

# КОРРЕЛЯЦИОННАЯ СВЯЗЬ КВАНТОВОЙ ЗАПУТАННОСТИ И КВАНТОВОЙ КОГЕРЕНТНОСТИ В СПИНОВЫХ XY-ЦЕПОЧКАХ СО ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ ДЗЯЛОШИНСКОГО – МОРИИ

*С. Гомбар\**, *П. Мали*, *М. Пантич*, *М. Павков-Хервоевич*, *С. Радосевич*

*Department of Physics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad  
21000, Novi Sad, Serbia*

Поступила в редакцию 6 июня 2019 г.,  
после переработки 6 июня 2019 г.  
Принята к публикации 5 июля 2019 г.

(Перевод с английского)

## CORRELATION BETWEEN QUANTUM ENTANGLEMENT AND QUANTUM COHERENCE IN THE CASE OF XY SPIN CHAINS WITH THE DZIALOSHINSKII–MORIYA INTERACTION

*Sonja Gombar, Petar Mali, Milan Pantić, Milica Pavkov-Hrvojević, Slobodan Radošević*

В последнее время повышенный интерес вызывают исследования квантовой запутанности и квантовой когерентности. Поскольку оба этих явления существуют благодаря принципу квантовой суперпозиции, представляется полезным определить, являются ли они до некоторой степени коррелированными. Целью настоящей работы является исследование вида корреляций в нескольких системах, которые характеризуются различными типами анизотропии. Основное внимание уделено спиновым XY-цепочкам со взаимодействием Дзялошинского – Мории, и вид упомянутой связи исследуется при помощи метода квантовой ренормгруппы.

DOI: 10.31857/S0044451020080015

### 1. ВВЕДЕНИЕ

По-видимому, один из наиболее специфических разделов квантовой механики, квантовая информатика, появился на свет благодаря тому простому факту, что он дает более эффективные способы получения результатов, чем те способы, которые существуют в рамках классического подхода. В 1965 г. Мур сделал предсказание, касающееся вычислительной мощности компьютеров [1]. Он обратил внимание на то, что с уменьшением размеров транзисторов их количество в чипе увеличивается, и предположил, что вычислительная мощность будет удваиваться каждые два года при той же цене. В этом предположении не учтен тот факт, что раз-

меры транзисторов не могут уменьшаться бесконечно и рост быстродействия чипов заметно замедлился в последнее время. В некоторых работах предлагается использовать многоядерные чипы, поскольку благодаря параллельному выполнению задач они улучшают производительность по сравнению с той, которая достигается в моделях с единственным ядром [2].

Однако переход на такие чипы представляется не слишком практичным, поскольку использование классических параллельных вычислений оказывается достаточно дорогим. Поэтому появились работы, в которых предлагается использовать возможности квантовых вычислений для решения задач в таких областях, как химия [3]. Отметим, что недавно были выполнены расчеты возбужденного и основного состояний молекулы  $H_2$  с использованием процессора на сверхпроводящих кубитах [4]. Причина повышенного интереса к этой области заключается в

\* E-mail: df.sonja.gombar2@student.pmf.uns.ac.rs

том, что производительность параллельных вычислений должна сильно вырасти, поскольку классические биты 0 и 1 заменяются квантовыми кубитами, которые могут находиться в состоянии квантовой суперпозиции таких состояний. Этот альтернативный подход возник как следствие последовательного уточнения формулировки тезиса Чёрча–Тьюринга [5] в работах Фейнмана и Дойча [6, 7].

В настоящее время ясно, что в случае использования квантовых компьютеров скорость вычислений сильно возрастет, но это не единственное их преимущество. Возрастает и количество разрешимых задач. Шор и Гровер рассмотрели несколько задач, которые можно решить либо только с использованием квантового компьютера, либо его использование сильно уменьшает затраты времени на получение ответа [8, 9].

Крайне полезным в мире квантовой информации является понятие квантовой запутанности. Оно применимо к системам, которые содержат более одной частицы. Несмотря на то что подчас частицы удалены друг от друга на большое расстояние, они могут находиться в так называемом запутанном состоянии. В этом состоянии ни одну частицу нельзя рассматривать отдельно от остальных [10]. Представления о квантовом шифровании, квантовой телепортации и плотном кодировании тесно связаны с существованием запутанных состояний [5]. Имеется критерий для определения наличия запутанности в системе. Он состоит в проверке выполнимости неравенства Белла определенного типа (как правило, CHSH-неравенства) [11].

Однако остается вопрос, каковы возможности практического применения теоретических предсказаний квантовой информатики. В то время как в области теории квантовых вычислений существует множество разработок, практические решения разрабатываются гораздо медленнее. Тем не менее есть и успехи. Например, уже удалось реализовать квантовое шифрование на разных расстояниях на основе различных систем, содержащих кубиты [12, 13]. Аналогичные результаты были достигнуты и при больших размерностях квантовых систем с запутанностью (кудитов), в частности, кутритов [14]. Фактически, в течение последних лет многие задачи квантовой информатики были исследованы экспериментально [15–22].

Задачей чрезвычайной важности является поиск архитектур, которые могут эффективно моделировать квантовые системы. Считается, что ни один классический компьютер не может выполнить такое моделирование с высокой производительностью, по-

этому интерес сфокусировался в области квантовых вычислений [5]. Было найдено множество систем, которые могут моделировать квантовые компьютеры. К ним относятся оптические квантовые компьютеры, в которых квантовая информация кодируется при помощи поляризации, системы, использующие ядерный магнитный резонанс, в которых кубитами служат ядерные спины, ионы в ловушках и многие другие [23]. Одна из недавно возникших технологий основана на использовании квантовых точек и единичных примесей в твердых телах и позволяет создать и охладить большое количество кубитов [24]. Однако наиболее распространены квантовые компьютеры, основанные на использовании спина [25]. Несмотря на то что было разработано несколько систем квантовых вычислений, содержащих по несколько запутанных кубитов, возникла проблема разрушения когерентности, которая привела к необходимости разработки методов ее поддержания в таких системах [26]. Фактически можно сказать, что разрушение когерентности происходит благодаря запутанности системы и окружающей среды. Это приводит к необходимости учета окружающей среды при расчетах величины когерентности изучаемой системы.

Целью настоящей работы является рассмотрение специфической квантовой системы для наблюдения за поведением двух очень важных величин квантовой информатики — квантовой запутанности и квантовой когерентности, с целью исследовать их взаимосвязь в данной системе. Модели со спином используются для описания разнообразных физических явлений, таких как свойства магнитных соединений [27–31], квантово-холловских систем [32, 33], массивов джозефсоновских переходов [34], квантовых фазовых переходов [35–39] и т. д., и квантовая информатика не является исключением. В настоящее время существенный интерес вызывают спиновые  $XU$ - и  $XUZ$ -цепочки [40, 41], особенно такие, в которых имеются фрустрации и взаимодействие Дзялошинского–Мории (ДМ) [42–47]. В этой работе рассмотрена  $XU$ -модель с ДМ-взаимодействием в случае системы, содержащей три спина  $1/2$ . Важным методом предсказания квантовых фазовых переходов является метод квантовой ренорм-группы [44–46]. В настоящей работе он используется для проверки результатов, полученных для систем большего размера (содержащих несколько спиновых блоков). Основной целью является выяснение того, как связаны запутанность и когерентность в системе, которая оторвана от окружающей среды. Влиянием окружающей среды мы пренебрегаем.

