнейшего средние от операторов наиболее просто могут быть определены в гейзенберговской картине взаимодействия, эволюцию операторов в которой будем обозначать, чтобы не было путаницы, нижними индексами. Динамика системы в главном порядке определяется теперь именно взаимодействием (10), которое описывает явление вырожденной параметрической генерации. Эволюция операторов рождения и уничтожения в простом случае  $\exp(\pm i\Delta t) \approx 1$  сводится к известному преобразованию

$$a_t = a_0 \operatorname{ch} r + a_0^\dagger \operatorname{sh} r,$$

где нижний индекс «0» отвечает начальным условиям, а  $r = (\epsilon\eta/4)t$  — параметр сжатия.



Усредним теперь искомые средние по исходному вакуумному состоянию. В этом случае не зависящая от времени добавка к энергии определяется соотношением

$$-\hbar \frac{(\epsilon\eta)^2}{32} \frac{1}{4\omega_0 + \Delta}.$$

Остальные средние зависят от параметра сжатия, который, в свою очередь, определяется временем взаимодействия. В частности, слагаемое от среднего числа рожденных из вакуума квантов возбуждения,  $\langle a_t^\dagger a_t \rangle = \text{sh}^2 r$ , определяет радиационное давление.

В исходной шредингеровской картине развитому из основного вакуумного состояния эффективного осциллятора отвечает его сжатое вакуумное состояние, а его средняя энергия наряду со стационарным сдвигом в том же порядке имеет зависящее от времени слагаемое от среднего значения числа квантов возбуждения, полученных в процессе вырожденной параметрической генерации.

Отметим, что найденные в задаче величины не зависят от выбора модуляции частоты в форме  $\omega(t) = \omega_0(1 + \epsilon \sin \eta t)$  или  $\omega(t) = \omega_0(1 + \epsilon \cos \eta t)$ .

С точки зрения унитарной симметрии квантовой теории, задачу можно исследовать диагонализацией исходного гамильтониана. Последнее отвечает глобальному подходу квантовой теории и также осуществляется унитарным преобразованием, например методом непрерывного унитарного преобразования [23–25]. В обсуждаемой задаче диагонализация гамильтониана (1) не проводилась. Локальный подход в рассматриваемых условиях оказывается проще и эффективнее. Диагональная часть эффективного гамильтониана уже содержит основные поправки и вводит понятие эффективного осциллятора, которое сохраняется при учете возможных новых взаимодействий при рассмотрении резонатора с колеблющимся зеркалом как объекта теории открытых квантовых систем. Дальнейшая диагонализация эффективного гамильтониана дает поправки к уже полученным величинам более высокого порядка малости [14].

Проанализированная здесь ситуация, когда в динамическом эффекте Казимира уровни энергии стационарного режима гармонического осциллятора приобретают дополнительный энергетический сдвиг, по нашему мнению, является чрезвычайно важной с фундаментальной точки зрения. Приведем следующее рассуждение в простейшем случае. Найдем силу Казимира как производную убыли работы  $\mathcal{E}$ , совершенной при адиабатическом изменении размера  $\ell$  квантования одномерного резонатора [26]. Эту физическую величину в статическом слу-

чае найдем как помодовую разность энергии электромагнитного поля внутри резонатора и в свободном пространстве. Единственная собственная частота одночастотного резонатора из граничных условий определена соотношением  $\omega_0 = \pi c/\ell$ , где  $c$  — скорость света. Для случая свободного пространства собственная энергия равна нулю ввиду устремления собственного размера к бесконечности. Величина силы притяжения в этом случае определяется соотношением  $F = -\hbar\omega_0^2/2\pi c$ . Отметим, что собственная энергия всех остальных мод свободного пространства не зависит от параметра  $\ell$  и вклада в значение силы не дает. Этот же результат может быть получен и путем адиабатического изменения параметра проницаемости двух стенок, разграничивающих одномерное пространство.

Регистрация предложенного явления может быть осуществлена в следующем эксперименте. Пусть резонатор представляет собой два параллельных зеркала, где только одно подвергается динамическим осцилляциям, а другое непосредственно служит для регистрации силы Казимира. Различия наблюдаются в разнице значений величины силы по сравнению с ситуацией, когда оба зеркала неподвижны, а эксперимент статичен. Отметим, что к настоящему времени удалось зарегистрировать величину энергии основного состояния осциллятора по эффекту возникновения сжатых квантовых состояний параметрического генератора [20]. Кроме того, развитие методов исследования в нанометровом диапазоне [27], как, например, совершенствование метода динамической голографии [28], позволяет надеяться на регистрацию рассмотренного нами эффекта.

### 3. ОБСУЖДЕНИЕ

Представленное применение методов локального подхода квантовой теории к динамическому эффекту Казимира демонстрирует возможность следующего общего подхода к подобным задачам. Полученный вид эффективного гамильтониана задачи в резонансном и нерезонансном случаях достаточно универсален. Локальный подход основан на алгебраической теории возмущений [12, 14, 29], которая позволяет получать эффективные гамильтонианы задач типа Мура–Лоу–Додонова в областях параметров, в которых частотный спектр системы четко обусловлен одной или несколькими характерными частотами, а некоторые взаимодействия могут считаться малыми. При этом локальный подход да-

ет возможность обсуждать и исследовать спектры основных эффективных компонент открытой системы. Виды эффективных гамильтонианов здесь универсальны и определяются помимо структуры спектра подсистем открытых систем, в которой возможны различные резонансные условия, алгеброй операторов задачи. Поэтому определенные в данной работе эффективные гамильтонианы для случаев нерезонансного изменения параметров и двухквантового резонанса при изменении параметров могут быть получены путем применения алгебраической теории возмущений к фундаментальным квантовым моделям Джейнса – Каммингса [30] и Тависа – Каммингса [31], в которых константы взаимодействия фотонной моды с атомами промодулированы и рассмотрены соответствующие резонансные (или нерезонансные) условия. Соответствующие вычисления здесь стандартны и аналогичны [32].

