

# МЕЛКОМАСШТАБНЫЙ АНАЛИЗ ПОДАВЛЕНИЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СПИРАЛЬНОСТИ В ДИНАМО-МОДЕЛИ СРЕДНЕГО ПОЛЯ

*Е. В. Юшков<sup>a,b,\*</sup>, А. С. Лукин<sup>a,c</sup>, Д. Д. Соколов<sup>b,d</sup>*

<sup>a</sup> *Институт космических исследований Российской академии наук  
117997, Москва, Россия*

<sup>b</sup> *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова  
119991, Москва, Россия*

<sup>c</sup> *Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики  
101100, Москва, Россия*

<sup>d</sup> *Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн Российской академии наук  
108840, Троицк, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 6 ноября 2019 г.,  
после переработки 9 января 2020 г.  
Принята к публикации 9 января 2020 г.

Проводится сравнение классической динамо-модели среднего поля, предложенной Штеенбеком, Краузе и Рэдлером для описания генерации крупномасштабных полей, и модели Казанцева, описывающей работу мелкомасштабного динамо в неограниченном однородном и изотропном пространстве. Рассматривается субкритический режим малых магнитных чисел Рейнольдса, при котором отсутствует быстрая генерация. Этот же режим можно понимать и как процесс, в котором мелкомасштабная генерация остановлена за счет своих внутренних механизмов. В рамках обоих подходов исследуется, чем различаются спектры линейного и нелинейного процессов при подавлении гидродинамической (кинетической) спиральности, или другими словами, проводится сравнение альфа-квенчингов. В работе проверяется, ведет ли усреднение уравнения индукции по масштабам, большим чем корреляционная длина поля скорости, к потере каких-либо черт спектра вблизи диссипативного масштаба. Изучаются различные виды стабилизации динамо, использование которых кажется более обоснованным с физической точки зрения, чем стандартное альфа-подавление, но более затрудненным в рамках крупномасштабных моделей, содержащих ограниченную информацию о случайном поле скорости. В частности, сравнивается интегральное подавление, при котором сохраняется полная энергия, и спектральное подавление, которое предполагает сохранение энергии и спиральности в каждой спектральной оболочке, не предполагая их перераспределения по спектру.

DOI: 10.31857/S0044451020060103

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Процесс преобразования кинетической энергии движений среды в энергию магнитного поля, приводящий, в частности, к формированию магнитных полей Земли, Солнца, звезд и галактик, принято называть магнитогидродинамическим динамо (см., например, обзор [1]). Можно выделить два канала, по которым происходит это преобразование.

Один из них, который принято называть крупномасштабным динамо, или динамо среднего поля, требует зеркальной асимметрии конвекции/турбулентности и приводит к возникновению магнитного поля, пространственный масштаб которого сопоставим с размерами самого тела. Одновременно с крупномасштабной генерацией этот механизм создает и мелкомасштабную компоненту, с характерными размерами меньшими, чем размеры тела. Примечательно, что уравнения динамо среднего поля можно сформулировать таким образом, чтобы они содержали только крупномасштабные переменные и

\* E-mail: yushkov.msu@mail.ru

не описывали мелкомасштабные прямо. Поскольку крупномасштабное поле на астрофизических масштабах интересует исследователей в первую очередь [2], изучению мелкомасштабных компонент, генерируемых этим видом динамо, исторически уделялось чрезвычайно мало внимания.

Другой канал генерации, известный как турбулентное динамо, производит лишь мелкомасштабные магнитные поля, характерный размер которых определяется энергонесущим масштабом турбулентности/конвекции и может быть существенно меньше размеров всего тела (см., например, [3]). Для работы этого механизма не нужны ни дифференциальное вращение, ни зеркальная асимметрия, но, в принципе, механизм функционирует и во вращающихся средах с ненулевой спиральностью. Для описания мелкомасштабных процессов естественно приходится использовать характеристики магнитного поля на малых масштабах, при этом разумной характеристикой могут служить энергетические или корреляционные функции, так как среднее крупномасштабное поле при такой генерации может и не изменяться.

Важно заметить, что уравнение для корреляционного магнитного поля, выписанное в полном объеме, содержит информацию о среднем значении поля. Однако такое уравнение очень громоздко и неудобно для исследования, поэтому из него путем разнообразных упрощений выделяют часть, ответственную за возникновение собственно мелкомасштабной составляющей. Кроме того, само разделение на крупно- и мелкомасштабные компоненты магнитного поля является приближенным, поскольку далеко не всегда энергонесущий масштаб и характерные размеры тела отличаются на много порядков, да и сама форма тела может характеризоваться несколькими величинами различного масштаба (как, например, радиус и толщина тонкого диска галактики, которые могут отличаться на порядки). В итоге возникает два подхода к описанию мелкомасштабных составляющих магнитного поля, генерируемых механизмом динамо. Один из них отталкивается от уравнения среднего поля (крупномасштабное динамо), а другой — от уравнения для его корреляционной функции (мелкомасштабное динамо). Вопрос о том, насколько эти два взгляда дополняют друг друга или противоречат один другому, вызывает закономерный интерес, поэтому в рамках данной численной работы мы до некоторой степени стараемся восполнить этот пробел.

Перейдем к более конкретному рассмотрению обозначенной проблемы. В основании и крупно, и

мелкомасштабного подхода к анализу задачи магнитогидродинамического динамо лежит классическое уравнение магнитной индукции (см., например, [4]):

$$\mathbf{V}_t = \text{rot}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] + \eta \Delta \mathbf{B}. \quad (1)$$

Будучи усредненным по случайному однородному полю скорости, оно приводит к широко известной модели среднего поля, предложенной Штеенбеком, Краузе и Рэдлером (см., например, описание модели в [5], или подробный вывод уравнений в [6]):

$$\mathbf{V}_t = \alpha \text{rot} \mathbf{B} + \eta \Delta \mathbf{B}. \quad (2)$$

В этом подходе величина  $\eta$  характеризует магнитную вязкость среды, а величина  $\alpha = \tau \langle \mathbf{v} \cdot \text{rot} \mathbf{v} / 3 \rangle$  определяет зеркально-асимметричные свойства потока и носит название гидродинамической/кинетической спиральности ( $v$  — случайная компонента скорости, а  $\tau$  — время оборота вихря). Модель Штеенбека — Краузе — Рэдлера описывает генерацию магнитных полей на масштабах много больших, нежели характерная корреляционная длина случайного поля, в то же время после усреднения по масштабам много меньшим корреляционной длины из уравнения индукции можно прийти к уравнению, впервые полученному Казанцевым для зеркально-симметричных в среднем сред [7] (в иностранной литературе первое описание турбулентного динамо обычно ассоциируется с работой [8], а зеркально-асимметричный случай с работой [9]). В дельта-коррелированном случайном однородном и изотропном поле скорости усреднение уравнения индукции (1) дает систему двух уравнений второго порядка с фиксированной вязкостью  $\eta(r)$  и спиральностью  $\alpha(r)$ :