Особое внимание уделено мерам квантовой запутанности и квантовой когерентности, которые используются в настоящее время [48, 49]. В то время как про запутанность известно достаточно много, квантовая когерентность остается сравнительно малоисследованной. Следовательно, представляется полезным выяснить, имеется ли корреляция между этими двумя величинами. Поскольку обе они возникают благодаря принципу квантовой суперпозиции в разных его ипостасях, такое предположение не выглядит неправдоподобным. Ранее авторы работы [50] пришли к заключению, что относительная энтропия когерентности и энтропия фон Неймана проявляют противоположное поведение. Кроме того, в работе отмечается, что запутанность формирования состоящей из двух частей системы увеличивается, если относительная энтропия когерентности одной из подсистем уменьшается и наоборот. Одной из основополагающих работ в этой области является работа Стрельцова [51]. В ней рассматривается способность некогерентных операций приводить к запутанности некоторого состояния с другим некогерентным состоянием, но только при условии того, что исходное состояние было когерентным. Целью настоящей работы является выяснение того, какова корреляция запутанности и когерентности в конкретной системе в случае различных типов анизотропии при условии, что никакие операции для рассматриваемой системы не проводятся.

После краткого введения в этом разделе, несколько используемых для вычислений моделей представлены в разд. 2. Мы рассматриваем три ситуации: случаи симметричной анизотропии, включающей или не включающей анизотропию отдельного иона, а также случаи анизотропии асимметричного типа. Результаты, полученные для этих случаев, приводятся в разд. 3, где определяется тип исследуемой корреляции. В разд. 4 приводится обсуждение полученных результатов.

## 2. МОДЕЛЬ

Связь между запутанностью и когерентностью будет исследоваться с использованием  $XU$ -модели Гейзенберга с двумя типами анизотропии. Оба рассматриваемых гамильтониана включают ДМ-взаимодействие, поскольку ранее было доказано, что оно приводит к появлению когерентности [45]. Можно утверждать, что это взаимодействие играет существенную роль в различных системах, например в  $\text{CsCuCl}_3$  и  $\text{FeVO}_3$  [52, 53], и поэтому он много ис-

следуется теоретически [54, 55]. Это взаимодействие было впервые рассмотрено Дзялошинским в 1958 г. [56], но его важность, которая вытекает из практических наблюдений в реальных системах со спин-орбитальным взаимодействием, была выяснена несколько позже, в 1960 г., в работе Мории [57]. Его также называют антисимметричным обменом вследствие связи с антисимметричной частью матрицы взаимодействия.

В первом случае мы рассматриваем гамильтониан спиновой  $XU$ -цепочки с анизотропией симметричного типа и ДМ-взаимодействием, который записывается в виде [44]

$$H = \frac{J}{4} \sum_{i=1}^N \left( (1 + \gamma) \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + (1 - \gamma) \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + (-1)^i D (\sigma_i^x \sigma_{i+1}^y - \sigma_i^y \sigma_{i+1}^x) \right), \quad (2.1)$$

где  $N$  — количество узлов. Вследствие унитарности преобразования результаты, представленные в разд. 3, не меняются, что легко проверить. В случае, когда  $\gamma = 1$  и  $D = 0$ , эта модель сводится к модели Изинга, а в случае  $\gamma = D = 0$  она соответствует  $XX$ -модели [44]. В интервале  $0 < \gamma \leq 1$ , модели попадают в изинговский класс универсальности и для  $N = \infty$  при критическом значении параметра  $\gamma$  происходит фазовый переход [58].

Одна из целей нашей работы состоит в том, чтобы изучить поведение запутанности и когерентности при увеличении размера системы. Для этого используется метод квантовой ренормгруппы. Поскольку метод подразумевает получение самоподобного гамильтониана в результате необходимого преобразования, модель должна включать  $\pi$ -поворот вокруг оси  $x$  для всех четных узлов при неизменности нечетных узлов [44]. Следовательно, в случае системы, состоящей из трех узлов, гамильтониан (2.1) записывается в виде

$$H = \frac{J}{4} \sum_{i=1}^2 \left( (1 + \gamma) \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x - (1 - \gamma) \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + D (\sigma_i^x \sigma_{i+1}^y + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^x) \right) \quad (2.2)$$

(такой же гамильтониан использовался ранее в работах [44, 45, 59–61]), где  $J$  — константа взаимодействия ближайших соседей,  $\gamma$  — параметр анизотропии,  $D$  —  $z$ -компонента силы ДМ-взаимодействия и  $\sigma_i^\alpha$  ( $\alpha = x, y$ ) — матрицы Паули для  $i$ -го узла, которые записываются в виде

$$\sigma^x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

$$\sigma^z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Один из основных мотивов использования гамильтониана (2.2) состоит в том, что в системах кубитов можно экспериментально управлять различными типами связи между соседними спинами [62, 63].

Как можно видеть, в данном гамильтониане анизотропия обладает симметричной формой, что также сказывается на поведении упомянутых мер. Параметр  $D$  в уравнении (2.2) фактически является относительной силой ДМ-взаимодействия, что следует из выражения для гамильтониана, в котором  $D$  записывается через параметр взаимодействия  $J$ . По этой причине собственные векторы оказываются не зависимыми от  $J$ .

Основное состояние гамильтониана (2.2) является двукратно вырожденным и соответствует собственному значению (энергия):

$$E_0 = -\frac{J}{\sqrt{2}}q \quad (2.4)$$

с  $q = \sqrt{1 + D^2 + \gamma^2}$ , с комплексными собственными векторами, записанными в стандартном базисе:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}q} \sqrt{D^2 + 1} \left( -\frac{q}{\sqrt{2}(1 + iD)} |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + \frac{\gamma}{1 + iD} |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - \frac{q}{\sqrt{2}(1 + iD)} |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle \right), \quad (2.5)$$

$$|\Psi'\rangle = \frac{1}{2} \left( -\frac{\sqrt{2}(1 - iD)}{q} |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\downarrow\rangle - \frac{\sqrt{2}\gamma}{q} |\downarrow\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\downarrow\uparrow\rangle \right), \quad (2.6)$$

где  $|\uparrow\rangle$  и  $|\downarrow\rangle$  — базисные векторы матрицы Паули  $\sigma^z$  в данном представлении.

