

ЗАМЕТКИ О КОЛЛАПСЕ В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

Е. А. Кузнецов^{a,b,c,d*}, *Е. А. Михайлов*^e

^a *Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
119991, Москва, Россия*

^b *Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия*

^c *Сколковский Институт науки и технологии
143026, Сколково, Московская обл., Россия*

^d *Институт космических исследований Российской академии наук
117997, Москва, Россия*

^e *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 14 мая 2020 г.,
после переработки 14 мая 2020 г.
Принята к публикации 14 мая 2020 г.

Обсуждается вопрос о магнитном коллапсе — возможном процессе возникновения особенности магнитного поля за конечное время в рамках идеальной магнитной гидродинамики для несжимаемых жидкостей, важном процессе с точки зрения различных астрофизических приложений, в частности, как механизме формирования магнитных филаментов в конвективной зоне Солнца. Возможность коллапса связана со сжимаемостью непрерывно распределенных магнитных силовых линий. Известный пример формирования магнитных филаментов в приближении кинематического динамо с заданным полем скорости, рассмотренный впервые Паркером в 1963 г., свидетельствует скорее о том, что нарастание магнитного поля носит экспоненциальный во времени характер. В случае кинематического приближения для уравнения индукции возникновение филаментов происходит в областях с гиперболическим профилем скорости.

DOI: 10.31857/S004445102009014X

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	561	6. Численное моделирование	568
2. Конвекция в астрофизике	563	7. Влияние вязкости на эволюцию магнитного поля	569
3. Сжатие силовых линий и аттрактор ...	564	8. Заключительные замечания	570
4. Конвективная ячейка и граничные условия	565	Литература	571
5. Филаментация	566		

1. ВВЕДЕНИЕ

Коллапс как процесс образования особенности для гладких начальных условий является одним из ключевых вопросов для понимания природы как гидродинамической турбулентности, так и магнитогидродинамической (МГД) турбулентности. Теория

Колмогорова–Обухова [1, 2] развитой гидродинамической турбулентности при больших числах Рейнольдса, $Re \gg 1$, в инерционном интервале предсказывает расходимость флуктуаций завихренности $\langle \delta\omega \rangle$ с масштабом ℓ при малых ℓ как $\ell^{-2/3}$, что указывает на связь колмогоровской турбулентности с коллапсом. Выполненные в конце 90-х годов численные эксперименты, вроде бы свидетельствовавшие о

* E-mail: kuznetso@itp.ac.ru

наблюдении коллапса, при более точном рассмотрении показали его отсутствие (обсуждение этих вопросов можно найти в работах [3, 4]). Эта проблема до сих пор остается открытой, хотя есть численные эксперименты, которые показывают формирование особенности на твердой стенке в рамках трехмерных уравнений Эйлера [5]. В двумерной гидродинамике Эйлера коллапс — появление особенности за конечное время — запрещен [6–8]. Но это, однако, не исключает появления особенности при экспоненциальном росте, о чем свидетельствуют численные эксперименты [9], в которых образование квазишоков завихренности сопровождается экспоненциальным во времени сужением их ширины. В трехмерной гидродинамике Эйлера численные эксперименты также показывают экспоненциальный рост во времени завихренности ω в вихревых структурах блинного типа, для которых сужение толщины блина ℓ происходит со временем также экспоненциальным образом [10–12]. Формирование такого рода структур обязательно, как показано в работах [13–15], в замороженности завихренности в трехмерных уравнениях Эйлера и ротора завихренности B (по англ. *divorticity*) для двумерных течений [9]. Благодаря этому свойству замороженные векторные поля оказываются сжимаемыми. Более того, выяснено также, что формирование этих структур можно рассматривать как процесс образования складки, при котором максимальные значения ω_{max} и B_{max} изменяются пропорционально своим толщинам как $\ell^{-2/3}$ [10–12, 16]. В МГД при больших значениях магнитного числа Рейнольдса, $Re_m \gg 1$, магнитное поле можно считать также замороженным. И поэтому следует ожидать, что там также должен наблюдаться экспоненциальный во времени рост из-за сжимаемости магнитных силовых линий. Вопрос сжимаемости магнитных силовых линий применительно к этой проблеме обсуждался впервые в работах [14, 17]. В частности, в работе [17] было высказано предположение, что замороженность магнитного поля может быть причиной формирования коллапса. В данном коротком обзоре мы обсудим такую возможность для МГД-уравнений в так называемом кинематическом приближении, когда магнитное поле сравнительно мало и обратным влиянием растущего магнитного поля на поле скорости можно пренебречь. Эта модель является весьма популярной в теории турбулентного динамо (см. [18–20] и ссылки там), когда случайное поле скорости является заданным. В этой работе мы будем рассматривать в основном случай, когда поле скорости является регулярным. Такая ситуация реализуется в конвективной зоне Солнца. Наблюдения

за конвективными ячейками показало, что магнитное поле в этой зоне сильно филаментировано. На это впервые обратил внимание Паркер в пионерской работе [21] (см. также его книгу [22] и ссылки там). В частности, в первой работе Паркер изучил поведение магнитного поля в двумерном поле скорости для конвективного течения в случае периодической решетки ячеек в виде валов. Ниже мы обсудим эту постановку задачи. Главное резюме, которое можно сделать, состоит в том, что для стационарных двумерных течений филаментация магнитного поля и его экспоненциальный рост обязаны наличию в течениях гиперболических областей в духе Окубо–Вайса [23, 24]. В этих областях магнитное поле собирается, благодаря замороженности магнитного поля, в малую окрестность вблизи стационарной гиперболической точки, в которой скорость обращается в нуль. Это процесс носит экспоненциальный по времени характер и останавливается за счет разрушения замороженности из-за конечной магнитной вязкости. В результате магнитное поле насыщается, усиливаясь по отношению к начальному полю в $Re_m^{1/2}$ раз, что было отмечено в ряде работ (см. [23, 25, 26]).

План данного обзора следующий. Сначала мы обсудим вопрос о параметрах области конвективных ячеек на Солнце, которые занимают верхнюю часть конвективной зоны, а также нижнюю часть фотосферы. Параметры течений в конвективных ячейках позволяют рассматривать задачу о филаментации магнитных полей в этой области Солнца в кинематическом приближении. В разд. 3 мы обращаемся к представлению магнитных линий [14, 17], которое является аналогом представления вихревых линий, впервые введенного для уравнений Эйлера в работе [13] (см. также [15]). Это представление явно демонстрирует сжимаемость магнитных силовых линий. Скорость движения силовых линий представляет собой компоненту скорости, нормальную к направлению магнитного поля. Дивергенция этой компоненты скорости в ситуации общего положения не равна нулю, что в конечном счете приводит к сжимаемости непрерывно распределенных магнитных силовых линий. На основе этого на качественном уровне показано, как в конвективной ячейке происходит филаментация магнитного поля. В следующем разделе рассмотрено решение задачи о филаментации магнитного поля. Этот процесс возникает при наличии гиперболической области течения, а сама фокусировка магнитных силовых линий происходит в малой окрестности стационарной гиперболической точки. В трехмерной геометрии в конвек-

тивных ячейках этот процесс должен приводить к формированию филаментов, уплощенных по отношению к интерфейсам между конвективными ячейками. В последнем разделе обсуждаем вопрос о насыщении магнитного поля за счет конечности магнитной вязкости.

