

# ТОНКАЯ СТРУКТУРА СПЕКТРА КРОССИНГ-РЕЗОНАНСА ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

*В. А. Игнатченко\**, *Д. С. Полухин\*\**

*Институт физики им. Л. В. Киренского,  
ФИЦ КНЦ Сибирского отделения Российской академии наук  
660036, Красноярск, Россия*

Поступила в редакцию 30 июня 2019 г.,  
после переработки 9 августа 2019 г.  
Принята к публикации 15 августа 2019 г.

Исследован кроссинг-резонанс двух волновых полей различной природы,  $m(x, t)$  и  $u(x, t)$ , в неоднородной среде с нулевым средним значением параметра связи  $\eta$  между полями. Рассмотрены этапы формирования тонкой структуры спектра кроссинг-резонанса. В модели независимых кристаллитов показано, что снятие вырождения собственных частот этих полей в точке кроссинг-резонанса является пороговым по величине параметра связи эффектом и происходит, если  $\eta > \eta_c$ , где  $\eta_c = |\Gamma_u - \Gamma_m|/2$ ,  $\Gamma_u$  и  $\Gamma_m$  — параметры релаксации соответствующих волновых полей. При  $\eta > \eta_c$  каждая случайная реализация функций Грина  $\tilde{G}_{mm}''$  и  $\tilde{G}_{uu}''$  волновых полей имеет стандартную для кроссинг-резонансов форму двух резонансных пиков с одинаковой полушириной  $(\Gamma_u + \Gamma_m)/2$  и интервалом  $2\eta$  между ними. При  $\eta < \eta_c$  функции  $\tilde{G}_{mm}''$  и  $\tilde{G}_{uu}''$  различны: если  $\Gamma_u > \Gamma_m$ , то  $\tilde{G}_{mm}''$  представляет собой узкий пик резонанса при  $\omega = \omega_r$ , а  $\tilde{G}_{uu}''$  — более широкий резонансный пик, расщепленный на вершине узким антирезонансом. Усреднение по областям  $\eta > \eta_c$  приводит к формированию широкого резонанса с полушириной резонансной линии порядка  $\langle \eta^2 \rangle^{1/2}$  на обеих усредненных функциях Грина, обусловленного стохастическим распределением резонансных частот. Усреднение по областям с  $\eta < \eta_c$  приводит к обострению пика резонанса на функции  $G_{mm}''$  и пика антирезонанса на функции  $G_{uu}''$  на одной и той же частоте  $\omega = \omega_r$ . В результате формируется картина кроссинг-резонанса в неоднородной среде: одинаковые широкие пики на обеих функциях с узким пиком резонанса тонкой структуры на функции  $G_{mm}''$  и антирезонанса на функции  $G_{uu}''$ . Таким образом, тонкая структура спектра любого кроссинг-резонанса двух волновых полей различной природы в неоднородной среде обязана своим происхождением вкладом случайных реализаций, соответствующих вырожденным состояниям частот собственных колебаний системы. В ферромагнетике с пространственной неоднородностью параметра связи, возникают затухания спиновых и упругих волн,  $\Gamma_m(k) \propto k_c v_m$  и  $\Gamma_u(k) \propto k_c v_u$ , пропорциональные корреляционному волновому числу  $k_c$  неоднородностей и скоростям соответствующих волн, которые суммируются с однородными затуханиями  $\Gamma_m$  и  $\Gamma_u$  тех же волн. Эта ситуация рассмотрена в рамках нового самосогласованного приближения для случая, когда вклад однородных затуханий пренебрежимо мал. Показано, что вид тонкой структуры на функциях  $G_{mm}''$  и  $G_{uu}''$  в точке второго (высокочастотного) пересечения дисперсионных кривых спиновых и упругих волн меняется на противоположный: узкие пики резонанса тонкой структуры возникают на функции  $G_{uu}''$  и антирезонанса — на функции  $G_{mm}''$ , так как  $v_m < v_u$  в точке первого, и  $v_m > v_u$  в точке второго пересечения.