Включение в рассмотрение одноионной анизотропии, известной также как магнитокристаллическая анизотропия [64, 65], дает тривиальный вклад в рассмотренный выше случай, когда исследуются системы со спином 1/2. В этом случае гамильтониан (2.2) будет иметь добавку

$$H_{SI} = \sum_{i=1}^3 \frac{JA}{4} (\sigma_i^z)^2, \quad (2.7)$$

где  $A$  обозначает силу одноионной анизотропии. Найденная выше энергия основного состояния изменится на

$$E_0 = \frac{3AJ}{4} - \frac{q|J|}{\sqrt{2}} \quad (2.8)$$

с комплексными собственными векторами

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}q} \sqrt{D^2 + 1} \left( -\frac{q|J|}{\sqrt{2}J(1 + iD)} |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + \frac{\gamma}{1 + iD} |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - \frac{q|J|}{\sqrt{2}J(1 + iD)} |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle \right), \quad (2.9)$$

$$|\Psi'\rangle = \frac{1}{2} \left( -\frac{\sqrt{2}J(1 - iD)}{q|J|} |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\downarrow\rangle - \frac{\sqrt{2}J\gamma}{q|J|} |\downarrow\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\downarrow\uparrow\rangle \right). \quad (2.10)$$

Можно заранее считать, что одноионная анизотропия не влияет на изучаемые нами величины. Этого можно было ожидать на интуитивном уровне, поскольку в случае спина 1/2 данный тип анизотропии является тривиальным, так как он входит в гамильтониан (2.2) как добавка к единичной матрице, умноженная на константу. Следовательно, можно сделать вывод о том, что одноионная анизотропия не влияет ни на запутанность, ни на когерентность, если рассматриваемые спины равны 1/2.

Второй случай включает анизотропию асимметричного типа. В этом случае гамильтониан дается выражением

$$H = \frac{\tilde{J}}{4} \sum_{i=1}^2 \left( \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + M \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + \tilde{D} (\sigma_i^x \sigma_{i+1}^y + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^x) \right), \quad (2.11)$$

где  $\tilde{J}$  — константа взаимодействия ближайших соседей,  $M$  — параметр анизотропии и  $\tilde{D}$  —  $z$ -компонента силы ДМ-взаимодействия. Легко показать, что гамильтониан (2.11) переходит в (2.2) посредством простого преобразования:

$$\tilde{J} = (1 + \gamma)J, \quad \tilde{D} = \frac{D}{1 + \gamma}, \quad M = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}. \quad (2.12)$$

Однако можно видеть, что это преобразование неопределено при  $\gamma = -1$ , и нет оснований называть эту модель более общей, чем предыдущая, правильнее называть ее моделью с другим типом анизотропии. В этом случае получаемое основное состояние соответствует энергии

$$E_0 = -\frac{1}{2}\tilde{J}m, \quad m = \sqrt{1 + 2\tilde{D}^2 + M^2} \quad (2.13)$$

и комплексным собственным состояниям:

$$|\Psi\rangle = \frac{\sqrt{4\tilde{D}^2 + (-1 + M)^2}}{2m} \times \left( \frac{im}{2\tilde{D} + i(-1 + M)} |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle - \frac{i(1 + M)}{2\tilde{D} + i(-1 + M)} |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + \frac{im}{2\tilde{D} + i(-1 + M)} (|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle) \right), \quad (2.14)$$

$$|\Psi'\rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{-1 + 2i\tilde{D} + M}{m} |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\downarrow\rangle - \frac{1 + M}{m} (|\downarrow\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\downarrow\uparrow\rangle) \right), \quad (2.15)$$

которые существенно отличаются от функций (2.5) и (2.6), что приводит к ожидаемому различию в поведении величин квантовой информатики.

Существуют несколько величин, удовлетворяющих условиям, которые должны выполняться для любой корректно определенной меры запутанности [48]. К наиболее часто используемым относятся запутанность формирования, фракционная запутанность и относительная энтропия запутанности. Однако использование этих мер для конкретной системы может столкнуться с серьезной проблемой. Хотя несколько мер были определены для многочастичной запутанности [66, 67], мы будем использовать меру, найденную в работе Вутерса, или согласованность бипартитной системы [68]:

$$C(\rho) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}, \quad (2.16)$$

где  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) — квадратные корни из собственных значений матрицы  $R = \rho\tilde{\rho}$  в порядке убывания, и матрица  $\tilde{\rho}$  задается выражением

$$\tilde{\rho} = (\sigma^y \otimes \sigma^y) \rho^* (\sigma^y \otimes \sigma^y), \quad (2.17)$$

где  $\rho^*$  — результат операции комплексного сопряжения матрицы плотности  $\rho$ . Использование матрицы плотности уже стало одним из важнейших методов квантовой механики, описания процессов рассеяния, а также современной атомной физики, лазерной физики, статистической физики и т. д. [69]. В нашем

случае матрица плотности, полученная из собственных значений гамильтонианов, должна быть приведена к своей бипартитной форме.

Квантовая когерентность является сравнительно новым понятием в квантовой информатике. К ранним исследованиям относится работа Аберга 2006 г., в которой был разработан подход для количественного описания суперпозиции ортогональных квантовых состояний [70], а наиболее интересные результаты были получены в 2014 г. и состоят в нахождении нескольких условий, которым должна удовлетворять каждая корректно определенная мера когерентности [71]. Этим условиям удовлетворяют несколько мер, среди которых самыми используемыми являются норма  $l_1$  и относительная энтропия когерентности. Последняя используется в настоящей работе и определяется как

$$C_{re}(\rho) = S(\rho_{diag}) - S(\rho), \quad (2.18)$$

где  $S(\rho)$  — энтропия фон Неймана, которая дается выражением

$$S(\rho) = -\text{Tr} \rho \log_2 \rho. \quad (2.19)$$

Здесь  $\rho_{diag}$  является диагональной матрицей, полученной из матрицы  $\rho$  путем замены всех недиагональных элементов нулями. Поскольку в нашем случае рассматриваются чистые состояния (для которых  $S(\rho) = 0$ , так как  $\log_2(1) = 0$ ), в (2.18) остается только диагональная часть.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ

В этом разделе исследуется поведение квантовой запутанности и квантовой когерентности в двух упомянутых выше случаях, а полученные зависимости двух величин от анизотропии и параметра ДМ-взаимодействия приведены на рисунках.

#### 3.1. XY-модель с ДМ-взаимодействием и симметричной анизотропией

Для того чтобы вычислить согласованность, в соответствии с (2.16) нужно выписать матрицу плотности. Поскольку температурные эффекты остаются за рамками нашего рассмотрения, можно считать, что система находится в основном состоянии. Следовательно, матрица плотности основного состояния записывается в виде

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{\gamma}{2\sqrt{2}q} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{-1+iD}{2\sqrt{2}q} \\ 0 & -\frac{\gamma}{2\sqrt{2}q} & \frac{\gamma^2}{2q^2} & 0 & -\frac{\gamma}{2\sqrt{2}q} & 0 & 0 & \frac{\gamma(1-iD)}{2q^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{\gamma}{2\sqrt{2}q} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{-1+iD}{2\sqrt{2}q} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1+iD}{2\sqrt{2}q} & \frac{\gamma(1+iD)}{2q^2} & 0 & -\frac{1+iD}{2\sqrt{2}q} & 0 & 0 & \frac{1+D^2}{2q^2} \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

В дальнейшем мы будем использовать собственное состояние (2.5), поскольку можно легко показать, что получаемые результаты для двух величин останутся неизменными, если рассматривать другой собственный вектор основного состояния (2.6).