2. КОНВЕКЦИЯ В АСТРОФИЗИКЕ

Многочисленные наблюдения распределения магнитного поля в зоне конвективных ячеек на Солнце (см., например, данные миссии SOHO [27], а также первые данные, полученные от самого мощного солнечного телескопа DKIST [28]) свидетельствуют о сильно неравномерном распределении магнитного поля уже в пределах одной конвективной ячейки: магнитное поле сосредоточено в виде магнитных филаментов (часто называемых магнитными трубками), поле в которых значительно превышает среднее магнитное поле B_0 на Солнце. Особенно это появляется в областях темных пятен [29]. Согласно многочисленным данным, B_0 составляет величину нескольких гаусс (см., например, [30] и ссылки там). (В данной статье для оценок мы будем считать $B_0 \sim 10$ Гс.) В каждой конвективной ячейке в ее центре — в области восходящего потока — магнитное поле практически отсутствует, оно сосредоточено в областях нисходящих потоков в виде филаментов с магнитным полем порядка одного килогаусса или даже больше. Следует отметить, что пересоединение магнитных трубок и разнообразные сопутствующие этому явления в виде вспышек возникают выше — в верхних слоях атмосферы Солнца, в основном, в хромосфере и короне (см., например, книгу [31] и ссылки там). С этой точки зрения, вопрос о возникновении магнитных филаментов представляется нам весьма важным и актуальным.

Что касается конвективных ячеек, то их горизонтальный размер L согласно наблюдениям составляет порядка 500–1000 км. В соответствии с теоретическими и экспериментальными данными по конвекции в лабораторных условиях [32] (см. также [33]) вертикальный размер ячеек — порядка их горизонтального размера, что мы будем считать выполненным для солнечных конвективных ячеек, — это наиболее принятое в этих исследованиях предположение. Следует также сказать о скоростях и плотностях в области конвективных ячеек. Согласно измерениям [27], а также многим другим данным (см, например, книгу [34]) скорость v в ячейке по

рядка 1000 м/с, а плотность ρ в фотосфере порядка 10^{-7} г/см³. Отметим также, что между конвективной зоной и фотосферой нет никакого резкого градиента, плотность меняется плавно (см., например, обзор [35] и ссылки там). Значение плотности в конвективной зоне, конечно, больше 10^{-7} г/см³. В литературе значение плотности на границе конвективной зоны и фотосферы считается порядка 10^{-6} – 10^{-5} г/см³. Тем не менее, в области конвективной ячейки плотность можно считать практически неизменной и, соответственно, течение в самой ячейке несжимаемым: $\text{div } \mathbf{v} = 0$.

Главный вопрос, рассмотренный в данном обзоре, состоит в качественном объяснении наблюдаемого факта, а именно, почему в конвективных ячейках происходит филаментация магнитных полей, возникающая на границе между ячейками, т. е. на нисходящих потоках, и почему в центральной области — области восходящего течения — магнитное поле практически отсутствует. В этом смысле нисходящие конвективные потоки для магнитных силовых линий выступают в качестве своеобразных аттракторов. Главная причина этого явления, как будет показано в данной работе, связана с вмороженностью магнитных силовых линий в плазму — свойством, которое имеет место при нулевой магнитной вязкости. Согласно многочисленным данным (см., например, [19, 20] и ссылки там), в конвективных ячейках магнитное число Рейнольдса Re_m порядка 10^6 , что позволяет в главном порядке пренебречь магнитной вязкостью $\eta_m = c^2/4\pi\sigma$, где σ — проводимость. Другим важным параметром солнечной конвекции Θ является отношение плотностей кинетической энергии $\rho v^2/2$ и магнитной энергии $\mathbf{B}^2/(8\pi)$. Например, для фотосферы с плотностью 10^{-7} г/см³ это отношение оказывается порядка 10^2 , где для оценки мы взяли $B_0 = 10$ Гс, а скорость 1000 м/с. При приближении к конвективной зоне Θ становится порядка 10^3 – 10^4 . При таком отношении энергий магнитное поле слабо влияет на конвекцию и, соответственно, поле скорости можно считать заданным. В дальнейшем мы рассмотрим чисто стационарные течения, более того — двумерные течения, что, по нашему мнению, непринципиально для объяснения самого эффекта.

Используя только два этих предположения, т. е. большое магнитное число Рейнольдса и слабое влияние магнитного поля на конвекцию, удастся показать, что магнитное поле в ячейке только благодаря конвективному течению стремится к филаментированному состоянию в виде магнитных трубок, которые формируются в области нисходящего потока

и параллельны ему. В области восходящего потока магнитное поле стремится к нулю, оно выталкивается на периферию конвективных ячеек. Основная модель конвективной ячейки, которую мы аналитически и численно исследовали, является двумерной с течением в виде валов [32, 33]. В этом случае мы показываем, что магнитное поле конденсируется в области нисходящего потока, т. е. филаментация имеет место на границе между ячейками. При этом магнитное поле B только благодаря вмороженности растет во времени экспоненциально при одновременном экспоненциальном сужении самого филамента. Рост магнитного поля и, соответственно, сужение магнитного филамента, как показано в работе, останавливается из-за разрушения вмороженности магнитного поля за счет магнитной вязкости. В результате происходит насыщение магнитного поля в филаменте на уровне $B_0 \text{Re}_m^{1/2}$. При $B_0 = 10 \text{ Гс}$ и $\text{Re}_m = 10^6$ поле насыщения составляет 10^4 Гс , что соответствует наблюдательным данным. Механизм, который приводит к формированию магнитных филаментов для двумерного конвективного течения, качественно остается практически тем же для трехмерных конвективных ячеек. Магнитные филаменты в этом случае должны уплощаться при их росте в окрестности нисходящего потока. Численные эксперименты, выполненные в работе [36] для гексагональных ячеек, а также недавние наблюдения [28] свидетельствуют в пользу рассмотренного здесь механизма филаментации.