DOI: 10.31857/S0044451020030049

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Магнитоупругий (магнитоакустический) резонанс, представляющий собой один из видов крос-

синг-резонанса двух взаимодействующих волновых полей различной физической природы, в однородной среде исследован [1–9] как теоретически, так и экспериментально. В области кроссинг-резонанса, происходящего при пересечении дисперсионных кривых двух взаимодействующих волновых полей, снимается вырождение собственных частот системы, энергетические уровни раздвигаются и появляются два резонансных пика на частотных

\* E-mail: vignatch@iph.krasn.ru

\*\* E-mail: polukhin@iph.krasn.ru

зависимостях мнимых частей функций Грина, расстояние между которыми определяется параметром связи  $\varepsilon$  между волновыми полями. Первоначальные исследования кроссинг-резонанса в среде с неоднородным параметром связи  $\varepsilon(\mathbf{x})$ , где  $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$  [10–13], проведенные в рамках приближения Бурре [14] (однократное рассеяние волн на неоднородностях параметра связи), предсказали существование стимулированного беспорядком кроссинг-резонанса в среде с нулевым средним значением параметра связи. Однако адекватное описание свойств этого явления в этом приближении было невозможно; для этого необходим был учет многократного рассеяния волн на неоднородностях параметра связи.

В работах [15–18] для учета многократного рассеяния мы использовали самосогласованное приближение (self consistent approximation, SCA) [19–22], которое широко применяется для приближенного вычисления функций Грина. В различных областях физики это приближение именуется по-разному (приближение Мигдала, Крейчана, SCA Борна), поэтому в этих и последующих работах мы использовали сначала термин приближение непересекающихся корреляций, а затем — стандартное SCA. В стандартном SCA фигурируют диаграммы только с непересекающимися линиями корреляций/взаимодействий, так как при выводе его учитывается лишь первый член разложения вершинной функции в ряд (т. е. полагается, что вершинная функция равна единице).

Стандартное SCA было обобщено на случай двух взаимодействующих волновых полей разной физической природы со стохастически неоднородным параметром связи между этими полями, среднее значение которого равно нулю. В рамках развитого метода исследован обусловленный беспорядком кроссинг-резонанс, возникающий на пересечении дисперсионных кривых спиновых и упругих волн. Учет процессов многократного рассеяния волн на неоднородностях привел к результатам, существенно отличным от тех, которые были получены для такой ситуации ранее [10–13] в приближении Бурре. Вместо снятия вырождения частот в спектре волн и раздвоения резонансных пиков динамических восприимчивостей, в точке пересечения невозмущенных дисперсионных законов на каждой из мнимых частей функций Грина спиновых  $G_m''$  и упругих  $G_u''$  волн должен наблюдаться широкий одномодовый пик, на вершине которого возникает тонкая структура в виде узких пиков резонанса и антирезонанса на мнимых частях функций Грина соответственно  $G_m''$  и  $G_u''$ . Показано, что при малых зна-

чениях корреляционного волнового числа  $k_c$  ( $k_c = r_c^{-1}$ , где  $r_c$  — радиус корреляций неоднородностей параметра связи  $\varepsilon(\mathbf{x})$ ), ширины широких пиков определяются величиной среднеквадратичной флуктуации параметра связи  $\Delta\varepsilon$ , а ширины узких пиков резонанса и антирезонанса — величиной  $k_c$ . Это позволяет измерять независимо обе эти главные характеристики неоднородностей. С ростом  $k_c$  происходит резкое обменное сужение широкого пика и рост ширин узких пиков резонанса и антирезонанса, что приводит к постепенному исчезновению последних. Была исследована также ситуация, когда и среднеквадратичная флуктуация  $\Delta\varepsilon$  и среднее значение  $\varepsilon$  параметра связи отличны от нуля [17, 18].

