

«ГЛОБАЛЬНЫЙ» И «ЛОКАЛЬНЫЙ» ПОДХОДЫ В ТЕОРИИ ОТКРЫТЫХ КВАНТОВЫХ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

*А. М. Башаров**

*Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»
123182, Москва, Россия*

*Московский физико-технический институт (технический университет)
141701, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 1 июня 2020 г.,
после переработки 15 июня 2020 г.
Принята к публикации 16 июня 2020 г.

Проанализировано использование «точного» исходного гамильтониана открытой оптической системы и ее окружения и «приближенного» эффективного гамильтониана в выводе кинетического уравнения открытой оптической системы в условиях применения марковского приближения и представления окружения открытой системы — термостата — как дельта-коррелированного шума. Показано, что иерархия характерных времен оптической системы естественным образом служит обоснованием необходимости перехода от указанного «точного» гамильтониана к приближенному эффективному гамильтониану для дальнейшего использования марковского приближения и модели дельта-коррелированного окружения открытой системы в локальном подходе. Тогда уравнение Шредингера для волнового вектора открытой системы и окружения представляет собой квантовое стохастическое дифференциальное уравнение, из которого просто и стандартно выводится кинетическое уравнение, содержащее/описывающее как известные результаты, так и новые.

DOI: 10.31857/S004445102011019X

СОДЕРЖАНИЕ

| | | | |
|--|-----|---|------|
| 1. Введение | 978 | 3.1. Уравнение Ланжевена и характерные времена броуновского движения | 987 |
| 2. Унитарная симметрия квантовой теории | 981 | 3.2. Уравнение для волнового вектора оптической системы и характерные времена | 987 |
| 2.1. Уравнение для волнового вектора и кинетическое уравнение | 981 | 4. Алгебраическая теория возмущений .. | 989 |
| 2.2. Уравнения движения для гамильтонианов | 982 | 4.1. Медленно- и быстроменяющиеся слагаемые | 990 |
| 2.3. Теории возмущений на основе преобразования гамильтониана | 984 | 4.2. Эффективный гамильтониан | 991 |
| 3. Требования к эффективному гамильтониану в локальном подходе, определяемые характерными временами оптических систем | 986 | 5. Квантовое стохастическое дифференциальное уравнение | 995 |
| | | 6. Кинетическое уравнение для открытой системы | 999 |
| | | 7. Заключение | 1000 |
| | | Литература | 1001 |

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время многие фундаментальные понятия квантовой и нелинейной оптики, такие как

* E-mail: basharov@gmail.com

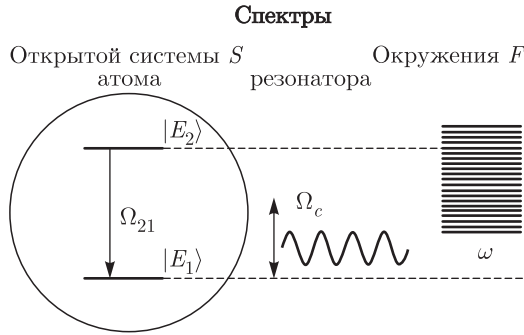


Рис. 1. Условное изображение спектра открытой системы и ее окружения

поляризация, когерентность, перепутывание, стали универсальными и используются в разных областях, причем не только физики. Отчасти это связано с тем, что традиционные задачи квантовой оптики — когерентные процессы, спонтанное излучение атома или ансамбля атомов, динамика микрорезонаторов с потерями на зеркалах, электромагнитные взаимодействия квантовых частиц и шумовых полей — дают яркие примеры динамики открытых квантовых систем [1–11]. При этом большая часть основных понятий и тонких нюансов теории открытых систем исчерпывающе иллюстрируется примерами из оптики.

Для открытых квантовых систем характерно, что взаимодействие открытой системы с окружением является достаточно слабым, чтобы представление об изолированной системе (в отсутствие взаимодействия с окружением) было хорошим «нулевым» приближением для открытой системы. Кроме того, окружение представляется многомодовым (широкополосным) и в определенном смысле однородным, так что влиянием открытой системы на состояния окружения можно пренебрегать.

Со спектральной точки зрения открытую квантовую систему удобно представлять как систему, состоящую, возможно, из нескольких подсистем, число степеней свободы которой мало, а спектр — дискретен. В то же время окружение открытой системы представляется значительно большей системой или совокупностью систем (с большим, в пределе — бесконечно большим, числом степеней свободы), спектр которых непрерывен или квазинепрерывен (рис. 1). Отличия в описании одной открытой квантовой системы от другой кроются в алгебрах операторов, представляющих подсистемы открытой системы и ее окружения. Так, атомная подсистема представляется проекционными операторами $|E_j\rangle\langle E_i|$ для состояния атома, характеризуемого энергиями E_j и

ортогональным разложением единицы:

$$\sum_j |E_j\rangle\langle E_j| = 1, \langle E_i|E_j\rangle = \delta_{ij}.$$

Гамильтониан изолированного покоящегося атома представляется через проекторы в виде

$$H_a = \sum_j E_j |E_j\rangle\langle E_j|.$$

Во многих типичных задачах нелинейной и квантовой оптики, в которых возникает приближение атомного спектра двумя уровнями, алгебра проекционных операторов сводится к алгебре углового момента $SU(2)$ [12, 13].

Фотонная подсистема открытой системы обычно характеризуется операторами рождения c_c^\dagger и уничтожения c_c фотонов микрорезонаторной (cavity) моды, подчиняющимися алгебре Гейзенберга – Вейля:

$$[c_c, c_c^\dagger] = 1.$$

Гамильтониан такой фотонной системы берется в виде $H_C = \hbar\Omega_c c_c^\dagger c_c$.

Атомная и фотонная подсистемы в некоторых задачах могут выступать как единый объект [14] — атомно-фотонный кластер, описываемый полиномиальными алгебрами Карасева [15, 16] и т. д.

В качестве многомодового окружения открытых квантовых оптических систем часто выступает вакуумное электромагнитное поле, определяемое операторами рождения $b_{\mathbf{q},\lambda}^\dagger$ и уничтожения $b_{\mathbf{q},\lambda}$ фотонов с импульсом $\hbar\mathbf{q}$, поляризацией λ и энергией $\hbar\omega$, законом дисперсии $\omega_{\mathbf{q},\lambda} = qc$ (здесь c — скорость света) и коммутационными соотношениями Гейзенберга – Вейля

$$[b_{\mathbf{q},\lambda}, b_{\mathbf{q}',\lambda'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{q},\mathbf{q}'}\delta_{\lambda,\lambda'}.$$

Гамильтониан многомодового окружения представляется в виде

$$H_F = \sum_{\mathbf{q},\lambda} \hbar\omega_{\mathbf{q},\lambda} b_{\mathbf{q},\lambda}^\dagger b_{\mathbf{q},\lambda}.$$

При переходе от суммирования

$$\sum_{\mathbf{q}} \rightarrow V(2\pi)^{-3} \int d\mathbf{q}$$

(V — объем квантования) к интегрированию по непрерывному спектру следует иметь в виду, что такая замена одновременно сопровождается заменами $b_{\mathbf{q},\lambda} \rightarrow b_\lambda(\mathbf{q})$ с коммутационным соотношением

$$[b_\lambda(\mathbf{q}), b_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{q}')] = \delta(\vec{q} - \vec{q}')\delta_{\lambda,\lambda'},$$

так что операторы рождения $b_{\lambda'}^{\dagger}(\mathbf{q}')$ и уничтожения $b_{\lambda}(\mathbf{q})$ приобретают размерность, для устранения которой необходим переход к уравнениям с безразмерными величинами. Часто на этом не делается акцент, но учитывается в заключительных результатах.

В других примерах открытых квантовых систем в качестве многомодового окружения по отношению к данному атому могут рассматриваться другие атомы того же или другого сорта. Также рассматривается и фермионный термостат, см., например, [17–21]. В результате алгебра операторов, представляющих многомодовое окружение, также может быть весьма разнообразной.

Отметим важный аспект многомодовости и/или широкополосности — при статистической независимости компонент или подсистем многомодового объекта, например, спектральных компонент электромагнитного поля, и при определенной однородности спектральных компонент (постоянства спектральной плотности в определенном спектральном диапазоне — теорема Найквиста [22]) возникает представление о случайном дельта-коррелированном процессе, моделирующем многомодовый объект [11, 22].

Динамика открытой квантовой оптической системы отличается соотношением характерных времен, наименьшее из которых величина 10^{-14} – 10^{-15} с, порядка обратной частоты оптического квантового перехода $|E_i\rangle \rightarrow |E_j\rangle$. В теориях открытых систем, в том числе и оптических, многомодовое окружение открытой системы моделируется белым (дельта-коррелированным) шумом. В этой математической абстракции время корреляции считается равным нулю, но физически эта величина для типичных открытых оптических систем обычно существенно превышает указанный масштаб времени. Исследователи обнаружили, что корректное кинетическое уравнение для квантовой открытой оптической системы получается при применении стандартных методов не к исходному гамильтониану открытой системы и ее окружения, а к приближенному (см., например, [23]). Использованное приближение в оптике известно как приближение вращающейся волны [13, 24, 25]. Между тем, отмеченное соотношение характерных времен оптической системы, вообще говоря, всегда обязывает применять методы вывода кинетического уравнения открытой системы не к исходному гамильтониану, а к эффективному, полученному в приближении, учитывающем отмеченную иерархию характерных времен. Тогда в качестве наименьшего характерного времени эффективной модели

может выступать время корреляции окружающего оптическую систему дельта-коррелированного термостата. Построение эффективной модели для квантовой теории неизбежно должно опираться на фундаментальное свойство квантовой теории — ее унитарную симметрию.

Эффективная квантовая модель характеризуется, прежде всего, своим эффективным гамильтонианом. Известны разные способы построения эффективного гамильтониана из исходного, начиная с первых работ по квантовой теории [26–49].

Следует отметить, что в указанных работах унитарное преобразование никак не обосновывало приближение вращающейся волны, а зачастую применялось к задачам, в которых преобразовывался гамильтониан, уже взятый в приближении вращающейся волны.

Обоснование приближения вращающейся волны для взаимодействия классических полей с квантовыми системами давалось в рамках метода усреднения Крылова–Боголюбова–Митропольского [50, 51]. Обстоятельно метод усреднения Крылова–Боголюбова–Митропольского применительно к таким задачам нелинейной оптики изложен в монографии [52].

Другой подход к эффективному гамильтониану в случае воздействия на квантовую систему классических электромагнитных полей предложен в работах [53–56] на основе унитарного преобразования исходного гамильтониана. В отличие от работ [26–49] и многих других, предложенный способ опирался на требование отсутствия быстро меняющихся во времени слагаемых, что, по сути, является алгебраической формулировкой метода усреднения Крылова–Боголюбова–Митропольского. В работе [57] рассмотрен случай широкополосных квантованных полей, и унитарное преобразование гамильтониана легло в основу метода построения эффективного гамильтониана открытой оптической квантовой системы, адекватного упомянутой иерархии характерных времен открытой оптической системы. Результаты [53, 54, 57] привели к формулировке теории открытых квантовых систем, в которой понятие эффективного гамильтониана играет ключевую роль в выводе кинетического уравнения открытой оптической квантовой системы, обеспечивая дальнейшее корректное применение приближения белого шума для описания окружения открытой системы. При этом не только обосновано приближение вращающейся волны в случае квантованных широкополосных полей и получены лэмбовские сдвиги квантовых уровней, но и широкополосное поле представлено как со-

вокупность шумовых источников и учтены поправки более высокого порядка по константе взаимодействия, которые при выводе кинетического уравнения обычно опускались [58]. Указанные поправки, несмотря на свою малость, определяют многообразие новых и совсем «не малых» эффектов. В случае воздействия на квантовую систему классических и квантованных полей различной природы рассматриваемый способ построения эффективного гамильтониана [53, 54, 57] служит также самосогласованной формулировкой алгебраической теории возмущений и дает единый подход к теории открытых оптических квантовых систем.

До сих пор среди многих специалистов-математиков по квантовой теории открытых систем бытует мнение, что разработанные ими новые методы получения кинетических уравнений открытой системы в марковском приближении необходимо применять к исходным, как бы «точным», гамильтонианам. Примером такого убеждения служат монографии [59, 60].

Обзор основных различий разных построений эффективного гамильтониана на основе унитарной симметрии квантовой теории содержится в разд. 2. Кроме того, обсуждается глобальный и локальный подходы к открытым квантовым системам

Необходимость перехода от «точного» исходного гамильтониана к эффективному гамильтониану в локальном подходе к теории оптических открытых систем рассмотрена в разд. 3. Возможной основой такого перехода служит алгебраическая теория возмущений, которую математики применительно к системам классических уравнений с различными масштабами изменения величин рассматривают как алгебраический вариант метода усреднения Крылова – Боголюбова – Митропольского [61].

Раздел 4 посвящен формулировке алгебраической теории возмущения для описания процессов с участием широкополосных полей. В развиваемом подходе термостатные квантованные поля естественно разбиваются на совокупность шумовых источников, что показано на примере ансамбля атомов в микрорезонаторе с потерями на зеркалах.

В разд. 5 показано, что при применении марковских условий к эффективному гамильтониану и волновому вектору уравнение Шредингера для оператора эволюции открытой системы и ее окружения оказывается математически неопределенным. Корректный математический статус уравнение Шредингера получает при введении основных квантовых случайных процессов — рождающего, уничтожающего и считывающего, и определении соответ-

ствующих интегралов Ито. Далее уравнение Шредингера переформулируется как квантовое стохастическое дифференциальное уравнение.

В разд. 6 выводятся кинетические уравнения и операторы Линдблада для открытых оптических квантовых систем. Основной тезис — каждой открытой квантовой системе ставится в соответствие свое кинетическое уравнение. Даже если одна оптическая система является предельным случаем другой, например, в дисперсионном пределе больших отстройек от резонанса, кинетическое уравнение, получаемое из эффективного гамильтониана, отличается от кинетического уравнения, являющегося результатом предельного перехода из кинетического уравнения исходной модели. Обсуждаются основные физические эффекты, обусловленные участием широкополосных полей.

2. УНИТАРНАЯ СИММЕТРИЯ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

2.1. Уравнение для волнового вектора и кинетическое уравнение

Квантовая механика является символической формой выражения закономерностей процесса микроскопического измерения [62, 63]. Распиренная алгебра измерений содержит инвариантные пространства, представимые комплексным гильбертовым пространством и ему сопряженным. Элементы этих пространств принято называть векторами состояния $|\Psi\rangle$ и $\langle\Psi|$. Однако полное описание системы дается матрицей плотности ρ , а о состояниях, описываемых вектором $|\Psi\rangle$, говорят как о чистых состояниях. Тогда $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$. Матрица плотности суть эрмитовый оператор $\rho \geq 0$ с единичным следом $\text{Tr}\rho = 1$, а чистое состояние характеризуется свойством $\rho^2 = \rho$.

Физические характеристики системы даются линейными самосопряженными операторами $O = O^\dagger$, которые, с одной стороны, являются элементами алгебры измерений, а с другой, — действуют в пространствах с векторами $|\Psi\rangle$ и $\langle\Psi|$. Эти операторы называются наблюдаемыми. Результаты действия оператора суть вектор $O|\Psi\rangle$ и сопряженный вектор $\langle\Psi|O$, а регистрируемые значения α наблюдаемой при идеальном селективном измерении даются собственными значениями α_i , $O|\alpha_j\rangle = \alpha_i|\alpha_j\rangle$. Средняя величина наблюдаемой в чистом состоянии выражается билинейной комбинацией $\langle\Psi|O|\Psi\rangle$, а в общем случае — соотношением $\text{Tr}(\rho O)$. Величи-

на $\text{Tr}(O|\alpha_j\rangle\langle\alpha_j|)$ задает распределение вероятностей на спектре оператора O .

Саму наблюдаемую можно задать ее спектральным разложением $O = \sum_j \alpha_j |\alpha_j\rangle\langle\alpha_j|$, как, например, гамильтониан изолированной подсистемы. Проекторы $|\alpha_j\rangle\langle\alpha_j|$ дают ортогональное разложение единицы $1 = \sum_j |\alpha_j\rangle\langle\alpha_j|$, $\langle\alpha_j|\alpha_k\rangle = \delta_{jk}$.

Полный набор одновременно возможных селективных измерений представляется набором коммутирующих между собой наблюдаемых, собственные векторы которых образуют базисные векторы упомянутого гильбертова пространства. При этом говорят о представлении системы.