Можно также отметить важность других магнитогидродинамических процессов, возникающих в астрофизике, и их взаимосвязь с конвекцией. Так, магнитные поля играют важную роль для аккреционных дисков, образующихся около массивных объектов, таких как черные дыры, нейтронные звезды, белые карлики и т. д. [37–39]. Влияние конвекции на эволюцию магнитного поля обсуждается достаточно давно. В работах [40, 41] показана взаимосвязь между конвективными движениями и возникновением магниторотационной неустойчивости в аккреционных дисках. В литературе также обсуждается возможность подавления инверсий магнитного поля в аккреционных дисках за счет аккреции [42]. Можно отметить некоторые другие работы, посвященные моделированию взаимосвязи между конвекцией и магнитным полем в аккреционных дисках [43, 44]. Также можно ожидать, что представления о конвективных потоках позволят детально описать процесс взаимодействия между магнитным полем центрального объектом и аккреционного диска. Достаточно существенным может быть влияние конвективных

потоков и при исследовании эволюции магнитных полей в галактиках. Как правило, они направлены перпендикулярно к экваториальной плоскости. В ряде работ они изучались путем исследования потоков спиральности магнитного поля, которое является интегралом движения в идеальной магнитной гидродинамике [45–47]. Также можно отметить исследования о влиянии конвекции на поток магнитного поля в ходе звездообразования [48].

Все перечисленные выше примеры говорят о важности изучения конвективных потоков и их влиянии на магнитное поле с точки зрения астрофизики, чему и посвящена настоящая работа.

3. СЖАТИЕ СИЛОВЫХ ЛИНИЙ И АТТРАКТОР

Как сформулировано во Введении, в случае большого значения плотности кинетической энергии по сравнению с плотностью магнитной энергии динамика магнитного поля описывается уравнением индукции в МГД-приближении при заданном поле скорости:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] + \eta_m \Delta \mathbf{B}, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (1)$$

В данном случае все уравнения записаны в безразмерных единицах: расстояния измеряются в своих типичных значениях L , скорости — в характерных значениях V . В случае больших магнитных чисел Рейнольдса, $\text{Re}_m \gg 1$, это уравнение превращается в уравнение вмороженности

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}], \quad \text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (2)$$

Ввиду векторного произведения в правой части (2) только компонента скорости \mathbf{v}_n , нормальная к силовой линии, может изменить магнитное поле. Тангенциальная компонента \mathbf{v}_τ в этом случае играет пассивную роль, обеспечивая выполнение условия несжимаемости $\text{div}(\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_\tau) = 0$. Напомним, что вмороженность магнитного поля означает, что каждая лагранжева частица приклеена к своей силовой линии и не может ее покинуть. У частицы, таким образом, есть только одна свобода движения — вдоль магнитного поля, и это движение, очевидно, не изменяет магнитного поля. Отсюда немедленно следует, что \mathbf{v}_n есть скорость движения самой магнитной силовой линии. Этот факт имеет простое геометрическое объяснение. Если рассмотреть произвольную кривую, то всякая деформация вдоль кривой, очевидно, не меняет ее положения; изменяют положе-

ние кривой только деформации, нормальные к этой линии.

С другой стороны, в ситуации общего положения $\text{div } \mathbf{v}_n \neq 0$, из этого, согласно [17], следует, что непрерывно распределенные линии магнитного поля представляют собой сжимаемые объекты. Рассмотрим лагранжевы траектории, задаваемые скоростью магнитных силовых линий \mathbf{v}_n :

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_n(\mathbf{r}, t) \quad \mathbf{r}|_{t=0} = \mathbf{a}.$$

Решение этих уравнений $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{a}, t)$ задает сжимаемое отображение. Последнее следует из уравнения для якобиана этого отображения $J = \det(\partial x_i / \partial a_k)$:

$$\frac{dJ}{dt} = \text{div } \mathbf{v}_n \cdot J. \tag{3}$$

Важно отметить, что уравнение (2) допускает частичное интегрирование в терминах $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{a}, t)$ (см. [13, 15, 17]):

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{(\mathbf{B}_0(\mathbf{a}) \nabla_{\mathbf{a}}) \mathbf{r}(\mathbf{a}, t)}{J}. \tag{4}$$

Здесь $\mathbf{B}_0(\mathbf{a})$ — распределение магнитного поля при $t = 0$. Оно играет ту же самую роль, что и инвариант Коши [17] в идеальной гидродинамике (см. также [15, 49, 50]).

Из уравнения (3) следует, что якобиан J в ситуации общего положения, $\text{div } \mathbf{v}_n$, может принимать произвольные значения, в частности, нулевые, когда согласно (4) магнитное поле становится бесконечно большим. Благодаря этому свойству, а также тому, что скорость \mathbf{v}_n представляет собой скорость перемещения силовых линий, становится ясным, что перенос магнитного поля скоростью \mathbf{v}_n будет осуществляться до тех пор, пока нормальная компонента не обратится в нуль, т. е. когда $\mathbf{B} \parallel \mathbf{v}$. Области, где $\mathbf{B} \parallel \mathbf{v}$, должны представляться для магнитного поля своеобразными аттракторами. В трехмерном пространстве, как будет рассмотрено ниже, эти аттракторы должны быть двумерными. Если поле скорости является стационарным, то на аттракторе магнитное поле может достигать больших величин, возможно, даже бесконечных, если пренебречь магнитной вязкостью.

На рис. 1 схематически представлено движение магнитных силовых линий (помечены красным) в поле скорости конвективной ячейки. Линии скорости имеют синий цвет, а стрелки указывают направление течения. На пересечении красных и синих линий нарисованы черные стрелки, показывающие направление движения магнитных линий. Эти стрелки перпендикулярны магнитным силовым линиям

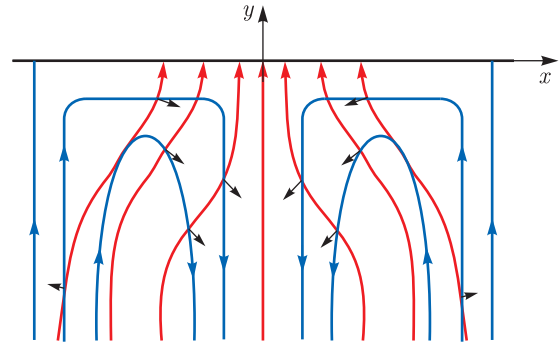


Рис. 1. (В цвете онлайн) Линии магнитного поля в конвективной ячейке

и показывают направление нормальной компоненты скорости \mathbf{v}_n . Из этого простого рисунка сразу следует, что в полосе $-\pi/2 \leq y \leq 0$ все магнитные силовые линии правой ячейки двигаются, приближаясь к линии $x = 0$ слева, а все магнитные силовые линии из левой ячейки — приближаясь к этой линии справа. Таким образом, конвективное течение собирает все силовые линии магнитного поля на линию $x = 0$. Подчеркнем, что такой процесс оказывается возможным благодаря сжимаемости непрерывно распределенных магнитных силовых линий. Конвективное течение сгребает все магнитные силовые линии, формируя магнитный филамент. В этом случае, как легко видно на этой картинке, наибольшее магнитное поле должно возникать в окрестности точки $x = y = 0$. Это точка для конвективного течения является гиперболической. Именно из-за гиперболичности, как будет показано в следующем разделе, происходит формирование филамента. Отметим, что сгребание магнитного поля возникает благодаря замороженности магнитного поля.