Метод стандартного SCA позволил исследовать основные особенности кроссинг-резонанса в неоднородной среде. Вместе с тем проявились и недостатки этого метода. Хорошо известный дефект метода — куполообразная форма резонансных кривых — приводит к целому ряду дефектов при сближении пиков кроссинг-резонансов: появляются изгибы на склонах пиков мнимых частей функций Грина, возникает ложный центральный пик, не связанный с явлением тонкой структуры, и т. д. Эти дефекты в ряде случаев могли поставить под сомнение некоторые выводы наших работ, и нужен был следующий шаг по улучшению используемого приближения. В работах [23–32] развивались различные подходы к учету вершинных поправок к собственной энергии или к функции Грина, но, несмотря на достигнутый значительный прогресс, расхождение между результатами различных подходов остается пока весьма значительным. В работе [33] мы вывели для случая одного волнового поля новое SCA, учитывающее как первый, так и второй члены ряда вершинной функции.

Новое SCA содержит в себе, в качестве предельных случаев, все приближения более низкого уровня: стандартное SCA и приближение Бурре (Борна). В работе [34] нами проведено сравнение нового SCA с различными существующими приближениями, а также с численным моделированием решения волнового уравнения для среды с одномерными неоднородностями. Показано, что новое SCA обладает несомненными преимуществами при исследовании проблем стохастической радиоп физики в средах с длинноволновыми неоднородностями, так как значительно лучше, чем стандартное SCA, описывает форму, ширину и высоту резонансных линий. Развитый математический метод нового SCA был использован в работе [35] для анализа магнитоупругого резонанса в среде с частично или полностью

стохастизованным параметром связи. Метод применим в широком интервале значений корреляционного волнового числа неоднородностей  $k_c$ : от  $k_c = 0$  (бесконечного радиуса корреляций) до значений  $k_c$ , соответствующих классическому пределу.

Основной результат, обусловленный новым методом – значительное улучшение формы резонансных пиков динамической восприимчивости, что привело к исправлению всех дефектов, полученных в работах [15–18]. При этом результаты, описывающие уширение и сближение пиков магнитоупругого резонанса и слияние их в один широкий пик с ростом среднеквадратичной флуктуации  $\Delta\varepsilon$  и уменьшением среднего значения  $\varepsilon$  параметра связи, полученные ранее в рамках стандартного SCA, качественно сохраняются и в новом SCA. Главное, был подтвержден эффект возникновения тонкой структуры спектра в виде узкого резонансного пика на функции Грина спиновых волн и узкого провала (антирезонанса) на функции Грина упругих волн. Этот эффект должен проявляться при взаимодействии любых волновых полей различной физической природы. Гипотеза о происхождении эффекта тонкой структуры обсуждалась в работах [15–18]. Однако точный ответ на этот вопрос не был получен ввиду сложности математического аппарата теории и необходимости использовать численные методы при получении конкретных результатов.

Целью данной работы является объяснение природы возникновения тонкой структуры спектра кроссинг-резонанса. Для этого мы рассматриваем магнитоупругий резонанс в обеих точках пересечения дисперсионных кривых спиновых и упругих волн (разд. 2) и кроссинг-резонанс в модели неоднородной среды с бесконечным радиусом корреляций (разд. 3).

## 2. МАГНИТОУПРУГИЙ РЕЗОНАНС В ОБОИХ ТОЧКАХ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ДИСПЕРСИОННЫХ КРИВЫХ

### 2.1. Система уравнений матричных функций Грина

Как и в работах [15–18], рассмотрим связанную систему двух скалярных уравнений для резонансных циркулярных проекций намагниченности  $m$  и упругих смещений  $u$ , в которых неоднородным является только безразмерный параметр магнитоупругой связи  $\varepsilon(\mathbf{x})$ , где  $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$ :

$$\alpha(\nabla^2 + \nu_m)m - \varepsilon(\mathbf{x})M\frac{\partial u}{\partial z} = -h, \quad (1)$$

$$\mu(\nabla^2 + \nu_u)u + M\frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon(\mathbf{x})m) = -f, \quad (2)$$

