

РАССЕЯНИЕ И ПОГЛОЩЕНИЕ СВЕТА МОНОСЛОЕМ СФЕРИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ ПРИ НАКЛОННОМ ОСВЕЩЕНИИ

Н. А. Лойко^{}, А. А. Мискевич^{**}, В. А. Лойко^{***}*

*Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси
220072, Минск, Беларусь*

Поступила в редакцию 10 декабря 2019 г.,
после переработки 14 февраля 2020 г.
Принята к публикации 4 марта 2020 г.

Получено решение задачи рассеяния и поглощения света монослоем однородных сферических частиц при произвольном угле падения плоской волны, определяющем сдвиг фаз между усредненными полями в частицах. Оно основано на квазикристаллическом приближении теории многократного рассеяния волн, приближении среднего поля и мультипольном разложении полей и тензорной функции Грина по векторным сферическим волновым функциям. Получены формулы для определения углового распределения интенсивности некогерентно рассеянного поля, коэффициентов некогерентного рассеяния, поглощения, когерентного пропускания и отражения. На примере частично упорядоченных монослоев диэлектрических и полупроводниковых частиц проиллюстрированы зависимости этих характеристик от направления освещения. Показано, что: (i) при наклонном освещении угловое распределение рассеянного излучения по азимутальному углу рассеяния для любой поляризации падающей волны (кроме p и s) несимметрично относительно плоскости падения, (ii) с ростом угла падения и/или концентрации частиц максимум углового распределения излучения, прошедшего через монослой, может приближаться к его нормали, (iii) существуют условия, при которых основная доля рассеянного излучения сосредоточена в направлении, противоположном направлению падающего излучения, (iv) зависимость коэффициента поглощения монослоя от угла освещения имеет экстремумы, положение и величина которых определяются поляризацией падающей волны.

DOI: 10.31857/S0044451020080039

1. ВВЕДЕНИЕ

Классической задачей рассеяния электромагнитных волн является задача рассеяния на однородном шаре. Ее аналитическое решение было получено более ста лет назад. Оно записывается через сферические функции и известно как решение Ми [1–3]. Монослои частиц — более сложный объект. Сегодня они широко используются в фотонике, оптике, оптоэлектронике и других областях при создании антиотражающих покрытий, спектральных фильтров пропускания и отражения, диффузоров, солнечных элементов, светодиодов, фотонных кристаллов, синтетических опалов, детекторов, резонаторов, лазеров, метаматериалов, сетчатых структур

[4–19]. Поэтому актуальна задача описания оптических характеристик таких слоев и решения прямых и обратных задач рассеяния [4, 20–22].

Наиболее простые методы описания оптических свойств монослоев частиц основаны на приближении однократного рассеяния и интерференционном приближении [4, 20]. Область их применимости ограничена малыми концентрациями частиц, поскольку эти приближения не учитывают переоблучение частиц в слое, т. е. многократное рассеяние волн. Его вклад в формирование результирующего поля может быть значительным при больших концентрациях частиц. Он особенно велик, когда размеры частиц сопоставимы с длиной волны падающего излучения.

Задача определения оптических характеристик дисперсных слоев с учетом многократного рассеяния волн при наклонном освещении может быть решена в рамках численных методов [23–27], основанных на использовании уравнений Максвелла. Как правило, численные методы используются для

^{*} E-mail: n.loiko@ifanbel.bas-net.by

^{**} E-mail: miskevic@ifanbel.bas-net.by

^{***} E-mail: loiko@ifanbel.bas-net.by

решения задач рассеяния частицами произвольной формы, неоднородными и анизотропными частицами, а также их ансамблями. Для систем однородных частиц, таких как сферы, сфероиды, цилиндры удается получить аналитические и полуаналитические решения. К настоящему моменту хорошо разработаны методы, основанные на теории дифракции низкоэнергетических электронов и методе Корринги–Кона–Ростокера (ККР) [28–35]. Они использованы, в частности, для анализа характеристик ближнего поля в фотонных зонах монослоя периодически расположенных сфер [30] и расчета поглощения света монослоями серебряных наносфер при разных углах освещения [34]. Эти методы удобны для моделирования структур с идеальными решетками.

Для моделирования рассеяния и распространения волн в случайных и частично упорядоченных (имеющих ближний пространственный порядок в расположении частиц) слоях используется статистическая теория многократного рассеяния волн (ТМРВ) [36–64]. Она оперирует усредненными по ансамблю характеристиками. В рамках ТМРВ известны методы нахождения поля когерентной волны, отраженной от полубесконечной дисперсной среды при наклонном освещении [48, 49]. В работе [56] на основе квазикристаллического приближения (ККП) теории многократного рассеяния получены выражения для определения коэффициентов когерентного пропускания и отражения частично упорядоченного монослоя сферических частиц при наклонном освещении циркулярно поляризованной плоской волной. ККП [42] основано на предположении, что усредненное по конфигурациям ансамбля частиц поле, найденное с фиксацией двух частиц, равно полю с фиксацией одной частицы. В этом случае для описания пространственного расположения частиц достаточно использовать радиальную функцию распределения. В [64] с использованием ККП получены простые аналитические выражения для расчета коэффициентов когерентного пропускания и отражения монослоя случайно расположенных сфер. Они могут быть применены при любых углах падения и размерах частиц. Упрощение получено заменой эффективного поля суммой двух плоских волн – падающей и зеркально отраженной. Подход применим при малых концентрациях частиц. В работах [65–67] рассмотрено когерентное отражение света при наклонном освещении монослоев с невысоким фактором заполнения. В частности, в [67] результаты применены для оценки плотности биологических клеток. В [66] рассмотрены различные модели для описания частично упорядоченных моно-

слоев из наночастиц золота. Среди других методов решения задачи рассеяния в рамках ТМРВ можно выделить метод Т-матриц, применяемый обычно для описания оптических свойств кластеров, содержащих небольшое число частиц [68].

Несмотря на значительное количество статей, посвященных решению задачи рассеяния излучения слоями частиц при наклонном освещении в рамках ТМРВ, нам неизвестны работы, в которых была бы решена задача определения углового распределения излучения, рассеянного монослоем, освещаемым волной с произвольной поляризацией. В данной статье получены выражения для определения «полного» набора оптических характеристик монослоя: коэффициентов когерентного пропускания, когерентного отражения, некогерентного рассеяния и поглощения монослоя, углового распределения рассеянного излучения. Методы, разработанные нами для решения задачи рассеяния света на монослое частиц при освещении по нормали [69–73], обобщены на случай произвольного угла падения плоской электромагнитной волны с произвольной поляризацией. Здесь, как и ранее, мы основываемся на квазикристаллическом приближении [42] теории многократного рассеяния волн и мультипольном разложении полей и тензорной функции Грина по векторным сферическим волновым функциям [74, 75]. Существенным отличием является наличие сдвига фаз усредненных (эффективных) полей внутри отдельных частиц, который возникает при наклонном освещении. Он определяется фазой плоской волны, падающей на частицу. При падении вдоль нормали к слою фазы полей во всех частицах одинаковы и полученные в данной работе выражения переходят в выражения, приведенные в наших работах [69–73].

Отметим, что мы рассматриваем монослой в бесконечной непоглощающей среде с показателем преломления $m_{env} = 1$. Их оптические свойства зависят от размера, показателя преломления, концентрации, пространственного распределения частиц и геометрии освещения. Если монослой находится в матрице или на подложке, то оптические свойства таких систем могут быть найдены с использованием методов, описанных, например, в [31, 33, 34, 64–66, 76–79]. Задача определения оптических свойств систем «монослой–матрица» и «монослой–подложка» на основе развиваемого в данной работе подхода будет рассмотрена нами в дальнейшем.

2. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассмотрим монослой, состоящий из одинаковых сферических частиц. Центры частиц расположены в плоскости монослоя, совпадающей с плоскостью xy декартовой системы координат x, y, z в точках, определяемых радиус-векторами $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_N, \dots$ относительно начала координат, находящегося в центре произвольно выбранной частицы. Ось z направлена по нормали к плоскости монослоя. Направления вдоль осей x, y и z обозначим единичными векторами $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}$ и $\hat{\mathbf{z}}$. Монослой освещается плоской электромагнитной волной с электрическим вектором $\mathbf{E}_0$, волновым вектором $k\hat{\mathbf{r}}_0$ и вектором поляризации $\hat{\mathbf{e}}_0 = \varepsilon_\theta \hat{\theta}_0 + i\varepsilon_\varphi \hat{\varphi}_0$:

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{e}}_0 e^{ik\hat{\mathbf{r}}_0 \cdot \mathbf{r}}, \quad (1)$$

где $\hat{\theta}_0$ и $\hat{\varphi}_0$ — единичные векторы в направлениях, определяемых полярным θ_0 и азимутальным φ_0 углами падения, $\hat{\mathbf{r}}_0$ — единичный вектор в направлении волнового вектора падающей волны, θ_0 — угол между $\hat{\mathbf{z}}$ и $\hat{\mathbf{r}}_0$, φ_0 — угол между $\hat{\mathbf{x}}$ и плоскостью падения ($\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{r}}_0$), $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, λ — длина волны падающего излучения, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки наблюдения (рис. 1). Полагаем, что $|\mathbf{E}_0| = |\hat{\mathbf{e}}_0| = 1$. Выбор осей координат в плоскости монослоя xy относительно плоскости падения может быть произвольным, как показано на рис. 1. Для упрощения решения выберем оси x, y так, чтобы плоскость $\hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{x}}$ совпадала с плоскостью падения (при этом угол $\varphi_0 = 0$, а ось y параллельна волновому фронту падающей волны).

Полное поле $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ в некоторой точке $\mathbf{r}$ (внутри и вне слоя) можно представить как сумму поля падающей волны и полей волн, рассеянных ансамблем частиц заданной конфигурации:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) + \sum_j \mathbf{F}_j(\mathbf{r}, \mathbf{R}_j). \quad (2)$$

Здесь

$$\mathbf{F}_j(\mathbf{r}, \mathbf{R}_j) = \frac{(m_p^2 - 1)k^2}{4\pi} \times \int_{V_p} d\mathbf{r}' \overset{\leftrightarrow}{G}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_j + \mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{R}_j + \mathbf{r}') \quad (3)$$

— поле, создаваемое в точке $\mathbf{r}$ частицей, центр которой находится в точке $\mathbf{R}_j$, $m_p = n_p + i\kappa_p$ — комплексный показатель преломления частицы относительно окружающей среды (относительный комплексный показатель преломления частицы), V_p — объем частицы, $0 \leq |\mathbf{r}'| \leq D/2$, D — диаметр частицы,

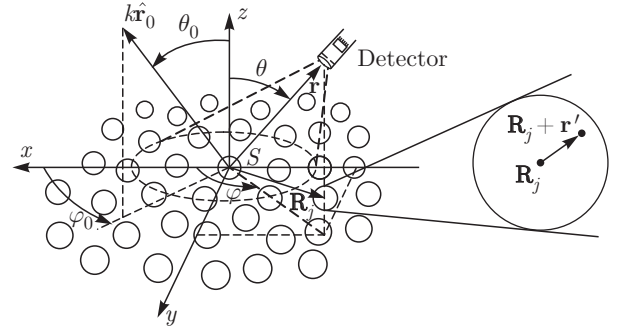


Рис. 1. Схематическое изображение частично упорядоченного монослоя сферических частиц, геометрии освещения и приема рассеянного излучения (слева) и отдельной частицы монослоя (справа). x, y, z — лабораторная система координат, связанная с монослоем, начало координат находится в центре произвольно выбранной частицы, xy — плоскость монослоя, $k\hat{\mathbf{r}}_0$ — волновой вектор падающей волны, θ_0 и φ_0 — полярный и азимутальный углы падения, $\mathbf{R}_j$ — радиус-вектор, описывающий положение центра j -й частицы в плоскости монослоя, $\mathbf{R}_j + \mathbf{r}'$ — радиус-вектор элементарного объема внутри j -й частицы, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки наблюдения, θ и φ — полярный и азимутальный углы рассеяния, S — площадь поверхности монослоя, «видимая» приемником излучения

$\mathbf{E}(\mathbf{R}_j + \mathbf{r}')$ — поле в точке $\mathbf{R}_j + \mathbf{r}'$ внутри частицы (внутреннее поле), $\overset{\leftrightarrow}{G}$ — диадная (тензорная) функция Грина свободного пространства:

$$\overset{\leftrightarrow}{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \left[\overset{\leftrightarrow}{I} + \frac{1}{k^2} \nabla \otimes \nabla \right] \frac{e^{ik|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}, \quad (4)$$

$\overset{\leftrightarrow}{I}$ — единичная диада.