4. КОНВЕКТИВНАЯ ЯЧЕЙКА И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Обсудим, как устроено поле скорости в одной конвективной ячейке. В центре ячейки имеется восходящий поток, а на ее границе — поток, движущийся вниз. В простейшей двумерной геометрии скорость в ячейке можно представить через функцию тока ψ :

$$v_x = -\partial_y \psi, \quad v_y = \partial_x \psi.$$

Для периодической цепочки валов с циркуляцией, меняющей свой знак при переходе от одной ячейки

к другой, ψ может быть записана в виде произведения двух синусов:

$$\psi = C \sin(k_1 x) \sin(k_2 y).$$

В результате

$$\begin{aligned} v_x &= -Ck_2 \sin(k_1 x) \cos(k_2 y), \\ v_y &= Ck_1 \cos(k_1 x) \sin(k_2 y). \end{aligned}$$

Для стационарной системы валов для конвекции Бенара $k_1 \neq k_2$, но они одного порядка [32] (см. также [33]). Как будет видно ниже, для всего последующего это не принципиально, поэтому далее для простоты положим $k_1 = k_2 = 1$, а константу $C = 1$ (это соответствует переходу к безразмерным переменным). В результате

$$\psi = \sin x \sin y, \tag{5}$$

а компоненты скорости

$$\begin{aligned} v_x &= -\sin x \cos y, \\ v_y &= \cos x \sin y. \end{aligned}$$

При этом линию $y = 0$ будем считать верхней границей конвективных ячеек. Скорость вдоль границы в этом случае параллельна поверхности, нормальная компонента соответственно равна нулю.

В численном эксперименте мы приводим результаты для двух ячеек с одним общим интерфейсом $x = 0$, вдоль которого охлажденная жидкость движется вниз. Двум ячейкам соответствует прямоугольная область $[-\pi \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq -\pi]$. Вдоль линий $x = \pm\pi, 0 \leq y \leq -\pi$ жидкость всплывает (восходящие потоки), а вдоль центральной линии $x = 0, 0 \leq y \leq -\pi$ — опускается вниз (нисходящий поток). Если в начальный момент времени магнитное поле \mathbf{B}_0 направлено вдоль оси y , то тогда можно видеть, что нормальная компонента скорости по отношению к \mathbf{B}_0 будет иметь положительные x -проекции в верхнем правом углу левой ячейки, т. е. линии $x = 0, 0 \leq y \leq \pi/2$, и отрицательные x -проекции — в верхнем левом углу правой ячейки. Таким образом, магнитные силовые линии в этой области будут притягиваться к нисходящему потоку, т. е. к центральной линии, где должен формироваться филамент. Аналогичная картина должна возникать соответственно в нижних левом и правом углах прямоугольника.

5. ФИЛАМЕНТАЦИЯ

Обратимся теперь к нахождению магнитного поля в зависимости от времени и координаты. Эта задача в общей постановке для уравнения (2) выглядит следующим образом. В двумерной геометрии,

когда магнитное поле лежит в плоскости конвективного течения, введем магнитный потенциал, представив его в виде

$$A = -B_0 x + a, \tag{6}$$

где магнитное поле \mathbf{B}_0 предполагается однородным, направленным вдоль оси y , а флуктуация a — периодической функцией координат как по x , так и по y . Последнее автоматически будет сохранять полный поток магнитного поля через границу $y = 0$. Пусть флуктуации в начальный момент времени отсутствуют, $a(t = 0) = 0$, т. е. мы стартуем с однородного магнитного поля.

Как было пояснено выше (см. рис. 1), филаментация магнитного поля должна появиться в правом верхнем углу левой ячейки вблизи начала нисходящего течения при $x = y = 0$. Рост магнитного поля в точке максимума должен наблюдаться вблизи именно этой точки.

Уравнение для магнитного потенциала A получается путем интегрирования уравнения в замороженности (2):

$$\frac{\partial A}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)A = 0, \tag{7}$$

где магнитное поле выражается стандартным образом через производные от A :

$$B_x = \frac{\partial A}{\partial y}, \quad B_y = -\frac{\partial A}{\partial x}. \tag{8}$$

Из этих соотношений следует, что линии постоянного значения A совпадают с магнитной силовой линией. С другой стороны, из уравнения (7) в силу скалярного произведения $(\mathbf{v} \cdot \nabla)A$ следует, что в (7) входит только нормальная компонента скорости к эквипотенциальной поверхности $A = \text{const}$, т. е. к магнитной силовой линии.

Уравнение для A просто интегрируется с помощью метода характеристик. Уравнение для характеристики имеет вид

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$$

с начальными условиями $\mathbf{r}|_{t=0} = \mathbf{a}$. Данные уравнения при записи покомпонентно представляют собой уравнения Гамильтона

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{9}$$

с начальными условиями $x(t = 0) = a_x$ и $y(t = 0) = a_y$. Координаты x и y в этих уравнениях являются канонически сопряженными величинами, а

функция тока $\psi(x, y)$ представляет собой гамильтониан. Поскольку поле скорости не зависит от времени, $\psi(x, y)$ есть сохраняющаяся величина. При этом магнитный потенциал на характеристике не меняется в зависимости от времени. Таким образом, динамика системы (9) определяется свойствами функции Гамильтона $\psi(x, y)$. Для ограниченной области функция $\psi(x, y)$ как двумерный рельеф характеризуется своими экстремумами — минимумами, максимумами и седловыми точками. В точках экстремума градиент от $\psi(x, y)$ равен нулю, что соответствует нулевой скорости. Экстремальная точка определяется из разложения $\psi(x, y)$ в окрестности экстремума $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$:

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}_0) + \frac{1}{2} D_{ij} \Delta x_i \Delta x_j + \dots, \quad (10)$$

где $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$,

$$D_{ij} = \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0}.$$

В максимуме или минимуме квадратичная форма $D_{ij} \Delta x_i \Delta x_j$ знакоопределена. В этой точке собственные значения матрицы D_{ij} являются знакоопределенными, если выполнено следующее неравенство:

$$\psi_{xx} \psi_{yy} - \psi_{xy}^2 > 0. \quad (11)$$

Согласно [23, 24] такие точки называют эллиптическими, соответственно области, где выполнено неравенство (11), — эллиптическими. При другом знаке в неравенстве (11) стационарная точка становится гиперболической, а область с другим знаком в (11) называется соответственно гиперболической.