$$M_t = 2r^{-4}(r^4 \eta M_r)_r + 2Mr^{-4}(r^4 \eta_r)_r - 4\alpha K, \quad (3)$$

$$K_t = r^{-4}(r^4(\alpha M + 2\eta K)_r)_r, \quad (4)$$

где

$$\eta(r) = \frac{1}{Rm} + F(0) - F(r),$$

$$\alpha(r) = G(0) - G(r).$$

Неизвестные функции  $M(r, t)$  и  $K(r, t)$  определяют корреляционный тензор магнитного поля, а известные  $F(r)$  и  $G(r)$  определяют дельта-коррелированный тензор поля скорости:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{B}_i(r, t) \mathbf{B}_j(0, 0) \rangle = & \left( M + \frac{rM_r}{2} \right) \left( \delta_{ij} - \frac{r_i r_j}{r^2} \right) + \\ & + \frac{Mr_i r_j}{r^2} + K \epsilon_{ijk} r_k. \end{aligned}$$

$$\langle \mathbf{V}_i(r, t) \mathbf{V}_j(0, 0) \rangle = \left( \left( F + \frac{rF_r}{2} \right) \left( \delta_{ij} - \frac{r_i r_j}{r^2} \right) + \frac{Fr_i r_j}{r^2} + G\epsilon_{ijk} r_k \right) \delta(t).$$

Компактность и гибкость модели среднего поля по сравнению с моделью Казанцева обуславливает то, что крупномасштабная модель, хотя она и теряет способность описывать многие мелкомасштабные черты, так как содержит очень ограниченную информацию о поле скорости и поле спиральности, используется гораздо чаще мелкомасштабной.

Заметим теперь, что обе модели, среднего поля и Казанцева, являются линейными, и поэтому изначально не описывают процесс насыщения и стабилизации роста магнитного поля. Наиболее традиционный выход из этой ситуации заключается в подавлении гидродинамической/кинетической спиральности  $\alpha$ , или в так называемом  $\alpha$ -квенчинге. Делается это чаще всего феноменологически, предполагая, что за счет сохранения полной энергии параметр  $\alpha$  уменьшается с ростом магнитного поля, например, как

$$\alpha(B) = \frac{\alpha_0}{1 + (B/B_0)^2} \quad (5)$$

(подробнее см., например, [10–13]). В рамках настоящей работы, не останавливаясь на обосновании феноменологичности подхода, мы выясняем, работает ли  $\alpha$ -квенчинг в модели Казанцева, на каком уровне происходит стабилизация процесса, отличаются ли спектры процессов, и можно ли предложить  $\alpha$ -стабилизацию, основанную на балансе «зеркальной асимметрии», а не на прикладной идее уменьшения параметра  $\alpha$  с неограниченным ростом магнитного поля. Мы обсуждаем также, можно ли осуществить стабилизацию за счет сохранения полной энергии в модифицированной модели Казанцева и как различаются варианты стабилизации при учете законов сохранения интегрального и спектрального типа, когда, например, сохраняется полная энергия или энергия в каждой спектральной оболочке.

## 2. КРУПНОМАСШТАБНАЯ МОДЕЛЬ СРЕДНЕГО ПОЛЯ

Начнем с простейшей модели среднего поля в неограниченном пространстве с постоянными коэффициентами, характеризующими диффузию и зеркальную асимметрию среды:

$$\mathbf{V}_t = \alpha \operatorname{rot} \mathbf{V} + \eta \Delta \mathbf{V}, \quad \mathbf{V}|_{t=0} = \mathbf{V}_0(\mathbf{x}).$$

Мы называем эту модель простейшей, так как обычно рассматривается некоторая ограниченная область пространства с некоторым распределением по ней параметров  $\alpha(r)$  и  $\eta(r)$ , а также рассматривается общее дифференциальное вращение, мы же рассматриваем неограниченную область с постоянными параметрами. После фурье-преобразования уравнение среднего поля для образа  $\mathbf{V}(\mathbf{k}, t)$  принимает вид алгебраической системы:

$$\mathbf{V}_t = \alpha i[\mathbf{k}, \mathbf{V}] - \eta \mathbf{k}^2 \mathbf{V}, \quad \mathbf{V}|_{t=0} = \mathbf{V}_0(\mathbf{k}).$$

Для линейных уравнений с помощью матриц поворота

$$\Theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

несложно перейти в систему отсчета, в которой волновой вектор направлен вдоль оси  $z$ , тогда уравнение среднего поля принимает вид следующей системы трех уравнений

$$(B'_x)_t = -\alpha i k B'_y - \eta k^2 B'_x, \quad (6)$$

$$(B'_y)_t = \alpha i k B'_x - \eta k^2 B'_y, \quad (7)$$

$$(B'_z)_t = -\eta k^2 B'_z. \quad (8)$$

Очевидно, что решение последнего уравнения  $B'_z(k, t) = 0$  в силу условия бездивергентности  $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}) = 0$ , а решение системы (6), (7) можно получить, найдя корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + 2\eta k^2 \lambda + \eta^2 k^4 - \alpha^2 k^2 = 0. \quad (9)$$

В этом случае решение имеет вид

$$B'_x = -i\alpha k C_1 \exp(\lambda_1 t) - i\alpha k C_2 \exp(\lambda_2 t), \quad (10)$$

$$B'_y = (\lambda_1 + \eta k^2) C_1 \exp(\lambda_1 t) - i(\lambda_2 + \eta k^2) \times C_2 \exp(\lambda_2 t), \quad (11)$$

$$\lambda_1 = -\eta k^2 - \alpha k, \quad \lambda_2 = -\eta k^2 + \alpha k,$$

где константы определяются из начальных условий:

$$C_1 = \frac{iB'_{0x} + B'_{0y}}{2\alpha k}, \quad C_2 = \frac{B'_{0x} + iB'_{0y}}{-2i\alpha k}.$$

Таким образом, в матричной записи решение уравнение среднего поля можно записать как

$$\mathbf{V}'(\mathbf{k}, t) = \begin{pmatrix} B'_x \\ B'_y \\ B'_z \end{pmatrix} = e^{-\eta k^2 t} \begin{pmatrix} \text{ch}(\alpha kt) & -i \text{sh}(\alpha kt) & 0 \\ i \text{sh}(\alpha kt) & \text{ch}(\alpha kt) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B'_{0x} \\ B'_{0y} \\ 0 \end{pmatrix},$$

или в исходной системе координат:

$$\mathbf{V}(\mathbf{k}, t) = e^{-\eta k^2 t} \Phi^{-1} \Theta^{-1} R \Theta \Phi \mathbf{V}_0,$$

где

$$R = \begin{pmatrix} \text{ch}(\alpha kt) & -i \text{sh}(\alpha kt) & 0 \\ i \text{sh}(\alpha kt) & \text{ch}(\alpha kt) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нас, в первую очередь, будет интересовать спектр энергии:

$$\frac{1}{2} \mathbf{V} \mathbf{V}^* = \frac{1}{2} e^{-2\eta k^2 t} \mathbf{V}_0^T \Phi^{-1} \Theta^{-1} R^T R^* \Theta \Phi \mathbf{V}_0^*. \quad (12)$$