Различные представления обусловлены существованием взаимно дополнительных величин, которые одновременно не могут иметь определенных значений. При последовательном измерении таких величин результат зависит от порядка измерений, что приводит к некоммутативной алгебре операторов.

Результат ρ_j изменения системы при ее измерении в произвольном состоянии ρ дается проекционным постулатом фон Неймана

$$\rho \mapsto \rho_j = \frac{|\alpha_j\rangle\langle\alpha_j|\rho|\alpha_j\rangle\langle\alpha_j|}{\text{Tr}(\rho|\alpha_j\rangle\langle\alpha_j|)}.$$

Взаимодействие с измерительным прибором дает пример необратимой динамики квантовой системы, превращая большую часть квантовых систем в открытые системы.

Обратимая динамика квантовой системы определяется гамильтонианом и описывается уравнением Шредингера для волнового вектора, или эквивалентным ему уравнением для матрицы плотности

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\Psi\rangle = H|\Psi\rangle, \quad \frac{d}{dt}\rho = \frac{i}{\hbar}[\rho, H]. \quad (1)$$

Необратимая динамика открытой системы описывается уравнением для матрицы плотности открытой системы ρ^S с некоторым эффективным гамильтонианом H^{Eff-S} и релаксационным оператором $\hat{\Gamma}$:

$$\frac{d\rho^S}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\rho^S, H^{Eff-S}] - \hat{\Gamma}\rho^S. \quad (2)$$

В работах [64,65] показано, что при весьма общих предположениях релаксационный оператор $\hat{\Gamma}$ имеет форму, которую принято называть формой Линдблада:

$$\hat{\Gamma}\rho^S = -\frac{i}{\hbar}[\rho^S, H^{L-S}] + \frac{1}{2}L_+^S L_-^S \rho^S + \frac{1}{2}\rho^S L_+^S L_-^S - L_-^S \rho^S L_+^S, \quad (3)$$

где L_{\pm}^S — так называемые операторы Линдблада $L_+^S = (L_-^S)^\dagger$, а H^{L-S} — добавочное слагаемое к эффективному гамильтониану системы, обусловленное релаксационной динамикой. При этом слагаемые, содержащие операторы L_{\pm}^S , описывают релаксационные переходы и дефазировку в открытой квантовой системе, а оператор H^{L-S} определяет сдвиги энергии уровней, обусловленные релаксационными переходами. Иногда рассматриваются операторы Линдблада с другой нормировкой, например, $L_-^S = L_+^S \sqrt{2}$.

Естественной интерпретацией релаксационного оператора $\hat{\Gamma}\rho$ в (2) является его представление, связанное с постулатом фон Неймана:

$$\hat{\Gamma}\rho^S = \sum_i \lambda_i (\rho - U_i \rho U_i^\dagger), \quad \lambda_i > 0,$$

где $U_i^\dagger = U_i^{-1}$ — унитарные операторы, возникающие в случае усреднения по классическим пуассоновским процессам с интенсивностями λ_i , приводящим к унитарным скачкам U_i вследствие унитарной эволюции между, например, актами измерения [66–69], или актами столкновений.

Эволюция системы под действием релаксационного оператора в случае квадратичных операторов поддается общему исследованию [70].

Важным подходом к необратимой динамике, который вполне естествен в квантовой оптике, является расширение открытой системы до более общей системы, включающей открытую систему и ее окружение, динамика которой уже рассматривается как обратимая, подчиняющаяся уравнению Шредингера. Поэтому общие рассуждения можно проводить в терминах векторов состояний, обращаясь к матрице плотности для пояснения таких понятий, как когерентность и населенность (недиагональные и диагональные элементы матрицы плотности).

2.2. Уравнения движения для гамильтонианов

Свобода в физическом описании соответствует произволу в выборе математического представления — переход от одного представления к другому осуществляется унитарным оператором \hat{T} : $\hat{T}^\dagger = \hat{T}^{-1}$. Если унитарно преобразовать состояния системы:

$$|\tilde{\Psi}\rangle = \hat{T}|\Psi\rangle, \quad (4)$$

то физически наблюдаемые величины, характеризующиеся скалярными произведениями $\langle\Psi|O|\Psi\rangle$, не из-

меняются, если одновременно с векторами преобразовать и все операторы

$$\tilde{O} = \hat{T}O\hat{T}^\dagger.$$

Поскольку динамика квантовой системы описывается уравнением Шредингера с гамильтонианом H (представление Шредингера), переход от вектора $|\Psi\rangle$ к новому вектору (4) сопровождается изменением гамильтониана

$$\tilde{H} = \mathcal{T}(H) = \hat{T}H\hat{T}^\dagger - i\hbar\hat{T}\frac{d}{dt}\hat{T}^\dagger, \quad (5)$$

так что эволюция нового состояния описывается уравнением того же вида, что и (1), но с преобразованным гамильтонианом (5):

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\tilde{\Psi}\rangle = \tilde{H}|\tilde{\Psi}\rangle. \quad (6)$$

Общие вопросы, связанные с унитарным преобразованием (4)–(6), определяют представление эффективного гамильтониана, глобальный и локальный подходы к теории открытых квантовых систем.

Унитарные преобразования волнового вектора (4) и гамильтониана (5) лежат в основе таких фундаментальных понятий квантовой теории, как преобразование или представление Гейзенберга, которое следует из (5) и (6) при

$$\hat{T} = \exp\left(\frac{iHt}{\hbar}\right), \quad \tilde{H} = 0, \quad |\tilde{\Psi}\rangle = |\Psi_0\rangle,$$

и преобразование или представление Дирака (представление взаимодействия) с операторами

$$\hat{T} = \exp\left(\frac{iH_0t}{\hbar}\right),$$

$$\tilde{H} = \exp\left(\frac{iH_0t}{\hbar}\right)V\exp\left(-\frac{iH_0t}{\hbar}\right) \equiv V(t),$$

$$|\tilde{\Psi}\rangle = \hat{T}|\Psi_0\rangle \equiv |\Psi(t)\rangle,$$

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = V(t)|\Psi(t)\rangle, \quad |\Psi(0)\rangle = |\Psi_0\rangle.$$

Гамильтониан системы $H = H_0 + V$ выражен через гамильтониан H_0 «изолированных» подсистем (примеры H_A, H_C, H_F , их суммы) и оператор их взаимодействия V , а $|\Psi_0\rangle$ — начальный вектор состояния системы. В принципе, это не удивительно, поскольку гамильтониан является генератором унитарного преобразования сдвига во времени, а в отсутствие измерений время считаем однородным.

Совершив одно унитарное преобразование, можно также совершить несколько однотипных унитарных преобразований подряд:

$$H(1) = \mathcal{T}(H), \quad |\Psi(1)\rangle = \hat{T}(1)|\Psi\rangle,$$

$$i\hbar\frac{d|\Psi(1)\rangle}{dt} = H(1)|\Psi(1)\rangle,$$

$$H(2) = \mathcal{T}(H(1)), \quad |\Psi(2)\rangle = \hat{T}(2)|\Psi(1)\rangle,$$

$$i\hbar\frac{d|\Psi(2)\rangle}{dt} = H(2)|\Psi(2)\rangle, \dots$$

В скобках отмечаем количество унитарных преобразований, приведших к данным преобразованным гамильтониану и волной функции. При этом

$$\begin{aligned} |\Psi(n+1)\rangle &= \hat{T}(n+1)|\Psi(n)\rangle = \\ &= \hat{T}(n+1)\hat{T}(n)|\Psi(n-1)\rangle = \dots = \\ &= \hat{T}(n+1)\hat{T}(n)\dots\hat{T}(1)|\Psi\rangle. \end{aligned}$$

Естественен вопрос, чем должны закончиться такие унитарные преобразования? Один из вариантов ответа на этот вопрос — считать, что применяемые преобразования зависят от непрерывного параметра ℓ :

$$\hat{T}(\ell) = \hat{T}(n+1)\hat{T}(n)\dots\hat{T}(1),$$

$$\hat{T}^\dagger(\ell)\hat{T}(\ell) = 1 = \hat{T}(\ell)\hat{T}^\dagger(\ell), \quad \hat{T}(0) = 1,$$

$$|\Psi(0)\rangle = |\Psi\rangle, \quad H(0) = H,$$

$$|\Psi(\ell)\rangle = \hat{T}(\ell)|\Psi\rangle, \quad i\hbar\frac{d}{dt}|\Psi(\ell)\rangle = H(\ell)|\Psi(\ell)\rangle, \quad (7)$$

$$H(\ell) = \hat{T}(\ell)H\hat{T}^\dagger(\ell) - i\hbar\hat{T}(\ell)\frac{\partial}{\partial t}\hat{T}^\dagger(\ell). \quad (8)$$

Если продифференцировать уравнения (7) и (8) по параметру ℓ , то нетрудно получить «уравнения движения» для гамильтонианов и преобразованных волновых функций:

$$\frac{\partial H(\ell)}{\partial t} = A(\ell)H(\ell) - H(\ell)A(\ell) + i\hbar\frac{\partial A(\ell)}{\partial t}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial|\Psi(\ell)\rangle}{\partial\ell} = A(\ell)|\Psi(\ell)\rangle, \quad (10)$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(\ell)\rangle = H(\ell)|\Psi(\ell)\rangle,$$

$$A(\ell) = -\hat{T}(\ell)\frac{\partial\hat{T}^\dagger(\ell)}{\partial\ell} = \frac{\partial\hat{T}(\ell)}{\partial\ell}\hat{T}^\dagger(\ell).$$

Подчеркнем, что на генератор $A(\ell)$ уравнения движения для гамильтонианов (10), вообще говоря, нет

никаких ограничений, за исключением требования его антиэрмитовости

$$A(\ell) = -A^\dagger(\ell).$$

Уравнение движения для гамильтонианов (9) является условием согласованности двух линейных уравнений (8) — чтобы решения уравнений системы (8) была совместны, необходимо равенство смешанных производных:

$$\frac{\partial^2 |\Psi(\ell)\rangle}{\partial \ell \partial t} = \frac{\partial^2 |\Psi(\ell)\rangle}{\partial t \partial \ell},$$

откуда также следует (9).

Если в качестве оператора $A(\ell)$ взять оператор, не зависящий ни от гамильтониана $H(\ell)$, ни от параметра ℓ , ни от времени t , и выразить его через эрмитовый оператор $G = G^\dagger$,

$$A(\ell) = iG,$$

то уравнение движения для гамильтонианов линейно и имеет простой вид:

$$\frac{\partial H(\ell)}{\partial t} = iGH(\ell) - iH(\ell)G.$$

Его решение можно получить как по теории возмущений, так и непосредственным интегрированием:

$$\begin{aligned} H(\ell) &= e^{iG\ell} H(0) e^{-iG\ell} = H(0) + i[G, H(0)]\ell + \\ &+ \frac{(i)^2}{2!} [G, [G, H(0)]]\ell^2 + \\ &+ \frac{(i)^3}{3!} [G, [G, [G, H(0)]]]\ell^3 + \dots, \end{aligned}$$

откуда при $\ell = 1$ следует формула Кемпбелла – Бейкера – Хаусдорфа для произвольного оператора O и эрмитового оператора G :

$$\begin{aligned} e^{iG} O e^{-iG} &= O + i[G, O] + \frac{(i)^2}{2!} [G, [G, O]] + \\ &+ \frac{(i)^3}{3!} [G, [G, [G, O]]] + \dots \quad (11) \end{aligned}$$

Если считать оператор $A(\ell)$ зависящим от гамильтониана $H(\ell)$ и взять его в виде

$$A(\ell) = [H_D(\ell), H(\ell)], \quad (12)$$

где $H_D(\ell)$ — диагональная часть гамильтониана $H(\ell)$, то в стационарном случае не зависящего от времени гамильтониана H

$$\frac{\partial}{\partial \ell} \sum_{k \neq n} |H_{kn}(\ell)|^2 = -\frac{\partial}{\partial \ell} \sum_k H_{kk}^2(\ell) = -2 \sum_{km} |A_{km}(\ell)|^2.$$

Через O_{km} обозначены матричные элементы некоторого оператора O в базисе, в котором $H_D(\ell)$ является диагональным оператором. Видно, что при $\ell \rightarrow \infty$ недиагональные матричные элементы преобразованного гамильтониана стремятся к нулю, так что $H(\ell) \rightarrow H_D(\ell)$, и в конечном итоге преобразованный гамильтониан становится диагональным. Такое представление назовем диагональным представлением исходного гамильтониана. Оно естественно для эрмитовых операторов и впервые такой подход продемонстрирован в работах [71–73]. Линейное уравнение движения для гамильтонианов исследовано в монографии [32], где также продемонстрированы его применения.

Таким образом, одним из ответов на вопрос, чем должны закончиться унитарные преобразования, для преобразований (9), (12) очевиден — получение диагонального гамильтониана. Дальнейший учет этого факта — диагонализации исходного полного гамильтониана — является содержанием глобального подхода к теории открытых квантовых систем. Заметим, что диагонализацию гамильтониана можно также проводить на основе преобразования Боголюбова [74, 75] и иных подходов. В работе [76] преобразования Боголюбова проделаны совместно с унитарным преобразованием, а в [77] обсуждается смысл преобразования Боголюбова в контексте унитарных преобразований.

2.3. Теории возмущений на основе преобразования гамильтониана

Открытая система с исходным гамильтонианом $H = H_0 + V$ изначально определяется малостью оператора взаимодействия V . Это позволяет построить теорию возмущений по константе взаимодействия на основе унитарного преобразования:

$$\begin{aligned} \hat{T} &= e^{-iS}, \quad S = S^\dagger, \\ \tilde{H} &= e^{-iS} H e^{iS} - i\hbar e^{-iS} \frac{d}{dt} e^{iS}. \end{aligned} \quad (13)$$

Представим преобразованный гамильтониан в виде ряда по взаимодействию, используя формулу Кемпбелла – Бейкера – Хаусдорфа:

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= H_0 - i[S, H_0] - \frac{1}{2}[S, [S, H_0]] - \dots \\ &+ V - i[S, V] - \frac{1}{2}[S, [S, V]] - \dots - i\hbar e^{-iS} \frac{d}{dt} e^{iS}. \end{aligned} \quad (14)$$

Часто требуется, чтобы эффективный гамильтониан был диагональным и в первом порядке по вза-

имдействию [32], например, в стационарном случае $-i[S, H_0] + V = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{H} = H_0 - i \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} \right) [S, V] - \\ - \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \right) [S, [S, V]] + \\ + i \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} \right) [S, [S, [S, V]]] - \dots \end{aligned} \quad (15)$$

В случае оптических систем такая процедура, например, при однофотонном резонансе классического поля с состояниями непрерывного спектра, приводит к неэрмитовому гамильтониану [78–81], что сейчас активно изучается [82, 83]. Само преобразование перестает быть унитарным.

Обычная теория возмущений в случае оптических систем при выполнении условий резонанса приводит к расходящимся рядам [25, 52, 54, 84]. Альтернативные подходы, известные в квантовой теории [85], состоят в разложении преобразованного гамильтониана и генератора преобразования в ряды.

Разложим S и \tilde{H} в ряды по константе взаимодействия:

$$\begin{aligned} S = S^{(1)} + S^{(2)} + \dots, \\ \tilde{H} = \tilde{H}^{(0)} + \tilde{H}^{(1)} + \tilde{H}^{(2)} + \dots \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь $S^{(n)}$ и $\tilde{H}^{(n)}$ — слагаемые, имеющие n -й порядок по константе взаимодействия. Если предположить, что оператор взаимодействия имеет первый порядок по константе взаимодействия, то подставляя (16) в разложение (14) и приравнявая выражения одного порядка, можно получить

$$\tilde{H}^{(0)} = H_0, \quad (17)$$

$$\tilde{H}^{(1)} = -i[S^{(1)}, H_0] + i\hbar \frac{d}{dt} S^{(1)} + V, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}^{(2)} = -i[S^{(2)}, H_0] + i\hbar \frac{d}{dt} S^{(2)} - \frac{i}{2} [S^{(1)}, V] - \\ - \frac{i}{2} [S^{(1)}, \tilde{H}^{(1)}], \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}^{(3)} = -i[S^{(3)}, H_0] + i\hbar \frac{d}{dt} S^{(3)} - \frac{i}{2} [S^{(2)}, V] - \\ - \frac{i}{2} [S^{(1)}, \tilde{H}^{(2)}] - \frac{1}{12} [S^{(1)}, [S^{(1)}, V]] - \\ - \frac{1}{12} [S^{(1)}, [S^{(1)}, \tilde{H}^{(1)}]], \dots \end{aligned}$$

Аналогичную теорию возмущений можно построить, исходя из представления взаимодействия

$$\begin{aligned} \hat{T}(t) = e^{-iS(t)}, \quad S(t) = S^\dagger(t), \\ \tilde{V}(t) = e^{-iS(t)} V(t) e^{iS(t)} - i\hbar e^{-iS(t)} \frac{d}{dt} e^{iS(t)}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\tilde{\Psi}\rangle = \tilde{V}(t) |\tilde{\Psi}\rangle, \quad |\tilde{\Psi}(0)\rangle = |\Psi_0\rangle, \quad (21)$$

где указанием на временной аргумент подчеркнута связь такой теории возмущений с исходным представлением взаимодействия.

