

КАПИЛЛЯРНО-ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ В ОБЛАСТИ ПЕРЕХОДОВ В ЛЕНГМЮРОВСКИХ МОНОСЛОЯХ

*В. Г. Каменский**

*Институт физических проблем им. П. Л. Капицы Российской академии наук
119334, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 27 сентября 2019 г.,
после переработки 27 сентября 2019 г.
Принята к публикации 30 сентября 2019 г.

На примере конкретных экспериментальных данных рассмотрено поведение капиллярно-гравитационных волн в областях резкого изменения поверхностного натяжения (фазовых переходах в пленках). Классическая теория поверхностных волн применена к системам с модельной зависимостью поверхностного натяжения от концентрации поверхностно-активных веществ. Показано, что в областях резкого изменения поверхностного натяжения сдвиг частоты остается малым при всех реализуемых в экспериментах длинах волн и величинах поверхностного натяжения. В то же время в этих областях возникает заметное увеличение затухания по сравнению со случаем постоянных величин поверхностного натяжения, что может служить средством экспериментального обнаружения таких переходов.

DOI: 10.31857/S0044451020030177

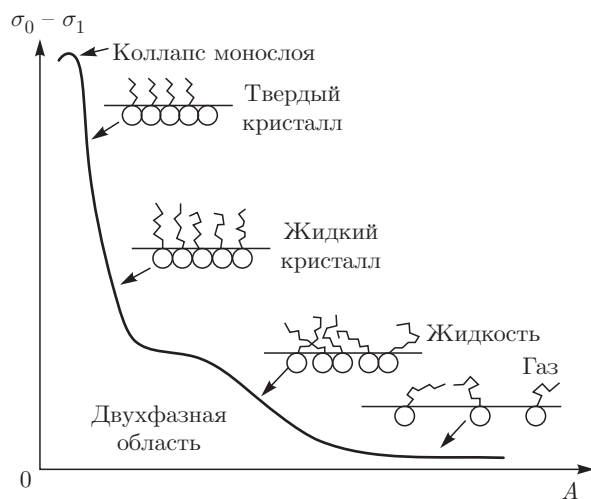
1. ВВЕДЕНИЕ

В последние десятилетия наблюдается значительный рост исследований так называемых ленгмюровских пленок. Этот интерес вызван как необычными фундаментальными свойствами этих объектов, так и все возрастающими возможностями их применения в технике, биологии и медицине. Еще Ленгмюр обнаружил существование различных фазовых состояний монослоя на поверхности воды. С тех пор было выполнено большое количество исследований, посвященных изучению различных свойств ленгмюровских пленок (см. обзоры [1–3]). Согласно устоявшимся взглядам, последовательность фазовых переходов в пленке на поверхности жидкости выглядит следующим образом. При небольшой концентрации амфифильного соединения на поверхности жидкости мономолекулярный слой практически представляет собой двумерный газ (молекулы практически не взаимодействуют друг с другом, их хвосты над поверхностью воды ориентированы произвольно). С ростом концентрации молекулы сближаются, оставаясь хаотически ориентированными, и такую фазу можно назвать двумерной жидкостью.

С дальнейшим ростом концентрации молекулы приобретают ориентационную упорядоченность, сохраняя возможность перемещений в плоскости слоя. При этом дальнего позиционного порядка не существует, и новая фаза является двумерным жидким кристаллом. При дальнейшем увеличении концентрации происходит переход в кристаллическое состояние (монослой становится похожим на тонкую пластинку толщиной в одну молекулу), а далее к «сминанию» монослоя или коллапсу. Поведение монослоя амфифильных молекул обычно изучается с помощью ленгмюровской ванны, основными элементами которой являются плавучий барьер, изменяющий площадь водной поверхности, занятую веществом, и весы для определения поверхностного давления. Поверхностное давление π , т.е. сила, нормированная на единицу длины барьера, равно разности поверхностных натяжений жидкой субфазы и субфазы с поверхностной пленкой: $\pi = \sigma_0 - \sigma_1$, где σ_0 — поверхностное натяжение чистой субфазы, а σ_1 — субфазы с поверхностной пленкой.