Однако, как уже упоминалось, для систем с двумя кубитами соответствующей мерой запутанности является согласованность, поэтому нужно задать приведенную матрицу плотности. Имеются два варианта задания этой матрицы: вычисление согласованности между узлами 1 и 3 суммированием по степеням свободы второго узла и вычисление согласованности между средним узлом и любым другим суммированием по степеням свободы оставшегося узла [44]. Мы выбираем первый вариант, но результат от этого выбора не меняется:

$$\rho^{13} = \text{Tr}_2 \rho = \begin{bmatrix} \frac{\gamma^2}{2q^2} & 0 & 0 & \frac{\gamma(1-iD)}{2q^2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{\gamma(1+iD)}{2q^2} & 0 & 0 & \frac{1+D^2}{2q^2} \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Согласованность можно легко вычислить, используя (2.16), и в результате получается [44]

$$C_{13} = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{(1+D^2)\gamma^2}{q^4}}. \quad (3.3)$$

Зависимость согласованности от параметра анизотропии  $\gamma$  и от параметра ДМ-взаимодействия  $D$  показана на рис. 1а. Можно видеть, что в случае малых значений параметра анизотропии согласованность растет с усилением ДМ-взаимодействия, а в

случае малых значений параметра ДМ-взаимодействия и достаточно больших значений параметра анизотропии согласованность уменьшается с ростом параметра  $D$ . Это позволяет сделать вывод, что ДМ-взаимодействие способствует подавлению согласованности, а анизотропия восстанавливает ее.

Относительная энтропия когерентности вычисляется из (2.18), и получается следующий результат [46]:

$$C_{re} = 1 - \frac{\gamma^2}{2q^2} \log_2 \left( \frac{\gamma^2}{2q^2} \right) - \frac{1+D^2}{2q^2} \log_2 \left( \frac{1+D^2}{2q^2} \right). \quad (3.4)$$

Зависимости относительной энтропии когерентности от параметров анизотропии  $\gamma$  и ДМ-взаимодействия  $D$  показаны на рис. 1б. Видно, что это поведение фактически противоположно поведению согласованности, описанному выше.

Как видно на рис. 1, согласованность и относительная энтропия когерентности демонстрируют противоположное поведение. Положения максимумов одной из этих величин соответствуют положениям минимумов другой. Можно сказать, что процесс, увеличивающий одну из этих величин, уменьшает при этом другую. В то время как минимум согласованности расположен при  $C_{13} = 0$ , относительная энтропия когерентности имеет в минимуме ненулевое значение  $C_{re} = 1.5$ . Тем не менее поведение остается противоположным. Зависимости обеих величин симметричны относительно оси  $y$ , что является следствием симметричности анизотропии  $\gamma$ . Интересно проверить, выполняется ли это заключение для систем большего размера.

**3.1.1. Обобщение на случай систем большего размера**

В этом разделе мы сделаем обобщение на случай систем большего размера с помощью метода квантовой ренормгруппы (КРГ-метод). Этот метод играет большую роль для задач со спиновыми цепочками, поскольку их можно свести к рассмотрению систем более низкой размерности в более удобном пространстве [45]. Мы применяем подход, использующий блочные матрицы, разработанный Кадановым [72]. Он состоит в разбивке гамильтониана на блочную и межблочную части и нахождении базиса нового перенормированного пространства с использованием основного состояния блочной части гамильтониана. Эффективный гамильтониан находится в виде [44]

$$H_{eff} = \frac{J'}{4} \sum_{j=1}^{N/3} \left( (1+\gamma')\sigma_j^x \sigma_{j+1}^x - (1-\gamma')\sigma_j^y \sigma_{j+1}^y + D'(\sigma_j^x \sigma_{j+1}^y + \sigma_j^y \sigma_{j+1}^x) \right) \quad (3.5)$$

с перенормированными параметрами

$$J' = \frac{1 + D^2 + 3\gamma^2}{2q^2} J, \quad \gamma' = \frac{3\gamma + 3\gamma D^2 + \gamma^3}{1 + D^2 + 3\gamma^2}, \quad (3.6)$$

$$D' = -D.$$

Зависимости согласованности и относительной энтропии когерентности от параметров  $\gamma$  и  $D$  в случае 9 и 27 узлов показаны на рис. 2.

Снова очевидно противоположное поведение обеих величин квантовой информатики. Минимум одной величины совпадает с максимумом второй и наоборот. Кроме того, можно заметить, что с ростом размера системы максимумы согласованности становятся острее, а в случае относительной энтропии когерентности острее становятся минимумы. Следовательно, когда размер системы  $N \rightarrow \infty$ , когерентность имеет минимальное значение только в точке  $\gamma = 0$  и максимальное значение во всех остальных точках, а согласованность будет иметь ненулевое значение только в этой точке, а во всех остальных точках будет равна нулю. Это означает, что в точке  $\gamma = 0$  происходит квантовый фазовый переход и с помощью найденных мер квантовой информатики его можно обнаружить. Однако параметр  $D$  никак не влияет на указанное поведение, поэтому изменение этого параметра не приведет к квантовому фазовому переходу системы [44].

**3.2. XY-модель с ДМ-взаимодействием и асимметричной анизотропией**

В этом случае матрица плотности основного состояния записывается в виде

$$\rho = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1+M}{4m} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{2i\tilde{D}+(-1+M)}{4m} \\ 0 & -\frac{1+M}{4m} & \frac{(1+M)^2}{4m^2} & 0 & -\frac{1+M}{4m} & 0 & 0 & \frac{-2i\tilde{D}(1+M)-(M^2-1)}{4m^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1+M}{4m} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{2i\tilde{D}+(-1+M)}{4m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-2i\tilde{D}+(-1+M)}{4m} & \frac{2i\tilde{D}(1+M)-(M^2-1)}{4m^2} & 0 & \frac{-2i\tilde{D}+(-1+M)}{4m} & 0 & 0 & \frac{4\tilde{D}^2+(-1+M)^2}{4m^2} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

и соответствующая приведенная матрица плотности имеет следующий вид:

