

# ХАОТИЧЕСКОЕ БЛУЖДЕНИЕ ХОЛОДНЫХ АТОМОВ В ДВУМЕРНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ РЕШЕТКЕ

*С. В. Пранц\**

*Тихоокеанский океанологический институт  
Дальневосточного отделения Российской академии наук  
690041, Владивосток, Россия*

Поступила в редакцию 5 марта 2020 г.,  
после переработки 24 марта 2020 г.  
Принята к публикации 26 марта 2020 г.

Исследуется когерентная динамика холодных атомов в двумерной оптической решетке с интерферирующими лазерными пучками с учетом связи внутренних и внешних степеней свободы атома. В полуклассическом приближении получена система дифференциальных уравнений для связанных степеней свободы, которая в зависимости от величины атомно-полевой расстройки резонанса имеет регулярные и хаотические решения. Гамильтонов хаос проявляется в виде хаотических осцилляций Раби и хаотического блуждания холодных атомов в решетке при сравнительно малых значениях расстройки резонанса. Показано, что детерминированный хаос возникает в результате скачков величины электрического дипольного момента атома при приближении к узлам двумерной стоячей волны. Это, в свою очередь, вызывает псевдослучайное поведение импульса атомов и, как следствие, их хаотическое блуждание в абсолютно жесткой двумерной оптической решетке без какой-либо внешней модуляции ее параметров. В численных экспериментах для миллиона атомов показано, что их распределение по решетке существенно различается для разных значений расстройки резонанса. Этот факт можно использовать для обнаружения эффекта хаотического блуждания холодных атомов в реальном эксперименте абсорбционным методом изображения.

DOI: 10.31857/S0044451020090047

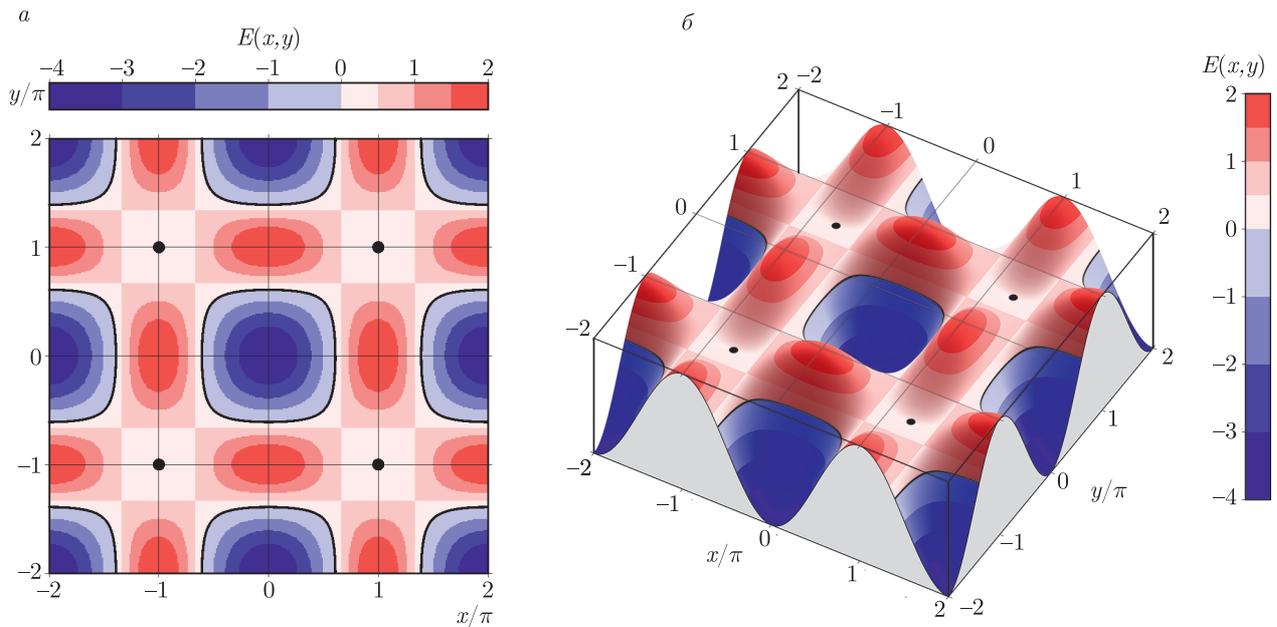
## 1. ВВЕДЕНИЕ

Оптические решетки (ОР) создаются с помощью когерентных лазерных пучков, распространяющихся навстречу друг другу. Их интерференция создает оптический потенциал, который можно использовать для манипуляции холодными атомами, загружаемыми в решетку из магнитооптической ловушки. Атомы в стоячей световой волне испытывают действие светоиндуцированной силы и концентрируются вблизи узлов или пучностей световой волны в зависимости от знака разности частоты оптического перехода  $\omega_a$  и лазерной частоты  $\omega_f$  [1–3]. При «голубой» расстройке резонанса ( $\omega_f - \omega_a > 0$ ) атомы стремятся к узлам, а при «красной» ( $\omega_f - \omega_a < 0$ ) — к пучностям [4]. Достаточно хорошо охлажденные атомы можно аккумулировать в ямах ОР субмикрометрового размера [5]. Экспериментально реализо-

ваны ОР различной размерности и геометрии [6–9] путем настройки таких параметров, как число лазерных пучков, их относительные углы распространения и фазы, частоты и интенсивности. Плененные в ОР атомы являются хорошо изолированными и контролируруемыми квантовыми объектами, удобными для изучения, среди прочего, квантового хаоса и квантово-классического соответствия (см., например, эксперименты [10–12] и теоретические работы [13, 14]).