где  $\alpha$  – параметр обмена,  $\mu$  – силовая упругая константа,  $M$  – постоянная намагниченности вдоль внешнего постоянного магнитного поля  $\mathbf{H}$  (амплитуда поперечных циркулярных проекций  $m \ll M$ ),  $\mathbf{h}$  – внешнее переменное магнитное поле, перпендикулярное полю  $\mathbf{H}$ ,  $f$  – внешняя объемная сила. Здесь введены обозначения

$$\nu_m = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha g M}, \quad \nu_u = \frac{\omega^2}{v_u^2}, \quad (3)$$

где  $g$  – гиромагнитное отношение,  $\omega$  – частота,  $\omega_0$  – частота однородного ферромагнитного резонанса, которая зависит от магнитного поля  $H$  и размагничивающих факторов образца,  $v_u = \sqrt{\mu/p}$  – скорость упругой волны,  $p$  – плотность среды.

Представим магнитоупругий параметр  $\varepsilon(\mathbf{x})$  в виде

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon + \Delta\varepsilon\rho(\mathbf{x}), \quad (4)$$

где  $\varepsilon$  – среднее значение этого параметра,  $\Delta\varepsilon$  – его среднеквадратичная флуктуация, а  $\rho(\mathbf{x})$  – центрированная ( $\langle\rho(\mathbf{x})\rangle = 0$ ) и нормированная ( $\langle\rho^2(\mathbf{x})\rangle = 1$ ) случайная функция координат. Угловые скобки означают среднее по ансамблю реализаций этой случайной функции.

Стохастические свойства неоднородностей  $\rho(\mathbf{x})$  характеризуются корреляционной функцией  $K$ , зависящей от разности координат  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ ,

$$K(\mathbf{r}) = \langle\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x} + \mathbf{r})\rangle \quad (5)$$

или связанной с ней преобразованием Фурье спектральной плотностью неоднородностей

$$S(\mathbf{k}) = \int K(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}. \quad (6)$$

Подставляя уравнение (4) в систему уравнений (1) и (2), перепишем систему в матричном виде:

$$\left[\hat{L}(\mathbf{x}) - \hat{R}(\mathbf{x})\right] \hat{Z}(\mathbf{x}) = \hat{F}(\mathbf{x}), \quad (7)$$

где

$$\hat{L}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \nabla^2 + \nu_m & -\frac{\varepsilon M}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\varepsilon M}{\alpha} \frac{\partial}{\partial z} & \nabla^2 + \nu_u \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$\hat{R}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\Delta\varepsilon}{\mu} M \rho(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\Delta\varepsilon}{\alpha} M \left( \frac{\partial}{\partial z} \rho(\mathbf{x}) + \rho(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial z} \right) & 0 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$\hat{Z}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \alpha m \\ \mu u \end{bmatrix}, \quad \hat{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -h \\ -f \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Из этой формы записи видно, что нормированными переменными для связанной системы уравнений являются величины  $\alpha m$  и  $\mu u$ . Эту нормировку мы используем и при введении неусредненной матричной функции Грина системы, записав для нее уравнение в виде

$$\left[ \hat{L}(\mathbf{x}) - \hat{R}(\mathbf{x}) \right] \hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \hat{E}. \quad (11)$$

Здесь

$$\hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \tilde{G}_{mm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) & \tilde{G}_{mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \\ \tilde{G}_{um}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) & \tilde{G}_{uu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \end{bmatrix}, \quad (12)$$