Наша задача — найти поле $\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rangle$, усредненное по всем возможным расположениям частиц слоя. Для усреднения используются многочастичные функции распределения вероятности, которые характеризуют вероятность нахождения частиц в пространстве [40–42]. Мы ищем решение в рамках квазикристаллического приближения (ККП) теории многократного рассеяния волн (ТМРВ) [4, 42]. В рамках этого приближения учитываются только двухчастичные корреляции во взаимном расположении частиц, и усредненное внутреннее поле в каждой частице при двух фиксированных частицах полагается равным усредненному полю при одной фиксированной частице: $\langle \mathbf{E}(\mathbf{R}_l + \mathbf{r}') \rangle_{lj} \approx \langle \mathbf{E}(\mathbf{R}_l + \mathbf{r}') \rangle_l$, где l, j — номера частиц. Процедура усреднения подробно описана в работах [71, 72], где рассмотрено решение проблемы для падения плоской волны по нормали к плоскости монослоя ($\hat{\mathbf{r}}_0 = \hat{\mathbf{z}}$), когда

возбуждающее поле одинаково для всех частиц. В таких условиях, и при однородном распределении частиц, поля $\langle \mathbf{E}(\mathbf{R}_j + \mathbf{r}') \rangle_j$ одинаковы для любого j и поле в частице с номером j равно полю $\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}') \rangle_1$ в частице, центр которой находится в начале координат: $\langle \mathbf{E}(\mathbf{R}_j + \mathbf{r}') \rangle_j = \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}') \rangle_1$. При наклонном освещении усредненные внутренние поля $\langle \mathbf{E}(\mathbf{R}_j + \mathbf{r}') \rangle_j$ отличаются от поля $\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}') \rangle_1$ сдвигом фаз, определяемым сдвигом фаз падающей волны: $\langle \mathbf{E}(\mathbf{R}_j + \mathbf{r}') \rangle_j = \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}') \rangle_1 e^{ik\hat{\mathbf{r}}_0 \cdot \mathbf{R}_j}$.

Учитывая сдвиг фаз и используя процедуру нахождения среднего поля [71, 72], получим следующее уравнение для усредненного поля вне частиц при произвольном угле падения:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rangle &= \mathbf{E}_0(\mathbf{r}') + \sum_j \langle \mathbf{F}_j(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \rangle = \\ &= \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) + \frac{(m_p^2 - 1)k^2}{4\pi} \rho_0 \times \\ &\times \int d\mathbf{R} \int_{V_p} d\mathbf{r}' \overset{\leftrightarrow}{G}(\mathbf{r}, \mathbf{R} + \mathbf{r}') \cdot \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}') \rangle_1 e^{ik\hat{\mathbf{r}}_0 \cdot \mathbf{R}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Для усредненного поля в частице $\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}') \rangle_1$, входящего в уравнение (5), получим

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}') \rangle_1 &= \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) + \frac{(m_p^2 - 1)k^2}{4\pi} \times \\ &\times \int_{V_p} d\mathbf{r}'' \overset{\leftrightarrow}{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') \cdot \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}'') \rangle_1 + \\ &+ \frac{(m_p^2 - 1)k^2}{4\pi} \rho_0 \int d\mathbf{R} g(R) \times \\ &\times \int_{V_p} d\mathbf{r}'' \overset{\leftrightarrow}{G}(\mathbf{r}', \mathbf{R} + \mathbf{r}'') \cdot \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}'') \rangle_1 e^{ik\hat{\mathbf{r}}_0 \cdot \mathbf{R}}. \end{aligned} \quad (6)$$

В выражениях (5) и (6) ρ_0 — средняя плотность числа частиц (средняя поверхностная концентрация частиц), $g(R)$ — радиальная функция их распределения [80, 81], $R = |\mathbf{R}|$ — расстояние в плоскости монослоя относительно начала координат. Если волна падает на монослой по нормали, то фазовый сдвиг $k\hat{\mathbf{r}}_0 \cdot \mathbf{R}_j$ между средними полями в частицах равен нулю и уравнения (5), (6) переходят в соответствующие уравнения, полученные в [71, 72].

3. ИНТЕНСИВНОСТЬ ПОЛЯ В ДАЛЬНОЙ ЗОНЕ МОНОСЛОЯ

При рассмотрении поля в дальней зоне монослоя $(|\mathbf{r} - (\mathbf{R} + \mathbf{r}')| \gg \lambda)$ предположим, что излучение, рассеянное в направлении $\hat{\mathbf{r}}$, регистрируется с помощью

«узкоапертурного» приемника с площади S монослоя, содержащей N частиц (см. рис. 1). Линейные размеры этой площади малы по сравнению с расстоянием до точки наблюдения, но достаточно велики, чтобы статистические характеристики ансамбля частиц были такими же, как и во всем монослое ($N \rightarrow \infty$):

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow \infty}} \frac{R}{r} = \text{const} \ll 1, \quad (7)$$

где $r = |\mathbf{r}|$.

При этих предположениях функция Грина $\overset{\leftrightarrow}{G}(\mathbf{r}, \mathbf{R} + \mathbf{r}')$, входящая в уравнение (5), упрощается, и можно записать

$$\overset{\leftrightarrow}{G}(\mathbf{r}, \mathbf{R} + \mathbf{r}') e^{ik\hat{\mathbf{r}}_0 \cdot \mathbf{R}} = \frac{1}{r} \left[\overset{\leftrightarrow}{I} - \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \right] \exp[ik\Phi]. \quad (8)$$

С учетом условия (7) показатель экспоненты в формуле (8)

$$\begin{aligned} ik\Phi &= ik[|\mathbf{r} - (\mathbf{R} + \mathbf{r}')| + \hat{\mathbf{r}}_0 \cdot \mathbf{R}] \rightarrow \\ &\rightarrow ikr \left(1 - (\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{r}}_0) \cdot \mathbf{R}/r - \hat{\mathbf{r}} \cdot \frac{\mathbf{r}'}{r} \right), \end{aligned}$$

если $(\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{r}}_0) \cdot \mathbf{R} \neq 0$. В противном случае

$$ik\Phi \rightarrow ikr \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^2 - \hat{\mathbf{r}} \cdot \frac{\mathbf{r}'}{r} \right).$$

Интегрирование в уравнении (5) по объему частицы и по ее положению разделяется. В результате

$$\sum_{j=1}^N \langle \mathbf{F}_j(\mathbf{r}, \mathbf{R}_j) \rangle = \frac{\rho_0}{kr} e^{ikr} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{r}}) h(\mathbf{r}). \quad (9)$$

Здесь $\mathbf{f}(\hat{\mathbf{r}})$ — амплитудная функция рассеяния в направлении $\hat{\mathbf{r}}$ для отдельной частицы монослоя:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{r}}) &= \frac{(m_p^2 - 1)k^3}{4\pi} \times \\ &\times \int_{V_p} d\mathbf{r}' \left(\overset{\leftrightarrow}{I} - \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \right) e^{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} \cdot \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}') \rangle_1. \end{aligned} \quad (10)$$

Она учитывает вклад всех частиц слоя в формирование внутреннего поля рассматриваемой частицы (т.е. многократное рассеяние волн в монослое). Функция $h(\mathbf{r})$ учитывает различие в фазах полей, создаваемых в точке наблюдения $\mathbf{r}$ частицами монослоя. Ее вид зависит от аппроксимации функции Грина. Если $\hat{\mathbf{r}}$ удовлетворяет условию:

$$(\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{r}}_0) \cdot \mathbf{R} = 0, \quad (11)$$

то

$$h(\mathbf{r}) = \int e^{ikR^2/2r} d\mathbf{R} = \frac{2\pi i r}{k}. \quad (12)$$

Для остальных направлений рассеяния при выполнении условия (7) интеграл

$$h(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{R} \exp(-ik(\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{r}}_0) \cdot \mathbf{R}) = 0$$

и, следовательно, равно нулю усредненное рассеянное поле.

Равенство (11) выполняется для двух значений $\hat{\mathbf{r}}$: $\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}}_t$ и $\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}}_r$, где $\hat{\mathbf{r}}_t$ и $\hat{\mathbf{r}}_r$ удовлетворяют условиям: $\hat{\mathbf{r}}_t = \hat{\mathbf{r}}_0$ и $(\hat{\mathbf{r}}_r - \hat{\mathbf{r}}_0) \perp \mathbf{R}$. Первое соответствует волне $\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}_t) \rangle$, прошедшей в направлении волнового вектора падающей волны ($\hat{\mathbf{r}}_t$: $\theta_t = \theta_0$, $\varphi_t = 0$). Второе — волне $\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}_r) \rangle$, зеркально отраженной монослоем ($\hat{\mathbf{r}}_r$: $\theta_r = \pi - \theta_0$, $\varphi_r = 0$). Напряженность поля плоской волны, распространяющейся в направлении $\hat{\mathbf{r}}_t$, определяется полями волн, рассеянных частицами монослоя, находящимися на площади S , и полем, создаваемым падающей волной, прошедшей через эту площадь в отсутствие частиц [20]:

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}_t) \rangle = \left[\hat{\mathbf{e}}_0 \cos \theta_0 + \frac{2\pi i}{k^2} \rho_0 \mathbf{f}(\hat{\mathbf{r}}_t) \right] e^{ikr_t}. \quad (13)$$

Напряженность поля зеркально отраженной волны

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}_r) \rangle = \frac{2\pi i}{k^2} \rho_0 \mathbf{f}(\hat{\mathbf{r}}_r) e^{ikr_r}. \quad (14)$$

Выражения (13), (14) описывают когерентную часть рассеянного излучения.

Флуктуации положений $\mathbf{R}_j$ частиц порождают некогерентно рассеянную часть поля, интенсивность (модуль вектора плотности потока энергии) которого в общем случае отлична от нуля. Она определяется как разность между усредненной интенсивностью полного поля $I(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}^*(\mathbf{r}) \rangle$ и интенсивностью его когерентной составляющей $I_c(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rangle \cdot \langle \mathbf{E}^*(\mathbf{r}) \rangle$: $I_{inc}(\mathbf{r}) = I(\mathbf{r}) - I_c(\mathbf{r})$. Выражение для $I_{inc}(\mathbf{r})$ найдем, применив процедуру, аналогичную описанной в работах [71, 72] для освещения по нормали. Она основана на приближении среднего поля

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}_j + \mathbf{r}') \approx \langle \mathbf{E}(\mathbf{R}_j + \mathbf{r}') \rangle_j.$$

Таким образом, мы пренебрегаем флуктуациями полей в частицах для конкретных конфигураций монослоя по сравнению со значениями этих полей, усредненными по возможным конфигурациям ансамбля при фиксации выбранной частицы. В результате, интенсивность рассеянного излучения определяется по формуле

$$I_{inc}(\mathbf{r}) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{f}^*(\hat{\mathbf{r}}) \frac{\eta}{\pi x^2} \frac{S}{r^2} S_2. \quad (15)$$

Поток излучения в телесном угле $d\Omega$ через элементарную площадку сферы $r^2 d\Omega$ равен

$$dJ_{inc}(\hat{\mathbf{r}}) = I_{inc}(\mathbf{r}) r^2 d\Omega = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{f}^*(\hat{\mathbf{r}}) \frac{\eta}{\pi x^2} S S_2 d\Omega. \quad (16)$$

Здесь η — фактор заполнения монослоя (отношение площади проекций всех частиц на плоскость монослоя к площади, на которой они распределены), $x = \pi D/\lambda$ — параметр дифракции частицы, D — диаметр частицы, λ — длина волны падающего излучения, S_2 — двумерный ($2D$) структурный фактор монослоя [71, 72], который при произвольном угле падения плоской волны имеет следующий вид:

$$S_2(\eta, x, \theta_0, \theta, \varphi) = 1 + 8\eta \int_0^\infty [g(u) - 1] \times \\ \times J_0 \left(2xu \sqrt{\sin^2 \theta_0 + \sin^2 \theta - 2 \sin \theta_0 \sin \theta \cos \varphi} \right) \times \\ \times u du, \quad (17)$$

где θ и φ — полярный и азимутальный углы рассеяния (угловые координаты вектора $\hat{\mathbf{r}}$), $u = R/D$ — безразмерная переменная интегрирования, выраженная в диаметрах D частиц, $J_0(z)$ — цилиндрическая функция Бесселя нулевого порядка.

В заключение данного раздела подчеркнем, что приближение дальнего поля используется только при описании поля, регистрируемого приемником на достаточно большом расстоянии от «видимой» им площади монослоя (см. выражение (7)). Формулы для определения эффективного поля в частицах приведены в следующем разделе. Они основаны на разложении функции Грина по векторным сферическим волновым функциям. То есть в разрабатываемом подходе нет ограничений на расстояния между частицами.