Вдоль характеристики $x(t)$, $y(t)$ потенциал A постоянен и представляет собой пассивный скаляр. В зависимости от характера области (эллиптического или гиперболического) потенциал A будет вести себя по-разному.

Так, например, для функции тока (5) точка $x = y = 0$ является гиперболической; к ней, согласно рис. 1, магнитное поле должно притягиваться, что ведет к филаментации магнитного поля. Точка $x = y = -\pi/2$, наоборот, представляет собой эллиптическую точку, вокруг которой векторный потенциал будет вращаться.

Рассмотрим теперь решение задачи для начального условия (6) для функции тока (5). В силу того, что флуктуации магнитного потенциала a при $t = 0$ отсутствуют, магнитный потенциал на характеристике будет равен $A = -B_0 a_x$, т. е. зависит только от начального значения x -координаты жидких частиц a_x .

Уравнения (9) просто интегрируются. Из уравнения $\psi(x, y) = \psi(a_x, a_y)$ можно найти, например, $y = y(x, a_x, a_y)$ и затем подставить эту зависимость в правую часть первого уравнения (9). В результате уравнение для x ,

$$\frac{dx}{dt} = v_x(x, a_x, a_y),$$

тривиально интегрируется. Таким образом, мы приходим к общему решению задачи Коши для уравнения (7), которое записывается в неявном виде.

Нас будет интересовать поведение максимального магнитного поля. Качественные соображения, приведенные выше, показывают, что максимум магнитного поля должен находиться в малой окрестности точки $x = y = 0$, т. е. в начале нисходящего потока, на границе между ячейками. Рассмотрим малые отклонения от точки $x = 0$, $y = 0$, считая x и y малыми. Для таких значений x и y функция тока в соответствии с (5) может быть приближенно записано как

$$\psi = xy.$$

Начальное условие для ψ , очевидно, имеет вид

$$\psi = a_x a_y.$$

Для такой функции тока уравнение для x превращается в линейное:

$$\frac{dx}{dt} = -x,$$

решение которого дает экспоненциальное сужение масштаба

$$x = a_x e^{-t}. \quad (12)$$

Для y имеет место экспоненциальный рост: $y = a_y e^t$. Из этих асимптотик можно найти поведение магнитного поля в этой области. Для этого нужно пересчитать производные по x и по y в уравнениях (8) через производные по переменным a_x, a_y . Наиболее простой способ такого пересчета основан на технике якобианов. Отметим, что в силу гамильтоновости уравнений (9) якобиан

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(a_x, a_y)} = 1.$$

В частности, для B_x мы имеем следующую цепочку преобразований:

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial(A, x)}{\partial(y, x)} = \frac{\partial(A, x)}{\partial(a_y, a_x)} = \\ &= \frac{\partial A}{\partial a_y} \frac{\partial x}{\partial a_x} - \frac{\partial A}{\partial a_x} \frac{\partial x}{\partial a_y}. \end{aligned} \quad (13)$$

Аналогичные вычисления для B_y дают

$$B_y = -\frac{\partial(A, y)}{\partial(x, y)} = -\frac{\partial(A, y)}{\partial(a_x, a_y)} = -\frac{\partial A}{\partial a_x} \frac{\partial y}{\partial a_y} + \frac{\partial A}{\partial a_y} \frac{\partial y}{\partial a_x}. \quad (14)$$

Отсюда для найденной асимптотики $x \rightarrow 0$ и $y \rightarrow 0$ находим

$$B_x = 0, \quad B_y = B_0 e^t. \quad (15)$$

Если в начальный момент времени x -компонента магнитного поля не равна нулю, то B_x затухает со временем экспоненциально (см. ниже). Таким образом, максимальное значение магнитного поля растет во времени экспоненциально в окрестности гиперболической точки. Важно, что максимальное поле направлено вдоль нисходящего потока.

6. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

При численном интегрировании уравнений МГД вначале находился магнитный потенциал (6) для флуктуаций a , определяемых из уравнений (7):

$$\frac{\partial a}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) a = v_x B_0. \quad (16)$$

Эта задача решалась в области $-\pi < x < \pi$, $-\pi < y < \pi$ с периодическими граничными условиями по обеим координатам с выделением в дальнейшем нижней полосы ($\pi < y < 0$), соответствующей конвективным ячейкам. Зная магнитный потенциал, по формулам (8) можно вычислить магнитное поле. В целях удобства среднее магнитное поле было выбрано $B_0 = 1$.

Численно уравнение (16) решалось на сетке 2000×2000 с помощью явной численной схемы с малым шагом, обеспечивающим устойчивость алгоритма [51]. Шаг по времени выбирался соответствующим пространственному шагу, в большинстве случаев он составлял величину $\Delta t = 2.5 \cdot 10^{-5}$.

На рис. 2–4 представлены результаты интегрирования для векторного потенциала $A(x, y)$ для трех моментов времени. Напомним, что линии уровня $A(x, y)$ совпадают с силовыми линиями магнитного поля, которым на рисунках соответствуют границы между областями одного цвета. Можно видеть, что со временем растет закрутка линий магнитного поля внутри ячеек, что указывает на то, что эта область является эллиптической. При этом на оси y линии со временем сгущаются, что соответствует росту магнитного поля в центре — на нисходящем потоке.

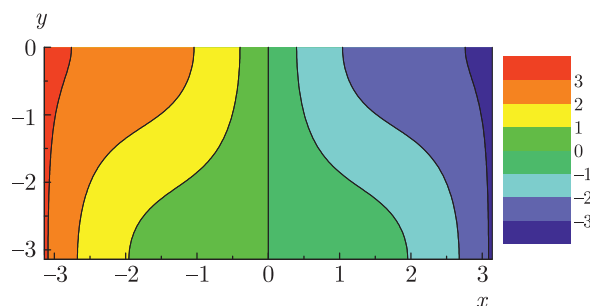


Рис. 2. (В цвете онлайн) Векторный потенциал магнитного поля в идеальном случае при $t = 1$

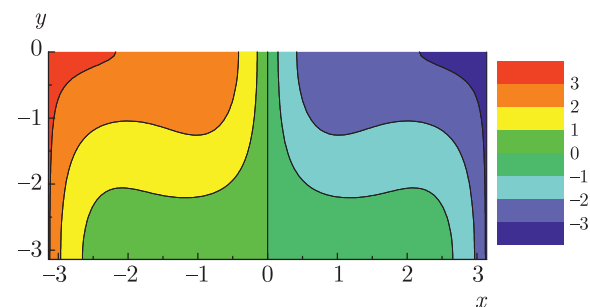


Рис. 3. (В цвете онлайн) Векторный потенциал магнитного поля в идеальном случае при $t = 2$

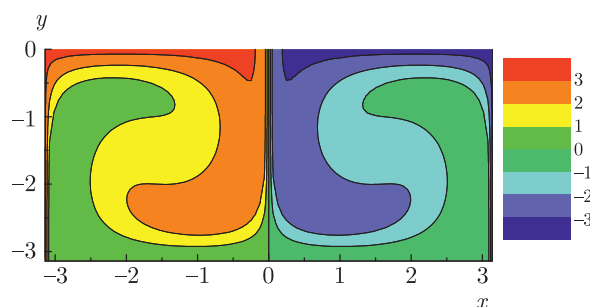


Рис. 4. (В цвете онлайн) Векторный потенциал магнитного поля в идеальном случае при $t = 5$

На рис. 5 представлена координатная зависимость вертикальной компоненты магнитного поля на оси x . Отметим, что линии уровня векторного потенциала направлены вертикально, т. е. горизонтальная компонента магнитного поля обращается в нуль. На оси x происходит формирование пика магнитного поля в точке $x = 0$, ширина которого уменьшается по мере его роста.