где  $\tilde{G}_{mm}$  ( $\tilde{G}_{uu}$ ) и  $\tilde{G}_{mu}$  ( $\tilde{G}_{um}$ ) — спиновые (упругие) функции Грина соответственно при магнитном и упругом точечном возбуждениях,  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$  — дельта-функция,  $\hat{E}$  — единичная матрица:

$$\hat{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Для нахождения усредненной функции Грина  $\hat{G}$  используем новое SCA [33], которое для кроссинг-резонанса имеет вид системы трех связанных матричных уравнений [35]: уравнения Дайсона для усредненной матричной функции Грина  $\hat{G}$ ,

$$\hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \hat{g}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \iint \hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \hat{E}_1(\mathbf{x}') \times \\ \times \hat{\Sigma}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \hat{E}_1(\mathbf{x}'') \hat{g}(\mathbf{x}'', \mathbf{x}_0) d\mathbf{x}' d\mathbf{x}'', \quad (14)$$

уравнения для матричной собственной энергии  $\hat{\Sigma}$ ,

$$\hat{\Sigma}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') = \gamma^2 \iint K(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}'') \hat{\Gamma}(\mathbf{x}', \mathbf{x}_1; \mathbf{x}_2) \times \\ \times \hat{J} \hat{X}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}'') \hat{J} d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \quad (15)$$

и уравнения для матричной вершинной функции  $\hat{\Gamma}$ ,

$$\hat{\Gamma}(\mathbf{x}', \mathbf{x}_1; \mathbf{x}_2) \approx \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_2) \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_1) \hat{E} + \\ + \gamma^2 \iiint K(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_4) \hat{\Gamma}(\mathbf{x}', \mathbf{x}_3; \mathbf{x}_4) \hat{J} \hat{X}(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_5) \times \\ \times \hat{\Gamma}(\mathbf{x}_5, \mathbf{x}_6; \mathbf{x}_2) \hat{J} \hat{X}(\mathbf{x}_6, \mathbf{x}_1) d\mathbf{x}_3 d\mathbf{x}_4 d\mathbf{x}_5 d\mathbf{x}_6, \quad (16)$$

где  $K(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_4)$  — корреляционная функция,

$$\hat{X}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}'') = \hat{E}_1(\mathbf{x}_1) \hat{G}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}'') \hat{E}_1(\mathbf{x}''), \\ \hat{J} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\alpha/\mu} \\ \sqrt{\mu/\alpha} & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

и

$$\gamma = \frac{\Delta\varepsilon}{\sqrt{\alpha\mu}} M, \quad (18)$$

$\hat{g}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$  — функция Грина однородной среды, которая является решением уравнения

$$\hat{L}(\mathbf{x}) \hat{g}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \hat{E}. \quad (19)$$

Проводя преобразование Фурье всех матричных величин

$$\hat{Y}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-d} \int \hat{Y}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k}, \quad (20)$$

$$\hat{Y}_{\mathbf{k}} = \int \hat{Y}(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad (21)$$

где  $d$  — размерность пространства, получаем систему двух связанных самосогласованных уравнений для матричных функций Грина  $\hat{G}$  и вершинной функции  $\hat{\Gamma}$ , которая по своей структуре аналогична системе уравнений нового SCA для одного волнового поля [33]:

$$\hat{G}_{\mathbf{k}} = \frac{\hat{E}}{\hat{g}_{\mathbf{k}}^{-1} - \gamma^2 (2\pi)^{-d} \hat{E}_{\mathbf{k}}^{(1)} \int S_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1} \hat{J} \hat{X}_{\mathbf{k}_1} \hat{\Gamma}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}-\mathbf{k}_1} \hat{J} \hat{E}_{\mathbf{k}}^{(2)} d\mathbf{k}_1}, \quad (22)$$

$$\hat{\Gamma}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}-\mathbf{k}_1} \approx \frac{\hat{E}}{\hat{E} - \gamma^2 (2\pi)^{-d} \int S_{\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2} \hat{\Gamma}_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2} \hat{J} \hat{X}_{\mathbf{k}_2} \hat{J} \hat{X}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2} d\mathbf{k}_2}. \quad (23)$$