В таких экспериментах кроме весов Ленгмюра используются также и весы Вильгельми, непосредственно измеряющие поверхностное натяжение. Эти эксперименты относятся к методам прямого измерения коэффициента поверхностного натяжения. Хотя коэффициент поверхностного натяжения изме-

* E-mail: kamenski@kapitza.ras.ru

Рис. 1. Типичная π - A -изотерма

рен для многих чистых веществ и смесей (растворов, расплавов) в широком интервале температур и составов, следует учитывать, что он весьма чувствителен к наличию примесей. Измерения не всегда дают совпадающие результаты.

Зная полное число амфифильных молекул и значения площади монослоя при движении барьера, можно построить π - A -изотерму, где A — площадь, приходящаяся на одну молекулу, или, как говорят, ее посадочная площадка. Такая изотерма содержит информацию как об универсальных свойствах монослоя, так и о специфике поведения сложной амфифильной молекулы при изменении поверхностного давления (ее переориентации, конформационных перестройках и т. д.). Типичная π - A -изотерма приведена на рис. 1 [2]. Как видно, последовательность переходов представляется на π - A -изотерме в виде ряда «ступеней» различной высоты и размера. В реальных пленках наблюдаются как крутые ступени, соответствующие резкому переходу из одной фазы в другую, так и более пологие, соответствующие возникновению двухфазной области. Высоты ступеней также различны. Теории фазовых переходов в ленгмюровских пленках посвящено значительное количество работ, однако, ввиду сложности проблемы из-за большого количества различных взаимодействий, она еще далека от количественного решения.

В данной работе будут рассмотрены несколько достаточно хорошо изученных экспериментально веществ, образующих ленгмюровские пленки. Так, для миристиновой кислоты при температуре $T = 14^\circ\text{C}$ ступень одна с $\pi \sim 15$ дн/см [4] и довольно размытая. Она связана с переходом газообразной фазы в изотропно-жидкую, в которой взаи-

модействие молекул уже достаточно сильное, но гидрофобные хвосты свободны и имеют произвольную конфигурацию (ориентационная упорядоченность отсутствует), а затем в жидкокристаллическую фазу, где хвосты уже практически ориентированы по нормали к поверхности. Далее π - A -изотерма выходит на плато, где сосуществуют жидкокристаллическая и твердая двумерные фазы. Для арахиновой кислоты ступень тоже одна, но довольно крутая и ее высота около 60 дн/см. Она соответствует переходу из газа в жидкость и затем переходу из жидкости в твердое тело. Похожая изотерма наблюдается для стеариновой кислоты в растворе хлорида марганца $\sigma_0 - \sigma_1 \sim 40$ дн/см [5]. Эти переходы являются сильными переходами первого рода, и поэтому флуктуациями параметра порядка в окрестностях этих переходов можно пренебречь. Для азокрасителя имеются три ярко выраженные ступени с разностью высот 5, 20 и 10 дн/см [2]. Первая соответствует переходу газ-жидкость, вторая отражает конформационную перестройку молекулы при увеличении поверхностного давления, а третья соответствует переходу жидкость-твердое тело. Вообще, размеры плато (как функции концентрации) также весьма различны. Существуют молекулы, сильно изменяющие свою конформацию с изменением поверхностного давления. Так происходит, например, с биполярными молекулами, имеющими на концах две полярные головки, соединенные гидрофобной углеводородной цепочкой. В этом случае на π - A -изотерме появляется широкое плато, соответствующее сильному изменению площади, приходящейся на одну молекулу [6]. Столь же явно выраженные плато наблюдаются и на достаточно громоздких молекулах амфифильных красителей и особенно для полимерных молекул [7,8]. Существует и ряд других методов исследования свойств монослоя, например, по фазовой скорости капиллярных волн и рассеянию света поверхностными капиллярными волнами [9], измерению комплексного модуля сдвига [10,11].

Как было сказано выше, о структурных перестройках монослоя можно судить по особенностям π - A -изотерм, однако эти методы бывают недостаточно чувствительны к структуре монослоя, поэтому они дополняются в настоящее время атомно-силовой и электронной микроскопией. Имеются эксперименты, в которых совмещаются ленгмюровская ванна и рентгеновский дифрактометр, благодаря чему структуру монослоев можно исследовать непосредственно в процессе их формирования на водной поверхности. Развиваются методики, основанные на

сочетании рентгеновского эксперимента в условиях дифракции или полного внешнего отражения рентгеновских лучей с регистрацией вторичного характеристического излучения (например, флуоресценции). Например, важность учета капиллярных волн была отмечена при изучении наблюдаемых структур на поверхности жидкости методом рентгеновской рефлектометрии [12]. Имеются структурные исследования с помощью синхротронных источников излучения.