Предполагая, что начальное распределение полей в пространстве является в среднем сферически симметричным, и интегрируя по единичной сфере радиуса  $k$ , получаем следующее выражение для энергии:

$$E(k) = \frac{2 \text{ch}(2\alpha kt) + 1}{3} e^{-2\eta k^2 t} E_0(k) \sim \exp\left(2\alpha t \left(k - \frac{\eta}{\alpha} k^2\right)\right), \quad (13)$$

где  $E_0(k)$  — начальная форма спектра. Очевидно, что на больших временах спектр магнитной энергии растет на длине волны  $k = \alpha/2\eta$  с максимальной скоростью порядка  $\alpha^2/2\eta$ . При этом, естественно, что в нашем случае никакое уменьшение параметра  $\alpha$  за счет сохранения полной энергии не приведет к подавлению роста поля за конечное время, а лишь увеличит характерный корреляционный масштаб и уменьшит скорость генерации. В ограниченной же области ситуация изменится, и  $\alpha$ -квенчинг приведет к подавлению процесса за конечный промежуток времени, зависящий от размера области (см., например, [14]). Однако, вместо того, чтобы рассматривать конкретную ограниченную область, мы рассмотрим ту же самую однородную задачу, но не будем пренебрегать тонкой структурой поля скорости, описывающей масштабы много меньше энергонесущего.

### 3. МЕЛКОМАСШТАБНАЯ МОДЕЛЬ КАЗАНЦЕВА

Мелкомасштабная модель Казанцева записывается после усреднения уравнения индукции традиционно не для корреляционных функций  $M(r, t)$  и  $K(r, t)$ , а для вспомогательных функций  $\phi(r, t)$  и  $\theta(r, t)$ , определяемых выражениями

$$\begin{aligned} M(r, t) &= r^{-2} \eta^{-1/2} \phi, \\ K(r, t) &= 1/2 r^{-4} (r^4 (r^{-2} \theta))_r. \end{aligned} \quad (14)$$

Смысл этих замен заключается в том, что они представляют в явной форме уравнения модели Казанцева как задачу на собственные функции и собственные значения для некоторой системы линейных уравнений (см., например, [15]). Тогда как в исходной формулировке линейность задачи не сразу видна — этому мешает условие нормировки, согласно которому значение корреляционной функции при совпадении ее пространственных аргументов представляет собой магнитную энергию. В итоге рассматриваемые замены сводят модель Казанцева для ограниченных решений к системе двух дифференциальных эволюционных уравнений параболического типа с нулевыми условиями в нуле и на бесконечности:

$$\begin{aligned} \phi_t &= \eta \phi_{rr} + \left[ \frac{\eta_{rr}}{2} + \frac{2\eta_r}{r} - \frac{2\eta}{r^2} + \frac{\eta_r^2}{4\eta} \right] \phi - \nu \eta \left[ \theta_{rr} - \frac{2\theta}{r^2} \right], \\ \theta_t &= \eta \left[ \theta_{rr} - \frac{2\theta}{r^2} \right] + \nu \phi, \quad \text{где } \nu(r) = \frac{\alpha(r)}{\eta^{1/2}}. \end{aligned}$$

После нахождения решения системы по вспомогательным функциям могут быть восстановлены корреляционная функция магнитного поля и функция магнитной спиральности (а также спектры энергии  $\langle \mathbf{V} \mathbf{V} \rangle(k)$  и спиральности  $\langle \mathbf{A} \mathbf{V} \rangle(k)$  в результате трехмерного преобразования Фурье):

$$\langle \mathbf{V} \mathbf{V} \rangle(r) = \frac{1}{r^2} (\eta^{-1/2} r \phi)_r, \quad \langle \mathbf{A} \mathbf{V} \rangle(r) = -\frac{1}{2r^2} (r \theta)_r.$$

Заметим, что в исходной модели Казанцева, кроме предположения о временной дельта-коррелированности потока, предполагается также, что его корреляционные функции не меняются с течением времени. Тогда

$$\langle \mathbf{V} \mathbf{V} \rangle(r) = 3F + rF_r, \quad \langle \mathbf{V} \text{rot } \mathbf{V} \rangle(r) = -2(3G + rG_r).$$

Конечно, точный вид корреляционных функций обычно известен плохо. Для конкретности мы выбираем их такими, чтобы они были локализованы

на единичном интервале — другими словами за масштабную единицу мы берем корреляционную длину поля скорости. Кроме того, мы выбираем плотность кинетической энергии равную единице, а плотность спиральности 0.1 (это стандартная оценка степени зеркальной асимметрии в конвекции и турбулентности во вращающихся небесных телах, которую обычно связывают с именем Юджина Паркера):

$$F(r) = \frac{e^{-r^2}}{3}, \quad G(r) = -\frac{e^{-r^2}}{60}, \quad (15)$$

$$\langle \mathbf{V}\mathbf{V} \rangle(k) = 10\langle \mathbf{V} \text{rot } \mathbf{V} \rangle(k) = \frac{k^2}{12\sqrt{2}}e^{-k^2/4}.$$

В силу того, что крупномасштабная структура формируется на масштабах  $r \gg 1$ , а корреляционные функции потока локализованы на единичном масштабе при  $r < 1$ , есть возможность грубо проанализировать систему Казанцева, считая  $\nu(r)$  и  $\eta(r)$  константами. Действительно, при больших значениях  $r$  и при экспоненциальной временной зависимости порядка  $\exp(2\gamma t)$ , система принимает достаточно простой вид

$$\eta\phi_{rr} = (\gamma - \nu^2)\phi + \gamma\nu\theta, \quad \eta\theta_{rr} = -\nu\phi + \gamma\theta.$$

Решение такой системы находится в явном виде (см. [16]) и ведет себя как

$$\phi \sim \theta \sim \exp\left(2\gamma t - \frac{r}{l}\sqrt{\frac{4\gamma}{\nu^2} - 1}\right) \cos\left(\frac{r}{l}\right), \quad l = \frac{2\eta}{\alpha_0}.$$

Считая, что амплитуды функций  $\phi(r)$  и  $\theta(r)$  ограничены при  $r \rightarrow \infty$ , мы получаем максимальную скорость роста магнитной энергии равную  $2\gamma = \nu^2/2 = \alpha_0^2/2\eta$  и характерную длину волны  $\alpha_0/2\eta$ . Полученные оценки скорости и масштаба полностью совпадают с характеристиками модели среднего поля, что характеризует непротиворечивость моделей и частично верифицирует численные результаты, которые будут получены при их анализе.