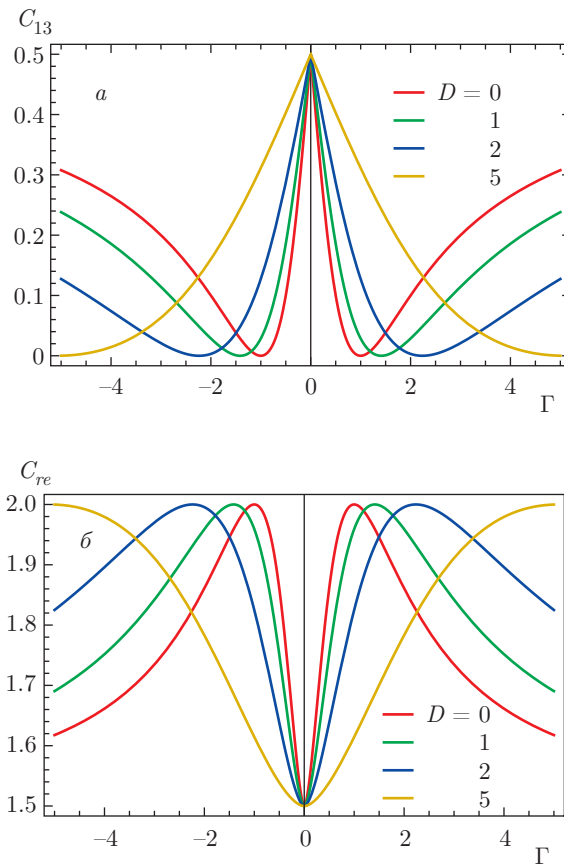


Рис. 1. Зависимости согласованности (а) и относительной энтропии когерентности (б) от параметра анизотропии  $\gamma$  при разных параметрах ДМ-взаимодействия в модели с тремя узлами

$$\rho^{13} = \begin{bmatrix} \frac{(1+M)^2}{4m^2} & 0 & 0 & \frac{-2i\tilde{D}(1+M) - (M^2-1)}{4m^2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{2i\tilde{D}(1+M) - (M^2-1)}{4m^2} & 0 & 0 & \frac{4\tilde{D}^2 + (-1+M)^2}{4m^2} \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Следовательно, согласованность дается выражением

$$C_{13} = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{(1+M)^2(1+4\tilde{D}^2-2M+M^2)}{4m^4}}, \quad (3.9)$$

а ее зависимости от параметров  $M$  и  $\tilde{D}$  показаны на рис. 3а.

Аналогично, относительная энтропия когерентности находится в виде

$$C_{re} = 1 - \frac{(1+M)^2}{4m^2} \log_2 \left( \frac{(1+M)^2}{4m^2} \right) - \frac{4\tilde{D}^2 + (-1+M)^2}{4m^2} \log_2 \left( \frac{4\tilde{D}^2 + (-1+M)^2}{4m^2} \right), \quad (3.10)$$

а ее зависимости от параметров  $M$  и  $\tilde{D}$  показаны на рис. 3б.

Снова можно видеть противоположное поведение обеих величин, рассчитанных для случая анизотропии другого типа. Максимумы одной величины соответствуют минимумам другой. Следовательно, можно утверждать, что изменение типа анизотропии не приводит к изменению описанной выше



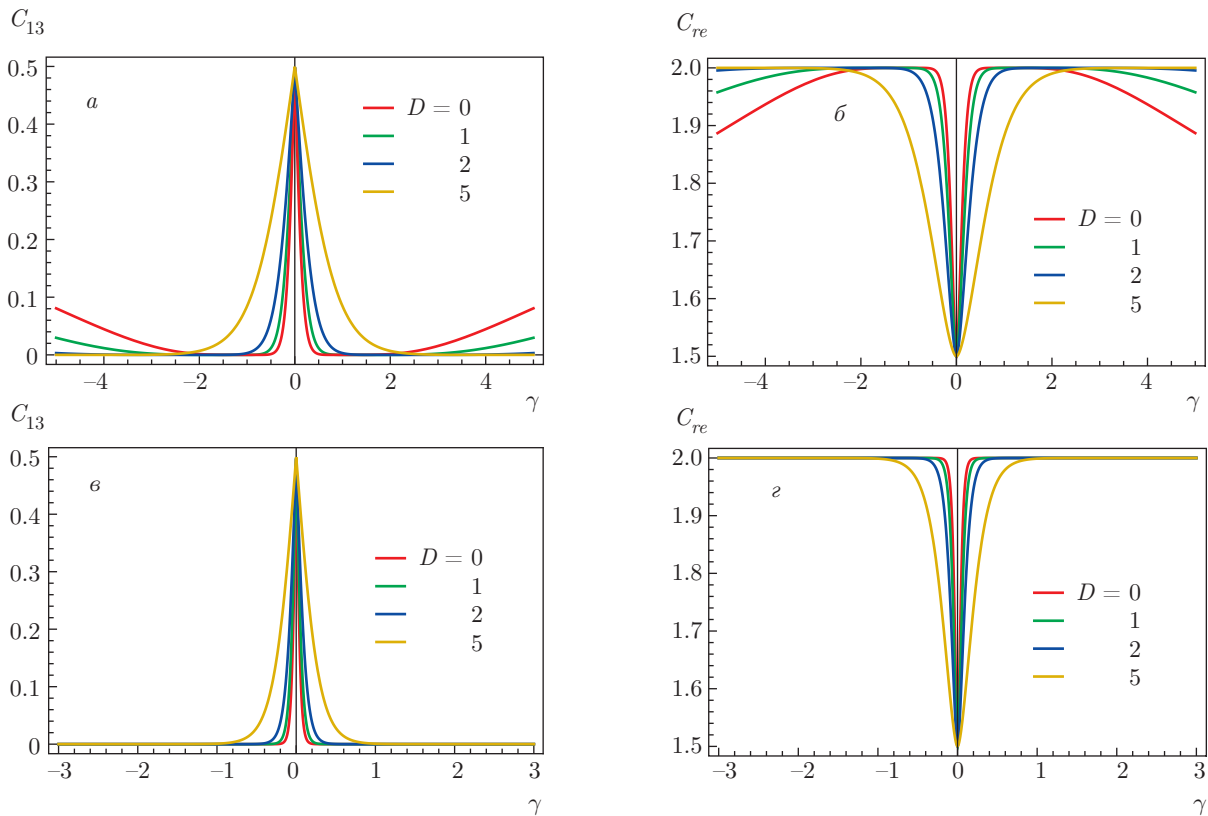


Рис. 2. Зависимости согласованности и относительной энтропии когерентности от параметра анизотропии  $\gamma$  при разных параметрах ДМ-взаимодействия  $D$  для случаев 9 (а, б) и 27 узлов (в, г)

корреляции величин квантовой информатики. В минимумах когерентность опять принимает ненулевое значение. Однако в этом случае, несмотря на то, что связь между величинами носит такой же характер, пики на зависимости согласованности острее, чем пики на зависимости относительной энтропии когерентности. Кроме того, за исключением случая  $\tilde{D} = 0$ , ось  $y$  не является осью симметрии. Это следует из выбора анизотропии.