2. ТЕОРИЯ И МОДЕЛЬНЫЙ РАСЧЕТ

В данной работе будут изучены свойства капиллярных волн в области переходов между различными фазами монослоя (т.е. области заметного изменения коэффициента поверхностного натяжения при изменении концентрации). Эти результаты могут быть полезными не только для непосредственных измерений коэффициента поверхностного натяжения с помощью капиллярных волн, но и в ряде других случаев, когда имеется пространственная неоднородность в распределении концентрации по поверхности. Так, например, в работе [13] при изучении дифракции рентгеновских лучей на криволинейной поверхности использовалась вращающаяся ванна. Можно представить, что в этом случае изменение концентрации от первоначальной, благодаря увеличению площади поверхности мениска, существенно скажется на поведении капиллярных волн и, следовательно, на результатах экспериментов. Кроме того, неоднородность концентрации может возникать и за счет центробежных сил.

Общий подход к решению гидродинамических уравнений для капиллярных волн описан в работе [14] и (несколько подробнее) в работе [15]. Обобщение таких решений на плоский случай и учет нелинейных членов в вихревой составляющей скорости волны, а также некоторые аналитические оценки получающихся формул в предельных случаях приведены в работе [16]. В работе [17] для случая слабой нелинейности были рассмотрены характерные особенности образования капиллярно-гравитационных волн при их возбуждении. Однако в работах [16, 17] не рассматривались конкретные величины коэффициента поверхностного натяжения. Представляется, что изучение конкретных экспериментальных случаев может привести к определенным обобщениям для похожих систем.

В дальнейшем будут рассматриваться двумерные волны малой амплитуды на поверхности жидко-

сти, т.е. все величины будут зависеть лишь от двух координат x и z , где z — перпендикулярна поверхности, а по координате y движение будет однородным. При условии, что длина волны $\lambda = 2\pi/k$ значительно меньше капиллярной постоянной $a = \sqrt{\sigma/g\rho}$ при $k \gg 1 \text{ см}^{-1}$ для рассматриваемых нами σ , гравитационные волны можно не учитывать. Задача сводится к решению двух уравнений Навье – Стокса, уравнению непрерывности и уравнения сохранения поверхностно-активного вещества:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + g, \quad (2)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \frac{\partial(\Gamma v_x)}{\partial x} = 0. \quad (4)$$

На поверхности жидкости должны быть выполнены граничные условия

$$-p + 2\rho\nu \frac{\partial v_z}{\partial z} = \sigma(\Gamma) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (5)$$

(ξ — вертикальное смещение поверхности) и

$$\rho\nu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) = \frac{\partial \sigma}{\partial \Gamma} \frac{\partial \Gamma}{\partial x}. \quad (6)$$

Здесь и в дальнейшем за переменную (в отличие от π -А-изотерм) выбрана концентрация молекул пленки Γ , что представляется более наглядным. Решения уравнений (1)–(4), пропорциональные $\exp(ikx + \omega t)$, хорошо известны [12]. Подставляя их в граничные условия (5), (6), получим следующие два уравнения:

$$A(\alpha^2 + m\alpha + 1) + iC \left(m\alpha \frac{l}{k} + 1 \right) = 0, \quad (7)$$

$$iA(p + m\alpha) - C \left(\alpha^2 + m\alpha + p \frac{l}{p} \right) = 0. \quad (8)$$