Разложение $S(t)$ и $\tilde{V}(t)$ в ряды по константе взаимодействия,

$$\begin{aligned} S(t) = S^{(1)}(t) + S^{(2)}(t) + \dots, \\ \tilde{V}(t) = \tilde{V}^{(1)}(t) + \tilde{V}^{(2)}(t) + \dots, \end{aligned} \quad (22)$$

и их подстановка в формулу

$$\begin{aligned} \tilde{V}(t) = V(t) - i[S(t), V(t)] - \frac{1}{2} [S(t), [S(t), V(t)]] - \\ - i\hbar e^{-iS(t)} \frac{d}{dt} e^{iS(t)} \end{aligned} \quad (23)$$

приводят к соотношениям

$$\tilde{V}^{(1)}(t) = \hbar \frac{d}{dt} S^{(1)}(t) + V(t), \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}^{(2)}(t) = \hbar \frac{d}{dt} S^{(2)}(t) - \frac{i}{2} [S^{(1)}(t), V(t)] - \\ - \frac{i}{2} [S^{(1)}(t), \tilde{V}^{(1)}(t)], \dots \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь также $S^{(n)}(t)$ и $\tilde{V}^{(n)}(t)$ — слагаемые, имеющие n -й порядок по константе взаимодействия.

Формула Кемпбелла – Бейкера – Хаусдорфа используется не только для формулировки того или иного приближения. Например, если вычислять операторы открытой системы в представлении взаимодействия, то для операторов уничтожения имеем точные вычисления по формуле (11). При $S = \Omega_c c^\dagger ct$, $O = c$, $[S, O] = \Omega_c t [c^\dagger c, c] = -\Omega_c tc$ имеем

$$\begin{aligned} e^{iS} c e^{-iS} = O + i[S, O] + \frac{(i)^2}{2!} [S, [S, O]] + \\ + \frac{(i)^3}{3!} [S, [S, [S, O]]] + \dots = c e^{-i\Omega_c t}. \end{aligned}$$

Аналогично нетрудно получить

$$e^{iS} |E_j\rangle \langle E_k| e^{-iS} = |E_j\rangle \langle E_k| e^{-i\Omega_{jk} t},$$

$$\Omega_{jk} = (E_j - E_k)/\hbar,$$

если $S = \sum_j E_j t \hbar^{-1} |E_j\rangle \langle E_j|$.

Применения формулы (11) настолько обширны, что упоминание этой формулы часто затушевывает разницу в используемых математических аппаратах. Между тем, дальнейшие предположения после применения (11) различны и приводят к разным результатам. Однако при построении теории возмущений, которые могут быть также разными, первые порядки зачастую получаются весьма схожими в силу самой структуры формулы (11) — ничего иного в слагаемых первого порядка получить нельзя, кроме как

$$\tilde{V}(t) = V(t) - i \left[S(t), V(t) \right] - i\hbar e^{-iS(t)} \frac{d}{dt} e^{iS(t)}$$

(если применять, например, (22)).

Разложения, сходные с (22)–(22), неоднократно использовались разными авторами. При этом были использованы разнообразные принципы отбора слагаемых. Наиболее часто авторы руководствовались идеей простого отбрасывания слагаемых первого порядка, например, при рассмотрении двухфотонного и многофотонных резонансов [37, 46–48]. Тогда получаются выражения, аналогичные (15), но далее все равно приходится прибегать к методу усреднения [52] полученных уравнений для матрицы плотности.

Ввиду расходимости обычной теории возмущений применительно к задачам резонансной оптики подходы [34–37, 46–49, 53–57] попутно решали и эту проблему.

В теории возмущений в квантовой механике [85] унитарное преобразование использовалось для исключения слагаемых первого порядка по взаимодействию и для получения диагонального гамильтониана аналогично (15).

То же имеет место и при переходе к неэрмитовым гамильтонианам [81, 86]. Иногда в качестве лидирующего принципа берется правило, что определяющие эффективный гамильтониан слагаемые должны коммутировать с невозмущенным гамильтонианом H_0 [43]. В работах [34–37] при применении унитарного преобразования просто оставлялись слагаемые, согласующиеся с полученными [52] методом усреднения Крылова – Боголюбова – Митропольского.

Часто в теориях диагонализация гамильтониана при помощи унитарного преобразования проводится не для исходного гамильтониана, а для гамильтониана, уже написанного в приближении вращающейся волны, см., например, [3, 39–42].

Унитарное преобразование гамильтониана как неотъемлемое свойство всей квантовой теории ис-

пользуется в самых разнообразных вопросах. Ярким примером является преобразование Фолди – Вайтхаузена, устанавливающее связь между уравнением Дирака и уравнением Шредингера [29]. Приведем также примеры из теории ядра [30, 31], физики твердого тела [32, 33]. Многие из них можно рассматривать как решения линейного уравнения для гамильтонианов [32]. В остальном, мы здесь отметили лишь те работы, которые так или иначе связаны с динамикой открытых оптических систем с точки зрения получения кинетического уравнения для описания квантовых переходов и излучательных эффектов, таких как спонтанное излучение и сверхизлучение. Учет различных условий резонанса наиболее полно и эффективно отражается в концепции эффективного гамильтониана. Сами резонансные эффекты рассмотрены в монографиях [1–11, 13, 25, 52, 84, 87–89].

Перечисленные работы, за исключением работ [52–57], не ставили целью последовательное исключение быстро меняющихся во времени слагаемых в представлении взаимодействия. Именно соблюдение данного требования отвечает, как показано в следующем разделе, локальному подходу теории открытых квантовых систем, поскольку обеспечивает построение модели с эффективным гамильтонианом, в которой будет физически оправдано введение марковского приближения и использование приближения белого шума для моделирования окружающих открытую систему полей. При этом эффективный гамильтониан, вообще говоря, не является диагональным.

3. ТРЕБОВАНИЯ К ЭФФЕКТИВНОМУ ГАМИЛЬТониАНУ В ЛОКАЛЬНОМ ПОДХОДЕ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ХАРАКТЕРНЫМИ ВРЕМЕНАМИ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Оптические системы отличаются принадлежностью характерных частот диапазону 10^{13} – 10^{15} Гц. Этот диапазон обязан лишь процессам внутри элементов оптической системы, таких как атомы, молекулы, квантовые точки, микрорезонаторы, и не связан непосредственно с процессами в окружении квантовой системы. Между тем, чтобы моделировать окружение квантовой системы белым шумом, окружение должно находиться в равновесном состоянии. Ввиду относительной малости открытой системы время корреляции такого термостата определяется физическими процессами в окружении. Если взять размер области окружения порядка $\ell =$

= 1 см, то минимальное время корреляции в окружении можно грубо оценить как (ℓ/c) , т. е. как время порядка 10^{-10} – 10^{-11} с. Таким образом, в оптических квантовых системах существуют характерные времена, которые ничтожно малы (порядка 10^{-13} – 10^{-15} с) и никак не могут рассматриваться как превышающие время корреляции белого шума. Поэтому непосредственный переход к формулировке марковского приближения и использованию белого шума, равнозначный равенству нулю времени корреляции окружения оптической системы, противоречит физике оптической системы. При этом, при оценке времени корреляции в запасе есть еще, как минимум, два порядка.

Чтобы понять, какая иерархия времен необходима для введения приближения белого шума в физической системе, рассмотрим самую простую систему — броуновскую частицу. Воспользуемся представлениями из классической работы Ланжевена [90].

3.1. Уравнение Ланжевена и характерные времена броуновского движения

Для описания воздействия шума на броуновскую частицу в уравнение Ньютона для координаты $x(t)$ броуновской частицы массы m добавим шумовое слагаемое $X(t)$, которое затем и будем аппроксимировать белым шумом:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_{fr} + X(t), \quad F_{fr} = -6\pi\eta a \frac{dx}{dt}.$$

Из решения уравнения Ньютона нетрудно получить

$$\begin{aligned} \langle x(t)X(t) \rangle &= \dot{x}(0)\Gamma^{-1}\langle X(t) \rangle - \dot{x}(0)\Gamma^{-1}\langle e^{-\Gamma t} X(t) \rangle - \\ &- m^{-1}\Gamma^{-1} \int_0^t \langle e^{-\Gamma t} X(t')X(t)e^{\Gamma t'} \rangle dt' + \\ &+ m^{-1}\Gamma^{-1} \int_0^t \langle X(t')X(t) \rangle dt'. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь угловые скобки обозначают усреднение по времени, например,

$$\langle x(t)X(t) \rangle = \frac{1}{\tau_{av}} \int_t^{t+\tau_{av}} x(t')X(t') dt',$$

τ_{av} — масштаб времени усреднения. Параметр $\Gamma = 6\pi\eta a m^{-1}$ (η — коэффициент вязкости, a — размер броуновской частицы) определяет масштаб времени динамики броуновских частиц $\tau_d \approx \Gamma^{-1}$.

Процедура усреднения позволяет говорить о корреляционной функции шума и времени корреляции τ_{av} как характерном масштабе изменения случайной величины $X(t)$. Если

$$\tau_{corr} \ll \tau_{av} \ll \tau_d, \quad (27)$$

то

$$\begin{aligned} \langle x(t)X(t) \rangle &= -m^{-1}\Gamma^{-1} \int_0^t e^{-\Gamma t} \langle X(t')X(t) \rangle e^{\Gamma t'} dt' + \\ &+ m^{-1}\Gamma^{-1} \int_0^t \langle X(t')X(t) \rangle dt'. \end{aligned} \quad (28)$$

Тогда можно дополнительно потребовать выполнение свойства дельта-коррелированности величины $X(t)$,

$$\langle X(t')X(t) \rangle = X_0^2 \delta(t - t'),$$

и получить, что $\langle x(t)X(t) \rangle = 0$. Этот результат был важен для анализа Ланжевена при введении им случайной величины $X(t)$ — он отвечал естественным представлениям о роли шумового слагаемого. Это и потребовал Ланжевен при добавлении слагаемого $X(t)$, и именно это требование наряду с условием (27) привело его к результатам, согласованным с другими исследованиями.

Уравнения (26) и (28) наглядно показывают необходимость условия (27) для наложения на величину требования дельта-коррелированности и получения равенства $\langle x(t)X(t) \rangle = 0$.

3.2. Уравнение для волнового вектора оптической системы и характерные времена

Аналогичный анализ можно провести и для уравнения (21), точнее, для интегрального уравнения

$$\begin{aligned} |\tilde{\Psi}(t)\rangle &= -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \tilde{V}(t') |\tilde{\Psi}(t')\rangle, \\ |\tilde{\Psi}(0)\rangle &= |\Psi(0)\rangle \end{aligned} \quad (29)$$

или уравнения для оператора эволюции $U(t)$

$$U(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \tilde{V}(t') U(t'), \quad (30)$$

$$|\tilde{\Psi}(t)\rangle = U(t)|\Psi(0)\rangle, \quad U(0) = 1,$$

или его формального решения.

В отличие от уравнения Ланжевена шумовое слагаемое в (29) присутствует в операторе $\tilde{V}_{jm}(t')$ и

поэтому с учетом искомым величин шум является мультипликативным, в то время как у Ланжевена — аддитивным. В шумовом слагаемом $\tilde{V}_{jm}(t')$ присутствует быстро меняющийся множитель $\exp(i\Omega_{jm}t)$, в котором масштаб величины Ω_{jm} как раз в оптическом диапазоне составляет 10^{13} – 10^{15} Гц. Множитель $\exp(i\Omega_{jm}t)$ связан с особенностью оптической системы в представлении взаимодействия. Сам оператор может иметь свои временные и так же быстро меняющиеся множители, однако в силу эрмитовости указанные множители не смогут полностью скомпенсировать друг друга и быстрое изменение во времени матричного элемента $\tilde{V}_{jm}(t')$ останется. При этом характерное время изменения вектора состояния порядка τ_d и может быть достаточно велико, поскольку определяется малой интенсивностью взаимодействия, коль скоро речь идет об открытой системе. В результате, основное отличие оптической системы состоит в утверждении, что минимальное характерное время изменения в системе, точнее, изменение оператора взаимодействия $\tilde{V}_{jm}(t')$, будет определяться обратной частотой Ω_{jm}^{-1} .

В случае открытой оптической системы при применении приближения белого шума к описанию взаимодействия должно выполняться условие $\tau_{corr} \ll \ll \Omega_{jm}^{-1}$, с учетом других характерных времен

$$\tau_{corr} \ll \tau_{av} \ll \Omega_{jm}^{-1}, \tau_d.$$

Но в реальной физической ситуации открытой квантовой оптической системы это условие эквивалентно выполнению, очевидно, невозможного неравенства 10^{-10} – $10^{-11} \ll 10^{-13}$ – 10^{-15} . Таким образом, выполнить соотношение типа (27), чтобы быстроменяющиеся множители вынести из знака усреднения и говорить о корреляционной функции характеристик окружения, невозможно. В результате не корректно применять марковское приближение и приближение белого шума (или им эквивалентные [54]) к исходным и как бы точным гамильтонианам открытой системы и ее окружения. Необходимо сначала как-то избавиться от быстроменяющихся переменных — множителей $\exp(\pm i\Omega_{jm}t)$. И лишь потом вводить марковское приближение и представление окружения белым шумом. Избавление от быстроменяющихся множителей $\exp(\pm i\Omega_{jm}t)$ состоит в построении такой модели открытой квантовой системы и ее окружения, гамильтониан которой в представлении взаимодействия не содержит ни одного быстро меняющегося во времени слагаемого. Тогда будет возможно выполнение требования (27). Такая программа для получения кинетического уравнения открытой квантовой системы не ставилась ни

в одной из классических монографий по теории открытых квантовых систем [11, 58–60]. Отметим также, что применение методов усреднения Крылова – Боголюбова – Митропольского в задачах теории открытых квантовых оптических систем, см., например, [52], осуществлялось в уже феноменологически написанных кинетических уравнениях, что в принципе не отвечает представленной программе.

В уравнениях (29), (30) значитесь преобразованный оператор взаимодействия $\tilde{V}(t)$, но такая запись охватывает и исходный оператор взаимодействия, если оператор унитарного преобразования тождествен единичному оператору. С другой стороны, требование отсутствия быстро меняющихся во времени слагаемых в преобразованном операторе взаимодействия $\tilde{V}(t)$ может быть использовано для определения такого оператора преобразования $\hat{T}(t)$, который обеспечит построение эффективного гамильтониана, состоящего только из медленно меняющихся во времени слагаемых в операторе эффективного взаимодействия по сравнению с быстро меняющимися во времени слагаемыми, содержащими экспоненциальный множитель $\exp(\pm i\Omega_{jm}t)$. Такая программа использования унитарного преобразования для построения эффективного гамильтониана начала реализовываться в работах [53–57, 89].

Существование слагаемых, медленно меняющихся во времени в представлении взаимодействия, может иметь место уже в исходном гамильтониане, например, в случае электродипольного взаимодействия двухуровневой квантовой системы с широкополосным электромагнитным окружением. Исходный оператор взаимодействия можно записать в виде

$$V(t) = V^{RW}(t) + V^{a-RW}(t),$$

где

$$V^{RW}(t) = \int d\omega g(\omega) \exp[i(\omega - \Omega_{21})t] |E_1\rangle \langle E_2| + \int d\omega g^*(\omega) \exp[-i(\omega - \Omega_{21})t] |E_2\rangle \langle E_1|, \quad (31)$$

здесь $V^{a-RW}(t)$ — это слагаемые, содержащие экспоненты $\exp[\pm i(\omega + \Omega_{21})t]$, параметр $g(\omega)$ определяется плотностью состояний электромагнитного поля и матричными элементами оператора дипольного момента двухуровневой частиц. Предположено, что квантовые состояния двухуровневой частицы имеют противоположную четность.