**3.2.1. Обобщение на случай систем большего размера**

В качестве метода для исследования корреляции между запутанностью и когерентностью в случае систем большого размера мы опять используем КРГ-метод. Эффективный гамильтониан дается выражением

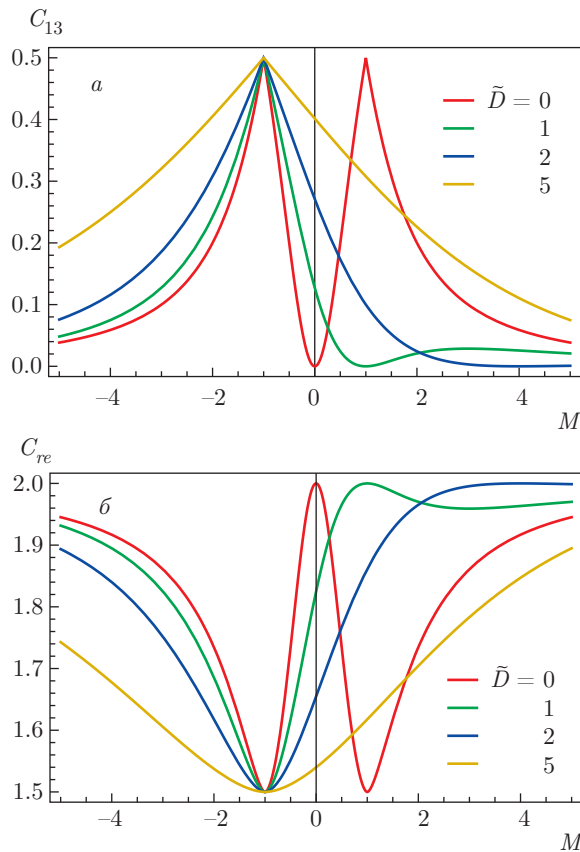
$$H_{eff} = \frac{\tilde{J}'}{4} \sum_{i=1}^{N/3} \left( \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + M' \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + \tilde{D}' (\sigma_i^x \sigma_{i+1}^y + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^x) \right), \quad (3.11)$$

где перенормированные параметры имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{J}' &= \tilde{j} \frac{1 + \tilde{D}^2(2 + M)}{m^2}, \\ M' &= \frac{\tilde{D}^2 + 2\tilde{D}^2 M + M^3}{1 + 2\tilde{D}^2 + \tilde{D}^2 M}, \\ \tilde{D}' &= -\tilde{D} \frac{1 + \tilde{D}^2 + M + M^2}{1 + 2\tilde{D}^2 + \tilde{D}^2 M}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Зависимости согласованности и относительной энтропии когерентности от параметров  $M$  и  $D$  в случае 9 и 27 узлов показаны на рис. 4.

В случае асимметричной анизотропии противоположное поведение зависимостей двух величин для системы большого размера очевидно и в этом случае. Следовательно, размер системы не имеет влияния на корреляцию запутанности и когерентности. Кроме того видно, что пики становятся острее с ростом размера системы. Это означает, что изменение параметра анизотропии  $M$  может вызвать квантовый фазовый переход, но в этом случае его критическое значение  $M = -1$  в силу выбора анизотропии. Фактически существует еще одна критическая точка при  $M = +1$ , но только в случае  $\tilde{D} = 0$ , поэтому когда анизотропия асимметрична, квантовый фазовый переход может быть вызван ДМ-взаимодействием.



**Рис. 3.** Зависимости согласованности (а) и относительной энтропии когерентности (б) от параметра анизотропии  $M$  при разных параметрах ДМ-взаимодействия  $\tilde{D}$  в модели с тремя узлами

Между тем, в случае анизотропии симметричного типа пик, соответствующий  $M = +1$  и  $\tilde{D} = 0$ , не появляется. Если выбрать  $\gamma = D = \tilde{D} = 0$ , то гамильтонианы (2.1) и (2.2) имеют тот же вид, что и (2.11), соответственно для  $M = +1$  и  $M = -1$ . Выполнение  $\pi$ -вращения, которое связывает (2.1) и (2.2), позволяет перейти от одного выбора параметра  $M$  к другому (от  $+1$  к  $-1$  и наоборот). Модель с анизотропией асимметричного типа включает как (2.1), так и (2.2) для  $\gamma = 0$ . Следовательно, на рис. 1, 2 можно увидеть лишь критический пик, соответствующий выбору  $\gamma = 0$ , а на рис. 3, 4 можно видеть два критических пика при  $M = -1$  и  $M = +1$  для  $\tilde{D} = 0$ .

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Авторы работ [50, 51, 73] обсуждали вид связи, которая существует между квантовой запутанностью и квантовой когерентностью в различных си-

туациях. В этой работе связь между этими двумя величинами обнаружена в случае спиновых XY-цепочек со спинами  $1/2$  и ДМ-взаимодействием. Наше исследование имело целью установить происхождение этой связи. Было исследовано поведение мер запутанности и когерентности при изменении параметра ДМ-взаимодействия, типа и величины анизотропии и размера системы.

В настоящей работе мы установили тип связи между согласованностью и относительной энтропией когерентности в случае симметричного выбора анизотропии  $\gamma$ . Как оказалось, эта связь носит простой характер, демонстрирующий противоположное поведение зависимостей двух величин. Мы установили, что изменение значений параметров ДМ-взаимодействия и анизотропии не меняет характера этого противоположного поведения. Мы также подтвердили, что такая же связь остается и при изменении размера системы, т.е. корреляция не меняется при увеличении количества итераций КРГ-метода. Следовательно, это утверждение остается справедливым и для систем бесконечного размера.

На следующем этапе была проведена проверка, останется ли поведение зависимостей противоположным, если поменять тип анизотропии, для чего мы рассмотрели анизотропию асимметричного типа. Оказалось, что выбор анизотропии другого типа не привел к изменению характера связи между величинами квантовой информатики, зависимости которых остались противоположными.

В заключение, парная согласованность и относительная энтропия когерентности демонстрируют противоположное поведение при изменениях параметра ДМ-взаимодействия, вида и величины анизотропии и размера системы. Поскольку ранее уже было указано на важность сохранения когерентности в системе, легко видеть, насколько полученные выводы могут быть существенны для развития квантовой информатики. Максимум когерентности в системе достигается в минимуме парной запутанности. Следовательно, эту конкретную систему можно ввести в состояние минимальной запутанности и максимальной когерентности, подстраивая параметры. Возможно, что экстремальные значения обеих величин не являются наилучшим выбором, поскольку обе они играют важную роль в квантовой информатике.