Большинство экспериментальных и теоретических работ в этой области выполнено для ОР, далеко отстроенных от резонанса, что подавляет спонтанное излучение и упрощает расчеты и их интерпретацию. В то же время это исключает возможность ряда интересных динамических эффектов, возникающих в результате взаимодействия внутренних и внешних степеней свободы атома. В одномерных ОР такая связь приводит к возникновению хаотических осцилляций Раби [15, 16], хаотического рассеяния атомов, динамических фракталов, полетов Леви

\* E-mail: prants@poi.dvo.ru



**Рис. 1.** (В цвете онлайн) *a*) Контуры напряженности электрического поля  $E(x, y)$  в двумерной ОР с интерферирующими лазерными пучками;  $E(x, y) = 0$  в узловых точках и на черных замкнутых узловых кривых. *б*) Трехмерный вид  $E(x, y)$ . Все величины приведены в безразмерных единицах

и аномальной диффузии [17, 18]. Детальные теории гамильтонова и диссипативного хаотического транспорта холодных атомов в одномерных ОР изложены в работах [19, 20]. В работе [21] предложено использовать эти эффекты для создания пространственных структур высокого разрешения в оптической нанолитографии, а в работе [22] — для создания светоиндуцированного атомного лифта.

Что касается двумерных ОР, то когерентная атомная динамика исследовалась теоретически и численно в работах [23–26], однако только в режиме больших расстройек резонанса, когда можно адиабатически исключить возбужденный атомный уровень и, стало быть, исключить из рассмотрения внутреннюю динамику атомов. В настоящей работе мы теоретически и численно исследуем когерентную динамику холодных атомов в почти резонансной двумерной ОР с интерферирующими лазерными пучками, находим различные режимы трансляционного движения атомов и их зависимость от внутренних степеней свободы и предсказываем эффект хаотического блуждания холодных атомов по решетке при полностью детерминированных условиях.

## 2. МОДЕЛЬ

Рассмотрим двумерную ОР, созданную двумя ортогональными плоскими волнами с одинаковы-

ми волновыми векторами и поляризациями, распространяющимися вдоль осей  $x$  и  $y$ . Запишем напряженность электрического поля в общем виде:

$$\mathcal{E}(x, y) = \mathcal{E}_0[\cos(k_f x) + \cos(k_f y) + 2\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \cos \phi \cos(k_f x) \cos(k_f y)], \quad (1)$$

где  $\mathbf{e}_{1,2}$  — векторы поляризации. Расположение узлов и пучностей двумерной стоячей волны зависит от фазы пучков. Если  $\phi = \pi/2$ , то интерференция отсутствует. Эксперименты с атомами рубидия [9] показали, что фаза является важным условием для наблюдения каналирования и отклонения атомов в двумерной ОР.

В этой работе мы рассмотрим модель с интерферирующими лазерными пучками с фазой  $\phi = 0$ . На рис. 1 показаны контуры напряженности электрического поля  $E(x, y) \equiv -(\cos x + \cos y + 2 \cos x \cos y)$  и ее трехмерное представление. В каждой единичной ячейке находятся 4 узловые точки и замкнутая узловая линия, где  $E(x, y) = 0$ . Минимальное значение  $E(x, y) = -4$  имеем в точке  $x = y = 0$ , а максимальные значения  $E(x, y) = 2$  — в точках  $(0, -1)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, 1)$  и  $(1, 0)$ .

В полуклассическом приближении внутренняя динамика атома трактуется квантовомеханически, а трансляционное движение рассматривается в рамках классической механики. Полуклассический гамильтониан двухуровневого атома в двумерной ОР

запишем в системе координат, вращающейся с лазерной частотой  $\omega_f$ :

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_a}(P_x^2 + P_y^2) + \frac{1}{2}\hbar(\omega_a - \omega_f)\hat{\sigma}_z - \hbar\Omega(\hat{\sigma}_- + \hat{\sigma}_+) \times [\cos(k_f X) + \cos(k_f Y) + 2\cos(k_f X)\cos(k_f Y)], \quad (2)$$

где  $\hat{\sigma}_{\pm, z}$  — операторы Паули для внутренних степеней свободы,  $X, Y$  и  $P_x, P_y$  — классические координаты и импульсы атома,  $\Omega = d\mathcal{E}_0/\hbar$  — максимальная частота Раби,  $d$  — индуцированный электрический дипольный момент атома.

Вся интересующая нас физика содержится в динамике одиночного атома. Большое число взаимодействующих атомов просто увеличивает сигнал. Пренебрегая релаксацией и рассматривая только когерентную эволюцию, опишем атомную динамику с квантованными внутренними степенями свободы и с классической трансляционной степенью свободы системой уравнений Гамильтона – Блоха:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \omega_r p_x, & \dot{y} &= \omega_r p_y, \\ \dot{p}_x &= -u(\sin x + 2\sin x \cos y), \\ \dot{p}_y &= -u(\sin y + 2\cos x \sin y), & \dot{u} &= \Delta v, \\ \dot{v} &= -\Delta u + 2z(\cos x + \cos y + 2\cos x \cos y), \\ \dot{z} &= -2v(\cos x + \cos y + 2\cos x \cos y), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $x \equiv k_f X, y \equiv k_f Y, p_x \equiv P_x/\hbar k_f, p_y \equiv P_y/\hbar k_f$ ,  $u$  и  $v$  — синхронизированная и квадратурная компоненты электрического дипольного момента,  $z$  — инверсия населенности. Точка означает дифференцирование по безразмерному времени  $\tau \equiv \Omega t$ . Система уравнений (3) имеет два управляющих параметра,

$$\omega_r \equiv \hbar k_f^2/m_a \Omega, \quad \Delta \equiv (\omega_f - \omega_a)/\Omega, \quad (4)$$

нормированную частоту отдачи  $\omega_r$ , характеризующую энергию отдачи атома при стимулированном излучении или поглощении фотонов, и нормированную расстройку резонанса  $\Delta$ . У этой системы уравнений имеются два интеграла движения: длина вектора Блоха

$$u^2 + v^2 + z^2 = 1 \quad (5)$$

и полная энергия

$$\begin{aligned} H \equiv \frac{\omega_r}{2}(p_x^2 + p_y^2) - u(\cos x + \cos y + 2\cos x \cos y) - \\ - \frac{\Delta}{2}z = K + (I + W), \end{aligned} \quad (6)$$

которая является суммой атомной кинетической энергии  $K$ , оптического потенциала  $I \equiv u(\tau)E(x, y)$  и внутренней энергии  $W \equiv (\Delta/2)z(\tau)$ .