Здесь A и C — константы, $\alpha = \omega/\omega_0$, $p = \varepsilon/\sigma$, $\varepsilon = (\partial\sigma/\partial\Gamma)\Gamma$, $\omega_0 = \sqrt{\sigma k^3/\rho}$, $l = \sqrt{k^2 + \omega/\nu}$. Входящий в уравнения параметр $m = 2\nu k^2/\omega$, где ω — характерная частота, удовлетворяет условию $m \ll 1$ при вязкости $\nu = 0.01 \text{ см}^2/\text{с}$, соответствующей вязкости воды, и $k \ll 10^3 \text{ см}^{-1}$. В дальнейшем будем считать, что это условие выполнено. Вводя $\omega = i\omega_0 + \beta_1 + \beta_2$, где $\beta_{1,2} \ll \omega_0$, после несложных, но довольно громоздких вычислений, получим

$$\beta_1 = \omega_0 \Pi_1, \quad (9)$$

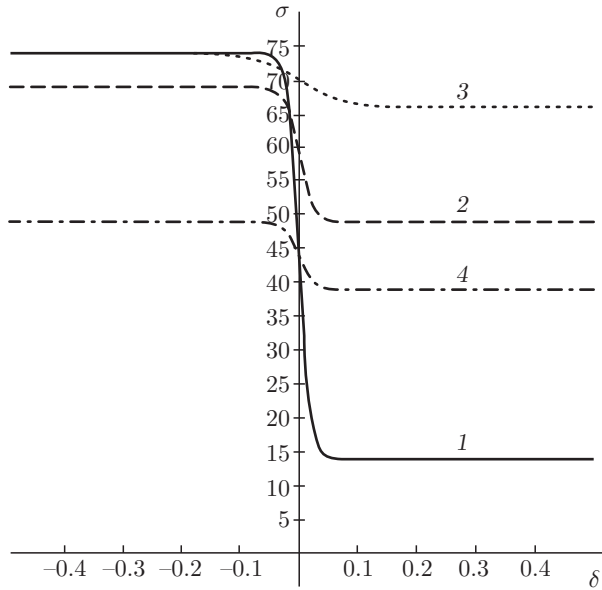


Рис. 2. Модельный вид σ для переходов арахидиновой кислоты (1), миристиновой кислоты (2), азокрасителя (3,4)

где

$$\Pi_1 = -\frac{p^2 m^{-0.5} + 2pm^{0.5} - 2pm - p + m^{1.5}}{4(p^2 m^{-1} - pm^{-0.5} + 2pm^{0.5} + 0.5)},$$

$$\beta_2 = (-2\nu k^2)\Pi_2, \quad (10)$$

где

$$\Pi_2 = \frac{p^2 m^{-0.5} - 2p^2 m^{0.5} - 2pm^{0.5} + 3pm + 2m}{4m(p^2 m^{-1} - pm^{-0.5} + 2pm^{0.5} + 0.5)}.$$

Здесь сохранены члены следующего порядка малости для большей точности расчета в случае не слишком малых m .

В принципе, знание величины σ и ее производной в зависимости от концентрации в каждой точке позволяют описать все характерные особенности формул (9), (10). Однако отсутствие точных данных и трудоемкость такой работы вынуждают обратиться к модельным расчетам. Представим σ в виде

$$\sigma = \frac{\sigma_0 + \sigma_1}{2} - \frac{\sigma_0 - \sigma_1}{2} \text{th}(B\delta),$$

$$\delta = \frac{\Gamma - \Gamma_0}{\Gamma_0}.$$

Точка Γ_0 соответствует середине ступеньки (при этом $\delta = 0$), нулевой концентрации соответствует $\delta = -1$. Подгоночный параметр B позволяет менять крутизну ступени и строить зависимости σ от концентрации, похожие на получаемые в эксперименте.

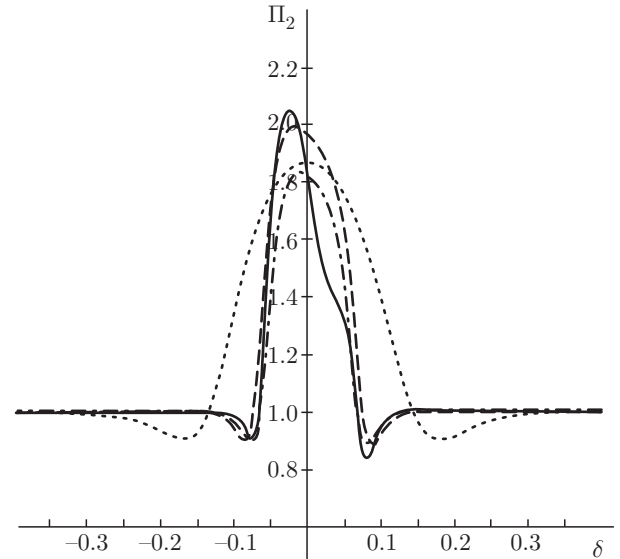


Рис. 3. Зависимости коэффициента Π_2 от δ . Сплошная линия — арахидиновая кислота, пунктир — миристиновая кислота, штриховая и штрихпунктир — азокраситель