Квантовая когерентность и квантовая запутанность изучались как величины, которые могут сигнализировать о наличии квантового фазового перехода в системе с анизотропией симметричного типа [44, 45]. Авторы работ [44, 45] установи-

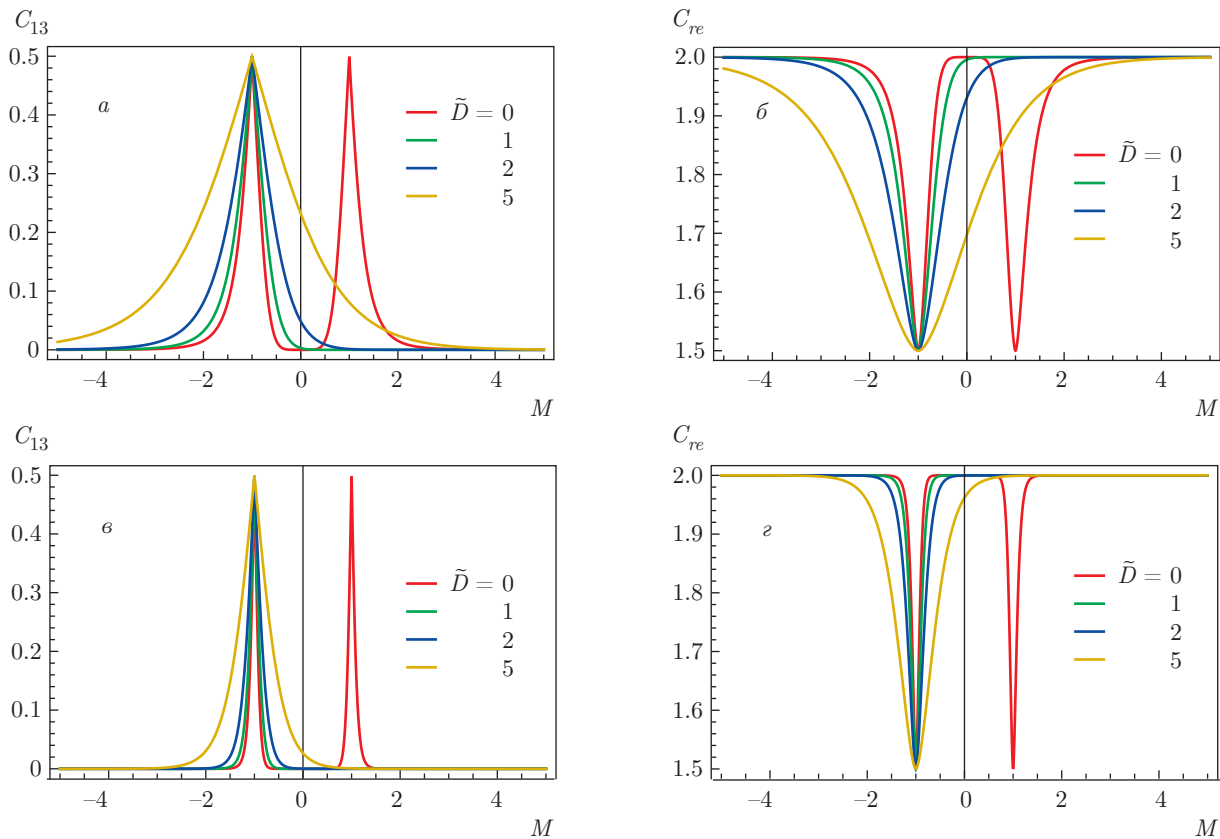


Рис. 4. Зависимости согласованности и относительной энтропии когерентности от параметра анизотропии  $M$  при разных параметрах ДМ-взаимодействия в случаях 9 (а, б) и 27 узлов (в, з)

ли существование квантового фазового перехода при критическом значении параметра анизотропии  $\gamma_C = 0$ . Поскольку экстремальные значения когерентности и согласованности в этой точке остаются неизменными независимо от значения параметра ДМ-взаимодействия  $D$ , под влиянием ДМ-взаимодействия в системе не может произойти квантовый фазовый переход. В нашей работе показано, что это не так, если рассматривать анизотропию асимметричного типа. Во-первых, такой выбор анизотропии смещает критическую точку в положение  $M_C = -1$ . Более того, эта точка не является единственной критической, поскольку пик при  $M = +1$  для  $\tilde{D} = 0$  становится более острым при увеличении количества итераций КРГ-метода. Поэтому можно указать еще одну критическую точку при  $M_C = +1$ ,  $D_C = 0$ . Из этого следует, что хотя ДМ-взаимодействие не влияет на квантовый фазовый переход при анизотропии симметричного типа, оно может влиять для ХУ-цепочек со спинами  $1/2$  в случае, когда анизотропия асимметрична.

**Финансирование.** Работа выполнена при поддержке Сербского Министерства Науки и Образования (грант № 171009) и Краевого Секретариата Высшего Образования и Научных Исследований Воеводины (проект № APV 114-451-2201).

## ЛИТЕРАТУРА

1. G. E. Moore, *Electronics* **38**, 114 (1965).
2. D. Geer, *Computer* **38**, 11 (2005).
3. B. P. Lanyon, J. D. Whitfield, G. G. Gillett, M. E. Goggin, M. P. Almeida, I. Kassal, J. D. Biamonte, M. Mohseni, B. J. Powell, M. Barbieri, A. Aspuru-Guzik, and A. G. White, *Nature Chem.* **2**, 106 (2010).
4. J. I. Colless, V. V. Ramasesh, D. Dahlen, M. S. Blok, M. E. Kimchi-Schwartz, J. R. McClean, J. Carter, W. A. de Jong, and I. Siddiqi, *Phys. Rev. X* **8**, 011021 (2018).