Обычно оператор $V^{RW}(t)$ называется оператором взаимодействия в приближении вращающейся волны, а оператор $V^{a-RW}(t)$ или его составляющие

называются антивращающими. Подход к теории открытых квантовых систем, в котором вместо исходного оператора взаимодействия берется оператор $V^{RW}(t)$, называют локальным подходом. Однако с точки зрения быстро и медленноменяющихся слагаемых [52–57, 89], оператор $V^{RW}(t)$ будет состоять из медленноменяющихся слагаемых, только если дополнительно предполагать спектральную область, по которой происходит интегрирование в $V^{RW}(t)$, достаточно узкой, так чтобы ее характерный размер удовлетворял условию

$$|\omega - \Omega_{21}| \ll \Omega_{21}. \quad (32)$$

Этот важный факт часто забывается, и тогда публикуются исследования, в которых обсуждается нарушение второго закона термодинамики для открытых квантовых систем в локальном подходе по сравнению с глобальным подходом (см., например, [91]). Заметим, что термин «вращающаяся волна» («правильно меняющееся во времени слагаемое с $\exp[i(\omega - \Omega_{21})t]$ в матричном элементе $V_{21}^{RW}(t)$), затушевал факт важности учета упомянутой иерархии времен.

Таким образом, говоря о локальном подходе, надо говорить не только о гамильтониане (31) в приближении вращающейся волны, но иметь в виду условие (32). Вне рамок условия (32) слагаемые с $\exp[\pm i(\omega - \Omega_{21})t]$ должны быть отнесены к группе антивращающихся слагаемых $V^{a-RW}(t)$. Тогда локальный подход будет согласовываться с глобальным подходом и будет проще него, поскольку реализация непрерывного унитарного преобразования (9), (12) зачастую весьма громоздкая, а в условиях марковского приближения является и излишней, если только получаемые результаты не окажутся достаточно простыми.

Обсуждая иерархию характерных времен открытой оптической системы, не следует забывать факты, установленные еще в 50-х годах [92, 93]. Марковское приближение приводит к экспоненциальной динамике открытой системы, которая не может быть «вечной». За масштабом времен много больших τ_d наступает царство редких событий.

4. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Формулировка эффективного гамильтониана на основе требования отсутствия быстро меняющихся во времени слагаемых и формул (22)–(25) отличается такое построение от других, основанных на уни-

тарном преобразовании. При переходе к представлению эффективного гамильтониана из представления Шредингера недиагональные матричные элементы $\tilde{H}^{(n)}$ будут содержать быстро меняющиеся во времени множители, типа $\exp[i(\omega - \Omega_{21})t]$, исчезающие при переходе к представлению взаимодействия. Поэтому их условно называют «правильно меняющимися во времени». Указанные представления эффективного гамильтониана эквивалентны друг другу. Отношение эквивалентности устанавливает унитарное преобразование

$$\tilde{V}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}H_0t} \tilde{H} e^{-iH_0t/\hbar}. \quad (33)$$

По контексту и по виду временных экспонент всегда ясно, о каком представлении эффективного гамильтониана идет речь в каждом конкретном случае. Иногда, чтобы подчеркнуть, о чем идет речь, будем говорить о (22) как об эффективном гамильтониане в представлении взаимодействия.

Наряду с непрерывным унитарным преобразованием (9), (12) и диагональным представлением, каждый из других упомянутых представлений квантовой теории, получаемых унитарными преобразованиями — представления Гейзенберга и Дирака, и эффективного гамильтонианов — является «неподвижным» и замкнутым в следующем смысле. Преобразованный гамильтониан \tilde{H} , отвечающий соответствующему представлению, является неподвижной точкой соответствующего преобразования (5), т. е. решением уравнения

$$\tilde{H} = \mathcal{T}(\tilde{H}), \quad \tilde{H}(n+1) = \mathcal{T}(\tilde{H}(n)).$$

Другими словами, \tilde{H} можно рассматривать как результат бесконечной цепочки унитарных преобразований $\tilde{H} = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{H}(n)$. Однако автору не известен содержательный анализ таких неподвижных точек, хотя до сих пор различные условия самосогласования и контроля при построении того или иного гамильтониана являются объектами изучения, см., например, [94].

Говоря о взаимодействиях, важно отметить, что часто взаимодействие между элементами открытой системы является следствием взаимодействия между системой и окружением. Примером здесь служит диполь-дипольное взаимодействие между атомами атомного ансамбля, рассматриваемого как открытая система в электромагнитном широкополосном окружении [95]. Поэтому одна из идей глобального подхода к открытым системам [96, 97] — необходимость диагонализации гамильтониана открытой системы перед ее дальнейшим изучением, во-

обще говоря, в открытых оптических квантовых системах не актуальна. При этом мнение об «ущербности» локального подхода находит опору в ошибочных выводах, подобных представленным в работе [91], где вместо использования алгебраической теории возмущений и анализа характерных времен задачи, приближение вращающейся волны использовано за рамками его применимости. Тем не менее, алгебраическая теория возмущений в локальном подходе достаточно гибка, чтобы учесть и возможное начальное взаимодействие между элементами открытой системы.

4.1. Медленно- и быстроменяющиеся слагаемые

Рассмотрим вариант алгебраической теории возмущений (22)–(25), когда помимо взаимодействия открытой системы с окружением $V_{S-F}(t)$, в самой открытой системе существует взаимодействие между ее элементами $V_S(t)$, так что исходный оператор взаимодействия в представлении взаимодействия имеет вид

$$V(t) = V_{S-F}(t) + V_S(t). \quad (34)$$

Вместо (22), разложение генераторов преобразования во времени $\tilde{V}(t)$ и унитарного преобразования $S(t)$ осуществляется в ряд по двум константам взаимодействий:

$$\begin{aligned} S(t) &= S^{(1,0)}(t) + S^{(0,1)}(t) + S^{(2,0)}(t) + \dots, \\ \tilde{V}(t) &= \tilde{V}^{(1,0)}(t) + \tilde{V}^{(0,1)}(t) + \tilde{V}^{(1,1)}(t) + \\ &\quad + \tilde{V}^{(2,0)}(t) + \tilde{V}^{(0,2)}(t) + \dots \end{aligned} \quad (35)$$

Левый индекс каждой пары верхних индексов описывает порядок слагаемого по константе связи между открытой системой и окружением, а правый индекс — порядок по константе между элементами открытой системы. Реально порядок взаимодействия с полями грубо определяется отношением энергии взаимодействия между полями к энергии кванта осциллятора, а параметров взаимодействия может быть несколько в силу возможности участия нескольких полей и/или различных элементов системы.

С учетом формулы Кемпбелла – Бейкера – Хаусдорфа нетрудно получить

$$\begin{aligned} \tilde{H}^{(1,0)}(t) &= i\hbar \frac{dS^{(1,0)}(t)}{dt} + V_{S-F}(t), \\ \tilde{H}^{(0,1)}(t) &= i\hbar \frac{dS^{(0,1)}(t)}{dt} + V_S(t)\tilde{H}^{(1,1)}(t) = \\ &= i\hbar \frac{dS^{(1,1)}(t)}{dt} - \frac{i}{2} \left[S^{(1,0)}(t), V_S(t) \right] - \\ &\quad - \frac{i}{2} \left[S^{(1,0)}(t), \tilde{H}^{(0,1)}(t) \right] - \\ &\quad - \frac{i}{2} \left[S^{(0,1)}(t), V_{S-F}(t) \right] - \frac{i}{2} \left[S^{(0,1)}(t), \tilde{H}^{(1,0)}(t) \right], \\ \tilde{H}^{(2,0)} &= i\hbar \frac{dS^{(2,0)}(t)}{dt} - \frac{i}{2} \left[S^{(1,0)}(t), V_{S-F}(t) \right] - \\ &\quad - \frac{i}{2} \left[S^{(1,0)}(t), \tilde{H}^{(1,0)}(t) \right], \dots \end{aligned} \quad (36)$$

Требование присутствия только медленно меняющихся во времени слагаемых однозначно определяет (в предположении адиабатического включения полей) величины $S^{(i,j)}$ и накладывает ограничение на спектр мод широкополосных полей, учитываемых в эффективном гамильтониане. Например, с точностью до второго порядка по константам связи имеем

$$\begin{aligned} V^{Eff}(t) &= \tilde{V}^{(1,0)}(t) + \tilde{V}^{(0,1)}(t) + \tilde{V}^{(1,1)}(t) + \\ &\quad + \tilde{V}^{(2,0)}(t) + \tilde{V}^{(0,2)}(t). \end{aligned}$$

Тогда величины $S^{(i,j)}(t)$ вбирают в себя все быстроменяющиеся во времени величины, по сути $S^{(i,j)''}(t)$, так что можно упростить выражения (35), представив их в виде

$$\begin{aligned} \tilde{V}^{(1,0)}(t) &= \tilde{V}'_{S-F}(t), \quad \tilde{V}^{(0,1)}(t) = \tilde{V}'_S(t), \\ \tilde{V}^{(1,1)}(t) &= -\frac{i}{2} \left[S^{(1,0)}(t), V''_S(t) \right]' - \\ &\quad - \frac{i}{2} \left[S^{(0,1)}(t), V''_{S-F}(t) \right]', \\ \tilde{V}^{(2,0)}(t) &= -\frac{i}{2} \left[S^{(1,0)}(t), V''_{S-F}(t) \right]', \\ \tilde{V}^{(0,2)}(t) &= -\frac{i}{2} \left[S^{(0,1)}(t), V''_S(t) \right]', \end{aligned} \quad (37)$$

Одним штрихом обозначено выражение, представленное в виде суммы слагаемых, из которой исключены все слагаемые, содержащие быстроменяющиеся функции времени. Двумя штрихами отмечено выражение, после отбрасывания из его составляющих всех медленноменяющихся слагаемых.

Слагаемые $\tilde{V}^{(1,0)}(t)$ и $\tilde{V}^{(0,1)}(t)$ в случае однофотонных резонансов [54, 89] отвечают приближению вращающейся волны, т.е. эффективный гамильтониан, ограниченный этими слагаемыми,

$$V^{Eff}(t) = \tilde{V}^{(1,0)}(t) + \tilde{V}^{(0,1)}(t) = V^{RW}(t), \quad (38)$$

и есть используемый в многочисленных подходах к теории открытых систем.

Однако, если в качестве эффективного гамильтониана выбрать, например, такой

$$V^{Eff}(t) = \tilde{V}^{(1,0)}(t) + \tilde{V}^{(0,1)}(t) + \tilde{V}^{(1,1)}(t),$$

то он будет описывать новый канал взаимодействия и релаксации открытой системы. Примеры будут рассмотрены далее.

Аналогичным образом можно строить разложения не только по одному или двум параметрам, но и по большему числу констант связи с внешними полями, см., например, [98]. Другой пример рассмотрим ниже.

Современные экспериментальные средства позволяют реализовывать ситуации, когда взаимодействие с оптической системой протекает за времена порядка обратной частоты Ω_{jm}^{-1} квантовой системы. В таком масштабе времен нет смысла говорить о величинах, быстро или медленно меняющихся во времени по сравнению с экспонентами $\exp(\pm i\Omega_{jm}^{-1}t)$. Это имеет место в случаях взаимодействия так называемых предельно коротких импульсов с квантовыми системами [99–102]. Постановка оптической задачи здесь может быть различной [101, 103] в зависимости от величины интенсивности электромагнитного поля предельно короткого импульса. Ряд вопросов также может быть решен с привлечением, как минимум, унитарного преобразования аналогично другим отмеченным случаям.

4.2. Эффективный гамильтониан

Типичной моделью, описывающей взаимодействие внутри открытой системы наряду с взаимодействием с окружением, является модель квантовой частицы, помещенной внутрь микрорезонатора. Частные случаи этой модели чаще всего исследуются как экспериментально, так и теоретически.

В условиях резонансного взаимодействия атомов и микрорезонаторной моды и в отсутствие широкополосных полей — только двухуровневый атом внутри одномодового микрорезонатора — эта модель известна как модель Джейнса–Каммингса [104]. Ансамбль атомов внутри микрорезонатора описывается моделью Тависа–Каммингса [105]. В этих моделях задействованы основные объекты квантовой оптики — квантовый и атомный осцилляторы [106]. Если учесть различные случаи резонанса — однофотонный, двухфотонный, комбинационный, а также потери на зеркалах и взаимодействия атомов с нерезонаторным вакуумным электромагнитным полем,

то исследования здесь представляют значительную часть работ по квантовой оптике (укажем монографию [1–11]). Отметим лишь нетривиальное обобщение модели на случай q -осцилляторов [107, 108], полиномиальных алгебр [14–16, 109] и недавние работы по квантовой термодинамике [111]. Ниже мы рассмотрим более простую модель в отношении взаимодействия атомов и микрорезонаторной моды, но учтем термостатные поля, взаимодействующие отдельно с модой и отдельно с атомами. Такая система описывается тремя константами связи, характеризующими каждый из перечисленных видов взаимодействий.

В задачах взаимодействия квантового или атомного осциллятора с квантованным широкополосным электромагнитным полем обычно используется электродипольное приближение, а оператор напряженности электрического поля в представлении взаимодействия берется в виде

$$\mathbf{E}(t) = \sum_{\mathbf{q}, \lambda} \Gamma_{\omega_{\mathbf{q}}} b_{\mathbf{q}, \lambda} \mathbf{e}_{\mathbf{q}, \lambda} e^{-i\omega_{\mathbf{q}} t} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} + \text{H.c.} \quad (39)$$

Здесь \mathbf{q} — волновой вектор, $\omega_{\mathbf{q}}$ — частота, связанная с волновым вектором дисперсионным соотношением, например $\omega_{\mathbf{q}} = |\mathbf{q}|c$, $\mathbf{e}_{\mathbf{q}, \lambda}$ — единичный вектор поляризации волны, определяемый параметром λ , $b_{\mathbf{q}, \lambda}$ — оператор уничтожения фотона с обычными коммутационными соотношениями $[b_{\mathbf{q}, \lambda}, b_{\mathbf{q}', \lambda'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{q}, \mathbf{q}'} \delta_{\lambda, \lambda'}$, $\Gamma_{\omega_{\mathbf{q}}}$ — геометрический фактор, определяемый средой, например, в обычном пространстве без учета поляризации фотонов

$$\Gamma_{\omega_{\mathbf{q}}} = \sqrt{2\pi\omega_{\mathbf{q}}/V},$$

V — объем квантования. В дальнейшем полагаем $V = 1$.

Среди различных случаев расположения атомов, взаимодействующих с широкополосным полем, выделяется случай локализованного атомного ансамбля. Тогда атомы располагаются в области с размерами, меньшими длины волны излучения, с которым они взаимодействуют. В этом случае можно пренебречь пространственными зависимостями оператора взаимодействия и, достигнув упрощения модели, построить эффективный гамильтониан открытой системы, включающей локализованные ансамбли атомов, с учетом квадратичных по константам связи слагаемых. Перейти к операторам рождения и уничтожения, зависящим только от одномерного параметра, например, частоты, удастся при использовании модели трехмерного поля, в которой операторы рождения и уничтожения усреднены по различным ориентациям волнового вектора \mathbf{q} [110]. Другой

вариант дает одномерная модель квантованного поля.