На рис. 2 представлен модельный вид σ для переходов из газовой фазы ($\sigma = 74$) в жидкую ($\sigma \sim 14$) арахидиновой кислоты, для перехода из газовой фазы ($\sigma = 74$) в жидкую фазу ($\sigma \sim 66$) миристиновой кислоты, из жидкой ($\sigma \sim 69$) в жидкокристаллическую ($\sigma \sim 49$) и из жидкокристаллической в твердую фазу ($\sigma \sim 39$) для азокрасителя.

При предложенном определении σ имеем

$$m = \frac{2^{3/2} \nu k^{1/2} \rho^{1/2}}{(\sigma_0 - \sigma_1)^{0.5} \sqrt{\frac{\sigma_1 + \sigma_0}{\sigma_0 - \sigma_1} - \text{th}(B\delta)}}, \quad (11)$$

$$p = -\frac{B(1 + \delta)}{\text{ch}^2 \delta \left[\frac{\sigma_1 + \sigma_0}{\sigma_0 - \sigma_1} - \text{th}(B\delta) \right]}. \quad (12)$$

Подставляя в (11) $\nu = 0.01 \text{ см}^2/\text{с}$, $k = 36 \text{ см}^{-1}$, упомянутые выше σ , получим, что во всех случаях величина m изменяется в пределах $(1-3) \cdot 10^{-2}$, т.е. условие ее малости выполняется.

Подставляя (11) и (12) в (9), мы получим, что поправка β_1 , соответствующая сдвигу частоты ω_0 , во всей области изменения σ мала, а ее величина составляет порядка $(3-4) \cdot 10^{-2} \omega_0$. Это означает, что эксперименты по определению σ посредством измерения фазовой скорости капиллярных волн корректны во всех случаях, а величина σ полностью определяется выражением $\sigma = \rho c^2/k$, где c — фазовая скорость.

На рис. 3 представлены зависимости затухания для тех же случаев. Видно, что для всех случаев

затухание в области переходов не слишком отличается от классического затухания в областях постоянного σ (на графиках равного единице), а по величине практически одинаково для всех случаев. Этот факт связан с тем, что ввиду малости параметра m главную роль играют первые члены числителей и знаменателя выражений (9) и (10). Остальные же члены начинают играть роль при малых значениях величины p и определяют ширину и форму кривых вдали от их центра. Несимметричность кривых связана с изменением σ и тем больше, чем больше разность их значений при переходе. Ширина пиков зависит от «крутизны» ступеньки и уменьшается с ее увеличением.

С увеличением k (уменьшением длины волны) величина затухания уменьшается, что связано с увеличением параметра $m \propto k^{0.5}$. Кроме того, наблюдается отклонение от пропорциональной зависимости величины затухания от $k^{0.5}$, что означает, что в выражении для Π_2 начинают играть роль и остальные члены.

Рассмотрим случай более длинных волн. При этом в выражении для ω_0 уже необходимо учитывать гравитационный вклад, в результате чего оно принимает вид

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\sigma k^3}{\rho} + gk}. \tag{13}$$

Поскольку рассматриваемые k будут значительно меньше, чем в рассмотренных ранее случаях, а в подкоренном выражении для ω_0 появляется дополнительный член gk , параметр m уменьшается, в выражениях для Π_1 и Π_2 возрастает роль первых членов в числителях и знаменателе. В результате сдвиг частоты, заданной выражением (13), становится более малым по сравнению с чисто капиллярным случаем.