5. M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, Cambridge (2000).
6. R. P. Feynman, *Int. J. Theor. Phys.* **21**, 467 (1981).
7. D. Deutsch, *Proc. R. Soc. Lond. A* **400**, 97 (1985).
8. P. W. Schor, *Proc. 35th Annu. Symp. Found. Computer Science*, IEEE Press 124 (1994).
9. L. K. Grover, *Proc. STOC*, 212 (1996).
10. V. Vedral, *Introduction to Quantum Information Science*, Oxford University Press on Demand, Cambridge (2006).
11. J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, and R. A. Holt, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 880 (1969).
12. D. Stucki, N. Gisin, O. Guinnard, G. Ribordy, and H. Zbinden, *New J. Phys.* **4**, 41 (2002).
13. C. Gobby, Z. L. Yuan, and A. J. Shields, *Appl. Phys. Lett.* **84**, 3762 (2004).
14. S. Grubblacher, T. Jennewein, A. Vaziri, G. Weihs, and A. Zeilinger, *New J. Phys.* **8**, 75 (2006).
15. T. Brecht, W. Pfaff, C. Wang, Y. Chu, L. Frunzio, M. H. Devoret, and R. J. Schoelkopf, *Quantum Inf.* **2**, 16002 (2016).
16. G. Moody, C. McDonald, A. Feldman, T. Harvey, R. P. Mirin, and K. L. Silverman, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 037402 (2016).
17. P. W. Deelman, L. F. Edge, and C. A. Jackson, *MRS Bulletin* **41**, 224 (2016).
18. B. Hacker, S. Welte, G. Rempe, and S. Ritter, *Nature* **536**, 193 (2016).
19. M. Saffman, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **49**, 202001 (2016).
20. Xi-Lin Wang, Luo-Kan Chen, W. Li, H.-L. Huang, C. Liu, C. Chen, Y.-H. Luo, Z.-E. Su, D. Wu, Z.-D. Li, H. Lu, Y. Hu, X. Jiang, C.-Z. Peng, L. Li, N.-L. Liu, Yu-Ao Chen, Chao-Yang Lu, and Jian-Wei Pan, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 210502 (2016).
21. M. Veldhorst, H. G. J. Eenink, C. H. Yang, and A. S. Dzurak, *Nat. Commun.* **8**, 1766 (2017).
22. D. M. Zajac, A. J. Sigillito, M. Russ, F. Borjans, J. M. Taylor, G. Burkard, and J. R. Petta, *Science* **359**, 439 (2018).
23. I. Kassal, J. D. Whitfield, A. Perdomo-Ortiz, Man-Hong Yung, and A. Aspuru-Guzik, *Ann. Rev. Phys. Chem.* **62**, 185 (2011).
24. T. D. Ladd, F. Jelezko, R. Laflamme, Y. Nakamura, C. Monroe, and J. L. O'Brien, *Nature* **464**, 45 (2010).
25. P. C. E. Stamp and A. Gaita-Aricoa, *J. Mater. Chem.* **19**, 1718 (2009).
26. W. G. Unruh, *Phys. Rev. A* **51**, 992 (1995).
27. M. Matsumoto, B. Normand, T. M. Rice, and M. Sigrist, *Phys. Rev. B* **69**, 054423 (2004).
28. P. Dai, *Rev. Mod. Phys.* **87**, 855 (2015).
29. M. Manojlović, M. Pavkov, M. Škrinjar, M. Pantić, D. Kapor, and S. Stojanović, *Phys. Rev. B* **71**, 132510 (2005).
30. M. Manojlović, M. Pavkov, M. Škrinjar, M. Pantić, D. Kapor, and S. Stojanović, *Phys. Rev. B* **68**, 014435 (2003).
31. S. Radošević, M. Pavkov-Hrvojević, M. Pantić, M. Rutonjski, D. Kapor, and M. Škrinjar, *Europhys. J. B* **68**, 511 (2009).
32. K. Yang, K. Moon, L. Zheng, A. H. MacDonald, S. M. Girvin, D. Yoshioka, and Shou-Cheng Zhang, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 732 (1994).
33. E. Fradkin, *Field Theories of Condensed Matter Physics*, Cambridge University Press, Cambridge (2013).
34. Rosario Fazio and Herre van der Zant, *Phys. Rep.* **355**, 235 (2001).
35. S. Sachdev, *Quantum Phase Transitions*, Cambridge University Press, Cambridge (2011).
36. X. G. Wen, *Quantum Field Theory of Many Body Systems*, Oxford University Press, Oxford (2007).
37. D. J. J. Farnell, O. Gütze, and J. Richter, *Phys. Rev. B* **93**, 235123 (2016).
38. P. Мьллер, J. Richter, A. Hauser, and D. Ihle, *Eur. Phys. J. B* **88**, 159 (2015).
39. M. R. Pantić, D. V. Kapor, S. M. Radošević, and P. Mali, *Sol. State Commun.* **182**, 55 (2014).
40. A. Auerbach, *Interacting electrons and Quantum Magnetism*, Springer, Berlin (1998).
41. P. Мьллер, J. Richter, and D. Ihle, *Phys. Rev. B* **95**, 134407 (2017).
42. Q. Meng, X. Sheng-Long, T. Ying-Juan, and T. Dong-Ping, *Chin. Phys. B* **17**, 2800 (2008).
43. Y. Y. Yang, W. Y. Sun, W. N. Shi et al., *Front. Phys.* (2019) **14**: 31601. <https://doi.org/10.1007/s11467-018-0880-1>.

44. Fu-Wu Ma, Sheng-Xin Liu, and Xiang-Mu Kong, *Phys. Rev. A* **84**, 042302 (2011).
45. Guo-Qing Zhang and Jing-Bo Xu, *J. Phys. A: Math. Theor.* **50**, 265303 (2017).
46. Jun-Qing Cheng, Wei Wu, and Jing-Bo Xu, *Quant. Inf. Proc.* **16**, 231 (2017).
47. F. Ares, J. G. Esteve, F. Falceto, and A. R. de Queiroz, *Phys. Rev. A* **92**, 042334 (2015).
48. V. Vedral and M. B. Plenio, *Phys. Rev. A* **57**, 1619 (1998).
49. A. Streltsov, G. Adesso, and M. B. Plenio, *Rev. Mod. Phys.* **89**, 041003 (2017).
50. Z. Xi, Y. Li, and H. Fan, *Sci. Rep.* **5**, 10922 (2015).
51. A. Streltsov, U. Singh, H. Shekhar Dhar, M. Nath Bera, and G. Adesso, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 020403 (2015).
52. N. Stusser, U. Schotte, A. Hoser, M. Meschke, M. Meissner, and J. Wosnitza, *J. Phys.: Condens. Matter* **14**, 5161 (2002).
53. V. E. Dmitrienko, E. N. Ovchinnikova, S. P. Collins, G. Nisbet, G. Beutier, Y. O. Kvashnin, V. V. Mazurenko, A. I. Lichtenstein, and M. I. Katsnelson, *Nat. Phys.* **10**, 202 (2014).
54. Th. J. Siskens, H. W. Capel, and K. J. F. Gaemers, *Physica A* **79**, 259 (1975).
55. Th. J. Siskens and H. W. Capel, *Physica A* **79**, 296 (1975).
56. I. Dzyaloshinsky, *J. Phys. Chem. Sol.* **4**, 241 (1958).
57. T. Moriya, *Phys. Rev.* **120**, 91 (1960).
58. A. Osterloh, L. Amico, G. Falci, and R. Fazio, *Nature* **416**, 608 (2002).
59. X. M. Liu, W. W. Cheng, and J.-M. Liu, *Sci. Rep.* **6**, 19359 (2016).
60. B. Q. Liu, B. Shao, J. G. Li, J. Zou, and L. A. Wu, *Phys. Rev. A* **83**, 052112 (2011).
61. M. Kargarian, R. Jafari, and A. Langari, *Phys. Rev. A* **79**, 042319 (2009).
62. C. J. Wellard et al., *Phys. Rev. B* **68**, 195209 (2003).
63. D. Loss and D. P. DiVincenzo, *Phys. Rev. A* **57**, 120 (1998).
64. Y. Ishikawa, N. Miura, *Physics and Engineering Applications of Magnetism*, Springer, Berlin (1991).
65. S. Maekawa, T. Tohyama, S. E. Barnes, S. Ishihara, W. Koshibae, and G. Khaliullin, *Physics of Transition Metal Oxides*, Springer, Berlin (2004).
66. A. Wong and N. Christensen, *Phys. Rev. A* **63**, 044301 (2001).
67. A. Osterloh and R. Schützhold, *Phys. Rev. A* **96**, 012331 (2017).
68. W. K. Wothers, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2245 (1998).
69. K. Blum, *Density Matrix Theory and Applications*, Plenum Press, New York (1996).
70. J. Aberg, arXiv:quant-ph/0612146.
71. T. Baumgratz, M. Cramer, and M. B. Plenio, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 140401 (2014).
72. J. Rodriguez-Laguna, arXiv:cond-mat/0207340.
73. E. Chitambar and Min-Hsiu Hsieh, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 020402 (2016).