Кратко отметим, что численная реализация модели осуществляется с помощью чисто неявной схемы с нулевыми граничными условиями (идея предложена впервые в работе [17]). Сетка из 5000 узлов выбирается неравномерной и таким образом, чтобы половина узлов попала в интервал  $r \in [0, 1]$ . Плюсом такого выбора является то, что качественно удается реализовать задачу на полупрямой  $r \in [0, \infty)$  и одновременно восстановить мелкомасштабное поле в областях  $r \ll 1$ . Недостатком является трудность с восстановлением Фурье-спектров (из-за ячеек разного размера при больших  $k$  возникают ошибки связанные с вычислением интегралов). Заметим, что

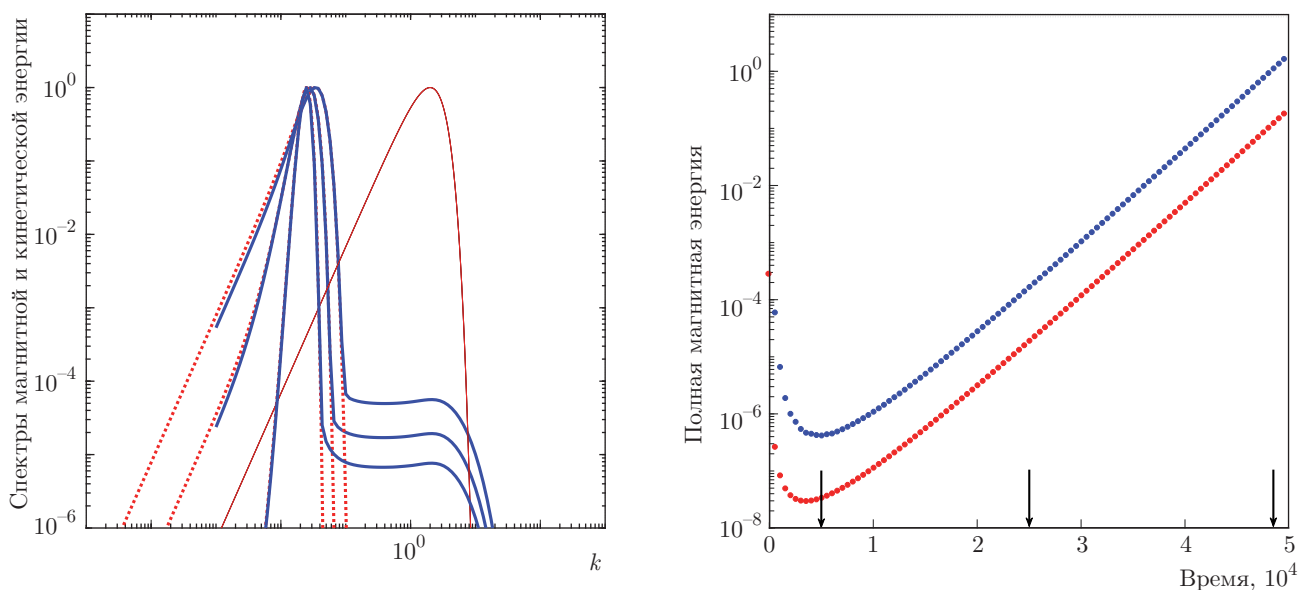
волновое число  $k = 1$  соответствует корреляционной длине поля скорости (или, примерно, максимуму кинетического энергетического спектра), поэтому удобно в дальнейшем считать, что  $k < 1$  соответствуют крупномасштабной генерации,  $k > 1$  характеризуют мелкомасштабные процессы. Более подробно о численном анализе можно прочесть в работах [18–20].

## 4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

### 4.1. Линейный режим

Сравнение результатов моделирования задачи среднего поля и мелкомасштабного динамо для линейного докритического случая ( $\text{Rm} = 50$ ) представлено на рис. 1. На левой панели рисунка показаны спектры кинетической и магнитной энергии, нормированные на свое максимальное значение для трех моментов времени, отмеченных на правой панели. Энергетические спектры показывают хорошее согласие модели Казанцева (синие линии) и модели среднего поля (красные штриховые линии) во всей спектральной области за исключением малых масштабов, на описание которых уравнение среднего поля, конечно, не претендует. Другими словами, модель Казанцева и модель среднего поля согласуются в той области масштабов, где это сравнение имеет смысл, при  $k < 1$ , в то время как при  $k \geq 1$  вклад мелкомасштабного магнитного поля (плато в правой части спектра) медленно затухает со временем.

На правой панели рис. 1 изображены зависимости от времени полной магнитной энергии для обеих моделей. Несмотря на то что по абсолютным величинам полные энергии несколько отличаются (в частности, из-за того, что модель среднего поля не описывает мелких масштабов), скорости роста хорошо согласуются, что подтверждает корректность как крупномасштабного, так и мелкомасштабного подхода для описания докритического режима (в нашем случае  $\text{Rm} = 50$ ). Конечно, в сверхкритических режимах (при  $\text{Rm} \gg 50$ ) наравне с крупномасштабной генерацией должен работать и мелкомасштабный процесс (см. работы [18, 19] и библиографию в них) — его скорости гораздо больше, чем скорости докритического режима, поэтому в природе, по-видимому, существует весьма эффективный механизм мелкомасштабной нелинейной стабилизации, связанный, например, с трансформацией кинетической энергии в магнитную.



**Рис. 1.** (В цвете онлайн) Сравнение линейных режимов. На левой панели спектры фиксированной кинетической энергии (красная сплошная линия) и магнитной энергии, нормированной на максимальное значение, для трех моментов времени. На правой панели зависимость магнитной энергии от времени, вертикальными стрелками помечены выбранные моменты времени. Синие линии соответствуют модели Казанцева, красные линии — энергии модели среднего поля. Выполяживание энергетического спектра Казанцева описывает мелкомасштабные поля, затухающие со временем, поэтому на более ранних этапах эволюции плато на больших  $k$  выше

тического спектра [20], который однако в данной работе мы обойдем стороной.