Максимум магнитного поля в филаменте растет со временем экспоненциально с инкрементом $\gamma = 1$ (рис. 6 и 7, черные кривые) в полном соответствии с аналитическим выражением (15).

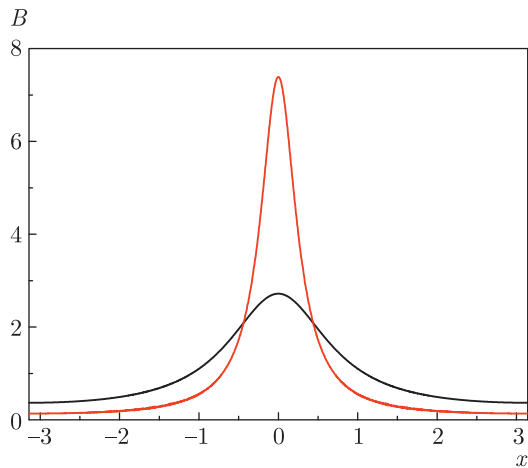


Рис. 5. (В цвете онлайн) Магнитное поле на оси x . Черная линия показывает случай $t = 1$, красная — $t = 2$

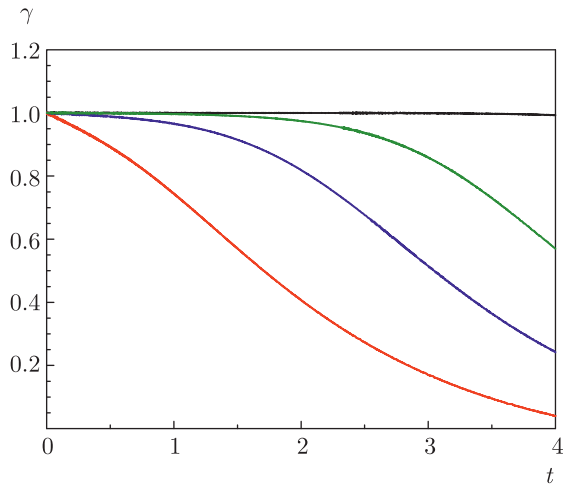


Рис. 7. (В цвете онлайн) Инкремент $\gamma = d(\ln B_{max})/dt$. Черная кривая показывает идеальный случай, красная — $Re_m = 10$, синяя — $Re_m = 10^2$, зеленая — $Re_m = 10^3$

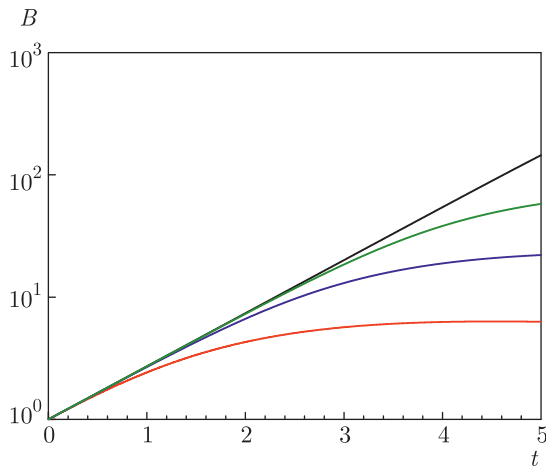


Рис. 6. (В цвете онлайн) Эволюция магнитного поля со временем. Черная кривая показывает идеальный случай, красная — $Re_m = 10$, синяя — $Re_m = 10^2$, зеленая — $Re_m = 10^3$

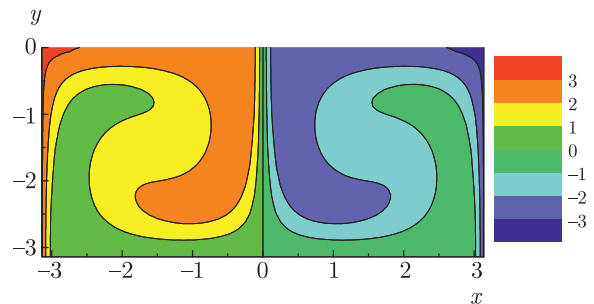


Рис. 8. (В цвете онлайн) z -компонента векторного потенциала магнитного поля при $t = 5$, $Re_m = 10^2$

Из сохранения потока магнитного поля через горизонтальную поверхность,

$$\Phi = \int_{-\pi}^{\pi} B_y dx,$$

следует оценка для ширины пика: $\Delta \approx 2\pi e^{-t}$, которая согласуется с (12).

7. ВЛИЯНИЕ ВЯЗКОСТИ НА ЭВОЛЮЦИЮ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Рост магнитного поля в филаменте связан с вмороженностью, которая разрушается за счет конеч-

ной магнитной вязкости. В этом случае в уравнении для a появляется член, ответственный за магнитную вязкость:

$$\frac{\partial a}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)a = B_0 v_x + \frac{1}{Re_m} \Delta a,$$

где Re_m — магнитное число Рейнольдса (в этом уравнении мы используем безразмерные переменные).

Пространственное распределение векторного потенциала для случая $Re_m = 10^2$ показано на рис. 8. По сравнению с бездиссипативным случаем никаких кардинальных изменений не происходит, за исключением несколько меньшей закрученности.

Однако гораздо больший интерес представляет изучение эволюции магнитного поля со временем для разных магнитных чисел Рейнольдса и ее сравнение со случаем нулевой магнитной вязкости. На раннем этапе, когда работает вмороженность, рост магнитного поля происходит по экспоненциальному

закону, а потом с уменьшением толщины филамента происходит насыщение — выход на стационарное значение B_{sat} за счет разрушения вмороженности. При этом, по мере уменьшения числа Рейнольдса данное значение уменьшается (рис. 6).