На рис. 4 показано затухание в области перехода для миристиновой и арахиновой кислот в зависимости от длины волны для чисто капиллярного случая ($\lambda = 0.175$ см) и капиллярно-гравитационных волн ($\lambda = 1.5$ см и $\lambda = 6.3$ см). На рисунке видно, что величина Π_2 (т.е. отношение затухания в области перехода к затуханию в области постоянного σ), заметно возрастает с увеличением длины волны, а форма линии становится более гладкой, что связано с уменьшением вклада от капиллярной части в выражении (13). Что касается самой величины затухания, получающейся умножением Π_2 на m , то оно, естественно, уменьшается и уже для $\lambda = 6.3$ см практически становится равным естественному затуханию.

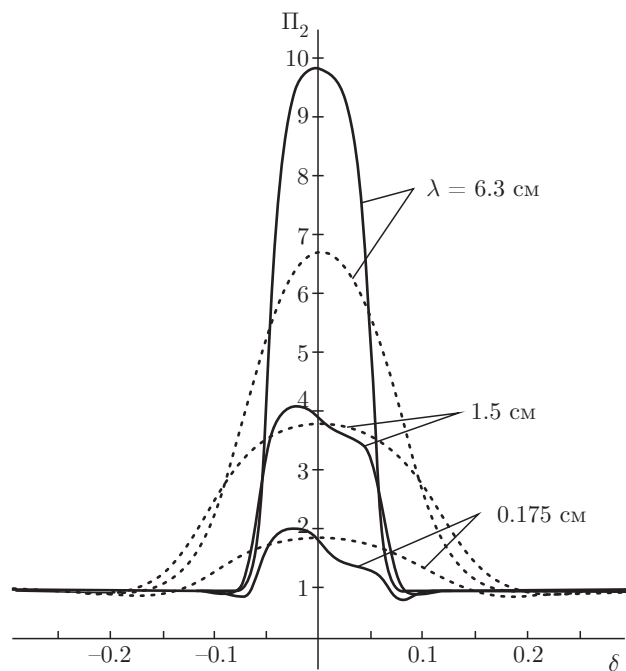


Рис. 4. Коэффициенты Π_2 для миристиновой (пунктир) и арахиновой (сплошная линия) кислот для различных длин волн

Вернемся еще раз к обсуждению применимости выражений (9), (10). Как уже отмечалось ранее, они были получены при условии $m = 2\nu k^2/\omega \ll 1$, поэтому главную роль играли первые члены числителей и знаменателя выражений (9) и (10). Так, параметр m для всех изученных образцов был пропорционален 10^{-2} , а максимальные значения параметра p составляли около 0.8 для миристиновой кислоты и величины порядка нескольких единиц и более для остальных случаев. Однако можно представить ситуацию, когда имеется ступень с меньшим наклоном и малой разностью σ , что заметно уменьшит параметр p . На увеличение параметра m , как было сказано ранее, будет влиять переход к более коротким волнам и большая вязкость субфазы. Для сравнения снова введем $\omega = \omega_0 + i\beta_1 + \beta_2$, однако в уравнениях (7), (8) оставим квадратичные поправки по β_1 и β_2 . В этом случае мы получаем следующие уравнения:

$$(\eta_1^2 - \eta_2^2)(4m + t) + 2\eta_1\eta_2(t - 5) - 2\eta_1 \times \\ \times (1 - t - pm^{0.5} + m^{1.5}) + 2\eta_2(t - pm^{0.5}) - 2m = 0, \tag{14}$$

$$(\eta_1^2 - \eta_2^2)(5 - t) + 2\eta_1\eta_2(4m + t) - 2\eta_1(t - pm^{0.5}) + \\ + 2\eta_2(1 - t - pm^{0.5} + m^{1.5}) + p = 0, \tag{15}$$

где $\eta_1 = \beta_1/\omega_0$, $\eta_2 = \beta_2/\omega_0$, а $t = pm^{-0.5}$. Следующими степенями η можно пренебречь ввиду малости их величин и коэффициентах при них порядка единицы.

Выяснилось, что при двукратном изменении «крутизны» ступеней величина сдвига частоты и величина затухания, определяемые в обоих случаях, практически не изменяются. При возрастании величины $\gamma k^{0.5}$ в два–три раза, величины сдвига и затухания, определяемые решениями уравнений (14), (15), превышают значения, определяемые формулами (9), (10) на 15–20 процентов.