#### 4.2. Традиционный альфа-квенчинг

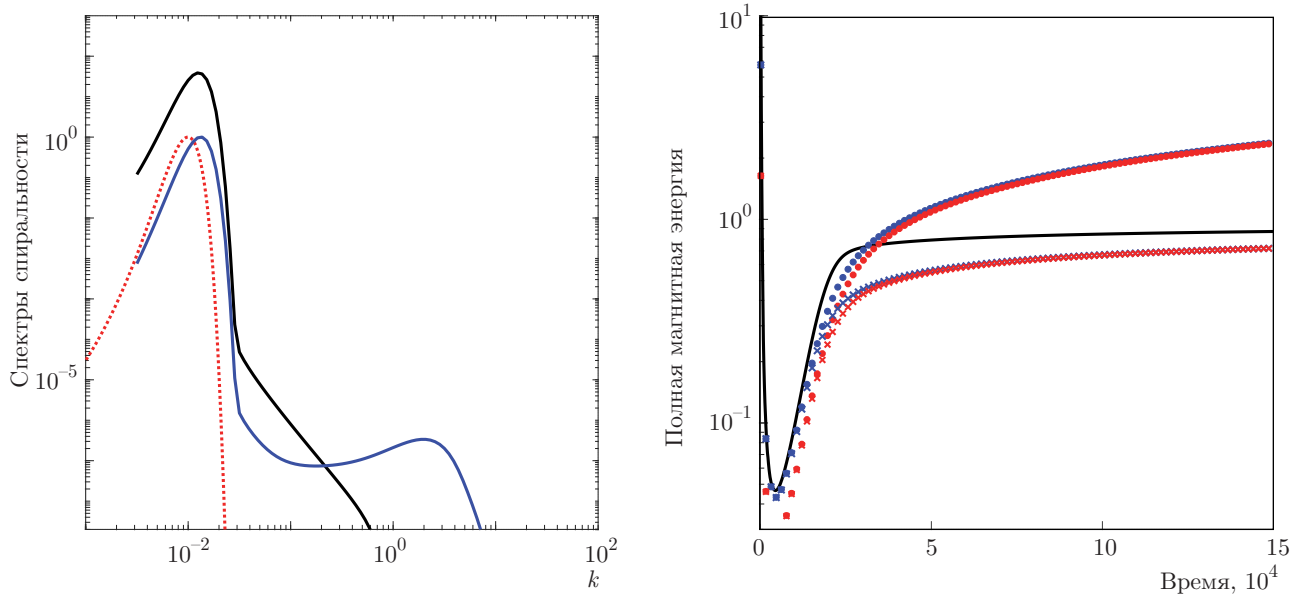
Простейшее предположение при рассмотрении нелинейного режима крупномасштабной генерации строится на том, что форма уравнений среднего поля остается неизменной с течением времени, а изменяется лишь гидродинамическая спиральность, уменьшаясь с ростом магнитного поля (это предположение можно обосновать, по крайней мере, в некоторых моделях, см., например, [21]). Уменьшение фактора, обеспечивающего генерацию, приводит к ее подавлению. Параметризации спиральности в рамках подобного подхода могут различаться, но одна из наиболее распространенных имеет вид

$$\alpha(t) = \alpha_0(1 + \mathbf{H}^2(t))^{-1}. \quad (16)$$

Здесь предполагается, что магнитная энергия  $\mathbf{H}^2(t)$  измеряется в единицах предельной энергии, для которой происходит стабилизация работы динамо, а  $\alpha_0$  — начальное значение  $\alpha$ -эффекта. Эту же параметризацию можно, конечно, включить и в модель Казанцева. Проверим, насколько согласуется применение этой параметризации в обеих моделях.

Результаты численного счета показывают, что в этом случае поведения модели среднего поля и модели Казанцева практически не различаются, см. рис. 2 (красные и синие точки на правой панели соответствуют спектрам модели среднего поля и модели Казанцева). При этом по мере достижения равномерного распределения экспоненциальный рост прекращается, но решение продолжает медленно расти. Это связано с тем, что мы рассматриваем задачу динамо в неограниченном пространстве. Подобные эффекты в других задачах динамо были известны давно (см., например, обзор [4]). В данной задаче сохранение медленного роста на нелинейной стадии прямо подтверждается решением (13), для которого с уменьшением  $\alpha$  скорость роста замедляется, но не насыщается, оставаясь пропорциональной  $\alpha^2/2\eta$ . Таким образом, при стандартном альфа-квенчинге обе модели ведут себя идентично, а процессы на малых масштабах не играют принципиальной роли, и позволяют пользоваться той моделью, которая удобнее в каждой конкретной задаче.

В зависимости от потребности задачи, нетрудно так модифицировать стандартную параметризацию обратного влияния магнитного поля на гидродинамику (16), чтобы энергия магнитного поля не превышала равномерного распределения. Для этого нужно выбрать подавление зеркальной асимметрии в виде



**Рис. 2.** (В цвете онлайн) Сравнение нелинейного подавления в модели среднего поля и в модели Казанцева. На левой панели спектр магнитной энергии (синяя линия) и спиральности (черная линия), соответствующие нелинейному подавлению на основе закона сохранения энергии, красная линия соответствует модели среднего поля. На правой панели зависимость магнитных энергий от времени (точки соответствуют подавлению (16), крестики — подавлению (17), черная линия соответствует закону сохранения полной энергии (18)),  $Rm = 10$

$$\alpha(t) = \alpha_0(1 - \mathbf{H}^2(t)) \quad (17)$$

(для малых  $\mathbf{H}^2(t)$  этот способ не отличается от предыдущего). Численный счет показывает, что при таком подавлении обе модели дают также схожие результаты, но энергия насыщается быстрее и стабилизируются на уровне меньшем 1 (меньшем равномерного распределения, см. красные и синие крестики на правой панели рис. 2). Спектры энергии приобретают вид аналогичным спектральным кривым на левой панели рис. 1, процессы на малых масштабах по-прежнему не играют существенной роли, хотя и могут быть зафиксированы по плоскому профилю плотности энергии и степенному профилю плотности спиральности вблизи энергетического масштаба.

Следует заметить, что в реалистических динамо-моделях случаи, когда энергия магнитного поля превышает энергию равномерного распределения, встречаются и не так уж редко (см., например, [22]). Конечно, для этого необходимо, чтобы кинетическая энергия турбулентности или конвекции восполнялась из какого-то источника, которым обычно является общее вращение тела, энергия которого на много порядков превышает магнитную энергию. Таким образом, обе рассмотренные параметризации нелинейного подавления динамо могут в целом наблюдаться и при этом приводить к различным типам

нелинейной эволюции магнитного поля, которые могут представлять значительный физический интерес (см., в частности, [23]).

### 4.3. Альфа-квенчинг, основанный на законе сохранения полной энергии

Рассмотрим теперь более качественную модель нелинейного подавления генерации магнитного поля, в которой прямо предполагается, что рост магнитной энергии ограничен кинетической энергией случайных движений. В рамках подхода среднего поля такую параметризацию сформулировать трудно, поскольку энергия случайных движений, сосредоточенная в малых масштабах, прямо не входит в эти уравнения, см. (2). Однако это можно сделать в модели Казанцева. Для этого нужно предположить, что характерная скорость потока  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  убывает таким образом, что полная магнитная и кинетическая энергия потока сохраняется:

$$\langle \mathbf{V}\mathbf{V} \rangle(0, t) + \langle \mathbf{B}\mathbf{B} \rangle(0, t) = 1. \quad (18)$$

Предполагая, что вид уравнения не изменяется, получаем следующую зависимость корреляционных функций потока от времени:

$$\langle \mathbf{V}\mathbf{V} \rangle(r, t) = \langle \mathbf{V}\mathbf{V} \rangle(r, 0) \cdot \left( 1 - \frac{\langle \mathbf{B}\mathbf{B} \rangle(0, t)}{\langle \mathbf{V}\mathbf{V} \rangle(0, 0)} \right),$$

$$\langle \mathbf{V} \operatorname{rot} \mathbf{V} \rangle(r, t) = \langle \mathbf{V} \operatorname{rot} \mathbf{V} \rangle(r, 0) \cdot \left( 1 - \frac{\langle \mathbf{B}\mathbf{B} \rangle(0, t)}{\langle \mathbf{V}\mathbf{V} \rangle(0, 0)} \right).$$