Пусть ансамбль нерезонансных, невозбужденных, неподвижных одинаковых атомов в количестве N_p штук локализован внутри одномодового микрорезонатора с потерями на зеркалах. Атомы нерезонансно взаимодействуют не только с модой микрорезонатора, но и с вакуумным электромагнитным полем, если предполагать в нем нулевую плотность фотонов. Исходный гамильтониан открытой системы такой:

$$H_S = H_A + H_C + V_S,$$

$$H_A = \sum_{i,j} E_j |E_j\rangle^{(i)} \langle E_j|^{(i)}, \quad H_C = \hbar \Omega_c c_c^\dagger c_c,$$

$$V_S = g_c (c_c^\dagger + c_c) \sum_{i,k,j} d_{kj} |E_k\rangle^{(i)} \langle E_j|^{(i)}$$

и в представлении взаимодействия характеризуется только оператором взаимодействия с константой связи g_c :

$$V_S(t) = g_c (c_c^\dagger e^{i\Omega_c t} + c_c e^{-i\Omega_c t}) \times \sum_{i,k,j} d_{kj} e^{i\Omega_{kj} t} |E_k\rangle^{(i)} \langle E_j|^{(i)}. \quad (40)$$

Открытая система взаимодействует с двумя вакуумными электромагнитными полями окружения: одно из них связано с атомами, другое на зеркале связано с фотонной модой микрорезонатора. Оператор взаимодействия открытой системы с окружением есть сумма операторов, описывающих указанные взаимодействия:

$$V_{S-F}(t) = V_A(t) + V_C(t),$$

$$V_A(t) = \int d\omega \Gamma_A(\omega) (a_\omega^\dagger e^{i\omega t} + a_\omega e^{-i\omega t}) \times \sum_{i,k,j} d_{kj} e^{i\Omega_{kj} t} |E_k\rangle^{(i)} \langle E_j|^{(i)}, \quad (41)$$

$$V_C(t) = (c_c^\dagger e^{i\Omega_c t} + c_c e^{-i\Omega_c t}) \times \int d\omega \Gamma_C(\omega) (b_\omega^\dagger e^{i\omega t} + b_\omega e^{-i\omega t}).$$

Считаем, что атомные уровни характеризуются определенной четностью, так что $\langle E_k | d | E_k \rangle = 0$. Верхний индекс у векторов состояний отмечает пространство состояний i -го атома, а суммирование по i выполняется по всем N_p атомам обсуждаемого ансамбля. Операторы уничтожения и рождения фотонов микрорезонаторной моды с частотой Ω_c даются

величинами c_c и c_c^\dagger : $[c_c, c_c^\dagger] = 1$. Операторы уничтожения и рождения фотонов внешнего широкополосного поля с частотой (волновым вектором) ω даются величинами a_ω, b_ω и $a_\omega^\dagger, b_\omega^\dagger$:

$$[a_\omega, a_{\omega'}^\dagger] = \delta(\omega - \omega'), \quad [b_\omega, b_{\omega'}^\dagger] = \delta(\omega - \omega'),$$

причем все коммутаторы между операторами рождения и уничтожения, относящимися к разным полям, равны нулю. Исходный гамильтониан окружения представляется операторами типа H_F . Эффектами отдачи и поляризационными особенностями пренебрежено.

Представленная модель охватывает характерный и весьма общий пример открытой системы, у которой несколько взаимодействующих между собой подсистем, каждая из которых также взаимодействует с широкополосным окружением. Причем подсистемы могут быть разными, например, квантовый и атомный осцилляторы [112–114], а могут быть одинаковыми, например, микрорезонаторы [115–117]. Подсистемы также можно рассматривать как новый объект — например, атомно-фотонный кластер [14, 118]. Термостаты можно рассматривать как взаимно-коррелированные [119] или общие [87, 88, 110, 114, 120–127].

Обсудим случай, который ранее не обсуждался, но который обобщает исследованную в [114] ситуацию на случай потерь в микрорезонаторе на зеркалах. Внутрирезонаторные атомы являются невозбужденными, их взаимодействие с микрорезонаторной модой является нерезонансным, а термостаты независимы друг от друга и характеризуются нулевой температурой. О термостате, взаимодействующем с атомами, говорим как о термостате, а о термостате для атомов, взаимодействующем с модой микрорезонатора на его зеркале, говорим как о термостате для микрорезонатора. Гамильтониан системы (40), (41) преобразуется согласно формулам (13) и (14), однако разложение в ряд гамильтониана и генератора преобразования дается выражениями, учитывающими наличие трех различных взаимодействий в открытой системе и ее окружения:

$$S(t) = S^{(1,0,0)}(t) + S^{(0,1,0)}(t) + S^{(0,0,1)}(t) + S^{(2,0,0)}(t) + \dots,$$

$$\tilde{V}(t) = \tilde{V}(t)^{(1,0,0)} + \tilde{V}(t)^{(0,1,0)} + \tilde{V}(t)^{(0,0,1)} + \tilde{V}(t)^{(2,0,0)} + \dots$$

Левый индекс каждой тройки верхних индексов описывает порядок слагаемого по константе связи между атомным и квантовым осцилляторами, а

оставшаяся пара индексов — порядок по константе связи подсистем с окружением — сначала атомного осциллятора, затем (самый правый индекс) — квантового осциллятора. Формулы (37) позволяют получить слагаемые эффективного гамильтониана вплоть до второго порядка по константам взаимодействия включительно. Рассмотрим слагаемые, определяющие эффективный гамильтониан и генератор преобразования, в различных низших порядках.

Первый порядок. В первом порядке по константам связи атомов с квантовым осциллятором и с атомным термостатом слагаемые эффективного гамильтониана равны нулю, поскольку (в силу нерезонансности взаимодействия и отсутствия фотонов) все слагаемые в формулах (40) и (41) быстро осциллируют. При этом в термостате при нулевой температуре нет фотонов, так что нет и причин для квантовых переходов в атоме:

$$\tilde{H}^{(1,0,0)}(t) = \tilde{H}^{(0,1,0)}(t) = 0,$$

$$S^{(1,0,0)}(t) = i\hbar^{-1} \sum_{i,kj} d_{kj} |E_k\rangle^{(i)} \langle E_j|^{(i)} \times \\ \times g_c \left(c_c^\dagger \frac{e^{i(\Omega_c + \Omega_{kj})t}}{\Omega_{kj} + \Omega_c} + c_c \frac{e^{-i(\Omega_c - \Omega_{kj})t}}{\Omega_{kj} - \Omega_c} \right),$$

$$S^{(0,1,0)}(t) = i\hbar^{-1} \int d\omega \Gamma_A(\omega) \sum_{i,kj} d_{kj} |E_k\rangle^{(i)} \times \\ \times \langle E_j|^{(i)} \left(a_\omega^\dagger \frac{e^{i(\omega + \Omega_{kj})t}}{\Omega_{kj} + \omega} + a_\omega \frac{e^{-i(\omega - \Omega_{kj})t}}{\Omega_{kj} - \omega} \right).$$

В первом порядке по константе связи фотонов микрорезонатора и термостата фотоны микрорезонаторной моды на зеркале резонансно взаимодействуют с вакуумным полем, что описывается выражениями, определяющими здесь приближение вращающейся волны

$$\tilde{H}^{(0,0,1)}(t) = \int_{\omega \in (\bar{\omega}_c)} d\omega \Gamma_C(\omega) \times \\ \times \left(c_c b_\omega^\dagger e^{-i(\Omega_c - \omega)t} + c_c^\dagger b_\omega e^{i(\Omega_c - \omega)t} \right), \\ S^{(0,0,1)}(t) = \int_{\omega \notin (-\bar{\omega}_c)} d\omega \Gamma_C(\omega) \frac{r b_\omega e^{-i(\omega + \Omega_c)t}}{i\hbar(\omega + \Omega_c)} + \\ + \int_{\omega \notin (\bar{\omega}_c)} d\omega \Gamma_C(\omega) \frac{r^\dagger b_\omega e^{-i(\omega - \Omega_c)t}}{i\hbar(\omega - \Omega_c)}. \quad (42)$$

Здесь предположено, что, $a_{-\omega} = a_\omega^\dagger, \omega > 0, b_{-\omega} = b_\omega^\dagger, \omega > 0$. Тогда операторы (41) можно переписать как

$$V_A(t) = \sum_{i,kj} d_{kj} e^{i\Omega_{kj}t} |E_k\rangle^{(i)} \langle E_j|^{(i)} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \Gamma_A(\omega) a_\omega e^{-i\omega t}, \\ V_C(t) = (c_c^\dagger e^{i\Omega_c t} + c_c e^{-i\Omega_c t}) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \Gamma_C(\omega) b_\omega e^{-i\omega t}.$$

а оператор $S^{(0,1,0)}(t)$ как

$$S^{(0,1,0)}(t) = i\hbar^{-1} \sum_{i,kj} d_{kj} |E_k\rangle^{(i)} \langle E_j|^{(i)} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \Gamma_A(\omega) a_\omega \frac{e^{-i(\omega - \Omega_{kj})t}}{\Omega_{kj} - \omega}.$$

Важным отличием от приближения вращающейся волны является явное указание области интегрирования — в $\tilde{H}^{(0,0,1)}(t)$ это область частот термостата для микрорезонатора ($\bar{\omega}_c$) с центральной частотой $\bar{\omega}_c$ и шириной порядка обратной величины скорости затухания микрорезонаторной моды за счет потерь на зеркале. Эту величину определим в результате дальнейших вычислений. Аналогично определяется и ширина области ($-\bar{\omega}_c$) вблизи центральной частоты $-\bar{\omega}_c$. В величине $S^{(0,1,0)}(t)$ в силу отсутствия какого-либо резонанса во взаимодействии невозбужденного атома с термостатом областью интегрирования является вся вещественная прямая.

Второй порядок. По формулам (37), обобщенным на рассматриваемый случай, находим слагаемые эффективного гамильтониана во втором порядке по константам взаимодействия. Операторы $\tilde{H}^{(2,0,0)}(t), \tilde{H}^{(0,2,0)}(t)$ и $\tilde{H}^{(0,0,2)}(t)$ имеют слагаемые, описывающие три различных процесса.

Первый из них — сдвиг энергии квантового уровня, который по аналогии со сдвигом атомных уровней в вакуумном электромагнитном поле принято называть лэмбовским сдвигом [128]. Эти слагаемые обозначим соответственно $H_C^{Lamb}, H_A^{Lamb}, H_{CA}^{Lamb}$:

$$H_C^{Lamb} = -(c^\dagger c + 1) \int_{\omega \notin (-\bar{\omega}_c)} d\omega \frac{\Gamma_C^2(\omega)}{\hbar(\omega + \Omega_c)}, \\ H_A^{Lamb} = -\hbar^{-1} \int d\omega \sum_{i,kj} \frac{\Gamma_A^2(\omega) d_{kj} d_{jk}}{\omega - \Omega_{jk}} |E_k\rangle^{(i)} \langle E_k|^{(i)}, \\ H_{CA}^{Lamb} = -\hbar^{-1} \sum_{kj} \frac{g_c^2 d_{kj} d_{jk}}{\Omega_c - \Omega_{jk}} \sum_i |E_k\rangle^{(i)} \langle E_k|^{(i)}.$$

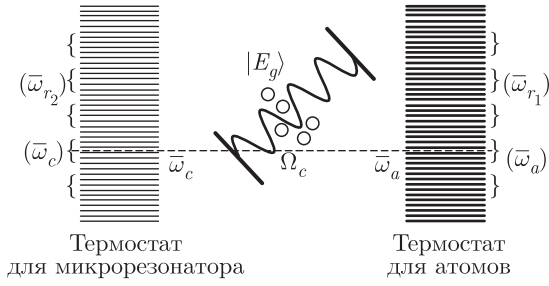


Рис. 2. Условное изображение разбиения спектра полей окружения открытой системы

Второй класс процессов — процессы штарковского взаимодействия между подсистемами и внешними полями $H^{Stark(r)}$ и между самими подсистемами H_{CA}^{Stark} :

$$\begin{aligned}
 H^{Stark(c)} &= \\
 &= - \int_{\omega \in (\bar{\omega}_c)} \int_{\omega' \in (\bar{\omega}_c)} d\omega d\omega' \Gamma_C(\omega) \Gamma_C(\omega') \times \\
 &\times \left(\frac{1}{2\hbar(\omega + \Omega_c)} + \frac{1}{2\hbar(\omega' + \Omega_c)} \right) b^\dagger_\omega b_{\omega'} e^{i(\omega - \omega')t}, \\
 H^{Stark(a)} &= - \int_{\omega \in (\bar{\omega}_c)} \int_{\omega' \in (\bar{\omega}_c)} d\omega d\omega' \Gamma_A(\omega) \times \\
 &\times \Gamma_A(\omega') a^\dagger_\omega a_{\omega'} e^{i(\omega - \omega')t} \times \\
 &\times \sum_{ik} \frac{1}{2} (\Pi_k(\omega) + \Pi_k(\omega')) \sum_i |E_k\rangle^{(i)} \langle E_j|^{(i)}, \\
 H_{CA}^{Stark} &= g_c^2 c^\dagger c \sum_k \Pi_k(\omega_c) \sum_i |E_k\rangle^{(i)} \langle E_j|^{(i)}.
 \end{aligned} \tag{43}$$

Процессы второго порядка в оптике с участием атомов характеризуются параметрами [53, 54, 89]:

$$\Pi_k(\omega) = \sum_j \frac{|d_{kj}|^2}{\hbar} \left(\frac{1}{\Omega_{kj} + \omega} + \frac{1}{\Omega_{kj} - \omega} \right).$$

Выражения для $H^{Stark(r)}$ при $r \neq a, c$ получаются из $H^{Stark(a)}$ или $H^{Stark(c)}$ заменой областей интегрирования на $(\bar{\omega}_r)$. В дальнейшем увидим, что в динамику открытой системы вклад $H^{Stark(r)}$ при $r \neq a, c$ будет нулевым.

Область положительных частот спектра широкополосных полей разбита на непересекающиеся области $(\bar{\omega}_r)$ с центральными частотами $\bar{\omega}_r$ и ширинами, позволяющими соответствующие операторы штарковского взаимодействия считать медленноменяющимися функциями времени (рис. 2). Область $(\bar{\omega}_r)$ при $r = c$ выделена среди них характерной частотой открытой системы — частотой Ω_c и отсутствием

каких-либо резонансных процессов, кроме резонансной связи квантового осциллятора со своим термостатом. Поскольку верхний индекс «(r)» у операторов штарковского взаимодействия перенумеровывается единым образом указанные области в различных термостатах, удобно считать, чтобы для $H^{Stark(c)}(t)$, $r = c$ указанная область именовалась как $(\bar{\omega}_c)$, а для $H^{Stark(a)}(t)$, $r = a$ — как $(\bar{\omega}_a)$, хотя $\bar{\omega}_a = \bar{\omega}_c = \Omega_c$.

Взаимосвязь между операторами штарковского взаимодействия и штарковским сдвигом энергии квантового уровня в классическом электромагнитном поле рассмотрена в работе [122].

Третий класс процессов второго порядка — взаимодействие атомов, сопровождающееся обменом возбуждений, которое при увеличении расстояния между атомами переходит в обычное диполь-дипольное взаимодействие.

Формулы (37) с учетом особенностей системы с тремя константами связи позволяют также определить слагаемое $\tilde{H}^{(1,1,0)}(t)$. Это слагаемое демонстрирует новый — интерференционный — канал релаксации фотонов микрорезонаторной моды:

$$\begin{aligned}
 \tilde{H}^{(1,1,0)}(t) &= \int_{\omega \in (\bar{\omega}_c)} d\omega \Gamma_A(\omega) a_\omega e^{-i\omega t} \times \\
 &\times \sum_k g_c c^\dagger e^{i\Omega_c t} \frac{1}{2} (\Pi_k(\Omega_c) + \Pi_k(\omega)) \sum_i |E_k\rangle^{(i)} \langle E_k|^{(i)} + \\
 &+ \int_{\omega \in (\bar{\omega}_c)} d\omega \Gamma_A(\omega) a^\dagger_\omega e^{i\omega t} \sum_k g_c c e^{-i\Omega_c t} \times \\
 &\times \frac{1}{2} (\Pi_k(\Omega_c) + \Pi_k(\omega)) \sum_i |E_k\rangle^{(i)} \langle E_k|^{(i)}. \tag{45}
 \end{aligned}$$

Благодаря слагаемому $\tilde{H}^{(1,1,0)}(t)$ операторы рождения и уничтожения фотонов микрорезонаторной моды оказываются связанными с термостатом для атомов, причем резонансным образом. В этом отношении оператор $\tilde{H}^{(1,1,0)}(t)$ аналогичен $\tilde{H}^{(0,0,1)}(t)$, описывающему резонансную связь микрорезонаторных фотонов со своим термостатом. Существенно различаются только величины указанных процессов. Таким образом, даже если зеркала микрорезонатора идеальны, но внутри присутствуют нерезонансные атомы, связанные с термостатом для атомов, фотоны микрорезонаторной моды будут покидать микрорезонатор. Это и есть интерференционный канал релаксации фотонов микрорезонатора.

Интерференционный канал релаксации — достаточно общий класс каналов связи подсистем открытой системы с окружением, который естественно возникает и легко описывается алгебраической тео-

рией возмущений [98]. Такой канал релаксации для подсистемы открытой системы, состоящей из двух нерезонансно связанных квантовых осцилляторов, исследован в работах [115–117].

Третий порядок по константам связи рассматривать не будем. Отметим лишь, что слагаемое $\tilde{H}^{(1,1,1)}(t)$ описывает поток энергии из одного термостата в другой, который на примере других задач обсуждался в работах [129].