Естественно, при решении уравнений (14), (15) появляются два новых корня. Как показывают вычисления, они соответствуют новым модам, сдвинутым по частоте в большую сторону, однако величина их затухания более чем на порядок превышает затухание рассмотренных ранее мод. Таким образом, следует заключить, что полученные нами результаты (по крайней мере качественно) применимы и к более широкой области по параметру $2\nu k^2/\omega$.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное рассмотрение показывает, что в областях резкого изменения поверхностного натяжения (фазовых переходах в пленках) сдвиг частоты капиллярно-гравитационных волн остается малым при всех реализуемых в экспериментах длинах волн и величинах σ . Поэтому с хорошей точностью для определения частоты можно пользоваться выражением (13). В то же время в этих областях возникает заметное увеличение затухания по сравнению со случаем постоянных величин поверхностного натяжения. Этот факт может служить средством обнаружения переходов при исследовании ленгмюровских пленок методами капиллярных волн. Мы не ставили себе целью детальное рассмотрение природы переходов, считая, что все изменения σ связаны лишь с модой капиллярно-гравитационных волн. В действительности, как показано в работе [18], в ленгмюровских пленках могут существовать и другие моды, обусловленные анизотропией расположения гидрофобных хвостов молекул, симметрией образующихся структур, температурными флуктуациями и т. д. Однако в тех случаях, когда флуктуации существенны, они приводят к длинноволновым поправкам к поглощению поверхностных волн. Если из-за возникающего при переходе параметра порядка возникают новые степени свободы и, как следствие, новые поверхностные моды, то они тоже, скорее всего, будут длинноволновыми. Поскольку дисперсионные соотношения для таких мод заметно отличаются от случая капиллярно-гравитационных волн, мы считаем, что в экспериментах их можно отличить от нашего случая.

В данной работе рассмотрен случай пространственно-однородного распределения концентрации Γ и, следовательно, σ при различных значениях Γ . Представляет большой интерес рассмотрение задачи о распространении капиллярных волн в случае пространственно-неоднородного распределения концентрации Γ при наличии в этой области фазового перехода, что несомненно приведет к интересным особенностям их распространения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Блинов, УФН **155**, 443 (1988).
2. С. И. Валянский, Е. К. Наими, *Наноматериалы: Ленгмюровские пленки*, Изд. Дом МИСиС, Москва (2014).
3. D. Langevin, Ann. Rev. Fluid Mech. **46**, 47 (2014).
4. N. K. Adam and G. Jessop, Proc. Roy. Soc., ser. V **112**, 364 (1926).
5. И. Е. Савон, Дипломная работа, Физический факультет МГУ (2010).
6. V. Vogel and D. Möbius, Thin Sol. Films **132**, 205 (1985).
7. J. Heeseman, J. Amer. Chem. Soc. **102**, 2167 (1980).
8. T. Kawaguchi, H. Nakahara, and K. Fukuda, Thin Sol. Films **133**, 29 (1985).
9. R. C. Brown, Proc. Roy. Soc. **48**, 312 (1936).
10. B. M. Abraham, K. Miyano, S. Q. Xu, and J. B. Ketterson, Phys. Rev. Lett. **49**, 1643 (1982).
11. B. M. Abraham, K. Miyano, S. Q. Xu, and J. B. Ketterson, Phys. Rev. Lett. **51**, 1975 (1982).
12. А. М. Тихонов, В. Е. Асадчиков, Ю. О. Волков, Б. С. Рощин, Ю. А. Ермаков, ЖЭТФ **152**, 1233 (2017) [Sov. Phys. JETP **125**, 1051 (2017)].
13. L. I. Goray, V. E. Asadchikov, B. S. Roshchin, Yu. O. Volkov, and A. M. Tikhonov, Resource-Efficient Technologies **1**, 47 (2018).
14. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, т. VI, Наука, Москва (1986).
15. В. Г. Левич, *Физико-химическая гидродинамика*, Физматгиз, Москва (1959).
16. V. M. Parfenyev and S. S. Vergeles, Phys. Rev. Fluids **3**, 064702-1 (2018).
17. E. Tobisch, ЖЭТФ **146**, 405 (2014) [Sov. Phys. JETP **119**, 359 (2014)].
18. Е. И. Кац, В. В. Лебедев, ЖЭТФ **94**, вып. 5, 134 (1988) [Sov. Phys. JETP **67**, 940 (1988)].