В отличие от стандартного альфа-квенчинга при таком подавлении с ростом магнитной энергии подавляется не только коэффициент  $\alpha$ , но и коэффициент турбулентной диффузии  $\eta$ , связанный с продольной корреляционной функцией. Подавление диффузии может эффективно перевести докритический режим в критический, при высоких значениях  $Rm$  (однако мы, как было сказано выше, предполагаем наличие эффективного подавления мелкомасштабного динамо и выбираем заведомо малые  $Rm = 10$ ). Тогда, как видно на правой панели рис. 2, магнитная энергия (черная линия) нарастает быстрее, чем энергия в стандартных моделях, так как величина  $\alpha^2/\eta$  становится больше из-за меньшего  $\eta$ , а ее насыщение происходит на уровне более близком к равномерному. Спектральная картина также меняется, см. левую панель рис. 2. Максимум плотности энергии (синяя линия), пропорциональный  $\alpha/2\eta$ , сдвигается в область меньших масштабов по сравнению с плотностью энергии в задаче среднего поля (красная штриховая линия). Плотность спиральности (черная линия) приобретает вблизи энергетического масштаба характерный степенной наклон близкий к  $-3$ . Однако если мелкомасштабная структура не является принципиальной в задаче (плотность мелкомасштабной энергии на порядки меньше плотности энергии среднего поля), то альфа-квенчинг, основанный на законе сохранения полной энергии (18), принципиально не отличается от стандартного альфа-подавления, задаваемого уравнениями вида (16) или (17).

#### 4.4. Нелинейный режим. Спектральное подавление

В рассмотренных выше вариантах параметризации нелинейного динамо-насыщения мы не учитывали возможного переноса энергии по спектру (см., например, [24]). Это кажется реалистичным в том случае, когда перераспределение по спектру, осуществляется столь быстро, что форма спектра остается неизменной и определяется внемоделными причинами, меняется при этом только амплитуда спектра. Или, наоборот, если перераспределение по спектру столь медленное, что для каждого малого интервала волновых чисел отсутствует спектральный транспорт, т. е. для каждой волновой оболочки

происходит свое спектральное подавление зеркальной асимметрии, то и форма спектра меняется.

Мы уже рассмотрели первую возможность (см. первые три варианта альфа-квенчинга). Перейдем теперь ко второй. Проблемы, возникающие в этом случае, несложно понять, посмотрев на левую панель рис. 1. В потоке с максимумом плотности кинетической энергии вблизи энергетического масштаба  $k = 1$  (тонкая красная линия) магнитное поле генерируется с максимумом энергии вблизи малых  $k = \alpha/2\eta$ , поэтому достаточно быстро плотность магнитной энергии на малых масштабах начинает превышать плотность кинетической энергии даже при сохранении полной энергии. Поэтому приходится допустить либо истощение кинетической энергии, либо ее эффективный транспорт в область малых  $k$ , что затруднительно описать в рамках сравнительно несложной параметризации.

С другой стороны, можно предположить, что в модели среднего поля (13) параметр  $\alpha$  зависит от  $k$ , и в каждой спектральной оболочке он подавляется обратно пропорционально энергии в этой оболочке:

$$\alpha(k) = \alpha_0(1 + (2/\pi)\mathbf{H}^2(k) \cdot k^2 dk)^{-1}, \quad (19)$$

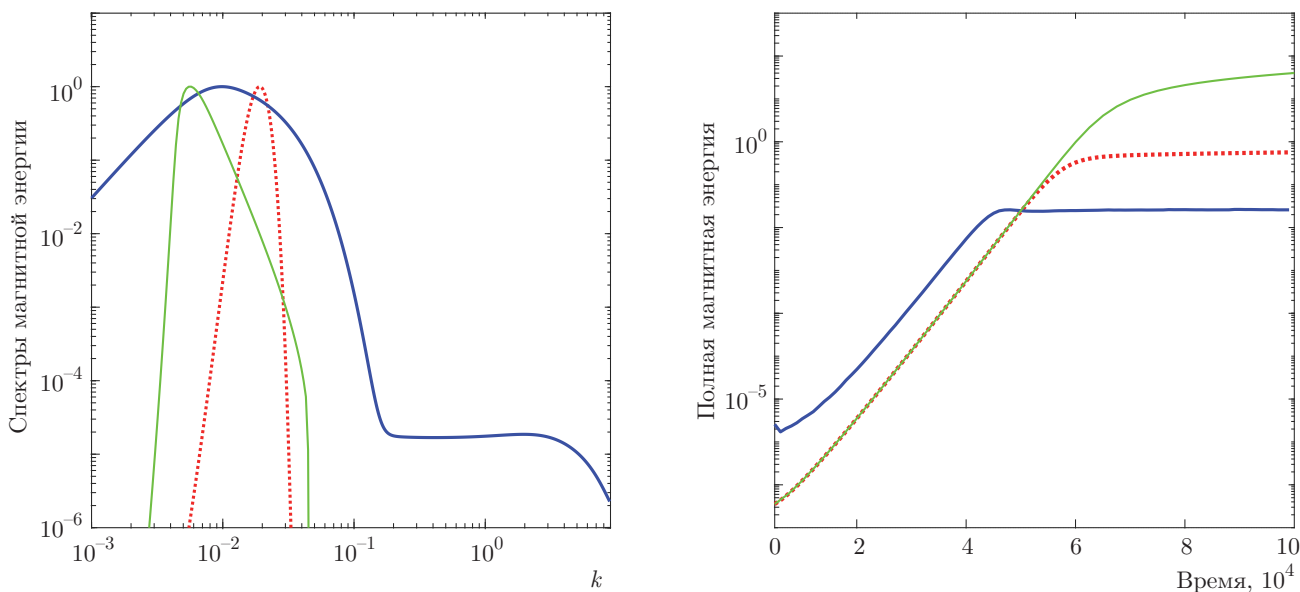
тогда, как при интегральном подавлении, экспоненциальный рост прекращается, но решение продолжает медленно (линейно по времени) расти, а спектр перестает быть локализован в узком диапазоне волновых чисел и приобретает вид распределения со степенным интервалом порядка  $k^{-4}$  и максимумом, смещенным в область больших масштабов (зеленые линии на рис. 3). В целом, следует признать, что в рамках простейших моделей построение более универсальной параметризации, чем классическая, кажется затруднительным.