Здесь

$$\hat{X}_{\mathbf{k}_1} = \hat{E}_{\mathbf{k}_1}^{(2)} \hat{G}_{\mathbf{k}_1} \hat{E}_{\mathbf{k}_1}^{(1)}, \quad (24)$$

$$\hat{g}_{\mathbf{k}}^{-1} = \begin{bmatrix} \nu_m - k^2 & -i(\varepsilon/\mu)Mk_z \\ i(\varepsilon/\alpha)Mk_z & \nu_u - k^2 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$\hat{g}_{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} g_{mm}(\mathbf{k}) & ig_{mu}(\mathbf{k}) \\ -ig_{um}(\mathbf{k}) & g_{uu}(\mathbf{k}) \end{bmatrix},$$

$$\hat{E}_{\mathbf{k}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -ik_z \end{bmatrix}, \quad \hat{E}_{\mathbf{k}}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ik_z \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Матричную функцию Грина  $\hat{G}_{\mathbf{k}}$  представим аналогично исходной матричной функции Грина  $\hat{g}_{\mathbf{k}}$  в виде

$$\hat{G}_{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} G_{mm}(\mathbf{k}) & iG_{mu}(\mathbf{k}) \\ -iG_{um}(\mathbf{k}) & G_{uu}(\mathbf{k}) \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Компоненты исходной матричной функции Грина  $\hat{g}_{\mathbf{k}}$  имеют вид

$$\begin{aligned} g_{mm}(\mathbf{k}) &= \frac{\nu_u - k^2}{(\nu_m - k^2)(\nu_u - k^2) - \gamma_0^2 k_z^2}, \\ g_{mu}(\mathbf{k}) &= \frac{(\varepsilon/\mu)Mk_z}{(\nu_m - k^2)(\nu_u - k^2) - \gamma_0^2 k_z^2}, \\ g_{um}(\mathbf{k}) &= \frac{(\varepsilon/\alpha)Mk_z}{(\nu_m - k^2)(\nu_u - k^2) - \gamma_0^2 k_z^2}, \\ g_{uu}(\mathbf{k}) &= \frac{\nu_m - k^2}{(\nu_m - k^2)(\nu_u - k^2) - \gamma_0^2 k_z^2}, \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\gamma_0 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\alpha\mu}} M. \quad (29)$$

Амплитуды  $m$  и  $u$  выражаются через усредненные функции Грина следующим образом:

$$m(\mathbf{k}) = -\frac{1}{\alpha} [G_{mm}(\mathbf{k})h(\mathbf{k}) + iG_{mu}(\mathbf{k})f(\mathbf{k})], \quad (30)$$

$$u(\mathbf{k}) = -\frac{1}{\mu} [G_{uu}(\mathbf{k})f(\mathbf{k}) - iG_{um}(\mathbf{k})h(\mathbf{k})]. \quad (31)$$

### 2.2. Исследование элементов матричной функции Грина

В дальнейшем ограничиваемся одномерными неоднородностями параметра связи  $\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon(x)$ . Тогда во всех уравнениях (20)–(31)  $d = 1$  и вектор  $\mathbf{k}$  имеет одну компоненту  $k_x = k$ . Моделируем корреляционные свойства случайной функции  $\rho(x)$  экспоненциальной корреляционной функцией

$$K(r) = \exp(-k_c|x - x'|), \quad S_k = \frac{2k_c}{k_c^2 + k^2}, \quad (32)$$

где  $r = |x - x'|$ ,  $k_c$  — корреляционное волновое число неоднородностей ( $r_c = k_c^{-1}$  — корреляционный радиус неоднородностей).