Эффективный гамильтониан рассматриваемой открытой системы с точностью до второго порядка включительно можно рассматривать в виде

$$V^{Eff}(t) = H^{Tr}(t) + H^{Stark}(t). \quad (46)$$

Здесь слагаемые представлены по их главному признаку — осуществляется квантовый переход в системе с реальным изменением энергетического квантового состояния или нет. В последнем случае есть только виртуальные переходы, формирующие штарковское взаимодействие:

$$\begin{aligned} H^{Tr}(t) &= \sum_{r=a,c} H^{Tr(r)}(t), \\ H^{Stark}(t) &= \sum_{r=a,c,\dots} H^{Stark(r)}(t). \end{aligned} \quad (47)$$

Остальные полученные слагаемые второго порядка по константам связи можно либо включить в перенормированные энергии квантовых уровней, либо пренебречь, поскольку их роль по сравнению с представленными в (46) мала. Как увидим ниже, операторы штарковских взаимодействий $H^{Stark(r)}(t)$ имеют своеобразную алгебраическую структуру, которая позволяет им играть роль в ансамблях одинаковых атомов или квантовых осцилляторов из достаточно большого числа частиц при условии, что фотоны спектральной области ($\bar{\omega}_r$) участвуют также в реальных квантовых переходах открытой системы. Ниже покажем, что все слагаемые (46) и (47) можно представить в марковском приближении в виде, который является общим для самых разнообразных моделей квантовой оптики.

В результате такого преобразования получаем стандартное уравнение Шредингера для волновой вектора состояния $|\Psi(t)\rangle = U(t)|\Psi(0)\rangle$ и оператора эволюции $U(t)$ всей системы в представлении взаимодействия (знаки тильда будем опускать). Уравнения для оператора эволюции и его формального решения имеют вид

$$i\hbar \frac{dU(t)}{dt} = V^{Eff}(t)U(t), \quad U(0) = 1, \quad (48)$$

$$\begin{aligned} U(t) &= I + \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \int_0^t V^{Eff}(t') dt' + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \times \\ &\times \int_0^t \int_0^{t'} V^{Eff}(t') V^{Eff}(t'') dt' dt'' + \dots = \\ &= \overleftarrow{T} \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t V^{Eff}(t') dt' \right) \end{aligned} \quad (49)$$

с эффективным гамильтонианом (46), (47). Здесь I — единичный оператор.

Подчеркнем, что переход к представлению эффективного гамильтониана, в котором записано уравнение (48), дал систематический путь к представлению внешних широкополосных квантованных электромагнитных полей (термостата для атомов и термостата для микрорезонатора) в виде совокупности независимых квантовых шумовых источников (с центральными частотами ($\bar{\omega}_r$)). При этом шумовые источники, которые стали обозначаться как ($\bar{\omega}_a$) и ($\bar{\omega}_c$), являются выделенными для рассматриваемой модели. Их приоритетная роль, как покажем в дальнейшем, обусловлена резонансным взаимодействием квантового осциллятора со своим термостатом и с термостатом для атомов, что описано слагаемыми в эффективном гамильтониане

$$\tilde{H}^{(0,0,1)}(t) = H^{Tr(c)}(t) \quad \text{и} \quad \tilde{H}^{(1,1,0)}(t) = H^{Tr(a)}(t).$$

Если учитывать возможность каких-либо других резонансных квантовых переходов с изменением энергии в открытой системе или ее подсистемах, например, в атоме, то появятся новые выделенные шумовые источники [57, 98, 129, 130]. Это важное следствие предложенного определения эффективного гамильтониана на основе отбора медленно меняющихся во времени слагаемых. Оно дает строгое обоснование предложения Лакса [131] о разбиении вакуумных полей на совокупность независимых шумовых источников. Появление шумовых источников здесь — следствие многомодовости выделенных спектральных областей ($\bar{\omega}_c$) в рассматриваемых термостатах. В условиях марковского приближения возникает представление о квантовых случайных процессах, моделирующих взаимодействие открытой системы с термостатом.

5. КВАНТОВОЕ СТОХАСТИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Стандартное предположение теории открытых систем — марковское приближение — сформулируем в следующем виде [11].

1. Начальное состояние открытой системы и ее окружения. Считаем, что начальный вектор состояния всей системы $|\Psi(0)\rangle$ факторизован:

$$|\Psi(0)\rangle = |\Psi_{AC}(0)\rangle \otimes |\Psi_{FA}(0)\rangle \otimes |\Psi_{FC}(0)\rangle,$$

где $|\Psi_{AC}(0)\rangle$ — начальный вектор состояния атомов и фотонов микрорезонатора, $|\Psi_{FA}(0)\rangle$ и $|\Psi_{FC}(0)\rangle$ — начальные векторы термостата для атомов и микрорезонатора, причем

$$\langle \Psi_{FA}(0) | a(\omega) a^\dagger(\omega') | \Psi_{FA}(0) \rangle = \delta(\omega - \omega'),$$

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{FA}(0) | a^\dagger(\omega) a(\omega') | \Psi_{FA}(0) \rangle &= \\ &= \langle \Psi_{FA}(0) | a(\omega) | \Psi_{FA}(0) \rangle = 0, \end{aligned}$$

$$\langle \Psi_{FC}(0) | b(\omega) b^\dagger(\omega') | \Psi_{FC}(0) \rangle = \delta(\omega - \omega'),$$

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{FC}(0) | b^\dagger(\omega) b(\omega') | \Psi_{FC}(0) \rangle &= \\ &= \langle \Psi_{FC}(0) | b(\omega) | \Psi_{FC}(0) \rangle = 0. \end{aligned}$$

2. Взаимодействие с шумовыми источниками. Считаем, что параметры связи с шумовыми источниками $\Gamma_A(\omega)$, $\Gamma_C(\omega)$ и $\Pi_k(\omega)$ являются медленноменяющимися функциями частот в области $(\bar{\omega}_c)$ и могут быть заменены постоянными величинами, определяемыми центральными частотами введенных независимых шумовых источников, а именно

$$\Gamma_A(\omega) = \Gamma_A(\bar{\omega}_a) = \text{const}, \quad \Gamma_C(\omega) = \Gamma_C(\bar{\omega}_c) = \text{const},$$

$$\Pi_k(\omega) = \Pi_k(\Omega_c) = \text{const}, \quad \frac{1}{\omega + \Omega_c} \approx \frac{1}{2\Omega_c}.$$

3. Пределы интегрирования в интегралах, определяющих слагаемые эффективного гамильтониана. Считаем, что на подсистемы открытой системы широкополосные независимые источники эффективно воздействуют составляющими вблизи их центральных частот, так что пределы интегрирования в упомянутых интегралах можно распространить от $-\infty$ до ∞ .

Введем следующие безразмерные величины:

$$\tau = \Omega_c t, \quad \nu = \omega / \Omega_c, \quad b_{a\nu} = \sqrt{\Omega_c} a_\omega, \quad b_{c\nu} = \sqrt{\Omega_c} b_\omega$$

и запишем уравнение (47) в виде

$$\begin{aligned} dU(\tau) &= -i \sum_{r=a,c} Y_r \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \\ &\times \int_{\nu \in (1)} b_{r\nu}^\dagger e^{i(\nu-1)\tau} d\nu U(\tau) d\tau - \\ &- i \sum_{r=a,c} Y_r^\dagger \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\nu \in (1)} b_{r\nu} e^{-i(\nu-1)\tau} d\nu U(\tau) d\tau - \\ &- i \sum_{r=a,c} Y_{\Lambda r} \frac{1}{2\pi} \int_{\nu \in (1)} \int_{\nu' \in (1)} b_{r\nu}^\dagger b_{r\nu'} e^{i(\nu-\nu')\tau} d\nu d\nu' U(\tau) d\tau - \\ &- i \sum_{r \neq a,c} Y_{\Lambda r} \frac{1}{2\pi} \int_{\nu \in (\frac{\bar{\omega}_r}{\Omega_c})} \int_{\nu' \in (\frac{\bar{\omega}_r}{\Omega_c})} b_{r\nu}^\dagger b_{r\nu'} e^{i(\nu-\nu')\tau} \times \\ &\times d\nu d\nu' U(\tau) d\tau. \quad (50) \end{aligned}$$

Введены следующие величины:

$$Y_c = \sqrt{2\pi} \Gamma_C(\Omega_c) \Omega_c^{-1/2} \hbar^{-1} c_c,$$

$$\begin{aligned} Y_a &= \sqrt{2\pi} g_c \Gamma_A(\Omega_c) \Omega_c^{-1/2} \hbar^{-1} \sum_k \Pi_k(\Omega_c) \times \\ &\times \sum_i |E_k\rangle^{(i)} \langle E_k|^{(i)}, \end{aligned}$$

$$Y_{\Lambda c} = -\pi \Gamma_C^2(\Omega_c) \hbar^{-2} \Omega_c^{-1},$$

$$Y_{\Lambda a} = 2\pi \Gamma_A^2(\Omega_c) \hbar^{-1} \sum_k \Pi_k(\Omega_c) \sum_i |E_k\rangle^{(i)} \langle E_k|^{(i)}.$$

При $r \neq a, c$

$$Y_{\Lambda r} = -2\pi \Gamma_C^2(\bar{\omega}_r) \Omega_c \frac{1}{\hbar^2 (\bar{\omega}_r + \Omega_c)},$$

либо

$$Y_{\Lambda r} = 2\pi \Gamma_A^2(\bar{\omega}_r) \sum_k \Pi_k(\bar{\omega}_r) \sum_i |E_k\rangle^{(i)} \langle E_k|^{(i)}.$$

В силу условий рассматриваемой модели и неизменности заселения атомами нижнего энергетического уровня $|E_k\rangle$, операторы Y_a , $Y_{\Lambda a}$ и величины $Y_{\Lambda r}$, связанные с термостатом для атомов, $r \neq a, c$, можно отождествить со следующими:

$$Y_a = \sqrt{2\pi} g_c \Gamma_A(\Omega_c) \Omega_c^{-1/2} \hbar^{-1} \Pi_g(\Omega_c) N_p,$$

$$Y_{\Lambda a} = 2\pi \Gamma_A^2(\Omega_c) \hbar^{-1} \Pi_g(\Omega_c) N_p,$$

$$Y_{\Lambda r} = 2\pi \Gamma_A^2(\bar{\omega}_r) \hbar^{-1} \Pi_g(\bar{\omega}_r) N_p.$$

Если в интегралах

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\nu \in (1)} b_{r\nu} e^{-i(\nu-1)\tau} d\nu, \quad r = a, c$$

пределы интегрирования распространить на всю числовую прямую и рассмотреть

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} b_{r\nu} e^{-i\nu\tau} d\nu,$$

в котором $b_{r,-\nu}$ является также оператором уничтожения, то уравнение (50) станет математически неопределенным — его интегральное решение (типа (49)) будет зависеть от выбора точки на подынтервалах разбиения промежутка интегрирования [11, 12]. Но интеграл

$$\int_0^{\tau} d\tau' \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} b_{r\nu} e^{-i\nu\tau'} d\nu,$$

как и интегральное решение (50), могут быть определены в смысле Ито [11, 132–134]. Удобно ввести квантовые процессы $B_r(\tau)$, $B_r^+(\tau)$ и $\Lambda_r(\tau)$:

$$\begin{aligned} b_r(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \exp(-i\nu\tau) b_{r\nu}, \\ B_r(\tau) &= \int_0^{\tau} d\tau' b_r(\tau'), \quad B_r^+(\tau) = \\ &= \int_0^{\tau} d\tau' b_r^\dagger(\tau'), \quad \Lambda_r(\tau) = \int_0^{\tau} d\tau' b_r^\dagger(\tau') b_r(\tau'). \end{aligned} \tag{51}$$

Их дифференциалы Ито,

$$\begin{aligned} dB_r(\tau) &= B_r(\tau + d\tau) - B_r(\tau), \\ dB_r^+(\tau) &= B_r^+(\tau + d\tau) - B_r^+(\tau), \\ d\Lambda_r(\tau) &= \Lambda_r(\tau + d\tau) - \Lambda_r(\tau), \end{aligned} \tag{52}$$

удовлетворяют алгебре Хадсона – Паргасарати [134]

$$\begin{aligned} d\Lambda_r(\tau) d\Lambda_m(\tau) &= d\Lambda_r(\tau) \delta_{rm}, \\ d\Lambda_r(\tau) dB_m^+(\tau) &= dB_m^+(\tau) \delta_{rm}, \\ dB_r(\tau) d\Lambda_m(\tau) &= dB_r(\tau) \delta_{rm}, \\ dB_r(\tau) dB_m^+(\tau) &= d\tau \delta_{rm}, \\ d\Lambda_r(\tau) dB_m(\tau) &= d\Lambda_r(\tau) d\tau = \\ &= dB_r^+(\tau) d\Lambda_m(\tau) = dB_r(\tau) dB_m(\tau) = \\ &= dB_r^+(\tau) d\tau = dB_r(\tau) d\tau = d\tau d\tau = 0. \end{aligned} \tag{53}$$

Кроме того, средние величины указанных дифференциалов Ито равны нулю.

В случае шумовых источников разных частот в работе [115] использована сложная система приведения к безразмерному виду для записи алгебры (53).

Перепишем уравнение (50) для оператора эволюции, поскольку в сделанных выше стандартных предположениях уравнение (50) является математически неопределенным [11]. Определим $dU(\tau) = U(\tau + d\tau) - U(\tau)$, используя безразмерный вариант интегрального представления (49) [98, 122, 123]

$$dU(\tau) = \left[\exp(-iV^{Eff}(\tau)d\tau) - 1 \right] U(\tau), \tag{54}$$

в котором

$$\begin{aligned} V^{Eff}(\tau)d\tau &= H^{Eff-S}(\tau)d\tau + \\ &+ \sum_{r=a,c} \left[Y_r^+ dB_r(\tau) + Y_r dB_r^+(\tau) \right] + \\ &+ \sum_{r=a,c,\dots} Y_{\Lambda_r} d\Lambda_r(\tau). \end{aligned} \tag{55}$$

Дифференциалы Ито (52) определяют в выражении $V^{Eff}(\tau)$ операторы взаимодействия открытой системы с окружением. Они придают корректный математический статус выражениям типа

$$Y_r \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} b_{r\nu} e^{-i(\nu-1)\tau} d\nu U(\tau) d\tau.$$

Подобная замена в уравнении (50) не точна и должна быть проведена в уравнении (54), поскольку в квантовом стохастическом исчислении первоначально определяются квантовые стохастические интегралы. Слагаемые, не содержащие дифференциалы Ито $dB_r(\tau)$, $dB_r^+(\tau)$ и $d\Lambda_r(\tau)$ квантовых случайных процессов, относим к эффективному гамильтониану системы $H^{Eff-S}(\tau)d\tau$. Такое представление использовано в (55). Величины $B_r^+(\tau)$, $B_r(\tau)$ и $\Lambda_r(\tau)$ называют соответственно рождающим, уничтожающим и считывающим процессами, но часто их жаргонно называют винеровскими и пуассоновским процессами [11], порождаемыми r -м шумовым источником, хотя строгое определение квантовых винеровского и пуассоновского процессов несколько иное [133–136]. В рассматриваемой модели после исключения лэмбовских сдвигов и оператора H_{CA}^{Stark} будем иметь $H^{Eff-S} = 0$. Однако это слагаемые мы сохраним в последующих формулах, поскольку полученные результаты являются весьма общими.

Из уравнений (54) и (55) с учетом (53) получается квантовое стохастическое дифференциальное уравнение (КСДУ)

$$\begin{aligned}
 dU(\tau) = & -iH^{Eff-S}(\tau) d\tau U(\tau) + \\
 & + \sum_{r=a,c} \left[Y_r^+ \frac{Y_{\Lambda r}^e + iY_{\Lambda r}}{(Y_{\Lambda r})^2} Y_r d\tau + Y_r^+ \frac{Y_{\Lambda r}^e}{Y_{\Lambda r}} dB_r(\tau) + \right. \\
 & \left. + \frac{Y_{\Lambda r}^e}{Y_{\Lambda r}} Y_r dB_r^+(\tau) + Y_{\Lambda r}^e d\Lambda_r(\tau) \right] U(\tau) + \\
 & + \sum_{r \neq a,c,\dots} Y_{\Lambda r}^e d\Lambda_r(\tau) U(\tau). \quad (56)
 \end{aligned}$$

Здесь $Y_{\Lambda r}^e = e^{-iY_{\Lambda r}} - 1$.