#### 4.5. Баланс спиральностей

Наконец, заметим, что существует и иной путь к построению нелинейной спектральной параметризации динамо, который отталкивается не от закона сохранения энергии, а от закона сохранения полной (гидродинамической и магнитной) спиральности. Из анализа задачи Казанцева известно, что при нарастании магнитного поля, наравне с генерацией энергии растет мера магнитной асимметрии  $\langle \mathbf{A}\mathbf{B} \rangle(k, t)$ . Из общих соображений сохранение суммарной симметрии может вносить вклад в  $\alpha$ -эффект. Такое сохранение уже само по себе приводит к подавлению  $\alpha$ . Таким образом, пренебрегая переносом спиральности по спектру и полагая, что

$$\langle \mathbf{V} \operatorname{rot} \mathbf{V} \rangle(k, t) = \langle \mathbf{V} \operatorname{rot} \mathbf{V} \rangle(k, 0) - \langle \mathbf{A}\mathbf{B} \rangle(k, t) \quad (20)$$





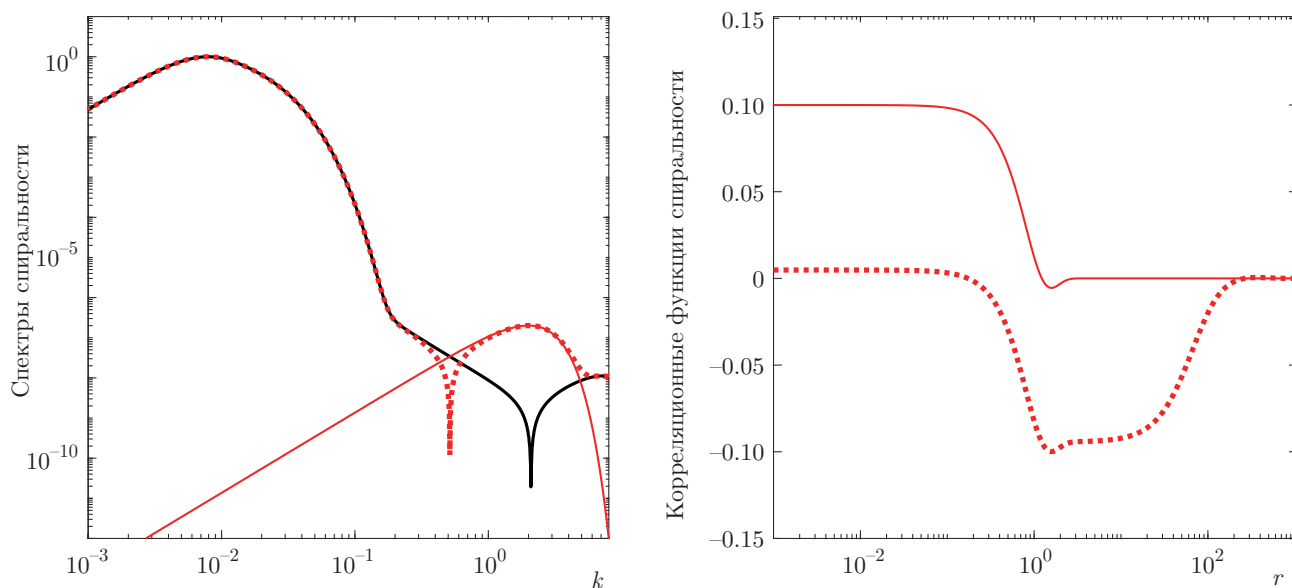
**Рис. 3.** (В цвете онлайн) Спектральное подавление. На левой панели изображены энергетические спектры для нелинейной модели среднего поля с традиционным подавлением ((17), красная линия), спектральным подавлением ((19), зеленая линия) и спектральным подавлением на балансе полной спиральности ((20), синяя линия). На правой панели изображены зависимости полной магнитной энергии от времени для традиционного подавления и спектрального квенчинга (19) и (20) в аналогичных цветах. Плотности энергии на левой панели нормированы на максимальное значение и соответствуют конечному моменту времени на правой панели

в каждой спектральной оболочке, мы можем ожидать динамо-насыщения. Действительно, численный эксперимент показывает, что при таком подавлении в модели Казанцева наблюдается эффективная стабилизация, см. правую панель рис. 3 (красная линия соответствует модели среднего поля с квенчингом (17), синяя — спектральному альфа-подавлению вида (20)). На левой панели рис. 3 показаны соответствующие энергетические спектры магнитного поля, а на рис. 4 спектры и корреляционные функции кинетической спиральности. Выделим характерные черты такого альфа-квенчинга: во-первых, стабилизация происходит одновременно со стремлением  $\langle \mathbf{V} \text{ rot } \mathbf{V} \rangle(r, t)$  к нулю при  $r = 0$  (см. правую панель рис. 4: сплошная линия соответствует корреляционной функции кинетической спиральности в начальный момент времени, штриховая — в конечный). Другими словами, это означает смену знака плотности спиральности на больших масштабах (на левой панели смене знака соответствует пик на штриховой линии вблизи энергетического масштаба). Во-вторых, спектральная картина для энергии приобретает принципиальные различия с динамо среднего поля (увеличивается область локализации и максимум смещается на большие масштабы, левая панель рис. 3). Наконец, устойчивая стабилизация магнитной энергии, связанная с формальным

балансом меры зеркальной асимметрии, фиксируется на уровне, на порядки меньшем, чем для стабилизации, построенной на интегральном законе сохранения (синяя линия на правой панели рис. 3).

### 5. ОБСУЖДЕНИЕ И ВЫВОДЫ

Задача о росте магнитного поля в потоке проводящей жидкости/плазмы заметно отличается от многих других задач физики тем, что в ней приходится иметь дело с системами, свойства которых известны весьма приблизительно. Мы очень слабо знаем те детали внутреннего строения потоков вещества в звездах, галактиках и в других небесных телах, для которых хочется понять причины наблюдаемого поведения магнитных полей. Даже при экспериментальных исследованиях динамо трудно измерить все важные величины в условиях реального эксперимента. В подобной ситуации ограничены и возможности прямого численного моделирования, которое само по себе, конечно, очень важно (подробнее читайте обзор [25]). В итоге приходится пользоваться различными параметризациями свойств турбулентных и конвективных течений. Эти параметризации, конечно, основаны на определенных физических соображениях, однако трудно утверждать, что они прямо следуют из первопринципов физики.



**Рис. 4.** (В цвете онлайн) Альфа-квенчинг на балансе суммарной спиральности. На левой панели изображены спектры нормированной магнитной спиральности (черная линия) и кинетической спиральности в начальный момент времени (красная сплошная линия) и в конечный момент времени (красный пунктир). На правой панели изображены корреляционные функции спиральности в начальный и конечный момент времени. Конечный момент времени соответствует концу шкалы на правой панели рис. 3

Конечно, по мере усложнения моделей в них выделяются специфические элементы, определяющие те или иные детали феноменологии, известные из наблюдений. Однако хотелось бы убедиться, что, по крайней мере, в простейших задачах динамо не очень изощренные параметризации действительно приводят к близким результатам. В противном случае было бы трудно говорить о понимании физических процессов генерации магнитных полей.