Для оценки B_{sat} вернемся к исходному уравнению для магнитного поля (1), записанному в безразмерном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{B}] + \frac{1}{\text{Re}_m} \Delta \mathbf{B}. \quad (17)$$

Как показывает численный эксперимент, а также аналитические вычисления, на прямой $y = 0$ магнитное поле максимально в точке $x = 0$. В окрестности этой точки магнитное поле (имеющее только одну вертикальную компоненту) подчиняется уравнению, которое следует из (17):

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (x B_y) + \frac{1}{\text{Re}_m} \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2}.$$

Стационарное решение этого уравнения находится из интегрирования

$$\frac{\partial}{\partial x} (B_y x) + \frac{1}{\text{Re}_m} \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} = 0,$$

что дает

$$B(x) = B_{max} \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{2 \text{Re}_m}\right). \quad (18)$$

Очевидно, что константа интегрирования x_0 должна быть положена нулю, а величину B_{max} следует определить из сохранения потока магнитного поля. Из (18) имеем

$$\Phi \approx B_{max} \sqrt{\frac{2\pi}{\text{Re}_m}}. \quad (19)$$

В начальный момент $\Phi = 2\pi B_0$, откуда следует оценка для максимальной амплитуды:

$$B_{max} = B_0 \sqrt{2\pi \text{Re}_m}.$$

Следует отметить, что подобная оценка была получена в ряде работ [23, 25, 26]. К сожалению, определить, когда данная оценка была получена впервые, достаточно затруднительно. Отметим, что данные оценки для магнитного поля близки к результатам численного моделирования (рис. 6, 9). Ширина δ этого распределения определяется только вязкостью. В размерных переменных $\delta \sim L/\sqrt{\text{Re}_m}$. Время выхода на стационарное значение может быть оценено как

$$T \sim \frac{1}{2} \ln \text{Re}_m.$$

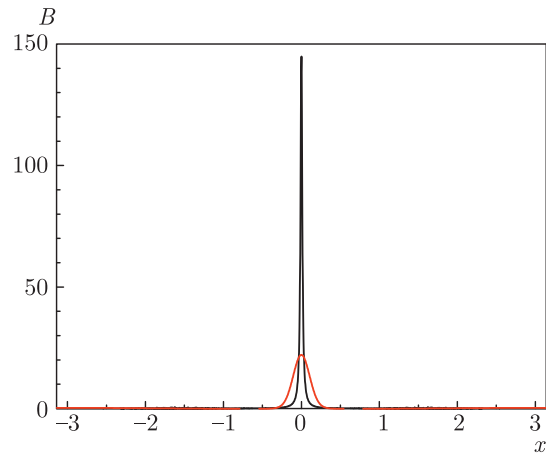


Рис. 9. (В цвете онлайн) Магнитное поле на оси x при $t = 5$. Черная линия показывает идеальный случай, красная — $\text{Re}_m = 10^2$

В размерных переменных время роста

$$t_0 = T \frac{L^2}{\eta_m} = \frac{1}{2} \frac{L^2}{\eta_m} \ln\left(\frac{LV}{\eta_m}\right).$$

8. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Таким образом, для двумерных течений филаментация магнитного поля происходит в области нисходящего потока. Экспоненциальный рост магнитного поля наблюдается в окрестности гиперболичности течения, что, по нашему мнению, является главным критерием возможности филаментации магнитного поля.

В рассмотренном нами случае конвективных валов это происходит в окрестности гиперболической точки $x = y = 0$, где компоненты скорости \mathbf{v} равны соответственно $v_x = -x$, $v_y = y$. Перпендикулярная оси y компонента скорости v_x , благодаря вмороженности, собирает магнитное поле, приводя к экспоненциальному росту. Возникает вопрос, насколько чувствительным является влияние третьей компоненты магнитного поля для реальной трехмерной задачи. Как отмечалось, рост магнитного поля в двумерной ситуации определяется гиперболичностью течения вблизи интерфейса двух конвективных ячеек. В трехмерном случае эта гиперболичность сохраняется: при приближении к интерфейсу течение можно считать плоским, т.е. оно имеет ту же структуру, что и в двумерном случае:

$$v_x = -x, \quad v_y = y, \quad v_z = 0. \quad (20)$$

В этом случае поведение третьей компоненты магнитного поля, параллельной интерфейсу, в его окрестности согласно (2) будет определяться из уравнения

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)B_z = 0. \quad (21)$$

Таким образом, в окрестности плоскости интерфейса B_z представляет собой лагранжев инвариант, который не изменяется при движении вместе с плазмой. При учете вязкого затухания B_z будет затухать. Что касается двух других компонент магнитного поля, то они находятся из уравнений вмерожности

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_x}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)B_x &= -B_x, \\ \frac{\partial B_y}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)B_y &= B_y, \end{aligned}$$

где скорость дается формулой (20). Из второго уравнения следует, что компонента B_y растет экспоненциально (ср. с (15)), а B_x , наоборот, затухает экспоненциально, примерно по закону e^{-t} . Этот процесс продолжается до тех пор, пока не разрушится вмерожность и магнитное поле в филаменте не достигнет значения насыщения за счет магнитной вязкости. Из этого следует, что филаменты магнитного поля должны быть сплюснуты относительно плоскости интерфейса. Важно отметить также, что разница между горизонтальной и вертикальной компонентами магнитного поля оказывается большой.

Обсудим теперь, как влияют изменчивость конвективных ячеек на механизм формирования магнитных филаментов и магнитное поле филамента — на конвективное течение.

Характерное время изменчивости конвективных ячеек может быть оценено как отношение размера ячейки $L \sim 10^8$ см к характерной скорости $V \sim 10^5$ см/с, что согласуется с данными наблюдений. Это время порядка обратного инкремента γ^{-1} , т. е. усиление магнитного поля в «спокойном» режиме составляет грубо один порядок, но при этом конвективное движение не прекращается и поэтому выталкивание магнитного поля из центра ячейки на периферию не останавливается. Второй вопрос — учет обратного влияния магнитного поля на характеристики течений. Для типичной скорости порядка 10^5 см/с и характерной плотности около 10^{-5} г/см³ можно получить, что вплоть до напряженности магнитного поля порядка 1 кГс имеет смысл говорить о слабом влиянии магнитных полей на характеристики течений. Для больших полей, по нашему мнению, этот механизм должен, тем не менее, работать, по-

скольку в центре ячейки за счет выталкивания магнитного поля на периферию течение практически не зависит от магнитного поля, а в области нисходящего течения, где формируется магнитный филамент, магнитное поле параллельно течению и должно быть практически стационарным.

Отметим также, что представленные в данной работе результаты в целом подтверждаются численным моделированием [36, 52, 53] и данными наблюдений [54, 55], свидетельствующими о корреляции усиливающихся магнитных полей с нисходящими потоками. Кроме того, стоит упомянуть ряд численных результатов [36, 56], полученных для конвективных ячеек шестиугольной формы, в которых наблюдается указанная корреляция.