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ

#### 3.1. Регулярный режим движения атома

Тип движения атома в решетке зависит от начальных условий и от значений управляющих параметров. Качественно его можно описать, анализируя полную энергию атома (6). Интерферирующие лазерные пучки создают двумерный оптический потенциал  $I(x, y, \tau)$ , в котором находится атом. Очевидно, что атом пленен в потенциальной яме, если максимальное значение его кинетической энергии  $K$  не достаточно для преодоления потенциального барьера. Атом движется баллистически, если его кинетическая энергия всегда больше величины  $I + W$ . При других соотношениях слагаемых интеграла движения (6) атом движется сложным образом, перемежая осцилляции в ямах оптического потенциала с баллистическими полетами.

Итак, атомы захватываются в ямы оптического потенциала при выполнении условия

$$K(x, y, \tau) < |I(x, y, \tau) + W(x, y, \tau)|.$$

Иначе говоря, атомы осциллируют в потенциальных ямах, если  $H < 0$ . При выполнении условия

$$K(x, y, \tau) > |I(x, y, \tau) + W(x, y, \tau)|$$

атомы совершают баллистический полет. Максимальное значение потенциала  $I(x, y, \tau)$  равно 4, поскольку  $|u(x, y, \tau)| \leq 1$  и  $E(x, y) \leq 4$ . Когда величина  $u$  приближается к своему максимальному значению, равному по модулю единице, инверсия населенности  $z$  стремится к нулю, что следует из закона сохранения длины вектора Блоха (5). Отсюда получаем условие для баллистического движения атомов:  $H > 4$ . Таким образом, движение атомов в решетке нетривиально при условии  $0 < H < 4$ .

Тип движения атома существенно зависит от значения расстройки резонанса. Из пятого уравнения системы (3) следует, что  $u = u_0 = \text{const}$  при точном резонансе ( $\Delta = 0$ ), и, таким образом, движение атома не зависит от эволюции внутренних степеней свободы. При начальном условии  $u_0 = 0$ , принятом в этой работе, и при точном резонансе оптический потенциал  $I(x, y, \tau)$  и внутренняя энергия  $W(x, y, \tau)$  равны нулю. Так что у атома имеется только постоянная кинетическая энергия, и он летит сквозь ОР с постоянной скоростью. Поведение других компонент вектора Блоха,  $v$  и  $z$ , зависит от положения атома в потенциале. Несмотря на нулевой оптический потенциал при  $\Delta = 0$ , пространственное изменение светового поля модулирует осцилляции Раби.

### 3.2. Хаотическое блуждание атома

Принимая во внимание два интеграла движения, мы можем свести систему уравнений (3) к эффективной гамильтоновой автономной динамической системе с тремя степенями свободы в шестимерном фазовом пространстве. Движение в многомерном фазовом пространстве характеризуется набором показателей Ляпунова. Положительное значение максимального показателя Ляпунова  $\lambda$  (при заданных значениях управляющих параметров и начальных условий) означает хаотическое движение. В теории максимальный показатель Ляпунова рассчитывается как предел в бесконечном времени. На практике его вычисление выполняется до момента времени, когда  $\lambda$  достигает некоторого почти постоянного значения, которое называется показателем Ляпунова для конечного времени.

Максимальный показатель Ляпунова характеризует среднюю скорость расхождения изначально близких траекторий в фазовом пространстве:

$$\lambda = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \lambda(\tau), \quad \lambda(\tau) = \lim_{\delta(0) \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \ln \frac{\delta(\tau)}{\delta(0)}, \quad (7)$$

где  $\delta(0)$  и  $\delta(\tau)$  — расстояния между двумя траекториями в моменты времени  $\tau = 0$  и  $\tau$ . Показатель Ляпунова для конечного времени рассчитывается согласно работе [27] в зависимости от значений расстройки  $\Delta$  при фиксированном значении частоты отдачи  $\omega_r = 10^{-3}$ . Результат приведен на рис. 2. Положительные значения  $\lambda$  находятся в сравнительно узком диапазоне значений расстройки по обе стороны от нуля. Следовательно, можно ожидать хаотическое движение как при голубой расстройке  $\Delta > 0$ , так и при красной  $\Delta < 0$ , но при их сравнительно малых значениях по абсолютной величине.

Из анализа полной энергии атома в предыдущем разделе следует, что сложное движение атомов возможно при условии  $0 < H < 4$ . Хаотическое движение возникает при таких значениях расстройки, при которых  $\lambda > 0$  (см. рис. 2). Для численного моделирования примем  $\Delta = 0.191$ , для которого  $\lambda = 0.0382$ , и зафиксируем следующие начальные условия:  $x(0) = y(0) = 0$ ,  $p_x(0) = 8$ ,  $p_y(0) = 10$ ,  $u_0 = v_0 = 0$ ,  $z_0 = -1$ , означающие, что атом помещен в начало координат в основном состоянии с определенным импульсом и  $H \approx 0.18$ . Его траектория показана на рис. 3а. Такое движение можно назвать хаотическим блужданием, потому что при  $\lambda > 0$  и направление, и скорость движения атома меняются псевдослучайным образом в смысле экспоненци-