4. АМПЛИТУДНАЯ ФУНКЦИЯ РАССЕЯНИЯ

Определим амплитудную функцию $\mathbf{f}(\hat{\mathbf{r}})$, описывающую рассеяние излучения на частице, находящейся в эффективном поле, созданном всеми частицами ансамбля, используя разложения полей и функции Грина по векторным сферическим волновым функциям [74, 75, 82]. Для плоской волны, падающей под углом θ_0 к координатной оси z , разложение представляет собой двойную сумму по обоим индексам сферических функций. В случае произвольной поляризации (см. выражение (1)) оно имеет следующий вид:

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = 4\pi \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l i^{l-1} \times \\ \times a_{ml} \left\{ \tau_l^{(m)}(\mu_0) \left[\varepsilon_\theta \mathbf{N}_{eml}^{(1)}(k\mathbf{r}) + \varepsilon_\varphi \mathbf{M}_{eml}^{(1)}(k\mathbf{r}) \right] + \right. \\ \left. + im\pi_l^{(m)}(\mu_0) \left[\varepsilon_\theta \mathbf{M}_{oml}^{(1)}(k\mathbf{r}) + \varepsilon_\varphi \mathbf{N}_{oml}^{(1)}(k\mathbf{r}) \right] \right\}. \quad (18)$$

Индексы e и o означают, соответственно, четную и нечетную сферические волновые функции; коэффициенты

$$\alpha_{ml} = \frac{(2l+1)(l-m)!}{2\pi l(l+1)(l+m)!(1+\delta_{0m})}, \quad (19) \\ \delta_{0m} = \begin{cases} 1, & m=0 \\ 0 & m \neq 0 \end{cases},$$

$\mu_0 = \cos \theta_0$, угловые функции

$$\pi_l^{(m)}(\mu_0) = P_l^m(\cos \theta_0) / \sin \theta_0, \\ \tau_l^{(m)}(\mu_0) = dP_l^m(\cos \theta_0) / d\theta_0,$$

$P_l^m(\cos \theta_0)$ — присоединенные функции Лежандра:

$$P_l^m(x) = \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^l l!} \frac{d^{m+l}}{dx^{m+l}} (x^2-1)^l.$$

Представим усредненное поле в частице аналогичным разложением:

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}') \rangle_1 = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left[a_{mlM}^{(e)} \mathbf{M}_{eml}^{(1)}(m_p k\mathbf{r}) + \right. \\ \left. + ia_{mlM}^{(o)} \mathbf{M}_{oml}^{(1)}(m_p k\mathbf{r}) + a_{mlE}^{(e)} \mathbf{N}_{eml}^{(1)}(m_p k\mathbf{r}) + \right. \\ \left. + ia_{mlE}^{(o)} \mathbf{N}_{oml}^{(1)}(m_p k\mathbf{r}) \right]. \quad (20)$$

Используя также разложение матричной функции $\left(\overset{\leftrightarrow}{I} - \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \right) e^{-i\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'}$ [74, 75] и ортогональность векторных сферических гармоник при интегрировании (10), получим

$$\mathbf{f}(\hat{\mathbf{r}}) = 4\pi i \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l \alpha_{ml} \left\{ \hat{\boldsymbol{\theta}} \left[m\pi_l^{(m)}(\mu) \times \right. \right. \\ \times \left(\cos(m\varphi) b_{mlM}^{(o)} + i \sin(m\varphi) b_{mlM}^{(e)} \right) + \\ \left. + \tau_l^{(m)}(\mu) \left(\cos(m\varphi) b_{mlE}^{(e)} + i \sin(m\varphi) b_{mlE}^{(o)} \right) \right] + \\ \left. + i\hat{\boldsymbol{\varphi}} \left[\tau_l^{(m)}(\mu) \left(\cos(m\varphi) b_{mlM}^{(e)} + i \sin(m\varphi) b_{mlM}^{(o)} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + m\pi_l^{(m)}(\mu) \left(\cos(m\varphi) b_{mlE}^{(o)} + i \sin(m\varphi) b_{mlE}^{(e)} \right) \right] \right\}, \quad (21)$$

где $\mu = \cos \theta$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ и $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ — единичные векторы в направлениях, определяемых полярным θ и азимутальным φ углами рассеяния, $b_{mlM}^{(o)}$, $b_{mlM}^{(e)}$, $b_{mlE}^{(o)}$ и

$b_{mlE}^{(e)}$ — коэффициенты разложения, учитывающие многократное рассеяние волн. Они связаны с коэффициентами, определяющими вклад в усредненное поле (20) четных и нечетных сферических функций, следующим образом:

$$b_{mlM}^{(\sigma)} = \frac{a_{mlM}^{(\sigma)} \left(\psi_l' \tilde{\psi}_l - m_p \psi_l \tilde{\psi}_l' \right)}{m_p i^l 4\pi \alpha_{ml}}, \quad (22) \\ b_{mlE}^{(\sigma)} = \frac{a_{mlE}^{(\sigma)} \left(m_p \psi_l' \tilde{\psi}_l - \psi_l \tilde{\psi}_l' \right)}{m_p i^l 4\pi \alpha_{ml}}.$$

Здесь $\sigma = o$ или e ; $\psi_l = x j_l(x)$, $\tilde{\psi}_l = m_p x j_l(m_p x)$, j_l — сферическая функция Бесселя l -го порядка.

Для когерентных прошедшей ($\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}}_t$) и отраженной ($\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}}_r$) волн выражение (21) в сферической системе координат принимает следующий вид:

$$\mathbf{f}(\hat{\mathbf{r}}_{t,r}) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{t,r} f_\theta(\hat{\mathbf{r}}_{t,r}) + i\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{t,r} f_\varphi(\hat{\mathbf{r}}_{t,r}), \quad (23)$$

где

$$f_\theta(\hat{\mathbf{r}}_{t,r}) = 4\pi i \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l (\pm 1)^{l-m} \times \\ \times \alpha_{ml} \left[m\pi_l^{(m)}(\mu_0) b_{mlM}^{(o)} \pm \tau_l^{(m)}(\mu_0) b_{mlE}^{(e)} \right], \quad (24)$$

$$f_\varphi(\hat{\mathbf{r}}_{t,r}) = 4\pi i \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l (\pm 1)^{l-m} \times \\ \times \alpha_{ml} \left[m\pi_l^{(m)}(\mu_0) b_{mlE}^{(o)} \pm \tau_l^{(m)}(\mu_0) b_{mlM}^{(e)} \right]. \quad (25)$$

В формулах (24), (25) верхний знак «+» соответствует $\hat{\mathbf{r}}_t$, нижний «−» — $\hat{\mathbf{r}}_r$.

Коэффициенты $b_{mlM}^{(o)}$, $b_{mlM}^{(e)}$, $b_{mlE}^{(o)}$ и $b_{mlE}^{(e)}$ определяются из решения уравнения (6). Для этого используется разложение усредненного поля в частице (20). Входящие в уравнение (6) функции Грина тоже раскладываются по векторным сферическим волновым функциям, определенным в точках наблюдения и в точках расположения частиц $\mathbf{R}$ [74, 75]. Функции в точках расположения частиц выражаются с помощью теоремы сложения [82, 83] через ряды векторных сферических волновых функций, но уже с одним значением $\mathbf{R} = 0$. Коэффициенты этого разложения пропорциональны $e^{(m-m')\varphi_R}$, где m — индекс исходной сферической функции, а m' — индекс члена ряда, φ_R — азимутальная координата положения частицы в плоскости монослоя, по которой в уравнении (6) проводится интегрирование. От этой координаты также зависит фазовый сдвиг между усредненными полями при наклонном освещении монослоя,

поэтому в формулах теоремы сложения необходимо учитывать члены как с равными, так и различными индексами m, m' (при освещении по нормали учитываются лишь члены с равными индексами). Последующее интегрирование полученных уравнений с учетом ортогональности сферических функций приводит к системе алгебраических уравнений для сумм

$$b_{mlM(E)}^{(s)} = b_{mlM(E)}^{(e)} + b_{mlM(E)}^{(o)}$$

и разностей

$$b_{mlM(E)}^{(d)} = b_{mlM(E)}^{(e)} - b_{mlM(E)}^{(o)}$$

искомых коэффициентов:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\varphi \tau_l^{(m)}(\mu_0) + \varepsilon_\theta m \pi_l^{(m)}(\mu_0) &= \frac{b_{mlM}^{(s)}}{c_{lM}} + \\ &+ 8\eta \sum_{m', l'} \left[A_{mlm'l'}^+ b_{m'l'M}^{(s)} + A_{mlm'l'}^- b_{m'l'M}^{(d)} + \right. \\ &\quad \left. + B_{mlm'l'}^+ b_{m'l'E}^{(s)} + B_{mlm'l'}^- b_{m'l'E}^{(d)} \right], \\ \varepsilon_\theta \tau_l^{(m)}(\mu_0) + \varepsilon_\varphi m \pi_l^{(m)}(\mu_0) &= \frac{b_{mlE}^{(s)}}{c_{lE}} + \\ &+ 8\eta \sum_{m', l'} \left[B_{mlm'l'}^+ b_{m'l'M}^{(s)} + B_{mlm'l'}^- b_{m'l'M}^{(d)} + \right. \\ &\quad \left. + A_{mlm'l'}^+ b_{m'l'E}^{(s)} + A_{mlm'l'}^- b_{m'l'E}^{(d)} \right], \\ \varepsilon_\varphi \tau_l^{(m)}(\mu_0) - \varepsilon_\theta m \pi_l^{(m)}(\mu_0) &= \frac{b_{mlM}^{(d)}}{c_{lM}} + \\ &+ 8\eta \sum_{m', l'} \left[C_{mlm'l'}^+ b_{m'l'M}^{(s)} + C_{mlm'l'}^- b_{m'l'M}^{(d)} + \right. \\ &\quad \left. + D_{mlm'l'}^+ b_{m'l'E}^{(s)} + D_{mlm'l'}^- b_{m'l'E}^{(d)} \right], \\ \varepsilon_\theta \tau_l^{(m)}(\mu_0) - \varepsilon_\varphi m \pi_l^{(m)}(\mu_0) &= \frac{b_{mlE}^{(d)}}{c_{lE}} + \\ &+ 8\eta \sum_{m', l'} \left[D_{mlm'l'}^+ b_{m'l'M}^{(s)} + D_{mlm'l'}^- b_{m'l'M}^{(d)} + \right. \\ &\quad \left. + C_{mlm'l'}^+ b_{m'l'E}^{(s)} + C_{mlm'l'}^- b_{m'l'E}^{(d)} \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь

$$\begin{aligned} c_{lE} &= \frac{m_p \psi_l(m_p x) \psi_l'(x) - \psi_l(x) \psi_l'(m_p x)}{m_p \psi_l(m_p x) \chi_l'(x) - \chi_l(x) \psi_l'(m_p x)}, \\ c_{lM} &= \frac{\psi_l(m_p x) \psi_l'(x) - m_p \psi_l(x) \psi_l'(m_p x)}{\psi_l(m_p x) \chi_l'(x) - m_p \chi_l(x) \psi_l'(m_p x)} \end{aligned} \quad (27)$$

— коэффициенты Ми для рассеянного поля, $\psi_l(x) = x j_l(x)$ и $\chi_l(x) = x h_l^{(1)}(x)$ — функции Риккати–Бесселя, $h_l^{(1)}(x)$ — функция Ханкеля первого рода, нижний индекс l означает порядок функций.

Коэффициенты $A_{mlm'l'}^\pm$, $B_{mlm'l'}^\pm$, $C_{mlm'l'}^\pm$ и $D_{mlm'l'}^\pm$ определяются следующим образом:

$$A_{mlm'l'}^\pm = \sum_{p=|l-l'|}^{l+l'} a_{pll'} \beta_{pmlm'l'}^\pm, \quad (28)$$

$$B_{mlm'l'}^\pm = \sum_{p=|l-l'|}^{l+l'} b_{pll'} \beta_{pmlm'l'}^\pm,$$

$$C_{mlm'l'}^\pm = \sum_{p=|l-l'|}^{l+l'} (-1)^{l-l'+p} a_{pll'} \beta_{pmlm'l'}^\mp, \quad (29)$$

$$D_{mlm'l'}^\pm = \sum_{p=|l-l'|}^{l+l'} (-1)^{l-l'+p} b_{pll'} \beta_{pmlm'l'}^\mp,$$

где

$$\begin{aligned} a_{pll'} &= \frac{2l'+1}{2l'(l'+1)} i^{-p} (2p+1) \times \\ &\times [l(l+1)+l'(l'+1)-p(p+1)] \begin{pmatrix} l & l' & p \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} b_{pll'} &= \frac{2l'+1}{2l'(l'+1)} i^{-p} (2p+1) [(p+l-l') \times \\ &\times (p-l+l')(l+l'+1+p)(l+l'+1-p)]^{1/2} \times \\ &\times \begin{pmatrix} l & l' & p-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \beta_{pmlm'l'}^\pm &= (-1)^m (\pm 1)^{m'} (1 + \delta_{m'0})^{-1} \times \\ &\times \begin{pmatrix} l & l' & p \\ m & \mp m' & \pm m' - m \end{pmatrix} \times \\ &\times \left(\frac{(l+m)!(l'-m')!(p-m \pm m')!}{(l-m)!(l'+m')!(p+m \mp m')!} \right)^{1/2} \times \\ &\times P_p^{m \mp m'}(0) H_p^{m \mp m'}, \end{aligned} \quad (32)$$

$P_p^{m \mp m'}(0)$ — присоединенные функции Лежандра, определенные выше,

$$\begin{aligned} H_p^{m \mp m'} &= (i)^{m \mp m'} \times \\ &\times \int_1^\infty g(u) h_p^{(1)}(2xu) J_{m \mp m'}(2xu \sin \theta_0) u du. \end{aligned} \quad (33)$$

Входящие в формулы (30)–(32) коэффициенты

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}$$

— это $3j$ -символы Вигнера. При $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ они равны нулю, если $j_1 + j_2 + j_3$ — нечетное число [84]. Таким образом, ненулевые значения коэффициентов $a_{pl'l'}$ и $b_{pl'l'}$ имеют место, если сумма индексов $s = l + l' + p$ является соответственно четным и нечетным числом. Поскольку значение p первого члена суммы (29) равно $|l - l'|$, соответствующее значение s четное ($s - 1$ — нечетное) и коэффициент $a_{pl'l'} \neq 0$ ($b_{pl'l'} = 0$). Ситуация меняется на обратную с увеличением индекса p на единицу и т. д. Четность степени множителя $(-1)^{l-l'+p}$, входящего в определение $C_{mlm'l'}^\mp$ ($D_{mlm'l'}^\pm$) (формула (29)), совпадает с четностью s . В результате имеют место следующие равенства: $A_{mlm'l'}^\pm = C_{mlm'l'}^\mp$, $B_{mlm'l'}^\pm = -D_{mlm'l'}^\mp$.