Полученное КСДУ (56) управляется как винеровскими, так и считывающими процессами. Еще в работах [132–134, 136] показано, что рождающий и уничтожающий процессы, а также считывающий квантовый процесс играют фундаментальную роль в случае участия в квантовых процессах широкополосных бозонных полей. Первые два (винеровские процессы) в традиционных задачах ассоциируются с операторами рождения и уничтожения квантов и уже достаточно широко вошли в аппарат квантовой оптики [11]. КСДУ, содержащие только винеровские процессы, назовем винеровскими КСДУ. Считывающий процесс и его роль в процессах измерения и фоторегистрации обсуждались в работах [68, 137]. Также были проведены исследования по проявлению квантового считывающего процесса в столкновительных моделях квантовых частиц [138]. Что касается электромагнитных взаимодействий, то с обычной точки зрения квантовые считывающие процессы могли бы проявиться только во втором порядке теории возмущений, и, возможно, поэтому изначально отвергалась какая-либо роль подобных слагаемых второго порядка в оптических электромагнитных процессах, в частности, в основном управляющем кинетическом уравнении [58]. Хотя общий вид кинетического уравнения при участии всех трех квантовых случайных процессов получен в 1991 г. [136], до работ [122, 123] не был ясен физический механизм, лежащий в основе проявления квантового считывающего процесса в электромагнитных взаимодействиях.

В работах [122, 123] было показано, что квантовый считывающий процесс, во-первых, определяет штарковское взаимодействие атомов с квантованным вакуумным широкополосным электромагнитным полем, и, во-вторых, несмотря на малость второго порядка по константе взаимодействия, играет равноправную роль с рождающим и уничтожающими процессами первого порядка в ансамблях одинаковых квантовых частиц при достаточном числе частиц ансамбля (порядка сотни). Здесь проявляется замечательное считывающее свойство, об-

наруженное Хадсоном и Паргасарати, характерное для квантовых случайных процессов. Считывающее свойство, как показано в работах [110, 114, 122–126], определяет новые эффекты — подавление коллективной релаксации атомного ансамбля, релаксационный сдвиг частоты и замораживание состояния системы в условиях, когда число атомов определяется определенным критическим значением. КСДУ, в которых существенна роль считывающего квантового процесса, называем невинеровскими КСДУ.

В случае одинаковых квантовых осцилляторов штарковское взаимодействие представлено в работе [126] квантовым считывающим процессом.

Невинеровские операторные множители в (56),

$$Y_{\Lambda r}^e, \frac{Y_{\Lambda r}^e}{Y_{\Lambda r}}, \frac{Y_{\Lambda r}^e + iY_{\Lambda r}}{(Y_{\Lambda r})^2}, \quad (57)$$

отличают КСДУ невинеровского типа от винеровского КСДУ.

Характерная структура выражения (56) позволяет описывать КСДУ для оператора эволюции для эффективных гамильтонианов широкого круга открытых систем в широкополосном окружении бозонного типа. В таком общем случае сумма по нижнему индексу r подразумевает суммирование по всем независимым шумовым источникам, введенным в рассмотрение представлением эффективно-го гамильтониана, причем все произведения любых двух дифференциалов винеровских или пуассоновских процессов для разных шумовых источников равны нулю. Через Y_r обозначены операторы, характеризующие открытую квантовую систему в процессах перехода с участием r -го шумового источника и определяемые слагаемым $H^{Tr(r)}(t)$. Эти операторы пропорциональны (линейны и билинейны) параметрам связи как с широкополосными внешними полями, так и с другими полями задачи. Через $Y_{\Lambda r}$ обозначены операторы, характеризующие подсистемы открытой квантовой системы в процессах второго порядка с участием r -го шумового источника и определяемые слагаемым $H^{Stark(r)}(t)$. Представление эффективного гамильтониана (55) квантовыми стационарными процессами (51) служит основой для дальнейшего получения КСДУ для оператора эволюции и кинетического уравнения для открытой системы.

Заметим, что в (56) присутствуют дифференциалы считывающих процессов некоторых источников, а при этом взаимодействие открытой системы с термостатом не зависит от дифференциалов винеровского процесса этих же источников. Такие считывающие процессы и сами источники, как показывают

результаты вывода кинетического уравнения, могут в дальнейшем не учитываться в описании динамики открытой квантовой системы [122]. Поэтому в работах [110, 114, 123–126] они сразу опускались.

Уравнение (56) для конкретного вида операторов охватывают известные случаи [114, 123–126] взаимодействия локализованных открытых систем с термостатами при нулевой плотности фотонов. Для термостатов при ненулевой температуре КСДУ корректно удается записать только в отсутствие считающегося процесса [11, 139]. В работе [124] предложено обобщение КСДУ невинеровского типа на учет термостата с ненулевой плотностью фотонов. В работе [140] обсуждается модель нелокализованных оптических квантовых систем и дано обобщение алгебры Хадсона – Паргасарати для операторов, связывающих широкополосные квантованные поля на границах разделов подсистем открытой квантовой системы.

6. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ОТКРЫТОЙ СИСТЕМЫ

Кинетическое уравнение для матрицы плотности открытой системы и окружения имеет вид

$$\rho^{S+F}(t) = |\Psi^{S+F}(t)\rangle\langle\Psi^{S+F}(t)|$$

(знаки «тильда» опущены, широкополосные поля мы ассоциируем с окружением, отсюда индекс F), поскольку до сих пор описание открытой системы и окружения велось в терминах вектора состояния. Определяя $d\rho^{S+F}(t)$ как дифференциал Ито

$$d\rho^{S+F}(t) = \rho^{S+F}(t + d\tau) - \rho^{S+F}(t),$$

имеем

$$d\rho^{S+F}(t) = dU(t)|\Psi^{S+F}(0)\rangle\langle\Psi^{S+F}(0)|U^\dagger(t) + U(t)|\Psi^{S+F}(0)\rangle\langle\Psi^{S+F}(0)|dU^\dagger(t) + dU(t)|\Psi^{S+F}(0)\rangle\langle\Psi^{S+F}(0)|dU^\dagger(t),$$

откуда с учетом (56) можно получить искомое уравнение для матрицы плотности открытой системы и ее «термостатного» окружения. Из него следует кинетическое уравнение для матрицы плотности $\rho^S(t)$ открытой квантовой системы после взятия следа Tr_F по состояниям окружения с учетом соотношений

$$\begin{aligned} \text{Tr}_F(\rho^{S+F}(t)dB_r(\tau)) &= \text{Tr}_F(\rho^{S+F}(t)dB_r^+(\tau)) = \\ &= \text{Tr}_F(\rho^{S+F}(t)d\Lambda_r(\tau)) = 0. \end{aligned}$$

Здесь нет каких-либо принципиальных трудностей, кроме вопроса о перепутывании начальных состояний и коррелированности термостатных полей. Однако в силу принятых марковских приближений, нетрудно получить

$$d\rho^S(\tau) = -i[H^{Eff-S}(\tau), \rho(\tau)]d\tau + \sum_{r=a,c} \left(\frac{Y_{\Lambda r}^e}{Y_{\Lambda r}} Y_r \rho^S(\tau) Y_r + \frac{Y_{\Lambda r}^{e+}}{Y_{\Lambda r}} + Y_r + \frac{Y_{\Lambda r}^e + iY_{\Lambda r}}{(Y_{\Lambda r})^2} Y_r \rho^S(\tau) + \rho^S(\tau) Y_r + \frac{Y_{\Lambda r}^{e+} - iY_{\Lambda r}}{(Y_{\Lambda r})^2} Y_r \right) d\tau. \quad (58)$$

Это кинетическое уравнение нетрудно переписать в форме Линдблада (2) и (3) с операторами Линдблада

$$\frac{d\rho^S(\tau)}{d\tau} = -i[H^{Eff-S}(\tau), \rho^S(\tau)] - \hat{\Gamma}\rho^S(\tau), \quad (59)$$

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}\rho^S &= -i[\rho^S, H^{Shift-S}] + \sum_{r=a,c} \left(\frac{1}{2}L_r^{S+}L_r^S\rho^S + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}\rho^S L_r^{S+}L_r^S - L_r^S\rho^S L_r^{S+} \right), \quad (60) \end{aligned}$$

$$L_r^S = \frac{Y_{\Lambda r}^e}{Y_{\Lambda r}} Y_r,$$

$$H^{Shift-S} = \sum_r Y_r + \frac{\sin Y_{\Lambda r} - Y_{\Lambda r}}{(Y_{\Lambda r})^2} Y_r, \quad (61)$$

при этом

$$L_r^{S+}L_r^S = 2Y_r + \frac{1 - \cos Y_{\Lambda r}}{(Y_{\Lambda r})^2} Y_r. \quad (62)$$

В пренебрежении штарковскими взаимодействиями операторы Линдблада (25) и (26) приобретают простой вид:

$$L_r^S = -iY_r, \quad L_r^{S+}L_r^S = Y_r + Y_r, \quad H^{Shift-S} = 0.$$

Заметим, что считающиеся процессы $\Lambda_r(\tau)$, $r \neq a, c$, определяемые независимыми шумовыми источниками, рождающий и уничтожающий процессы которых не участвовали во взаимодействии с открытой системой, не дали вклада в кинетические уравнения (59), (60), в отличие от столкновительной атомной динамики в модели [138].

Уравнения (59)–(62), по сути дела, являются общими уравнениями (невинеровского типа) в марковском приближении, описывающими различные открытые системы, содержащие атомную/электронную подсистему и находящиеся в бозонном широкополосном окружении. При этом в динамике открытой системы существенную роль играют взаимодействия типа штарковского, которые

отражаются в наличии невинеровских множителей (57) и обуславливают своеобразие невинеровской динамики. Взаимодействия типа штарковского имеют второй порядок малости по константе связи с широкополосным полем, и их роль возрастает с ростом числа частиц в атомной/электронной подсистеме независимо от аналогичного роста процессов первого порядка по константе связи с широкополосным полем [111, 115–122].

Уравнения (59)–(62) в случае одного шумового источника ($\bar{\omega}_a$) или ($\bar{\omega}_c$) совпадают с уравнением общей квантовой динамики, управляемой рождающим, уничтожающим и считывающим процессами, полученным в [136] из общих соображений, безотносительно к физике открытой квантовой системы.

Невинеровские множители (57) отличают уравнения (59)–(62) от других [11, 58–60]. В многоатомных локализованных системах или подсистемах они проявляются в зависимости от числа одинаковых частиц N_p коэффициента эффективной константы связи γ . Пусть γ определяет, например, экспоненциальную релаксацию вида $\exp(-\gamma\tau)$, населенности квантового уровня системы (модель резонансного взаимодействия локализованного ансамбля одинаковых двухуровневых систем [122–124]). Учет считывающего процесса, согласно (59)–(62), приводит к перенормировке

$$\gamma \rightarrow 2\gamma \frac{1 - \cos(\gamma^{(2)} N_p)}{(\gamma^{(2)} N_p)^2},$$

где $\gamma^{(2)} \ll \gamma$ определяет масштаб величины штарковского взаимодействия с шумовым источником. Возможна такая идеализированная ситуация, когда $\gamma^{(2)} N_p = 2\pi$ и коллективные процессы второго порядка полностью подавят процессы первого порядка [110, 115, 122–127]!

В рассмотренной модели у квантового осциллятора два канала релаксации ($\bar{\omega}_a$) и ($\bar{\omega}_c$). Такой множитель будет существенным для распада квантового осциллятора в термостат для атомов, поскольку его роль зависит от числа атомов N_p . В канале взаимодействия осциллятора со своим термостатом « $N_p = 1$ ». Для возрастания роли подобного множителя необходим ансамбль одинаковых квантовых осцилляторов, в котором $N_p > 1$ [126]. Другая возможность — прямое взаимодействие атомов с термостатом для микрорезонатора. В оценке реальной ситуации необходимо помнить также о сделанном марковском приближении и процедуре введения квантовых случайных процессов.

Алгебраическая теория возмущений выявила в открытых системах два своеобразных класса интер-

ференционных процессов. Один класс определяет интерференционный канал релаксации. В рассмотренном примере он состоит из релаксации квантового осциллятора в термостат для атомов. Другой класс состоит в интерференции процессов излучения и переизлучения в случае коллективного термостата.

Выявленная перенормировка константы релаксации открытой системы и есть результат своеобразной интерференции процессов реального излучения кванта, определяющего $H^{\text{Tr}(r)}$, и процесса виртуального переизлучения кванта, определяющего $H^{\text{Stark}(r)}$. В коллективном термостате конкурируют, казалось бы, несоразмерные процессы первого и второго порядков алгебраической теорией возмущений, но все же процесс второго порядка обладает считывающим свойством и «встраивается» в процессы первого порядка. Это нашло отражение именно в такой перенормировке константы γ .

Другим следствием взаимодействия системы одинаковых квантовых частиц с коллективным термостатом является перепутывание квантовых состояний [120, 121, 141, 142] в рождающем и уничтожающем процессе, проявление в котором считывающего процесса пока не исследовано.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Алгебраическая теория возмущений дает путь решения проблемы локального подхода, связанной с соотношением времени корреляции случайных полей, моделирующих термостат, и наличием быстропеременных слагаемых в оптических системах, характерное время изменения которых много меньше времени корреляции шумовых полей. При этом возникают новые аспекты, которые не учитывались ранее без применения алгебраической теории возмущений. Важным следствием переосмысления уравнения Шредингера как квантового стохастического уравнения является необходимость учета слагаемых более высокого порядка в открытых оптических системах, поскольку именно они ответственны за своеобразный новый тип интерференции. Наконец, квантовое стохастическое уравнение (56), которое получается в рамках алгебраической теории возмущений, является универсальным [98], управляется всеми основными квантовыми случайными процессами — рождающим, уничтожающим и считывающим [132–137], чего нет в подходах [11, 59, 60].

Глобальный подход на основе непрерывного унитарного преобразования оказался успешным в слу-

чае электрон-фононных систем [143] и даже модели синус-Гордон [144], однако его применения к оптическим системам до сих пор неизвестны и как решается проблема нулевого времени корреляции белого шума и наличия еще «меньшего» характерного времени оптической системы автор не знает. Заметим также, что уравнение движения для гамильтонианов (9) есть локальный вариант преобразования Шриффера–Волфа [145], использующего проектирование на интересующее подпространство. Здесь имеется глубокая связь с методом Цванцига–Мори получения кинетических уравнений [146–150].

Помимо родственного метода усреднения Крылова–Боголюбова–Митропольского у развиваемого метода есть и другие аналоги. В классической механике аналогом является теория возмущений на основе свертывающихся рядов (см., например, [151, 152]). В дифференциальной геометрии — это теория эквивалентности дифференциальных структур [153]. В теории дифференциальных уравнений — метод канонического оператора Маслова [154, 155]. Известен также метод Магнуса [156, 157], однако в основу выделения слагаемых часто берутся соображения симметрии, а не отсутствие быстро меняющихся во времени слагаемых. Метод Флоке в сочетании с методом Магнуса используется для построения усредненных гамильтонианов в задачах, учитывающих дополнительные воздействия на систему периодических классических полей [158]. Наконец, укажем адиабатическую теорию возмущений, также успешно использующую унитарное преобразование гамильтониана [159].

Наличие не только внешних, но и глубоких аналогий изложенного подхода с методами других многочастичных задач служит, по-видимому, косвенным свидетельством в пользу необходимости перехода от точного гамильтониана к эффективному, во всяком случае, если речь идет о марковском приближении. В случае оптических систем это удалось физически обосновать. Аналогичную ситуацию можно увидеть и в теории сверхпроводимости, однако вместо обсуждения здесь сошлемся лишь на нобелевскую лекцию Лафлина [160].

Благодарности. Автор выражает благодарность А. И. Маймистову и А. И. Трубилко за полезные обсуждения, сотрудничество и поддержку.

Финансирование. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 19-02-00234а).

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Carmichael, *An Open Systems Approach to Quantum Optics*, Springer-Verlag, Berlin (1993).
2. H. J. Carmichael, *Statistical Methods in Quantum Optics 2. Non-Classical Fields*, Springer-Verlag, Berlin (2008).
3. G. Compagno, R. Passante, and F. Persico, *Atom-Field Interactions and Dressed Atoms*, CUP, Cambridge (1995).
4. Y. Yamamoto and A. Imamoglu, *Mesoscopic Quantum Optics*, Wiley, New York (1999).
5. Л. Мандель, Э. Вольф, *Оптическая когерентность и квантовая оптика*, Физматлит, Москва (2000).
6. В. П. Шлях, *Квантовая оптика в фазовом пространстве*, Физматлит, Москва (2005).
7. P. Lambropoulos and D. Petrosyan, *Fundamentals of Quantum Optics and Quantum Information*, Springer-Verlag, Berlin (2007).
8. A. B. Klimov and S. M. Chumakov, *A Group-Theoretical Approach to Quantum Optics. Models of Atom-Field Interactions*, Wiley (2009).
9. O. Keller, *Quantum Theory of Near-Field Electrodynamics*, Springer-Verlag, Berlin (2011).
10. R. Chiao and J. Garrison, *Quantum Optics*, OUP, New York (2008).
11. C. W. Gardiner and P. Zoller, *Quantum Noise*, Springer-Verlag, Berlin (2000), (2004).
12. R. R. Puri, *Mathematical Methods of Quantum Optics*, Springer, Berlin (2001).
13. D. Dubbers and H.-J. Stöckmann, *Quantum Physics: The Bottom-Up Approach. From the Simple Two-Level System to Irreducible Representations*, Springer, Berlin (2013).
14. А. М. Башаров, ЖЭТФ **137**, 1090 (2010).
15. В. П. Карасев, ТМФ **95**, 3 (1993).
16. V. P. Karassiov, J. Phys. A **27**, 153 (1994).
17. C. W. Gardiner, Optics Comm. **243**, 57 (2004).
18. A. A. Dzhioev and D. S. Kosov, J. Chem. Phys. **134**, 044121 (2011).
19. Y. J. Yan, J. Chem. Phys. **140**, 054105 (2014).
20. R. Kh. Gainutdinov, D. G. Blum, A. Shirdelhavar, and A. A. Mutygullina, J. Phys.: Conf. Ser. **1283**, 012005 (2019).