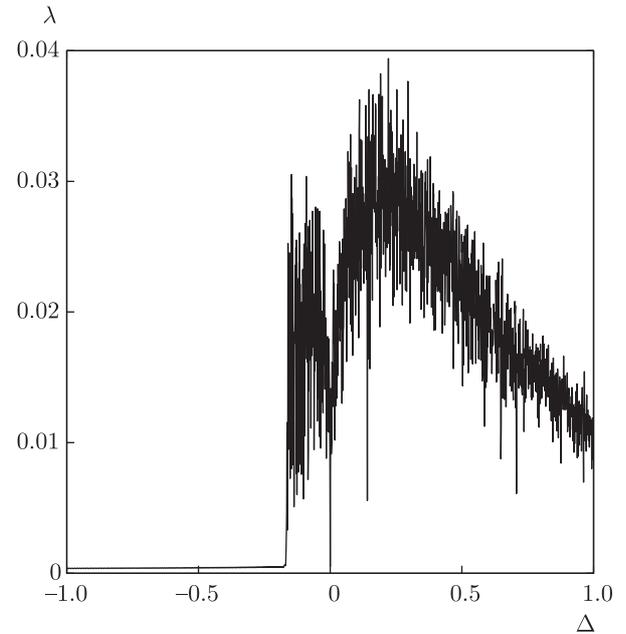
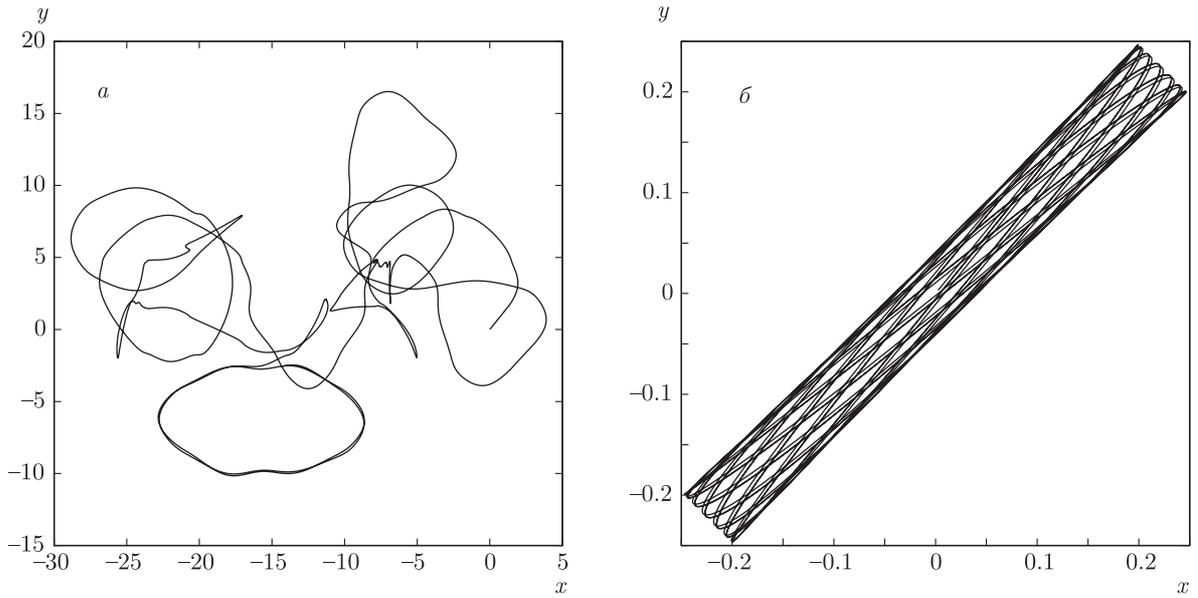


Рис. 2. Зависимость максимального показателя Ляпунова от нормированной частоты расстройки  $\Delta$  при фиксированном значении нормированной частоты отдачи  $\omega_r = 10^{-3}$

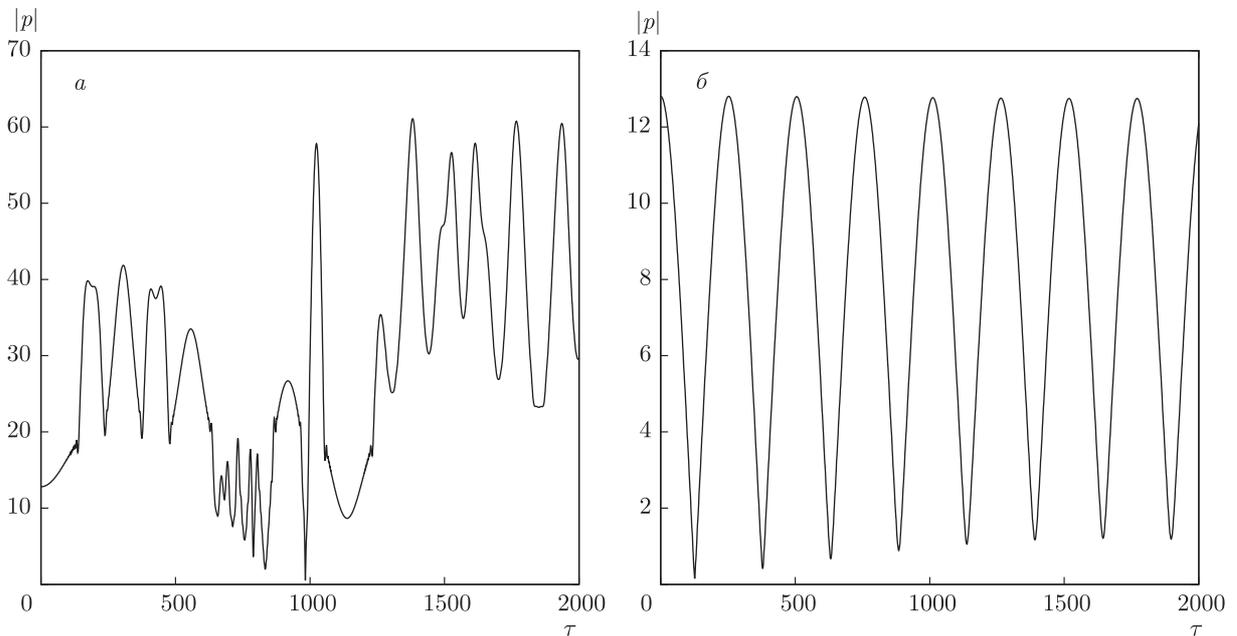
альной чувствительности к малым вариациям начальных условий и (или) управляющих параметров. Осцилляции атома в ямах оптического потенциала чередуются с баллистическими полетами. Для сравнения на рис. 3б показаны регулярные осцилляции атома в первой яме оптического потенциала при тех же условиях, что и на рис. 3а, но при  $\Delta = -0.5$ , для которого  $\lambda = 0$  (см. рис. 2).