Интеграл (33) рассчитывается численно. Он является осциллирующей функцией верхнего предела интегрирования u_{up} , которая стремится к своему асимптотическому значению с увеличением u_{up} . Оно приближенно равно усредненному значению этой функции на интервале значений верхнего предела интегрирования, определяемому величинами u_1 и u_2 :

$$H_p^{m\mp m'} \approx (i)^{m\mp m'} \frac{1}{u_2 - u_1} \int_{u_1}^{u_2} du_{up} \times \int_1^{u_{up}} g(u) h_p^{(1)}(2xu) J_{m\mp m'}(2xu \sin \theta_0) u du. \quad (34)$$

Коэффициенты $b_{mlE}^{(e)}$, $b_{mlE}^{(o)}$, $b_{mlM}^{(e)}$, $b_{mlM}^{(o)}$ находят-ся из решения системы (26):

$$\begin{aligned} b_{mlM(E)}^{(e)} &= (b_{mlM(E)}^{(s)} + b_{mlM(E)}^{(d)})/2, \\ b_{mlM(E)}^{(o)} &= (b_{mlM(E)}^{(s)} - b_{mlM(E)}^{(d)})/2. \end{aligned} \quad (35)$$

Если внешнее излучение падает на монослой по нормали ($\theta_0 = 0^\circ$), то интегралы $H_p^{m+m'}$ и, соответственно, коэффициенты $A_{mlm'l'}^-$ ($C_{mlm'l'}^+$) и $B_{mlm'l'}^-$ ($D_{mlm'l'}^+$) равны нулю. Система уравнений (26) разделяется на две подсистемы: одна для коэффициентов $b_{mlM(E)}^{(s)}$, другая для $b_{mlM(E)}^{(d)}$. Ненулевое решение существует только при равенстве индексов $m' = m = 1$, поскольку угловые функции $\pi_l^{(m)}(1) = \tau_l^{(m)}(1) = 0$ при $m \neq 1$ [75]. Такая система рассмотрена в работе [73], где показано, что для правосторонней циркулярной поляризации $b_{mlM(E)}^{(e)} = b_{mlM(E)}^{(o)}$, а для левосторонней $b_{mlM(E)}^{(e)} = -b_{mlM(E)}^{(o)}$. В результате, как следует из выражения (21) для амплитудной функции рассеяния $\mathbf{f}(\hat{\mathbf{r}})$, при $m = 1$ функция $\mathbf{f}(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{f}^*(\hat{\mathbf{r}})$ и про-

порциональная ей интенсивность I_{inc} некогерентного поля не зависят от азимутального угла рассеяния: $I_{inc}(\varphi) = \text{const}$. При линейной поляризации падающего излучения коэффициенты, определяющие вклад четных и нечетных гармоник в разложении усредненного поля в частице (формула (20)), не равны. Как следствие, функцию I_{inc} можно записать, используя формулу (42) из работы [73], в виде суммы двух членов. Один из них пропорционален $\cos^2(\alpha - \varphi)$, а другой — $\sin^2(\alpha - \varphi)$, где α — угол между вектором поляризации и осью x . Коэффициенты при $\cos^2(\alpha - \varphi)$ и $\sin^2(\alpha - \varphi)$ разные. Таким образом, функция $I_{inc}(\varphi)$ является периодической и симметричной относительно плоскости поляризации (плоскости колебаний вектора $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$) и плоскости, ортогональной ей.

При освещении монослоя под углом $\theta_0 \neq 0$ зависимость $I_{inc}(\varphi)$, как следует из выражения (21), усложняется. Это связано с появлением еще одной выделенной плоскости — плоскости падения, относительно которой симметричен сдвиг фазы падающей волны и равный ему сдвиг фазы усредненного поля в частицах. Симметрия распределения интенсивности некогерентного поля по азимутальному углу относительно плоскости поляризации имеет место только для падающей волны, у которой эта плоскость совпадает с плоскостью падения (p -поляризованная или ТМ-волна). Относительно плоскости падения симметрично также и распределение $I_{inc}(\varphi)$, если падающая волна поляризована ортогонально этой плоскости (s -поляризованная или ТЕ-волна). Для остальных типов поляризации плоскость симметрии углового распределения интенсивности отсутствует. Результаты расчетов, иллюстрирующие зависимость $I_{inc}(\varphi)$ при освещении монослоя волнами с линейной и циркулярной поляризациями от угла падения и плотности упаковки частиц, приведены в разд. 6.

5. КОЭФФИЦИЕНТЫ КОГЕРЕНТНОГО ПРОПУСКАНИЯ И ОТРАЖЕНИЯ И НЕКОГЕРЕНТНОГО РАССЕЯНИЯ МОНОСЛОЯ, УГЛОВОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕНСИВНОСТИ РАССЕЯННОГО ПОЛЯ

Найдем доли излучения, когерентно прошедшего и отраженного монослоем, и рассеянного некогерентно. Первые две характеристики являются энергетическими коэффициентами когерентного пропускания T_c и отражения R_c монослоя, которые определяются как отношения интенсивностей прошедшей прямо и зеркально отраженной волн к интенсивнос-

ти падающей волны. Используя результаты разд. 3, 4, получим

$$T_c = \left| \varepsilon_\theta - \frac{8\pi\eta}{x^2 \cos \theta_0} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l \alpha_{ml} \times \right. \\ \left. \times \left[m\pi_l^{(m)}(\mu_0)b_{mlM}^{(o)} + \tau_l^{(m)}(\mu_0)b_{mlE}^{(e)} \right] \right|^2 + \\ + \left| \varepsilon_\varphi - \frac{8\pi\eta}{x^2 \cos \theta_0} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l \alpha_{ml} \times \right. \\ \left. \times \left[m\pi_l^{(m)}(\mu_0)b_{mlE}^{(o)} + \tau_l^{(m)}(\mu_0)b_{mlM}^{(e)} \right] \right|^2, \quad (36)$$

$$R_c = \left| \frac{8\pi\eta}{x^2 \cos \theta_0} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l (-1)^{l-m} \alpha_{ml} \times \right. \\ \left. \times \left[m\pi_l^{(m)}(\mu_0)b_{mlM}^{(o)} - \tau_l^{(m)}(\mu_0)b_{mlE}^{(e)} \right] \right|^2 + \\ + \left| \frac{8\pi\eta}{x^2 \cos \theta_0} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l (-1)^{l-m} \alpha_{ml} \times \right. \\ \left. \times \left[m\pi_l^{(m)}(\mu_0)b_{mlE}^{(o)} - \tau_l^{(m)}(\mu_0)b_{mlM}^{(e)} \right] \right|^2. \quad (37)$$

Доля излучения, рассеянного в направлении $\hat{\mathbf{r}}$ (дифференциальный коэффициент некогерентного рассеяния), определяется как отношение потока излучения $dJ_{inc}(\hat{\mathbf{r}})$, создаваемого частицами, расположенными на «видимой» приемником площади S монослоя (см. формулу (16)), к потоку излучения $|\mathbf{E}_0|^2 S \cos \theta_0$, падающего на площадь S :

$$d\sigma(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{dJ_{inc}(\hat{\mathbf{r}})}{|\mathbf{E}_0|^2 S \cos \theta_0}. \quad (38)$$

Явный вид функции (38) запишем, используя формулы (16) и (21):

$$d\sigma(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{16\pi\eta S_2}{x^2 \cos \theta_0} \left\{ \left| \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l \alpha_{ml} \times \right. \right. \\ \times \left[m\pi_l^{(m)}(\mu) \left(\cos(m\varphi)b_{mlM}^{(o)} + i \sin(m\varphi)b_{mlM}^{(e)} \right) + \right. \\ \left. + \tau_l^{(m)}(\mu) \left(\cos(m\varphi)b_{mlE}^{(e)} + i \sin(m\varphi)b_{mlE}^{(o)} \right) \right] \left. \right|^2 + \\ + \left| \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l \alpha_{ml} \times \right. \\ \times \left[\tau_l^{(m)}(\mu) \left(\cos(m\varphi)b_{mlM}^{(e)} + i \sin(m\varphi)b_{mlM}^{(o)} \right) + \right. \\ \left. + m\pi_l^{(m)}(\mu) \left(\cos(m\varphi)b_{mlE}^{(o)} + i \sin(m\varphi)b_{mlE}^{(e)} \right) \right] \left. \right|^2 \left. \right\} \times \\ \times d\Omega = I_{inc}^d(\theta, \varphi) d\Omega. \quad (39)$$

Величину I_{inc}^d , введенную в формуле (39), назовем приведенной интенсивностью (reduced intensity) некогерентного поля.

Коэффициент некогерентного рассеяния F_{inc} монослоя определим, интегрируя (39) по всем направлениям рассеяния:

$$F_{inc} = \int d\sigma(\hat{\mathbf{r}}) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi I_{inc}^d(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta. \quad (40)$$

Примеры расчета углового распределения I_{inc}^d рассеянного излучения, коэффициентов когерентного пропускания T_c , когерентного отражения R_c , некогерентного рассеяния F_{inc} и поглощения A монослоя приведены в следующем разделе.

6. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Полученные выше выражения применимы для анализа оптических свойств монослоев с разным типом пространственной упорядоченности: частично упорядоченных, имеющих ближний порядок, и упорядоченных монослоев с решетками, имеющими «неидеальный дальний» порядок в расположении частиц.

Ниже, для иллюстрации описанного подхода приведены результаты расчетов для частично упорядоченных монослоев диэлектрических и полупроводниковых частиц. Радиальная функция распреде-