21. A. Ghosh, S. S. Sinha, and D. S. Ray, *Phys. Rev. E* **86**, 011138 (2012).
22. К. В. Гардинер, *Стохастические методы в естественных науках*, Мир, Москва (1986).
23. D. F. Walls, *Z. Phys.* **234**, 231 (1970).
24. R. P. Feynman, F. L. Vernon, Jr., and R. W. Hellwarth, *J. Appl Phys.* **28**, 49 (1957).
25. Л. Аллен, Д. Эберли, *Оптический резонанс и двухуровневые атомы*, Мир, Москва (1978).
26. J. H. Van Vleck, *Phys. Rev.* **33**, 467 (1929).
27. Г. Вентцель, *Введение в квантовую теорию волновых полей*, ОГИЗ ГИТТЛ, М.-Л. (1947), §§ 10,14.
28. В. Гайтлер, *Квантовая теория излучения*, Изд-во иностр. лит., Москва (1956).
29. Дж. Д. Бьеркен, С. Д. Дрелл, *Релятивистская квантовая теория*, Наука, Москва (1978), Т. 1, Гл. 4.
30. J. da Providencia and C. M. Shakin, *Ann. Phys.* **30**, 95 (1964).
31. M. Yamamura and A. Kuriyama, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **93** (1987).
32. M. Wagner, *Unitary Transformations in Solid State Physics*, Elsevier (1986).
33. Г. Л. Бир, Г. Е. Пикус, *Симметрия и деформационные эффекты в полупроводниках*, Наука, Москва (1972).
34. M. Takatsuji, *Phys. Rev.* **155**, 980 (1967).
35. M. Takatsuji, *Phys. Rev. B* **2**, 340 (1970).
36. M. Takatsuji, *Phys. Rev. A* **4**, 808 (1974).
37. M. Takatsuji, *Phys. Rev.* **11**, 619 (1975).
38. F. Jørgensen, *Molec. Phys.* **29** (4), 1137 (1975).
39. G. Compagno and F. Persico, *Phys. Rev. A* **25**, 3138 (1982).
40. G. Compagno, J. S. Peng, and F. Persico, *Opt. Commun.* **57**, 415(1986).
41. V. Denner and M. Wagner, *J. Phys. C* **17**, 153 (1984).
42. V. Denner and M. Wagner, *Z. Phys. B* **58**, 255 (1985).
43. C. A. Coulter, *Phys. Rev. A* **10**, 1946 (1974).
44. M. Wagner and J. Vazquez-Marquez, *J. Phys.: Condensed Matter* **2**, 5943 (1990).
45. D. Grischkowsky, M. M. T. Loy, and P. F. Liao, *Phys. Rev. A* **12**, 2514 (1975).
46. В. А. Коварский, Е. Ю. Перлин, *ФТТ* **13**, 1217 (1970).
47. С. Д. Ганичев, С. А. Емельянов, Е. Л. Ивченко, Е. Ю. Перлин, И. Д. Ярошецкий, *Письма в ЖЭТФ* **37**, 479 (1983).
48. С. Д. Ганичев, С. А. Емельянов, Е. Л. Ивченко, Е. Ю. Перлин, Я. В. Терентьев, А. В. Федоров, И. Д. Ярошецкий, *ЖЭТФ* **91**, 1233 (1986).
49. Е. Ю. Перлин, А. В. Федоров, М. Б. Кашевник, *ЖЭТФ* **85**, 1357(1983).
50. Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов, *Введение в нелинейную механику* (переиздание книги 1937 г.) РХД, Москва (2004).
51. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Физматгиз, Москва (1958).
52. В. С. Бутылкин, А. Е. Каплан, Ю. Г. Хронопуло, Е. И. Якубович, *Резонансные взаимодействия света с веществом*, Наука, Москва (1977).
53. А. М. Башаров, А. И. Маймистов, Э. А. Маныкин, *ЖЭТФ* **84**, 487 (1983).
54. А. М. Башаров, Фотоника, *Метод унитарного преобразования в нелинейной оптике*, МИФИ, Москва (1990).
55. А. В. Иванова, Г. Г. Меликян, *Хим. физ.* **3**, 297 (1983).
56. A. V. Ivanova and G. G. Melikyan, *J. Phys. B* **18**, 557 (1985).
57. А. М. Башаров, *ЖЭТФ* **102**, 1126 (1992).
58. К. Блум, *Теория матрицы плотности и ее приложения*, Мир, Москва (1983).
59. Х.-П. Бройер, Ф. Петруччионе, *Теория открытых квантовых систем*, Институт компьютерных исследований, Москва (2010).
60. L. Accardi, Y. G. Lu, and I. Volovich, *Quantum Theory and its Stochastic Limit*, Springer-Verlag, Berlin (2002).
61. V. N. Bogaeovski and A. Povzner, *Algebraic Methods in Nonlinear Perturbation Theory*, Springer (1991).
62. Ю. Швингер, *Квантовая кинематика и динамика*, Наука, Москва (1992).
63. J. Schwinger, *Quantum Mechanics. Symbolism of Atomic Measurement*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2001).

64. G. Lindblad, *Commun. Math. Phys.* **40**, 147 (1975); **48**, 119 (1976).
65. V. Gorini, A. Kossakowski, and E. C. G. Sundarsham, *J. Math. Phys.* **17**, 821 (1976).
66. A. S. Holevo, *J. Math. Phys.* **37**, 1812 (1996).
67. A. S. Holevo, *Irreversibility and Causality, Lecture Notes in Phys.* **504**, 67, Springer, Berlin (1998).
68. A. Barchielli and V. P. Belavkin, *J. Phys. A* **24**, 1495 (1991).
69. D. Keys and J. Wehr, *J. Math. Phys.* **61**, 032101 (2020).
70. A. E. Teretenkov, *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics*, **22**, N 04, 1930001 (2019).
71. F. Wegner, *Ann. Phys.* **3**, 77 (1994).
72. S. D. Glazek and K. G. Wilson, *Phys. Rev. D* **48**, 5863 (1993).
73. S. D. Glazek and K. G. Wilson, *Phys. Rev. D* **49**, 4214 (1994).
74. N. Bogolubov, *J. Phys.* **9**, 23 (1947).
75. Н. Н. Боголюбов, В. В. Толмачев, Д. В. Ширков, *Новый метод в теории сверхпроводимости*, Изд. АН СССР, Москва (1958).
76. M. Takatsuji, *Physica A* **84**, 68 (1976).
77. Х. Умэдзава, Х. Мацумото, М. Татики, *Термополевая динамика и конденсированные состояния*, Мир, Москва (1985).
78. А. М. Башаров, С. А. Дубовис, *Опт. и спектр.* **99**, 607 (2005).
79. А. М. Башаров, С. А. Дубовис, *КЭ* **35**, 683 (2005).
80. S. A. Dubovis and A. M. Basharov, *Phys. Lett. A* **359**, 308 (2006).
81. А. М. Башаров, *Опт. и спектр.* **128**, 186 (2020).
82. C. M. Bender, *Rep. Prog. Phys.* **70**, 947 ((2007).
83. I. Rotter, *J. Phys. A* **42**, 153001 (2009).
84. М. М. Альперин, Я. Д. Клубис, А. И. Хижняк, *Введение в физику двухуровневых систем*, Наука Думка, Киев (1982).
85. Дж. Займан, *Современная квантовая теория*, Мир, Москва (1971).
86. L. Lang, K. Sivalingam, and F. Neesea, *J. Chem. Phys.* **152**, 014109 (2020).
87. А. В. Андреев, В. И. Емельянов, Ю. А. Ильинский, *Кооперативные явления в оптике*, Наука, Москва (1988).
88. M. G. Benedict, A. M. Ermolaev, V. A. Malyshev, I. V. Sokolov, and E. D. Trifonov, *Super-Radiance: Multiatomic Coherent Emission*, IOP, Bristol and Philadelphia (1996).
89. A. I. Maimistov and A. M. Basharov, *Nonlinear Optical Waves*, Kluwer Academic, Dordrecht (1999).
90. P. Langevin, *C. R. Acad. Sci. (Paris)* **146**, 530 (1908).
91. A. Levy and R. Kozloff, *Europhys. Lett.* **107**, 20004 (2014).
92. Л. А. Халфин, *ДАН СССР* **115**, 277 (1957).
93. Л. А. Халфин, *ЖЭТФ* **33**, 1371 (1958).
94. H. Haas, D. Puzzuoli, F. Zhang, and D. G. Cory, *New J. Phys.* **21**, 103011 (2019).
95. C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg, *Photons and Atoms. Introduction to Quantum Electrodynamics*, Wiley, New York (1997).
96. P. P. Hofer, M. Perarnau-Llobet, L. D. M. Miranda, G. Haack, R. Silva, J. B. Brask, and N. Brunner, *New J. Phys.* **19**, 123037 (2017).
97. A. S. Trushechkin and I. V. Volovich, *EPL* **113**, 30005 (2016).
98. А. М. Башаров, *ЖЭТФ* **142**, 419 (2012).
99. Н. Н. Розанов, *Диссипативные оптические солитоны. От микро- к нано- и атто-*, Физматлит, Москва (2011).
100. A. I. Maimistov and S. O. Elyutin, *J. Mod. Opt.* **39**, 2201 (1992).
101. А. В. Андреев, *Phys. Lett. A* **179**, 23 (1993).
102. А. Ю. Пархоменко, С. В. Сазонов, *ЖЭТФ* **114**, 1595 (1998).
103. А. В. Андреев, С. Ю. Стремоухов, О. А. Шутова, *Письма в ЖЭТФ* **93**, 522 (2011).
104. E. T. Jaynes and F. W. Cummings, *Proc. IEEE* **51**, 89 (1963).
105. M. Tavis and F. W. Cummings, *Phys. Rev.* **170**, 379 (1968).
106. B. W. Shore and P. L. Knight, *J. Mod. Opt.* **40**, 1195 (1993).
107. M. Chaichian, D. Ellinas, and P. Kulish, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 980 (1990).

108. M. Schiirrmann, *Commun. Math. Phys.* **140**, 589 (1991).
109. I. P. Vadeiko, G. P. Miroshnichenko, A. V. Rybin, and J. Timonen, *Phys. Rev. A* **67**, 053808 (2003).
110. A. Messinger, A. Ritboon, F. Crimin, S. Croke, and S. M. Barnett, *New J. Phys.* **22**, 043008 (2020).
111. A. M. Basharov, *Phys. Rev. A* **84**, 013801 (2011).
112. A. M. Basharov, V. N. Gorbachev, and A. A. Rodichkina, *Phys. Rev. A* **74**, 042313 (2006).
113. А. М. Башаров, В. Н. Горбачев, Н. В. Знаменский, *КЭ* **36**, 785 (2006).
114. A. M. Basharov, *Phys. Lett. A* **376**, 1881 (2012).
115. А. И. Трубилко, А. М. Башаров, *ЖЭТФ* **157**, 74 (2020).
116. А. И. Трубилко, А. М. Башаров, *Письма в ЖЭТФ* **110**, 505 (2019).
117. А. И. Трубилко and А. М. Basharov, *Phys. Scr.* **95**, 045106 (2020).
118. В. Н. Горбачев, А. И. Трубилко, *ЖЭТФ* **135**, 227 (2009).
119. А. И. Трубилко, *ЖЭТФ* **141**, 659 (2012).
120. А. М. Башаров, *ЖЭТФ* **121**, 1249 (2002).
121. А. М. Башаров, А. А. Башкеев, Э. А. Манькин, *ЖЭТФ* **127**, 536 (2005).
122. А. М. Башаров, *ЖЭТФ* **140**, 431 (2011).
123. А. М. Башаров, *Письма в ЖЭТФ* **107**, 151 (2018).
124. А. М. Башаров, А. И. Трубилко, *ЖЭТФ* **155**, 425 (2019).
125. А. М. Башаров, А. И. Трубилко, *ЖЭТФ* **155**, 654 (2019).
126. А. И. Трубилко, А. М. Башаров, *Письма в ЖЭТФ* **111**, 632 (2020).
127. А. М. Башаров, А. И. Трубилко, *ЖЭТФ* **157**, 991 (2020).
128. P. W. Milonni, *The Quantum Vacuum*, Academic Press, Boston (1994).
129. А. М. Башаров, *ЖЭТФ* **116**, 469 (1999).
130. А. И. Трубилко, А. М. Башаров, *ЖЭТФ* **156**, 407 (2019).
131. M. Lax, *Phys. Rev.* **145**, 110 (1966).
132. A. M. Chebotarev, *Lectures on Quantum Probability*, Sociedad Mathematica Mexicana (2000).
133. В. П. Белавкин, *УМН* **47**, 47 (1992).
134. R. L. Hudson and K. R. Parthasarathy, *Comm. Math. Phys.* **93**, 301 (1984).
135. В. П. Белавкин, *ТМФ* **110**, 46 (1997).
136. А. С. Холево. *Квантовая вероятность и квантовая статистика. Итоги науки и техн. Совер. пробл. математики. Фунд. Направления*, ВИНТИ 83, 3 (1991).
137. A. Barchielli, *Phys. Rev. A* **34**, 1642 (1986).
138. A. N. Pechen, *J. Math. Phys.* **45**, 400 (2004).
139. А. М. Башаров, *ЖЭТФ* **111**, 25 (1997).
140. А. М. Башаров, *ЖЭТФ* **153**, 375 (2018).
141. А. М. Башаров, *Письма в ЖЭТФ* **75**, 151 (2002).
142. L. Aolita, F. de Melo, and L. Davidovich, *Rep. Prog. Phys.* **78**, 042001 (2015).
143. P. Lenz and F. Wegner, *Nucl. Phys. B* **482**, 693 (1996).
144. S. Kehrein, *Nucl. Phys. B* **592**, 512 (2001).
145. S. Bravyi, D. P. DiVincenzo, and D. Loss, *Ann. Phys.* **326**, 2793 (2011).
146. R. Zwanzig, *J. Chem. Phys.* **33**, 1338 (1960).
147. R. Zwanzig, *Phys. Rev.* **124**, 985 (1961).
148. H. Mori, *Progr. Theor. Phys.* **34**, 765 (1965).
149. H. Mori, *Progr. Theor. Phys.* **33**, 423 (1965).
150. R. Zwanzig, *Ann. Rev. Phys. Chem.* **16**, 67 (1965).
151. А. Лихтенберг, М. Либерман, *Регулярная и стохастическая механика*, Мир, Москва (1984).
152. S. Ferraz-Mello, *Canonical Perturbation Theories. Degenerate Systems and Resonance*, Springer Science+Business Media, New York (2007).
153. R. B. Gardner, *The Method of Equivalence and its Applications*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia (1989).
154. В. П. Маслов, *Операторные методы*, Наука, Москва (1973).
155. А. С. Мищенко, Б. Ю. Стернин, В. Е. Шаталов, *Лагранжесвы многообразия и метод канонического оператора*, Наука, Москва (1978).
156. W. Magnus, *Comm. Pure Appl. Math.* **7**, 649 (1954).
157. S. Blanes, F. Casas, J. A. Oteo, and J. Ros, *Phys. Rep.* **470**, 151 (2009).
158. Р. Эрнст, Дж. Боденхаузен, А. Вокаун, *ЯМР в одном и двух измерениях*, Мир, Москва (1990).
159. S. Teufel, *Adiabatic Perturbation Theory in Quantum Dynamics*, Springer, Berlin (2003).
160. Р. Б. Лафлин, *УФН* **170**, 292 (2000).