Светоиндуцированная сила (третье и четвертое уравнения системы (3)) меняет свое значение по мере движения атома в ОР. Хаотические осцилляции импульса атома  $p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$  для  $\Delta = 0.191$  на рис. 4а свидетельствуют о блуждании атома по решетке. Наиболее значительные изменения импульса происходят при приближении атома к узловым линиям или узловым точкам стоячей волны (см. рис. 1), где величина напряженности электрического поля  $E$  равна нулю. Поведение атомного импульса в регулярной моде движения при  $\Delta = -0.5$  ( $\lambda = 0$ ) кардинально отличается (рис. 4б).

Нерегулярные осцилляции атомного импульса в хаотической моде движения вызваны скачкообразным поведением компоненты вектора Блоха  $u$ , а следовательно, и светоиндуцированной силы при приближении атома к узлам стоячей волны. На рис. 5 крестиками показаны моменты времени, когда атом попадает в малую окрестность узла. Как правило, в эти моменты времени происходят скачкообразные



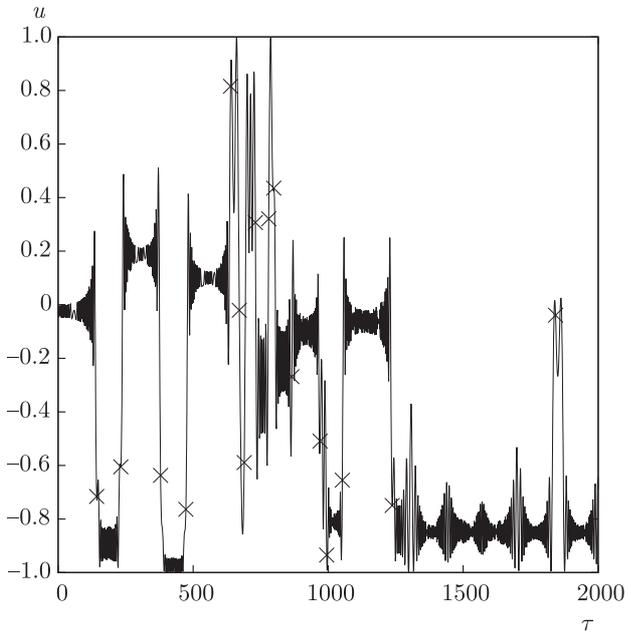
**Рис. 3.** а) Хаотическое блуждание холодного атома в двумерной ОР при фиксированных значениях  $\Delta = 0.191$  и  $\omega_r = 10^{-3}$ . б) Регулярные колебания атома в первой яме оптического потенциала при тех же условиях, что и для случая а, но для расстройки  $\Delta = -0.5$ , при которой максимальный показатель Ляпунова равен нулю. Начало обеих траекторий находится в точке  $x(0) = y(0) = 0$



**Рис. 4.** а) Временная эволюция абсолютной величины импульса хаотически движущегося атома с траекторией на рис. 3а при  $\Delta = 0.191$ . б) То же в регулярной моде движения атома с траекторией на рис. 3б при  $\Delta = -0.5$ . В обоих случаях  $\omega_r = 10^{-3}$

**Таблица.** Моменты времени  $\tau_j$ , когда атом находится вблизи узлов двумерной стоячей световой волны (см. рис. 1а), и разности значений компоненты вектора Блоха  $\Delta u_j$ , вычисленные в моменты времени  $\tau_j - 5$  и  $\tau_j + 5$

$\tau_j$	142.8	232.0	379.4	473.1	638.5	671.1	689.0	730.4	780.1	798.7	865.6	970.2	994.6	1052.4	1237.1	1842.1
$ \Delta u_j $	0.54	0.41	0.95	0.69	0.1	1.1	1.76	1.42	1.47	0.37	0.67	0.04	0.44	1.07	0.37	0.1



**Рис. 5.** Временная эволюция компоненты электрического дипольного момента атома  $u$  с траекторией на рис. 3а при  $\Delta = 0.191$  и  $\omega_r = 10^{-3}$ . Крестики показывают моменты времени, когда атом находится вблизи узлов двумерной стоячей световой волны

изменения  $u$  на достаточно большие величины, допускаемые законом сохранения длины вектора Блоха. Из закона сохранения энергии (6) следует, что быстрые изменения величины  $u$  приводят к соответствующим изменениям величины оптического потенциала  $I \equiv u(\tau)E(x, y)$ , что, в свою очередь, приводит к изменениям кинетической энергии атома  $K$ . Отметим, что последний член в интеграле движения (6) — внутренняя энергия  $W \equiv (\Delta/2)z(\tau)$  — сравнительно мал при малых значениях расстройки.

Детальный расчет показывает, что большинство скачков  $u$  происходит, когда атом приближается к узлам стоячей волны. В таблице указаны моменты времени  $\tau_j$ , когда атом попадает в малую окрестность (радиусом  $\epsilon = 0.01$  в безразмерных единицах) узловой линии или узловой точки, показанных на рис. 1а. В таблице также приведены абсолютные значения  $|\Delta u_j|$  этих скачков, вычисленные как разности значений  $u$  в моменты безразмерного времени

$\tau_j - 5$  и  $\tau_j + 5$ . Этот временной интервал достаточно мал и содержит только два цикла Раби. Максимальный размах осцилляций  $u$  в течение цикла Раби от  $-1$  до  $1$  возможен только при точном резонансе. В регулярной моде движения при значениях расстройки около  $\Delta = 0.2$  величина  $u$  изменяется в диапазоне  $|\delta u| < 0.2$ . Следовательно, скачки величиной  $|\delta u_j| > 0.2$  происходят вблизи узловых линий и точек. Отметим, что амплитуда скачка является псевдослучайной величиной и может быть малой (см. таблицу).