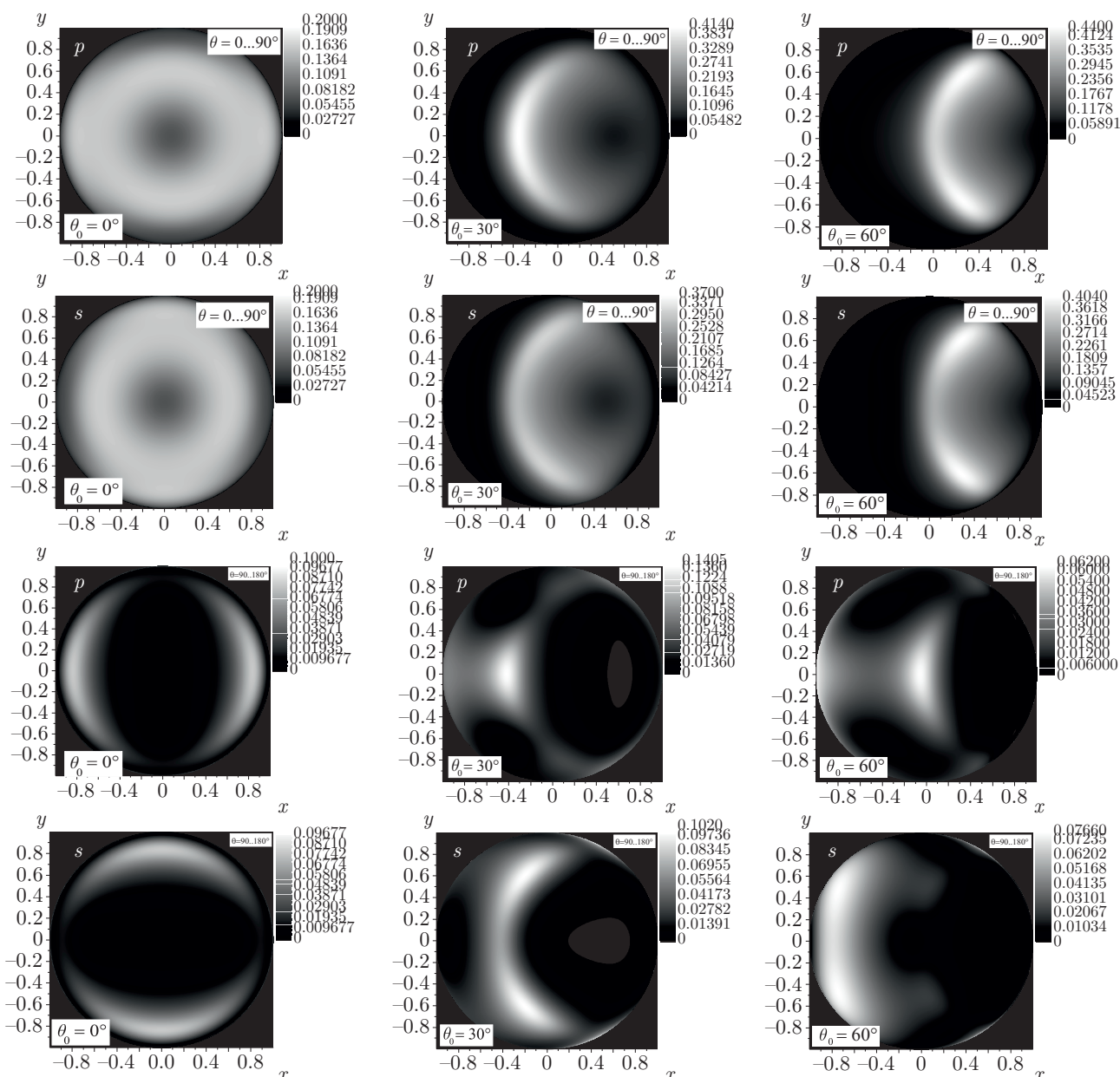


Рис. 2. Зависимости приведенной интенсивности $I_{inc}^{rd}(x, y)$ некогерентного поля в координатах $x = \sin(\theta) \sin(\varphi)$, $y = \sin(\theta) \cos(\varphi)$ при освещении монослоя волной с p -поляризацией и s -поляризацией; $D = 0.5$ мкм, $\eta = 0.5$, $\lambda = 0.5$ мкм, $m_p = 1.6 + 0i$, $\theta_0 = 0, 30^\circ, 60^\circ$. Центры рисунков соответствуют направлениям рассеяния $\theta = 0$ (для $\theta = 0 \dots 90^\circ$) и $\theta = 180^\circ$ (для $\theta = 90 \dots 180^\circ$)

ления $g(u)$ (см. выражение (34)), моделирующая такие монослои, рассчитывалась в приближении Перкуса – Йевики [20, 76, 77] методом итераций [20].

Для определения оптических характеристик монослоев с «неидеальным дальним» порядком может быть использована радиальная функция, метод расчета которой приведен в наших работах [69, 70]. Такое моделирование будет проведено нами в дальнейшем.

6.1. Непоглощающие частицы

6.1.1. Угловое распределение интенсивности некогерентного поля

Рисунок 2 иллюстрирует зависимости углового распределения интенсивности некогерентного поля при разных углах освещения θ_0 частично упорядоченного монослоя волной с линейными поляризациями: $\varepsilon_\theta = 1 + 0i$, $\varepsilon_\varphi = 0 + 0i$ (p -поляризованная или

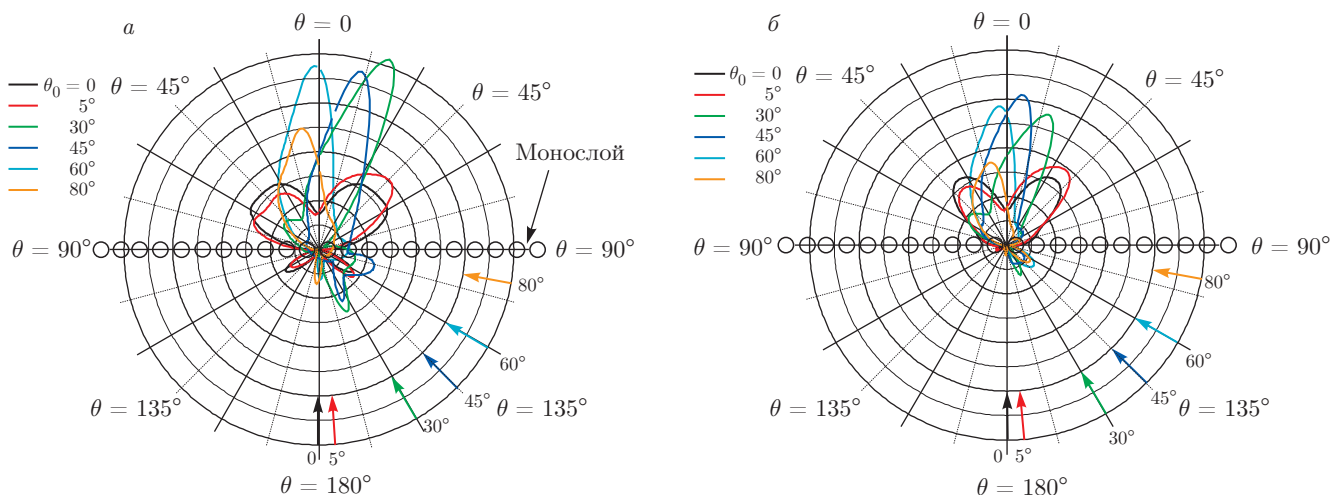


Рис. 3. Зависимости I_{inc}^{rd} от полярного угла рассеяния θ в плоскости падения при разных углах освещения θ_0 монослоя волной с p -поляризацией (а) и s -поляризацией (б); $D = 0.5$ мкм, $\eta = 0.5$, $\lambda = 0.5$ мкм, $m_p = 1.6 + 0i$. Стрелками обозначены направления освещения монослоя. Интервал изменения радиальной координаты одинаков для обоих рисунков

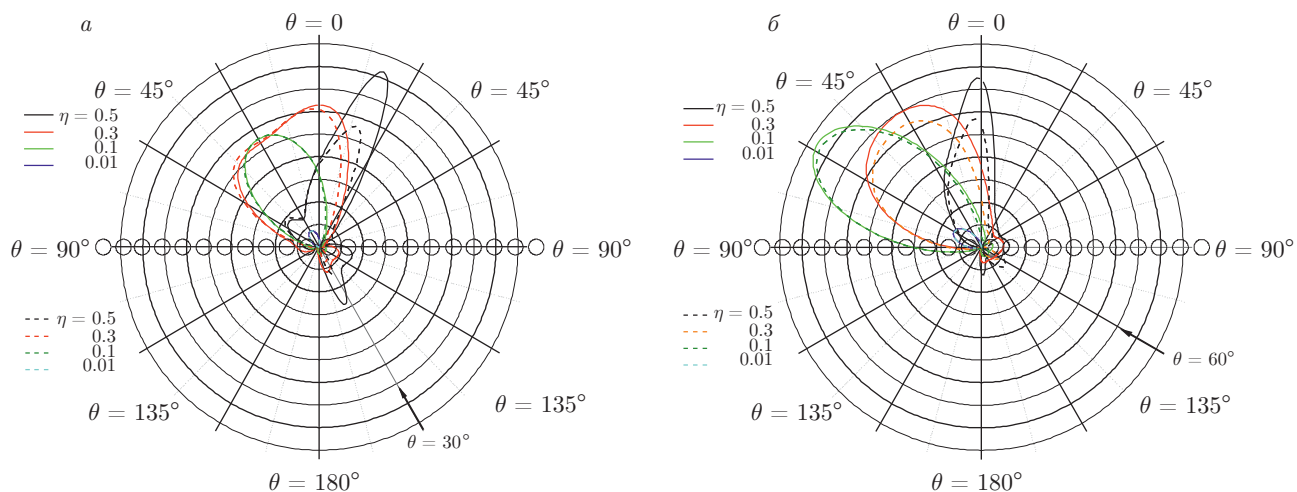


Рис. 4. Зависимости I_{inc}^{rd} от полярного угла рассеяния θ в плоскости падения при углах освещения $\theta_0 = 30^\circ$ (а) и 60° (б) монослоя волной с p -поляризацией (сплошные линии) и s -поляризацией (штриховые линии); $D = 0.5$ мкм, $\lambda = 0.5$ мкм, $m_p = 1.6 + 0i$. Интервал изменения радиальной координаты одинаков для обоих рисунков

ТМ-волна) и $\varepsilon_\theta = 0 + 0i$, $\varepsilon_\varphi = 0 + 1i$ (s -поляризованная или ТЕ-волна), в координатах $x = \sin(\theta) \sin(\varphi)$, $y = \sin(\theta) \cos(\varphi)$. Такое представление позволяет наглядно проследить изменение интенсивности поля, рассеянного в переднюю и заднюю полусферы (относительно плоскости монослоя) во всем диапазоне изменений полярного и азимутального углов рассеяния.

Из результатов расчета и данных рисунка следует, что угловое распределение интенсивности рассеянного света зависит от состояния поляризации падающей волны. Зависимость более выражена для задней полусферы.

Зависимость приведенной интенсивности $I_{inc}^{rd}(\theta)$ от угла рассеяния θ в плоскости рассеяния, совпадающей с плоскостью падения, показана в полярных координатах на рис. 3 для более широкого диапазона углов θ_0 .

Видно, что для рассмотренных параметров монослоя основная доля излучения, некогерентно рассеянного в плоскости падения, распространяется в переднюю полусферу, а в направлении зеркального отражения имеет место минимум I_{inc}^{rd} . При некоторых углах падения θ_0 наблюдается пик I_{inc}^{rd} в области углов, близких к направлению, обратному направлению освещения монослоя.

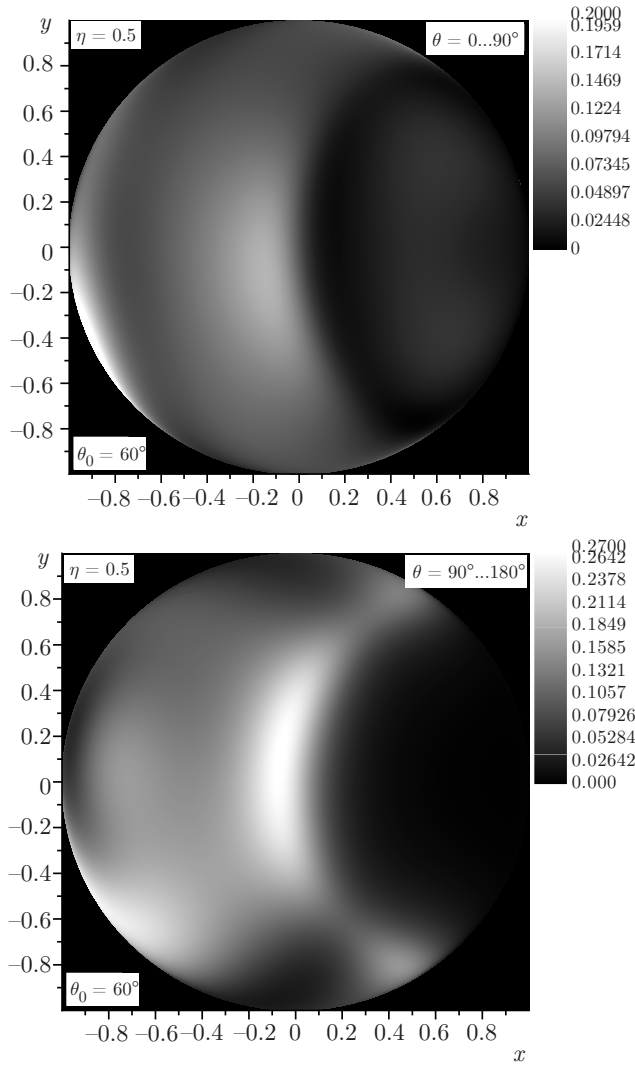


Рис. 5. Зависимости приведенной интенсивности $I_{inc}^d(x, y)$ некогерентного поля в координатах $x = \sin(\theta) \sin(\varphi)$, $y = \sin(\theta) \cos(\varphi)$. Освещение монослоя волной с правой циркулярной поляризацией ($\varepsilon_\theta = 1/\sqrt{2} + 0i$, $\varepsilon_\varphi = 1/\sqrt{2} + 0i$) под углом $\theta_0 = 60^\circ$; $D = 0.5$ мкм, $\lambda = 0.5$ мкм, $m_p = n_{c-Si} + 0i = 4.2975 + 0i$, $\eta = 0.5$

Влияние фактора заполнения η частично упорядоченного монослоя на $I_{inc}^d(\theta)$ в плоскости падения при углах освещения $\theta_0 = 30^\circ$ и $\theta_0 = 60^\circ$ показано на рис. 4. Рисунок наглядно иллюстрирует влияние многократного рассеяния и интерференции волн на угловую структуру рассеянного поля в дальней зоне. При малых концентрациях частиц диаграмма рассеяния совпадает с диаграммой рассеяния отдельной частицы. С ростом концентрации появляются различия. Максимум углового распределения для излучения, прошедшего через монослой, все больше отклоняется от направления падающего излучения. В частности, на рис. 4б видно, что

для рассмотренных параметров монослоя и условий освещения ($D = 0.5$ мкм, $m_p = 1.6 + 0i$, $\lambda = 0.5$ мкм, $\eta = 0.5$ и $\theta_0 = 60^\circ$) максимум распределения интенсивности реализуется при угле рассеяния $\theta \sim 0$, а не 60° , как это имеет место при малой концентрации частиц.