При этом возникающие сдвиги энергетических уровней и константы связи следует рассматривать как параметры теории, которые могут быть получены в результате прямого квантования классической модели задачи, как это проделано в классических работах [9–11]. Отметим, что до сих пор для анализа эффектов в условиях квантовой модели, вызванных периодическими изменениями ее параметров, практикуется непосредственное квантование исходной классической модели, как, например, в недавней работе [33], в которой, как и раньше [9–11], ничего не говорится о роли эффективного квантового осциллятора и его возможном сдвиге энергии.

Подход на основе алгебраической теории возмущений при применении к известным квантовым моделям (минуя стадию первичного квантования) оставляет в стороне лишь вопросы и эффекты, связанные с нетривиальным адиабатическим изменением параметров квантовой системы. Но при этом локальный подход к известным моделям позволяет вводить понятия эффективных составляющих открытых систем и сразу представлять и анализировать возможные новые физические эффекты, обусловленные периодическим изменением каких-либо параметров рассматриваемой модели в очерченных рамках. Поэтому представленный в работе подход дает теоретическую основу для дальнейших исследований динамики резонатора с периодической модуляцией границ как открытой системы. При этом параметры возникающих эффективных компонент доступны экспериментальным измерениям.

**Финансирование.** Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского

фонда фундаментальных исследований (грант № 19-02-00234а).

## ЛИТЕРАТУРА

1. H. B. Z. Casimir, Proc. Kon. Neder. Akad. Wet. **51**, 793 (1948).
2. Jr W. E. Lamb and R. C. Retherford, Phys. Rev. **72**, 241 (1947).
3. J. N. Munday, F. Capasso, and V. A. Parsegian, Nature **457**, 170 (2009).
4. V. V. Dodonov, Physics **2**, 67 (2020).
5. V. V. Dodonov, Phys. Scr. **82**, 038105 (2010).
6. C. M. Wilson, G. Johansson, A. Pourkabirian, J. R. Johansson, T. Duty, F. Nori, and P. Delsing, Nature **479**, 376 (2011).
7. Л. А. Ривлин, КЭ **6**, 2248 (1979).
8. C. Braggio, G. Bressi, G. Carugno, C. del Noce, G. Galeazzi, A. Lombardi, A. Palmieri, G. Ruoso, and D. Zanello, Europhys. Lett. **70**, 754 (2005).
9. G. T. Moore, J. Math. Phys. **11**, 2679 (1970).
10. C. K. Law, Phys. Rev. A **49**, 433 (1994).
11. V. V. Dodonov and A. B. Klimov, Phys. Rev. A **53**, 2664 (1996).
12. А. И. Трубилко, А. М. Башаров, Письма в ЖЭТФ **111**, 632 (2020).
13. D. F. Walls, Z. Phys. **234**, 231 (1970).
14. A. I. Maimistov and A. M. Basharov, *Nonlinear Optical Waves*, Kluwer Acad., Dordrecht (1999).
15. Р. Эрнст, Дж. Боденхаузен, А. Вокаун, *ЯМР в одном и двух измерениях*, Мир, Москва (1990).
16. В. С. Бутылкин, А. Е. Каплан, Ю. Г. Хронопуло, Е. И. Якубович, *Резонансные взаимодействия света с веществом*, Наука, Москва (1977).
17. Г. Вальтер, УФН **166**, 777 (1996).
18. D. J. Bergman and M. I. Stockman, Phys. Rev. Lett. **90**, 027402 (2003).
19. Ю. Е. Лозовик, Н. Б. Нарожный, А. М. Федотов, Письма в ЖЭТФ **72**, 344 (2000).
20. I.-C. Benea-Chelmus, F. F. Settembrini, G. Scalari, and J. Faist, Nature **568**, 202 (2019).
21. Д. Н. Клышко, *Фотоны и нелинейные среды*, Наука, Москва (1980).

22. В. Н. Горбачев, А. И. Трубилко, *Опт. и спектр.* **83**, 295 (1997).
23. F. Wegner, *Ann. Phys.* **3**, 77 (1994).
24. S. D. Glazek and K. G. Wilson, *Phys. Rev. D* **48**, 5863 (1993).
25. S. D. Glazek and K. G. Wilson, *Phys. Rev. D* **49**, 4214 (1994).
26. В. М. Мостепаненко, Н. Н. Трунов, *УФН* **156**, 385 (1988).
27. G. L. Klimchitskaya, V. M. Mostepanenko, V. M. Petrov, and T. Tschudi, *Phys. Rev. Appl.* **10**, 014010 (2018).
28. В. М. Петров, М. П. Петров, В. В. Брыскин, Е. Петтер, Т. Чуди, *ЖЭТФ* **131**, 798 (2007).
29. А. М. Башаров, *ЖЭТФ* **142**, 419 (2012).
30. E. T. Jaynes and F. W. Cummings, *Proc. of the IEEE* **51**, 89 (1963).
31. M. Tavis and F. W. Cummings, *Phys. Rev.* **170**, 379 (1968).
32. А. И. Трубилко, А. М. Башаров, *Письма в ЖЭТФ* **110**, 505 (2019).
33. M. H. Michael, J. Schmiedmayer, and E. Demler, *Phys. Rev. A* **99**, 053615 (2019).