Такое псевдослучайное поведение  $u$  в хаотической моде движения можно объяснить следующим образом. Так как  $u$  является синхронизированной (с электрическим полем  $E$ ) компонентой индуцированного электрического дипольного момента, ее величина стремится к нулю, когда атом приближается к узлу, где  $E = 0$ . На рис. 5 видно, что амплитуда скачков  $u$  варьируется от почти максимальных значений до сравнительно малых. Большинство скачков случается при пересечении узловых линий. В этом случае график проходит через нули функции  $u$ . Иногда атом пролетает вблизи узла с  $E = 0$ , но не пересекает его. В этом случае  $u$  не обязательно достигает нуля (см. скачки вблизи  $\tau = 700$  на рис. 5). В любом случае фундаментальной причиной хаотического блуждания атома в абсолютно детерминированной двумерной ОР является скачкообразное поведение компоненты вектора Блоха  $u$  вблизи узлов стоячей световой волны. Таким образом, взаимодействие внутренних и внешних степеней свободы атома при определенных условиях порождает хаос как в трансляционном движении атомов, так и в осцилляциях Раби.

#### 4. ОБ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОМ НАБЛЮДЕНИИ ЭФФЕКТА ХАОТИЧЕСКОГО БЛУЖДЕНИЯ АТОМОВ

Во всех численных экспериментах в настоящей работе использовалось безразмерное значение частоты отдачи атома  $\omega_r = 10^{-3}$ . Частота отдачи варьируется для разных атомов в широком диапазоне частот  $\nu_r = 1-300$  кГц [28]. Принимая типичные

экспериментальные значения частоты Раби в диапазоне  $\Omega/2\pi \approx 10^6-10^8$  Гц, получим диапазон возможных безразмерных значений частоты отдачи  $\omega_r = 10^{-5}-10^{-1}$ .

Мы пренебрегли спонтанным излучением во всех расчетах. Хаотическое поведение атомов начинает проявляться на временах  $\tau \sim 10^2$ , что соответствует  $t \sim 10^{-6}-10^{-4}$  с при  $\Omega \sim 10^6-10^8$  рад·с<sup>-1</sup>. Атомы с долгоживущими оптическими переходами [29], например, атом Са с  $T_{sp} = 4.6 \cdot 10^{-3}$  с (интеркомбинационный переход  $4^1S_0-4^3P_1$ ,  $\nu_r = 11.5$  кГц,  $\omega_r = 10^{-3}$  при  $\Omega/2\pi = 10^8$  Гц), атом Mg со временем спонтанного излучения  $T_{sp} = 0.4 \cdot 10^{-3}$  с (переход  $2^1S_0-2^3P_1$ ), метастабильные атомы He и Ne [28, 29], представляются подходящими кандидатами для наблюдения эффекта хаотического блуждания в оптических решетках, не замаскированного случайными флуктуациями из-за спонтанного излучения.

Что касается атомов с обычными значениями времени спонтанного излучения  $T_{sp} \sim 10^{-8}-10^{-7}$  с, то в режиме хаотического блуждания скачкообразное поведение компоненты вектора Блоха  $u$  на узлах стоячей волны дополняется скачками этой величины до нулевого значения в случайные моменты времени из-за актов спонтанного излучения, т. е. акты спонтанного излучения прерывают когерентную эволюцию атома в случайные моменты времени. После излучения спонтанного фотона атом переходит в основное состояние с компонентами вектора Блоха  $u_0 = v_0 = 0$ ,  $z_0 = -1$ , а его импульс скачкообразно меняется на величину в диапазоне  $-1 \leq \delta p \leq 1$ . Такое стохастическое поведение атома накладывается на его хаотическое блуждание, рассмотренное в данной работе. Проблема заключается в том, как обнаружить этот эффект на фоне неизбежных квантовых флуктуаций.

Для обнаружения проявлений детерминированного хаоса в реальном эксперименте предлагается провести две серии экспериментов с достаточно большим числом атомов порядка  $N = 10^6$  для двух значений расстройки резонанса — для такого значения  $\Delta$ , при котором максимальный показатель Ляпунова  $\lambda$  (см. рис. 2) равен нулю и теория предсказывает отсутствие хаотического блуждания атомов, и для немного отличающегося значения  $\Delta$ , при котором  $\lambda > 0$  и, следовательно, этот эффект должен быть. Фиксируя распределение атомов по решетке, можно ожидать, что во втором случае атомы распределяются по значительно большей площади, чем в первом, так как к стохастической дисперсии атомов, обусловленной случайными квантовыми флук-

туациями, добавится хаотическая дисперсия, обусловленная скачкообразным поведением  $u$  на узлах стоячей волны.

Загрузим в двумерную ОР облако из  $N = 10^6$  невзаимодействующих атомов с гауссовым распределением по координатам и импульсам:

$$\rho(x, p_x) = \frac{1}{2\pi\sigma(x)\sigma(p_x)} \exp\left[-\frac{|x|^2}{2\sigma_x^2} - \frac{|p_x|^2}{2\sigma(p_x)^2}\right],$$

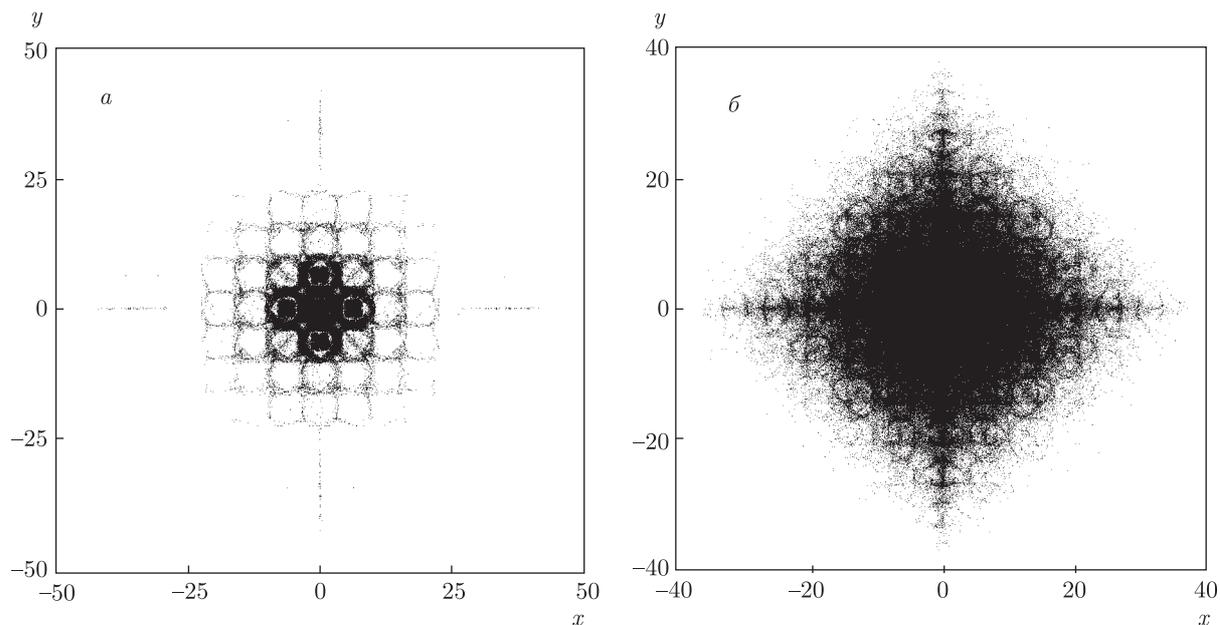
$$\rho(y, p_y) = \frac{1}{2\pi\sigma(y)\sigma(p_y)} \exp\left[-\frac{|y|^2}{2\sigma_y^2} - \frac{|p_y|^2}{2\sigma(p_y)^2}\right], \quad (8)$$