Результаты, приведенные на рис. 2 для падающих p - и s -поляризованных волн демонстрируют симметрию интенсивности некогерентно рассеянного поля по азимутальному углу рассеяния относительно плоскости падения. Как отмечалось в разд. 4, для остальных типов поляризации зависимость $I_{inc}(\varphi)$ усложняется. На следующих рисунках этого раздела мы иллюстрируем это на примере падающей волны с циркулярной поляризацией. Так, на рис. 5 и 6 показаны зависимости приведенной интенсивности $I_{inc}^d(x, y)$ и $I_{inc}^d(\varphi)$ некогерентного поля при освещении монослоя волной с циркулярной поляризацией под углом $\theta_0 = 60^\circ$. Они иллюстрируют асимметрию углового распределения по азимутальному углу рассеяния φ относительно плоскости падения. Результаты расчетов показывают, что искажение симметрии растет с увеличением угла освещения, показателя преломления частиц и фактора заполнения монослоя. Для наглядности, на рисунках представлены результаты расчетов для монослоев «модельных» частиц с достаточно большим показателем преломления $m_p = n_{c-Si} + 0i = 4.2975 + 0i$, где n_{c-Si} — действительная часть показателя преломления кристаллического кремния (более подробно результаты для монослоев частиц c -Si рассмотрены в следующем разделе). Как видно на рис. 5, асимметрия имеет место как для передней, так и для задней полусфер. Рисунок 6а показывает, что угловая структура по азимутальному углу рассеяния φ для правой циркулярной поляризации (сплошные линии) зеркально симметрична угловой структуре для левой циркулярной поляризации (штриховые линии) относительно плоскости падения. С уменьшением фактора заполнения η монослоя угловые структуры для обеих циркулярных поляризаций сближаются и становятся симметричными относительно плоскости падения (рис. 6б). При освещении монослоя по нормали симметрия углового распределения по азимутальному углу рассеяния φ имеет место при любом факторе заполнения.

Рассмотренная асимметрия относительно плоскости падения имеет место и для линейной поляризации падающей волны, если плоскость поляризации не совпадает и не ортогональна плоскости падения. В случае s - или p -поляризаций симметрия сохраняется для любого угла освещения (рис. 2).

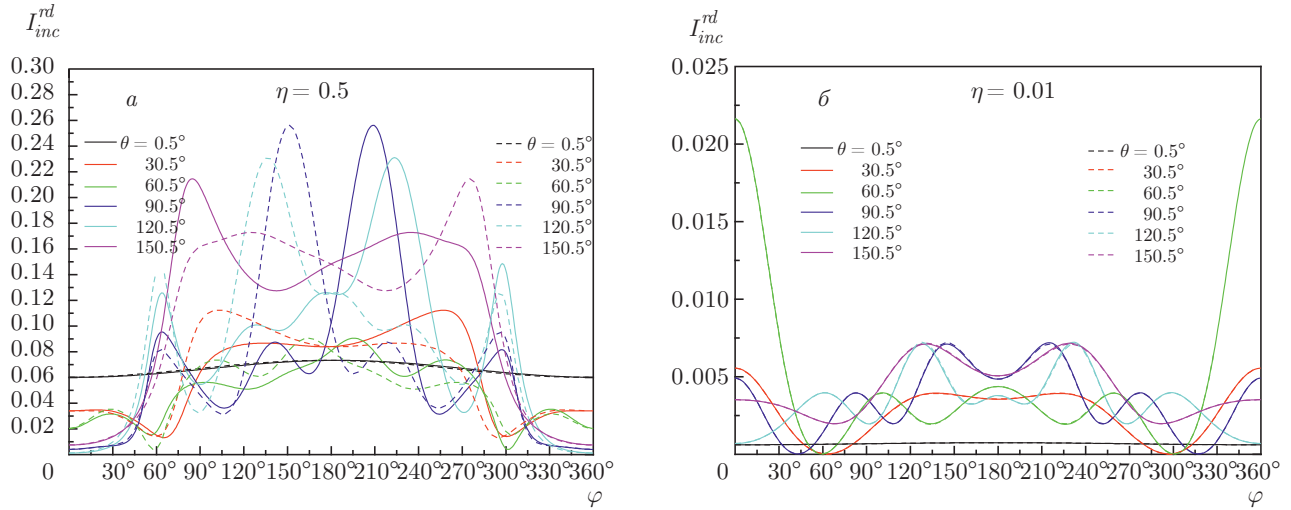


Рис. 6. Зависимости I_{inc}^{rd} от азимутального угла рассеяния φ при освещении монослоя волной с правой ($\varepsilon_\theta = 1/\sqrt{2} + 0i$, $\varepsilon_\varphi = 1/\sqrt{2} + 0i$, сплошные линии) и левой ($\varepsilon_\theta = 1/\sqrt{2} + 0i$, $\varepsilon_\varphi = -1/\sqrt{2} + 0i$, штриховые линии) циркулярными поляризациями под углом $\theta_0 = 60^\circ$ для разных полярных углов рассеяния θ ; $\eta = 0.5$ (а), $\eta = 0.01$ (б); $D = 0.5$ мкм, $\lambda = 0.5$ мкм, $m_p = n_{c-si} + 0i = 4.2975 + 0i$

6.1.2. Коэффициенты когерентного пропускания, отражения и некогерентного рассеяния частично упорядоченного монослоя

Рассмотрим влияние угла освещения, состояния поляризации падающей волны и показателя преломления частиц на спектральные зависимости коэффициентов когерентного пропускания T_c , когерентного отражения R_c и некогерентного рассеяния F_{inc} частично упорядоченного монослоя непоглощающих частиц с размерами, сопоставимыми с длиной волны падающего излучения.

На рис. 7 показаны результаты расчетов для монослоя частиц оксида кремния (SiO_2), освещаемого волной с линейной поляризацией: $\varepsilon_\theta = 1 + 0i$, $\varepsilon_\varphi = 0 + 0i$ (p -поляризованная или ТМ-волна, сплошные линии) и $\varepsilon_\theta = 0 + 0i$, $\varepsilon_\varphi = 0 + 1i$ (s -поляризованная или ТЕ-волна, штриховые линии).

Рисунок 8 иллюстрирует влияние показателя преломления частиц на спектры T_c , R_c , и F_{inc} монослоя при наклонном освещении волной с циркулярной поляризацией. Рассмотрены монослои частиц оксида кремния и оксида алюминия.

Результаты расчетов показывают, что при $\theta_0 = 0$ величины T_c , R_c и F_{inc} не зависят от состояния поляризации падающего света (их спектральные зависимости показаны на рис. 7а). С ростом угла падения в общем случае появляется зависимость от поляризации, что иллюстрирует рис. 7. При освещении

волной с циркулярной поляризацией величины T_c , R_c и F_{inc} не зависят от направления вращения вектора поляризации падающей волны при любом θ_0 (рис. 8а) в отличие от распределения интенсивности некогерентного поля по углу φ (рис. 6а). При изменении угла падения в областях, близких к $\theta_0 = 0$ и $\theta_0 = 90^\circ$, наблюдается значительное изменение спектральных зависимостей $T_c(\lambda)$, $R_c(\lambda)$ и $F_{inc}(\lambda)$. В области «средних» углов освещения наиболее сильные изменения имеют место для зависимости $R_c(\lambda)$. С ростом угла освещения в области $\theta_0 > 60^\circ$ доля некогерентно рассеянного излучения уменьшается, а доля когерентно рассеянного — увеличивается. Увеличение показателя преломления частиц приводит к росту $F_{inc}(\lambda)$ и уменьшению $T_c(\lambda) + R_c(\lambda)$ (рис. 8).

Погрешность расчетов ε_{calc} , которую для непоглощающих частиц мы определяем как $\varepsilon_{calc} = |1 - T_c - R_c - F_{inc}|$, зависит от характеристик монослоя и угла освещения. При использованных в работе параметрах расчета (шаге интегрирования, числе учитываемых коэффициентов разложения и т. д.) минимальная погрешность $\varepsilon_{calc} < 5 \cdot 10^{-5}$ имела место для зависимостей, приведенных на рис. 7б, а максимальная $\varepsilon_{calc} < 2.5 \cdot 10^{-3}$ — на рис. 8г. Детальная оценка влияния задаваемых параметров на точность расчетов будет проведена в будущих работах.

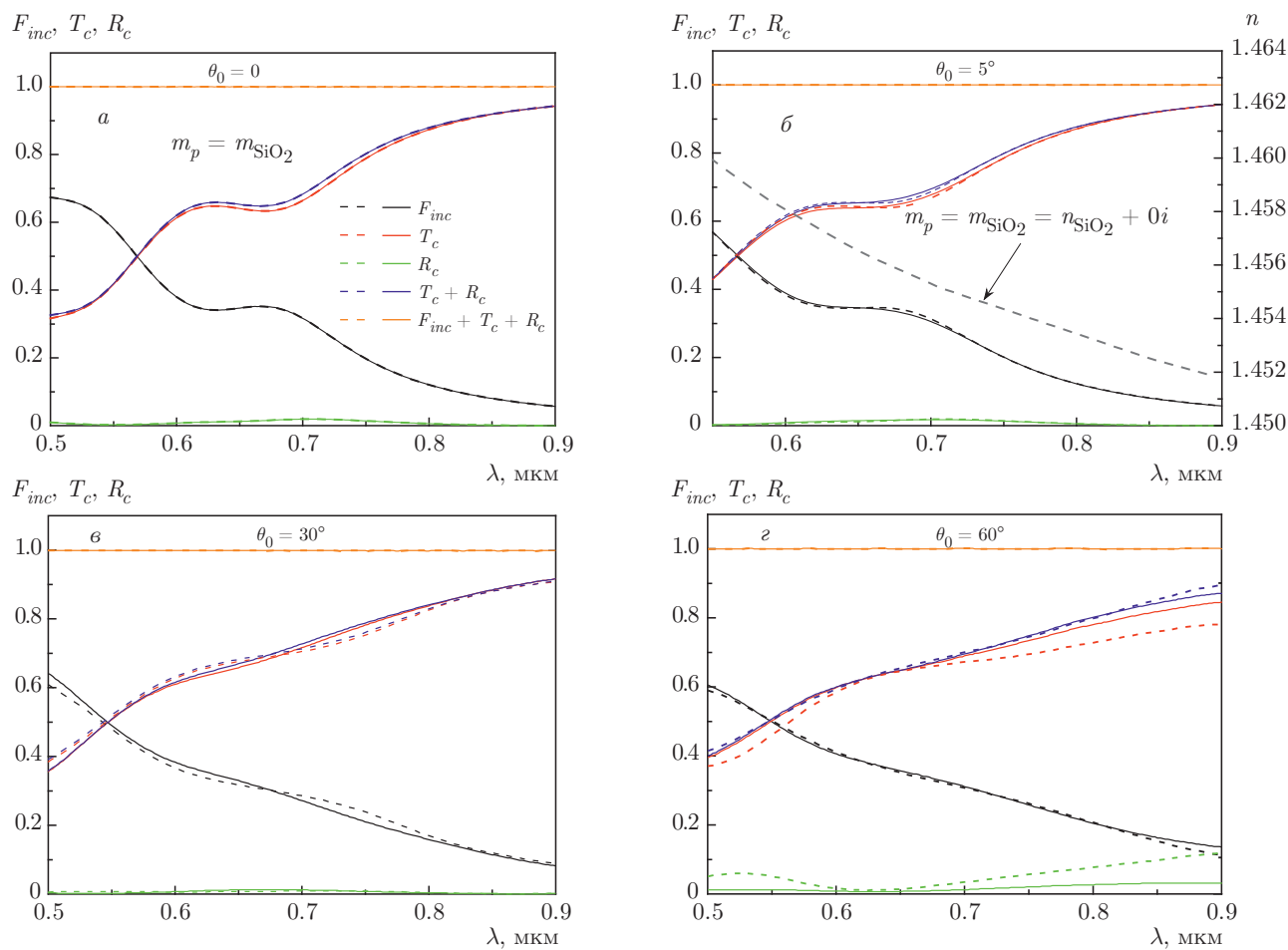


Рис. 7. Спектральные зависимости коэффициентов когерентного пропускания T_c , когерентного отражения R_c , некогерентного рассеяния F_{inc} и их сумм $T_c + R_c$, $T_c + R_c + F_{inc}$ при освещении монослоя частично упорядоченных частиц оксида кремния SiO_2 волной с p -поляризацией (сплошные линии) и s -поляризацией (штриховые линии) под углом $\theta_0 = 0$ (а), 5° (б), 30° (в), 60° (г). Спектральная зависимость показателя преломления SiO_2 (б) [85]. Фактор заполнения монослоя $\eta = 0.5$. Диаметр частиц $D = 0.5$ мкм

6.2. Монослой поглощающих частиц: рассеяние и поглощение

Рассмотрим влияние направления освещения на светорассеивающие и поглощающие свойства монослоя на примере частиц кристаллического кремния ($c\text{-Si}$). Этот материал широко используется при создании различных электрооптических приборов и устройств, таких как солнечные элементы, светодиоды, детекторы излучения и т. д. Коэффициент поглощения монослоя определим как $A = 1 - (T_c + R_c + F_{inc})$.