В настоящей работе мы продемонстрировали, что такая стабильность описания действительно возникает при сопоставлении двух различных путей моделирования: одного — на языке динамо средних полей, а другого — на языке корреляционной динамо-модели Казанцева, которая первоначально ориентирована на описание мелкомасштабного динамо, но (при должном развитии) включает и динамо среднего поля. Мы показали, что в той области, где эти модели допускают сравнение, их свойства и в самом деле близки. Это касается и спектров энергии генерируемого поля, и скоростей роста энергии. Более того, классический альфа-квенчинг в данных моделях дает результат близкий к динамо-стабилизации, основанной на законе сохранения полной энергии, при которой рост магнитного поля приводит к уменьшению кинетической энергии и пропорциональному уменьшению гидродинамиче-

ской спиральности.

Другая важная черта проведенного сравнения связана с тем, что на примере альфа-квенчинга в мелкомасштабной модели Казанцева удалось продемонстрировать возможность нелинейной стабилизации другим путем, нежели через интегральное или спектральное уменьшение энергии случайного поля скорости. Численный счет показал, что при генерации магнитного поля в случайном потоке на больших масштабах (в сравнении с характерным энергетическим масштабом поля скорости) генерируется значительная магнитная спиральность. Феноменологическое предположение о сохранении полной спиральности (суммарной меры асимметрии) приводит к идее о смене ее знака таким образом, что средняя кинетическая спиральность становится нулевой и генерация прекращается. Именно такой эффект и наблюдался при численном счете, когда на масштабах меньших энергетического кинетическая спиральность приобретает знак противоположный спиральности магнитного поля, в то время как на масштабах больших — знаки спиральностей совпадают. Поэтому совпадение моделей среднего поля и Казанцева при традиционном альфа-квенчинге еще не означает, что такой способ динамо-подавления является единственно возможным и безоговорочно правильным.

Наконец, заметим, что проведенное нами сравнение имеет еще одну мотивацию. Работа крупномасштабного динамо приводит к образованию как крупномасштабного (среднего), так и мелкомасштабного (турбулентного) магнитного поля. Уравнение, описывающее эволюцию крупномасштабных компонент магнитного поля, строго говоря, является детерминированным уравнением для математического ожидания (среднего значения) магнитного поля и не должно включать флуктуаций. Для описания же флуктуаций, строго говоря, необходимо выделить из уравнения Казанцева уравнение для соответствующей составляющей магнитного поля. Подобная процедура представляет несомненный интерес с точки зрения разрешения возникающих при этом разнообразных нетривиальных задач математической физики, однако с практической точки зрения от нее хотелось бы по возможности уклониться и рассматривать флуктуации, связанные с работой крупномасштабного динамо, как составную часть решения уравнений среднего поля. Такой прагматический подход постоянно применяют в других областях физики. В частности, уравнения газодинамики тоже являются уравнениями среднего поля, но это не мешает метеорологам рассматривать в их рамках, скажем, флуктуации температуры. Аналогично, специалистам по солнечному циклу хотелось бы рассматривать влияние на свойства солнечного цикла флуктуаций альфа-эффекта тоже в рамках уравнений среднего поля [26]. В последнем случае, однако, правомерность подобного подхода вызывает больше опасений, поскольку для задачи динамо известно явление перемежаемости, в результате которого статистические моменты низших и высших порядков могут вести себя существенно различно (см. например, [27]). Важно, что проведенное выше сравнение двух подходов показывает, что в данном случае это опасение оказывается несостоятельным и в рамках уравнения динамо среднего поля рассматривать задачи с флуктуирующими параметрами динамо можно. Это, конечно, не гарантирует отсутствие каких-то более тонких постановок вопроса, где подобный подход не полностью отражает специфику задачи, однако пока позволяет, скажем, продолжать учитывать флуктуации параметров динамо при описании солнечного и звездных циклов.

**Финансирование.** Работа Д. Д. С. и А. С. Л. по постановке задачи и поиску методов ее решения поддерживалась Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 18-02-0085). Численный эксперимент, проводимый Е. В. Ю., а так-

же трактовка результатов, осуществляемая всеми авторами, обеспечивалась грантом фонда БАЗИС № 18-1-1-77-3.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Д. Соколов, Р. А. Степанов, П. Г. Фрик, УФН **184**, 313 (2014).
2. A. Ruzmaikin, D. Sokoloff, and A. Shukurov, MNRAS **241**(1), 1 (1989).
3. K. Subramanian, MNRAS **294**, 718 (1998).
4. Ya. B. Zeldovich, A. A. Ruzmaikin, and D. D. Sokoloff, *Magnetic Fields in Astrophysics*, G&B, NY (1983).
5. F. Krause and K.-H. Rädler, *Mean-Field Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory*, Pergamon Press, Ltd., Oxford (1980).
6. С. А. Молчанов, А. А. Рузмайкин, Д. Д. Соколов, УФН **145**, 307 (1985).
7. А. П. Казанцев, ЖЭТФ **53**, 1806 (1967).
8. R. Kraichnan and S. Nagarajan, Phys. Fluids **10**, 853 (1967).
9. S. Vainshtein and L. Kichatinov, J. Fluid Mech. **168**, 73 (1986).
10. F. Cattaneo and S. I. Vainshtein, Astrophys. J. **376**, L21 (1991).
11. A. V. Gruzinov and P. H. Diamond, Phys. Rev. Lett. **72**, 1651 (1994).
12. A. Bhattacharjee and Y. Yuan, Astrophys. J. **449**, 739 (1995).
13. A. Brandenburg and K. J. Donner, MNRAS **288**(2), L29 (1997).
14. D. Sokoloff, A. Shukurov, and A. Ruzmaikin, Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. **25**, 293 (1983).
15. О. Артамонова, Д. Соколов, Вестник МГУ **27**, 8 (1986).
16. D. Sokoloff, E. Yushkov, and A. Lukin, GAFD **57**, 844 (2017).
17. В. Г. Новиков, А. А. Рузмайкин, Д. Д. Соколов, ЖЭТФ **85**, 909 (1983).
18. E. Yushkov, GAFD **109**, 450 (2015).
19. E. Yushkov, A. Lukin, D. Sokoloff, and P. Frick, GAFD **113**, 184 (2018).
20. Е. В. Юшков, А. С. Лукин, Д. Д. Соколов, ЖЭТФ **155**, 1123 (2019).

21. D. Sokoloff and N. Yokoi, *J. Plasma Phys.* **84**, 7 (2018).
22. A. Brandenburg, S. H. Saar, and C. R. Turpin, *Astrophys. J. Lett.* **498**, 51 (1998).
23. E. V. Yushkov and D. D. Sokoloff, *Izvestiya, Phys. Sol. Earth* **54**, 652 (2018).
24. F. Plunian, R. Stepanov, and P. Frick, *Phys. Rep.* **523**, 1 (2013).
25. R. Beck, A. Brandenburg, D. Moss, A. Shukurov, and D. Sokoloff, *ARAA* **34**, 155 (1996).
26. D. Sokoloff, A. Khlystova, and V. Abramenko, *MNRAS* **451**, 6040 (2015).
27. Я. Б. Зельдович, С. А. Молчанов, А. А. Рузмайкин, Д. Д. Соколов, *УФН* **152**, 3 (1987).