где  $\sigma(x, y) = \sigma(p_x, p_y) = 2$ ,  $u_0 = v_0 = 0$ ,  $z_0 = -1$ ,  $\omega_r = 10^{-3}$ .

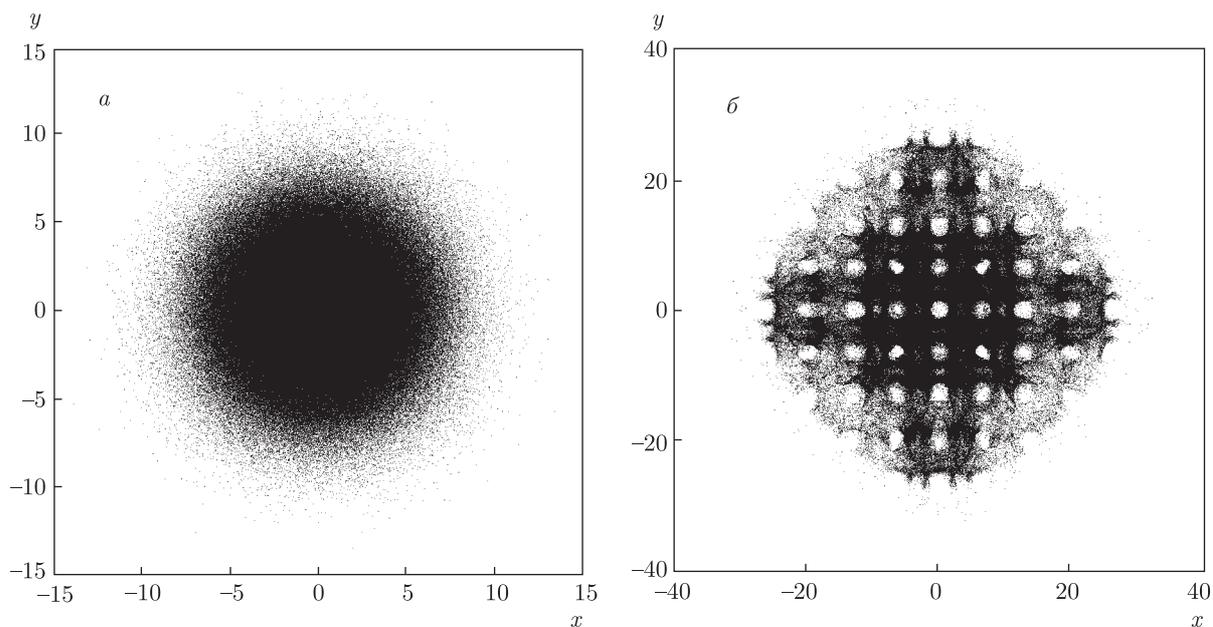
На рис. 6а показано распределение атомов по решетке в регулярном режиме движения в момент времени  $\tau = 10^3$  для значения расстройки резонанса  $\Delta = -0.5$ , для которой максимальный показатель Ляпунова  $\lambda$  равен нулю (см. рис. 2). В этом случае к указанному моменту времени атомы заселяют в основном ближайшие к центру ячейки ОР. К тому же моменту времени в хаотическом режиме движения для  $\Delta = 0.191$  ( $\lambda = 0.0382$ ) атомы заселяют значительно большее число удаленных ячеек ОР (рис. 6б). На рис. 7 для тех же условий показаны распределения атомов в случае точного оптического резонанса ( $\Delta = 0$ ) и для слабого хаоса ( $\Delta = 1$ ,  $\lambda = 0.09$ ). Как следует из системы уравнений (3), в случае точного резонанса при  $u_0 = 0$  оптический потенциал исчезает и каждый атом сохраняет свой начальный импульс. Из этих численных экспериментов следует, что распределение атомов по решетке существенно зависит от величины расстройки резонанса. И этот факт можно использовать при проведении реальных экспериментов.

В реальном эксперименте расплывание атомного облака с когерентной эволюцией сопровождается расплыванием, обусловленным квантовыми флуктуациями. Однако вклад квантовых флуктуаций примерно одинаков в экспериментах для незначительно различающихся значений расстройки резонанса. Следовательно, обнаруженные различия в распределениях атомов по решетке в режимах регулярного и хаотического движений можно считать проявлением детерминированного хаоса в реальном эксперименте.