На рис. 9 показаны зависимости приведенной интенсивности I_{inc}^{rd} от полярного угла рассеяния θ в

плоскости падения при освещении монослоя кремниевых частиц волной с p - и s -поляризациями под разными углами θ_0 монослоя. Видно, что в отличие от монослоя непоглощающих частиц (см. рис. 3), имеет место значительное рассеяние в заднюю полусферу. При углах освещения, близких к $\theta_0 = 30^\circ$ (для обеих поляризаций) и $\theta_0 = 60^\circ$ (для p -поляризации), максимальный пик некогерентно рассеянного излучения сосредоточен в малой области углов около направления «назад» (направления, противоположного направлению освещения), т. е. имеет место сильное обратное рассеяние. Подобный эффект наблюдался экспериментально для слоев InP с нанопористой поверхностью [86, 87].

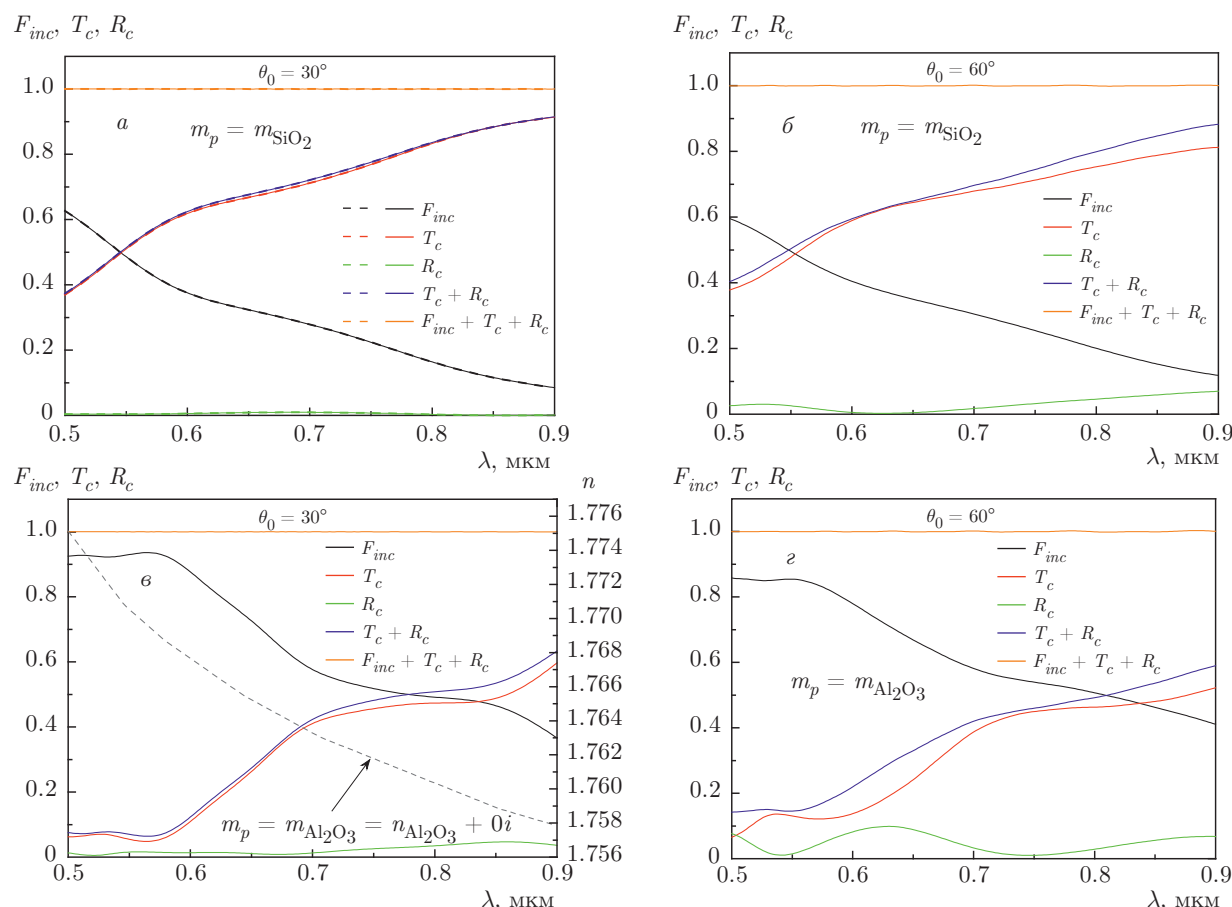


Рис. 8. Спектральные зависимости коэффициентов когерентного пропускания T_c , когерентного отражения R_c , некогерентного рассеяния F_{inc} и их сумм $T_c + R_c$, $T_c + R_c + F_{inc}$ при освещении монослоя частично упорядоченных частиц оксида кремния (SiO_2) (а, б) и оксида алюминия (Al_2O_3) (в, г) волной с правой ($\varepsilon_\theta = 1/\sqrt{2} + 0i$, $\varepsilon_\varphi = 1/\sqrt{2} + 0i$, сплошные линии, а–г) и левой ($\varepsilon_\theta = 1/\sqrt{2} + 0i$, $\varepsilon_\varphi = -1/\sqrt{2} + 0i$, штриховые линии, а) циркулярными поляризациями под углом $\theta_0 = 30^\circ$ (а, в) и 60° (б, г). Спектральная зависимость показателя преломления оксида алюминия Al_2O_3 (в) [85], $\eta = 0.5$, $D = 0.5$ мкм

На рис. 10 показаны зависимости коэффициентов когерентного пропускания T_c , когерентного отражения R_c , некогерентного рассеяния F_{inc} и поглощения A частично упорядоченного монослоя частиц $c\text{-Si}$ от угла освещения θ_0 .

Как видно на рисунка, при наклонном освещении ($\theta_0 \neq 0$) все рассмотренные величины зависят от состояния поляризации падающей волны. Их значения при освещении волной с циркулярной поляризацией равны среднему между значениями при освещении волнами с p - и s -поляризациями. В целом, с ростом угла падения коэффициент когерентного пропускания уменьшается, коэффициент когерентного отражения имеет минимум, а при скользких углах падения резко возрастает, коэффициент некогерентного рассеяния растет, проходит мак-

симум и затем уменьшается. Изменение коэффициента поглощения коррелирует с зависимостью коэффициента некогерентного рассеяния. На графиках наблюдаются максимумы и минимумы $A(\theta_0)$ для циркулярной и линейной p -поляризации и максимум для s -поляризации. Величина и положение «глобальных» максимумов для p - и s -поляризаций различны. Поглощение максимально в диапазоне углов падения $\theta_0 \sim 45^\circ\text{--}75^\circ$. Полученные результаты и изложенная методика могут быть использованы, в частности, для оценки поглощения света в монослоях частиц при разработке тонкопленочных солнечных элементов с дисперсным активным слоем из частиц кремния или других полупроводниковых материалов, полимерных, органических и перовскитных солнечных элементов.

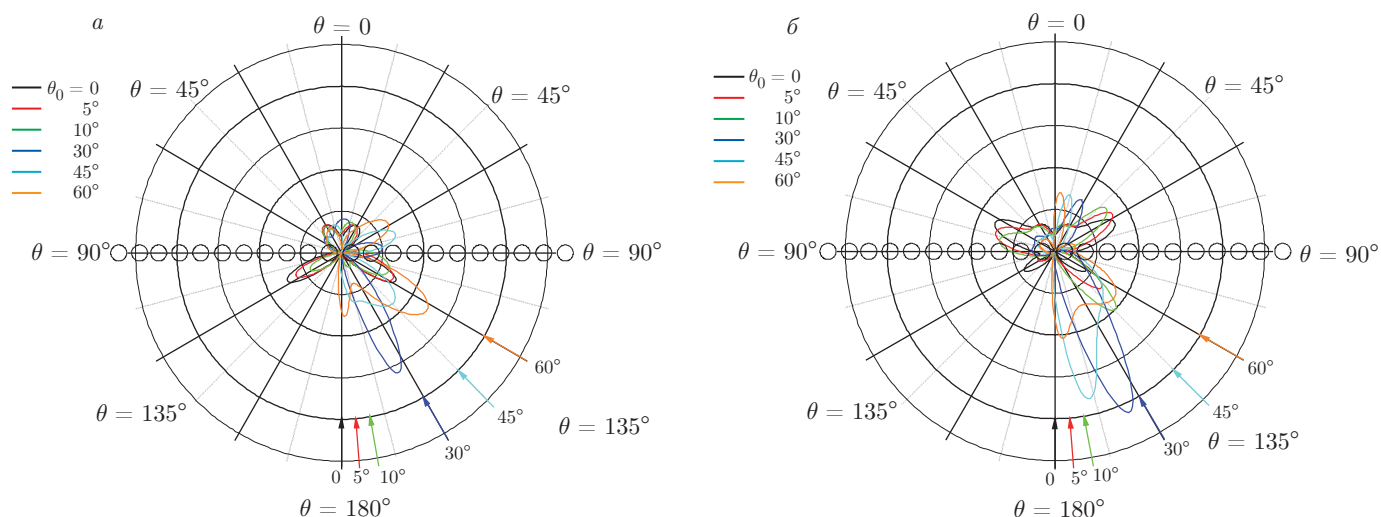


Рис. 9. Зависимости приведенной интенсивности $I_{inc}^{r,d}$ от полярного угла рассеяния θ в плоскости падения при разных углах освещения θ_0 частично упорядоченного монослоя волной с p -поляризацией (а) и s -поляризацией (б); $D = 0.5$ мкм, $\eta = 0.5$, $\lambda = 0.5$ мкм, $m_p = m_{c-Si} = 4.2975 + 0.0728i$. Стрелками обозначены направления освещения монослоя. Интервал изменения радиальной координаты одинаков для обоих рисунков

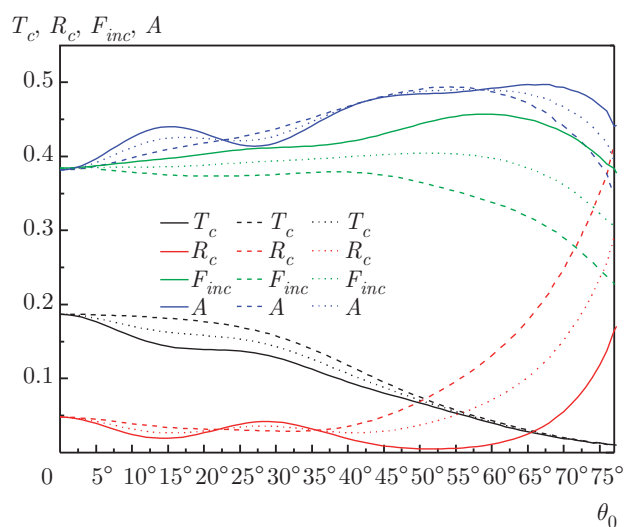


Рис. 10. Зависимости коэффициентов когерентного пропускания T_c , когерентного отражения R_c , некогерентного рассеяния F_{inc} и поглощения A частично упорядоченного монослоя частиц c -Si с диаметром $D = 0.5$ мкм от угла θ_0 освещения волной с циркулярной (пунктирные линии) и линейными p -поляризацией (сплошные линии) и s -поляризацией (штриховые линии); $\eta = 0.5$, $\lambda = 0.5$ мкм, $m_p = m_{c-Si} = 4.2975 + 0.0728i$ [85]. Шаг по θ_0 равен 1°

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная работа является продолжением опубликованных нами ранее работ [69–73], в которых раз-

работан метод определения оптических характеристик монослоя однородных сферических частиц при его освещении плоской электромагнитной волной по нормали. Здесь построено общее решение, применимое при произвольном направлении освещения волной с произвольной поляризацией. Оно основано на квазикристаллическом приближении теории многократного рассеяния волн, приближении среднего поля и мультипольном разложении полей и тензорной функции Грина по векторным сферическим волновым функциям. Ключевым моментом является то, что при наклонном освещении усредненные поля в частицах отличаются сдвигом фаз, определяемым сдвигом фаз падающей волны в точках расположения частиц. Решение применимо для анализа оптических свойств частично упорядоченных, имеющих ближний порядок и упорядоченных монослоев с неидеальными решетками, имеющими «неидеальный дальний» порядок в расположении частиц с любым фактором заполнения (нет ограничений на расстояние между частицами). Получены выражения для определения углового распределения интенсивности некогерентно рассеянного поля, коэффициентов некогерентного рассеяния, поглощения, когерентного пропускания и отражения монослоя. Приведены результаты расчетов, иллюстрирующие зависимости этих характеристик от направления освещения частично упорядоченных монослоев, состоящих из диэлектрических и полупроводниковых частиц.