Благодарности. Авторы благодарны В. В. Красносельских, И. Н. Китиашвили, А. Г. Косовичеву и И. В. Колоколову за полезные обсуждения и ряд ценных замечаний.

Финансирование. Работа Е. К. выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 19-72-30028), работа Е. М. выполнялась в рамках проекта Министерства науки и высшего образования РФ «Экстремальные явления и когерентные структуры в нелинейной физике».

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Колмогоров, ДАН СССР **30**, 299 (1941).
2. А. М. Обухов, ДАН СССР **32**, 22 (1941).
3. D. Chae, in *Handbook of Differential Equations: Evolutionary Equation*, ed. by C. M. Dafermos and M. Pokorný, Elsevier, Amsterdam (2008), Vol. 4, p. 1.
4. J. D. Gibbon, *Physica D* **237**, 1894 (2008).
5. T. Y. Hou and R. Li, *J. Comp. Phys.* **226**, 379 (2007).
6. W. Wolibner, *Math. Z.* **37**, 698 (1933).
7. T. Kato, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **25**, 189 (1967).
8. В. И. Юдович, ЖВМиМФ **3**, 1032 (1963).
9. E. A. Kuznetsov, V. Naulin, A. H. Nielsen et al., *Theor. Comput. Fluid Dyn.* **19**, 105110 (2007).
10. D. S. Agafontsev, E. A. Kuznetsov, and A. A. Mailybaev, *Phys. Fluids* **27**, 085102 (2015).
11. Д. С. Агафонцев, Е. А. Кузнецов, А. А. Майлыбаев, Письма в ЖЭТФ **104**, 695 (2016).
12. D. S. Agafontsev, E. A. Kuznetsov, and A. A. Mailybaev, *J. Fluid Mech.* **813**, R1 (2017).

13. Е. А. Кузнецов, В. П. Рубан, Письма в ЖЭТФ **67**, 1015 (1998).
14. E. A. Kuznetsov and V. P. Ruban, Phys. Rev. E **61**, 831 (2000).
15. Е. А. Кузнецов, Письма в ЖЭТФ **76**, 406 (2002).
16. Е. А. Кузнецов, Е. В. Серещенко, Письма в ЖЭТФ **109**, 231 (2019).
17. E. A. Kuznetsov, T. Passot, and P. L. Sulem, Phys. Plasm. **11**, 1410 (2004).
18. M. Chertkov, G. Falkovich, I. Kolokolov, and M. Vergassola, Phys. Rev. Lett. **83**, 4065 (1999).
19. A. A. Schekochihin, S. C. Cowley, S. F. Taylor, J. L. Maron, and J. McWilliams, Astrophys. J. **612**, 276 (2004).
20. Д. Д. Соколов, УФН **185**, 643 (2015).
21. E. N. Parker, Astrophys. J. **138**, 552 (1963).
22. Е. Паркер, *Космические магнитные поля, их образование и проявления*, Мир, Москва (1982).
23. J. Weiss, Physica D: Nonlinear Phen. **48**, 273 (1991).
24. A. Okubo, Deep Sea Research and Oceanographic Abstracts **17**, 445 (1970).
25. D. J. Galloway and N. O. Weiss, Astrophys. J. **243**, 945 (1981).
26. M. Stix, *The Sun: an Introduction*, Springer, Berlin (2002).
27. URL: <https://sohowww.nascom.nasa.gov/gallery/images/304time.html>.
28. URL: <https://www.nso.edu/telescopes/dkist/first-light-full-image/>.
29. S. K. Solanki, Astron. Astrophys. Rev. **11**, 153 (2003).
30. S. Bose and K. Nagaraju, Astrophys. J. **862**, 35 (2018).
31. M. Ryutova, *Physics of Magnetic Flux Tubes*, Springer, Berlin (2015).
32. Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, *Конвективная неустойчивость несжимаемой жидкости*, Наука, Москва (1972).
33. Е. А. Кузнецов, М. Д. Спектор, ПМТФ **2**, 76 (1980).
34. J. A. Eddy, *A New Sun: the Solar Results from Skylab*, **402** Scientific and Technical Information Office, National Aeronautics and Space Agency, Washington (1979).
35. A. G. Kosovichev, Space Sci. Rev. **144**, 175 (2009).
36. A. V. Getling, O. S. Mazhorova, and O. V. Shcherlitsa, in *Proceedings of the International Astronomical Union, IAU Symposium* (2013), Vol. 294, p. 137.
37. N. I. Shakura and R. A. Sunyaev, Astron. Astrophys. **24**, 337 (1973).
38. G. Rüdiger, D. Elstner, and T. F. Stepiński, Astron. Astrophys. **298**, 334 (1995).
39. D. Moss, D. Sokoloff, and V. Suleimanov, Astron. Astrophys. **588**, A18 (2016).
40. J. F. Hawley, S. A. Balbus, and J. M. Stone, Astrophys. J. **554**, L49 (2001).
41. R. Narayan, E. Quataert, I. V. Igumenshchev et al., Astrophys. J. **577**, 295 (2002).
42. M. S. B. Coleman, E. Yerger, O. Blaes et al, Mon. Not. R. Astron. Soc. **467**, 2625 (2017).
43. M. Ghasemnezhad, M. Not. R. Astron. Soc. **469**, 3322 (2017).
44. W. Bethune and L. Henrik, arXiv:2003.13263.
45. A. Shukurov, D. Sokoloff, K. Subramanian et al., Astron. Astrophys. **448**, L33 (2006).
46. S. Sur, A. Shukurov, and K. Subramanian, Mon. Not. R. Astron. Soc. **377**, 874 (2007).
47. Е. А. Михайлов, Письма в Астрон. журн. **39**, 474 (2013).
48. J. Braithwaite, Mon. Not. R. Astron. Soc. **422**, 619 (2012).
49. E. I. Yakubovich and D. A. Zenkovich, J. Fluid Mech. **443**, 167 (2001).
50. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, УФН **167**, 1137 (1997).
51. А. А. Самарский, Ю. П. Попов, *Разностные методы решения задач газовой динамики*, Наука, Москва (1982).
52. А. В. Гетлинг, Астрон. журн. **78**, 661 (2001).
53. I. N. Kitiashvili, A. G. Kosovichev, A. A. Wray et al., Astrophys. J. **719**, 307 (2010).
54. S. K. Tiwarui, M. van Noort, A. Lagg et al., Astron. Astrophys. **557**, A25 (2013).
55. V. Zakharov, J. Hirzberger, T. L. Riethmüller et al., Astron. Astrophys. **488**, L17 (2008).
56. A. V. Getling and X. M. Bao, in *Proceed. of IAU Symposium*, ed. by F. Kupka, I. Roxburg, and K. Chan, Prague (2006), Vol. 239, p. 496.