Для регистрации распределения атомов по решетке можно использовать различные методы, в частности абсорбционный метод изображения атомов (absorption imaging [30, 31]), дающий информацию о числе и пространственных параметрах атомного облака. В этом методе после выключения ОР



**Рис. 6.** Распределения  $N = 10^6$  атомов на плоскости  $xy$  в момент времени  $\tau = 10^3$ :  $a$  — в режиме регулярного движения ( $\Delta = -0.5$ ) и  $b$  — в режиме хаотического блуждания ( $\Delta = 0.191$ ). В обоих случаях  $\omega_r = 10^{-3}$ . Координаты и импульсы атомов в начальный момент времени распределены по Гауссу



**Рис. 7.** То же, что на рис. 6:  $a$  — в режиме регулярного баллистического движения ( $\Delta = 0, \lambda = 0$ ) и  $b$  — в режиме слабого хаоса ( $\Delta = 1, \lambda = 0.09$ ). В обоих случаях  $\omega_r = 10^{-3}$ . Координаты и импульсы атомов в начальный момент времени распределены по Гауссу

атомное облако в ловушке облучается колимированным лазерным пучком с частотой, близкой к частоте рабочего атомного перехода. «Тень», отбрасываемая облаком в результате поглощения лазерного света

атомами, фиксируется CCD-камерой. Сканируя облако через оптический резонанс, из серии изображений можно рассчитать оптическую плотность для каждого пикселя и число атомов [30, 31].

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теоретически и численно изучалась простая модель с двухуровневыми холодными атомами в двумерной оптической решетке, созданной интерферирующими лазерными пучками. Существенным моментом является учет взаимодействия электронных и трансляционных степеней свободы атома. В полуклассическом приближении получена система уравнений движения для компонент вектора Блоха, координат и импульса одиночного атома, имеющая три степени свободы, два интеграла движения и два управляющих параметра — расстройку резонанса  $\Delta$  и частоту отдачи  $\omega_r$ . С помощью максимального показателя Ляпунова был найден диапазон значений  $\Delta$ , для которого поведение атома является хаотическим. Детерминированный гамильтонов хаос возникает при сравнительно малых значениях расстройки  $\Delta$  и проявляется как во внутренних, так и во внешних степенях свободы атома в виде хаотических осцилляций Раби и хаотического блуждания атома по решетке.

Первопричиной возникновения хаоса является скачкообразное поведение синхронизированной компоненты электрического дипольного момента атома при приближении его к узлам стоячей световой волны. Такое поведение приводит к псевдослучайным изменениям атомного импульса и, в конечном счете, к хаотическому блужданию атомов в абсолютно жесткой ОР. Регулируя расстройку резонанса, можно изменять режим движения атома от регулярного к хаотическому и наоборот, обеспечивая таким образом возможность наблюдать некоторые проявления хаоса с холодными атомами в реальном эксперименте.

**Благодарности.** Автор благодарен Л. Е. Конькову и А. А. Дидову за помощь в подготовке некоторых рисунков.

**Финансирование.** Работа выполнена в рамках государственного задания Тихоокеанского океанологического института Дальневосточного отделения Российской академии наук (проект № 0271-2019-0001).

## ЛИТЕРАТУРА

1. V. G. Minogin and V. S. Letokhov, *Laser Light Pressure on Atoms*, Gordon and Breach Sci. Publ., New York (1987).
2. V. Letokhov, *Laser Control of Atoms and Molecules*, Oxford Univ. Press, New York (2007).
3. A. P. Kazantsev, G. I. Surdutovich, and V. P. Yakovlev, *Mechanical Action of Light on Atoms*, World Sci., Singapore (1990).
4. Г. А. Аскарян, ЖЭТФ **42**, 1567 (1962).
5. В. С. Летохов, Письма в ЖЭТФ **7**, 348 (1968).
6. G. Grynberg and C. Robilliard, Phys. Rep. **355**, 335 (2001).
7. G. Raithel and N. Morrow, Adv. At. Mol. Opt. Phys. **53**, 187 (2006).
8. M. Greiner and S. Folling, Nature **435**, 736 (2008).
9. A. Hemmerich, D. Schropp, Jr., and T. W. Hansch, Phys. Rev. A **44**, 1910 (1991).
10. M.G. Raizen, Adv. At. Mol. Opt. Phys. **41**, 43 (1999).
11. W. K. Hensinger, N. R. Heckenberg, G. J. Milburn, and H. Rubinsztein-Dunlop, J. Opt. B **5**, 83 (2003).
12. M. Sadgrove, S. Wimberger, S. Parkins, and R. Leonhardt, Phys. Rev. Lett. **94**, 174103 (2005).
13. R. Graham, M. Schlautmann, and P. Zoller, Phys. Rev. A **45**, R19 (1992).
14. S. V. Prants, Phys. Scr. **92**, 044002 (2017).
15. Л. Е. Коньков, С. В. Пранц, Письма в ЖЭТФ **65**, 801 (1997).
16. С. В. Пранц, Л. Е. Коньков, Письма в ЖЭТФ **73**, 200 (2001).
17. В. Ю. Аргонов, Л. Е. Коньков, ЖЭТФ **123**, 946 (2003).
18. S. V. Prants, M. Yu. Uleysky, and V. Yu. Argonov, Phys. Rev. A **73**, 023807 (2006).
19. V. Yu. Argonov and S. V. Prants, Phys. Rev. A **75**, 063428 (2007).
20. V. Yu. Argonov and S. V. Prants, Phys. Rev. A **78**, 043413 (2008).
21. В. О. Витковский, С. В. Пранц, Опт. и спектр. **114**(1), 57 (2013).
22. С. В. Пранц, Письма в ЖЭТФ **104**, 769 (2016).
23. D. Hennequin and D. Verkerk, Eur. Phys. J. D **57**, 95 (2010).
24. E. Horsley, S. Koppell, and L. Reichl, Phys. Rev. E **89**, 012917 (2014).

- 
25. Y. Boretz and L. E. Reichl, *Phys. Rev. E* **91**, 042901 (2015).
26. Max D. Porter and L. E. Reichl, *Phys. Rev. E* **93**, 012204 (2016).
27. L. E. Kon'kov and S. V. Prants, *J. Math. Phys.* **37**, 1204 (1996).
28. C. S. Adams, M. Siegel, and J. Mlynek, *Phys. Rep.* **240**, 143 (1994).
29. K. Baldwin, *Contemp. Phys.* **46**, 105 (2005).
30. C. J. Foot, *Atomic Physics*, Oxford Univ. Press, New York (2005).
31. G. Reinaudi, T. Lahaye, Z. Wang, and D. Guery-Odelin, *Opt. Lett.* **32**, 3143 (2007).