Получено, что при наклонном освещении угловое распределение интенсивности рассеянного излучения по азимутальному углу рассеяния φ для всех поляризаций (кроме p - и s -) несимметрично относительно плоскости падения. С уменьшением угла падения асимметрия уменьшается и исчезает при малых значениях этой величины. Распределение интенсивности рассеянного поля становится более симметричным также с уменьшением плотности упаковки частиц в монослой, что является следствием уменьшения роли оптического взаимодействия между частицами.

Показано, что с ростом угла падения и/или концентрации частиц максимум углового распределения излучения, прошедшего через монослой, может формироваться в направлении, близком к нормали монослоя. При определенных углах падения и поляризации падающей волны, параметре дифракции и показателе преломления частиц основная доля рассеянного излучения может быть направлена в сторону, противоположную направлению освещения.

Показано, что на зависимостях коэффициентов когерентного отражения, некогерентного рассеяния и поглощения монослоя кремниевых частиц от угла падения могут иметь место один или несколько максимумов и минимумов, величина и положение которых зависят от состояния поляризации падающей волны.

Полученные результаты могут быть использованы для оценки оптических характеристик монослоев частиц при разработке и создании на их основе оптических и оптоэлектронных устройств: антиотражающих покрытий, светофильтров, солнечных элементов, светодиодов и других устройств.

Благодарности. Авторы выражают благодарность сотруднику Института физики НАН Беларуси А. В. Малинке за полезные дискуссии по теме работы.

Финансирование. Работа поддержана Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований (проект Ф20КИ-004).

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Mie, Ann. Phys. **25**, 377 (1908).
2. H. C. van de Hulst, *Light Scattering by Small Particles*, Dover, New York (1981).
3. C. F. Bohren and D. R. Huffman, *Absorption and Scattering of Light by Small Particles*, John Wiley & Sons, New York (1983).
4. V. A. Loiko and A. A. Miskevich, in: *Springer Series in Light Scattering*, Vol. 1: *Multiple Light Scattering, Radiative Transfer and Remote Sensing*, ed. by A. Kokhanovsky, Springer, Berlin (2018), p. 101.
5. A. A. Miskevich and V. A. Loiko, in *Advances in Silicon Solar Cells*, ed. by Sh. Ikhmayies, Springer International Publishing (2018), p. 53.
6. T. Yamasaki and T. Tsutsui, Jpn. J. Appl. Phys. **38**, 5916 (1999).
7. W. Sun, G. Videen, and B. Lin, Appl. Opt. **46**, 1150 (2007).
8. B. Wang, Y. Jin, and S. He, J. Appl. Phys. **106**, 014508 (2009).
9. B. K. Nayak, K. Sun, Ch. Rothenbach et al., Appl. Opt. **50**, 2349 (2011).
10. G. Fujii, T. Matsumoto, and T. Takahashi, Opt. Exp. **20**, 7300 (2012).
11. X. H. Wu, A. Yamilov, H. Noh et al., J. Opt. Soc. B **21**, 159 (2004).
12. Y. Rho, M. Wanit, J. Yeo et al., J. Phys. D: Appl. Phys. **46**, 024006 (2013).
13. D. S. Wiersma, Nat. Photon. **7**, 188 (2013).
14. I. Kim, D. S. Jeong, W. S. Lee et al., Opt. Exp. **22**, A1431 (2014).
15. В. А. Лойко, А. А. Мискевич, Опт. и спектр. **115**, 316 (2013).
16. A. A. Miskevich and V. A. Loiko, J. Quant. Spectr. Rad. Transf. **136**, 58 (2014).
17. A. A. Miskevich and V. A. Loiko, J. Quant. Spectr. Rad. Transf. **146**, 355 (2014).
18. A. A. Miskevich and V. A. Loiko, J. Quant. Spectr. Rad. Transf. **167**, 23 (2015).
19. В. А. Лойко, А. А. Мискевич, Опт. и спектр. **122**, 825 (2017).
20. А.П. Иванов, В.А. Лойко, В.П. Дик, Распространение света в плотноупакованных дисперсных средах, Наука и техника, Минск (1988), 191 с.
21. А. А. Мискевич, В. А. Лойко, ЖЭТФ **146**, 246 (2014).
22. A. A. Miskevich and V. A. Loiko, J. Quant. Spectr. Rad. Transf. **151**, 260 (2015).
23. J. B. Pendry and A. MacKinnon, Phys. Rev. Lett. **69**, 2772 (1992).
24. A. V. Lavrinenko, W. Wohlleben, and R. J. Leyrer, Opt. Exp. **17**, 747 (2009).

25. B. T. Draine, *Astrophys. J* **333**, 848 (1988).
26. M. A. Yurkin and M. Huntemann, *J. Phys. Chem. C* **119**, 29088 (2015).
27. A. Andueza, P. Morales, and J. Sevilla, *J. Appl. Phys.* **111**, 104902 (2012).
28. K. Ohtaka, *J. Phys. C: Solid St. Phys.* **13**, 667 (1980).
29. M. Inoue, K. Ohtaka, and S. Yanagawa, *Phys. Rev. B* **25**, 689 (1982).
30. H. Miyazaki and K. Ohtaka, *Phys. Rev. B* **58**, 6920 (1998).
31. Y. Kurokawa, H. Miyazaki, and Y. Jimba, *Phys. Rev. B* **69**, 155117 (2004).
32. A. Modinos, *Physica A* **141**, 575 (1987).
33. N. Stefanou and A. Modinos, *J. Phys.: Condens. Matter.* **3**, 8135 (1991).
34. N. Stefanou and A. Modinos, *J. Phys.: Condens. Matter.* **3**, 8149 (1991).
35. N. Stefanou and A. Modinos, *J. Phys.: Condens. Matter.* **5**, 8859 (1993).
36. А. Исимару, *Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах*, Мир, Москва (1981).
37. L. Tsang, J. A. Kong, and K.-H. Ding, *Scattering of Electromagnetic Waves*, Vol. 1: *Theories and Applications*, John Wiley & Sons, New York (2000).
38. L. Tsang et al., *Scattering of Electromagnetic Waves*, Vol. 2: *Num. Simulat.*, John Wiley & Sons, New York (2001).
39. L. Tsang and J. A. Kong, *Scattering of Electromagnetic Waves*, Vol. 3: *Adv. Topics*, John Wiley & Sons, New York (2001).
40. L. L. Foldy, *Phys. Rev.* **67**, 107 (1945).
41. M. Lax, *Rev. Mod. Phys.* **23**, 287 (1951).
42. M. Lax, *Phys. Rev.* **85**, 621 (1952).
43. V. Twersky, *J. Appl. Phys.* **23**, 407 (1952).
44. V. Twersky, *J. Math. Phys.* **16**, 633 (1975).
45. J. G. Fikioris and P. C. Waterman, *J. Math. Phys.* **5**, 1413 (1964); *JQSRT* **123**, 8 (2013).
46. N. C. Mathur and K. C. Yeh, *J. Math. Phys.* **5**, 1619 (1964).
47. V. V. Varadan and V. K. Varadan, *Phys. Rev. D* **21**, 388 (1980).
48. L. Tsang and J. A. Kong, *Radio Sci.* **18**, 1260 (1983).
49. L. Tsang and J. A. Kong, *J. Electromagn. Waves and Appl.* **6**, 265 (1992).
50. L. Tsang, C.-T. Chen, A. T. C. Chang et al., *Radio Sci.* **35**, 731 (2000).
51. K. M. Hong, *J. Opt. Soc. Amer.* **70**, 821 (1980).
52. D. Mackowski, *Proc. R. Soc. Lond. A* **433**, 599 (1991); *JOSA A* **11**, 2851 (1994).
53. Y. Xu, *Appl. Opt.* **34**, 4573 (1995); *Phys. Lett. A* **249**, 30 (1998).
54. В. Г. Верещагин, А. Н. Понявина, Н. И. Сильванович, *Докл. АН БССР* **34**, 123 (1990).
55. A. N. Ponyavina, S. M. Kachan, and N. I. Sil'vanovich, *JOSAB* **21**, 1866 (2004).
56. В. А. Лойко, В. И. Молочко, *Опт. и спектр.* **79**, 329 (1995).
57. V. Loiko and V. Molochko, *Part. Part. Syst. Charact.* **13**, 227 (1996).
58. V. A. Loiko, V. P. Dick, and A. P. Ivanov, *J. Opt. Soc. Amer. A* **17**, 2040 (2000).
59. V. A. Loiko and A. A. Miskevich, *Appl. Opt.* **44**, 3759 (2005).
60. В. А. Лойко, А. А. Мискевич, *Опт. и спектр.* **98**, 65 (2005).
61. M. I. Mishchenko, L. Liu, D. W. Mackowski et al., *Opt. Exp.* **15**, 2822 (2007).
62. M. I. Mishchenko, J. M. Dlugach, and D. W. Mackowski, *JOSA A* **33**, 2144 (2018).
63. Y. Okada and A. A. Kokhanovsky, *J. Quant. Spectr. Rad. Transf.* **110**, 902 (2009).
64. A. García-Valenzuela, E. Gutiérrez-Reyes, and R. G. Barrera, *JOSA A* **29**, 1161 (2012).
65. O. Vázquez-Estrada and A. García-Valenzuela, *J. Opt. Soc. Amer. A* **31**, 745 (2014).
66. A. Reyes-Coronado, G. Morales-Luna, O. Vázquez-Estrada et al., *Opt. Exp.* **26**, 12660 (2018).
67. R. Márquez-Islas, O. Vázquez-Estrada, G. Morales-Luna et al, *Opt. & Laser Technol.* **114**, 1 (2019).
68. M. I. Mishchenko, L. D. Travis, and A. A. Lacis, *Multiple Scattering of Light by Particles*, Univ. Press, Cambridge (2006).
69. А. А. Мискевич, В. А. Лойко, *ЖЭТФ* **140**, 5 (2011).

70. A. A. Miskevich and V. A. Loiko, J. Quant. Spectr. Rad. Transf. **112**, 1082 (2011).
71. N. A. Loiko, A. A. Miskevich, and V. A. Loiko, JOSA A **35**, 108 (2018).
72. Н. А. Лойко, А. А. Мискевич, В. А. Лойко, ЖЭТФ **153**, 193 (2018).
73. Н. А. Лойко, А. А. Мискевич, В. А. Лойко, Опт. и спектр. **125**, 623 (2018).
74. P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill Book, New York (1953).
75. V. A. Babenko, L. G. Astafyeva, and V. N. Kuzmin, *Electromagnetic Scattering in Disperse Media: Inhomogeneous and Anisotropic Particles*, Springer, Berlin (2003).
76. О. Н. Гадомский, А. С. Шалин, ЖЭТФ **132**, 870 (2007).
77. B. N. Khlebtsov, Phys. Rev. B **77**, 035440 (2008).
78. А. С. Шалин, Письма в ЖЭТФ **91**, 705 (2010).
79. D. W. Mackowski, J. Quant. Spectr. Rad. Transf. **109**, 770 (2008).
80. J. Ziman, *Models of Disorder*, Univ. Press, Cambridge (1979).
81. J. K. Percus and G. J. Yevick, Phys. Rev. **110**, 1 (1958).
82. O. R. Cruzan, Q. Appl. Math. **20**, 33 (1962).
83. M. I. Mishchenko, L. D. Travis, and A. A. Lacis, *Scattering, Absorption, and Emission of Light by Small Particles*, Univ. Press, Cambridge (2002).
84. Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский, *Квантовая теория углового момента*, Наука, Ленинград (1975).
85. *Handbook of Optical Constants of Solids*, Vol. 1, ed. by E. D. Palik, Academic, San Diego (1985).
86. S. Ya. Prislopski, I. M. Tiginyanu, L. Ghimpu et al., Appl. Phys. A **117**, 467 (2014).
87. V. V. Sergentu, S. Ya. Prislopski, E. V. Monaico et al., J. Opt. **18**, 125008 (2016).