При исследовании тонкой структуры в обеих точках пересечения дисперсионных кривых спиновых и упругих волн рассмотрим матричную функцию Грина в случае полной стохастизации параметра связи:  $\varepsilon = 0$  и  $\Delta\varepsilon \neq 0$ , когда тонкая структура проявляется наиболее ярко. Тогда система уравнений (22)–(28) упрощается: все недиагональные элементы обращаются в нуль, поскольку  $G_{mu}(k) = G_{um}(k) \propto \varepsilon$ , и исходные функции Грина  $\hat{g}_{\mathbf{k}}$  выражаются в явном виде. Диагональные элементы для численного анализа удобно записать в виде рекуррентных формул соответственно для спиновых и упругих волн:

$$\begin{aligned} G_{mm}^{(n)}(k) &= \left[ g_{mm}^{-1}(k) - \gamma^2 \frac{1}{2\pi} \int k_1^2 S(k-k_1) \times \right. \\ &\quad \left. \times G_{uu}^{(n-1)}(k_1) \Gamma_{mm}^{(m)}(k_1, k-k_1) dk_1 \right]^{-1}, \quad (33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{uu}^{(n)}(k) &= \left[ g_{uu}^{-1}(k) - \gamma^2 k^2 \frac{1}{2\pi} \int S(k-k_1) \times \right. \\ &\quad \left. \times G_{mm}^{(n-1)}(k_1) \Gamma_{uu}^{(m)}(k_1, k-k_1) dk_1 \right]^{-1}, \quad (34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{mm}^{(m)}(k_1, k-k_1) &\approx \left[ 1 - \gamma^2 \frac{1}{2\pi} \times \right. \\ &\quad \left. \times \int (k-k_1+k_2)^2 S(k_1-k_2) \Gamma_{mm}^{(m-1)}(k_2, k_1-k_2) \times \right. \\ &\quad \left. \times G_{mm}^{(n)}(k_2) G_{uu}^{(n)}(k-k_1+k_2) dk_2 \right]^{-1}, \quad (35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{uu}^{(m)}(k_1, k-k_1) &\approx \left[ 1 - \gamma^2 \frac{1}{2\pi} \times \right. \\ &\quad \left. \times \int k_2^2 S(k_1-k_2) \Gamma_{uu}^{(m-1)}(k_2, k_1-k_2) \times \right. \\ &\quad \left. \times G_{uu}^{(n)}(k_2) G_{mm}^{(n)}(k-k_1+k_2) dk_2 \right]^{-1}, \quad (36) \end{aligned}$$

$$g_{mm}(k) = \frac{1}{\nu_m - k^2}, \quad g_{uu}(k) = \frac{1}{\nu_u - k^2}, \quad (37)$$

где верхний индекс « $n$ » соответствует итерационному процессу для функции Грина, а верхний индекс « $m$ » — итерационному процессу для вершинной функции.

Первое приближение уравнений (33)–(36) находим, подставляя  $\Gamma_{mm}^{(0)} = 1$ ,  $\Gamma_{uu}^{(0)} = 1$ ,  $G_{mm}^{(0)} = g_{mm}$ ,  $G_{uu}^{(0)} = g_{uu}$  в подынтегральные выражения

$$G_{mm}^{(1)}(k) = \left[ g_{mm}^{-1}(k) - \frac{\gamma^2}{2\pi} \int k_1^2 S(k-k_1) g_{uu}(k_1) dk_1 \right]^{-1}, \quad (38)$$

$$G_{uu}^{(1)}(k) = \left[ g_{uu}^{-1}(k) - \frac{\gamma^2 k^2}{2\pi} \int S(k-k_1) g_{mm}(k_1) dk_1 \right]^{-1}, \quad (39)$$

$$\Gamma_{mm}^{(1)}(k_1, k-k_1) \approx \left[ 1 - \frac{\gamma^2}{2\pi} \int (k-k_1+k_2)^2 S(k_1-k_2) \times g_{mm}(k_2) g_{uu}(k-k_1+k_2) dk_2 \right]^{-1}, \quad (40)$$

$$\Gamma_{uu}^{(1)}(k_1, k-k_1) \approx \left[ 1 - \frac{\gamma^2}{2\pi} \int k_2^2 S(k_1-k_2) \times g_{uu}(k_2) g_{mm}(k-k_1+k_2) dk_2 \right]^{-1}. \quad (41)$$

После подстановки  $S(k)$  в форме (32) интегрирование можно выполнить с помощью теории вычетов или численно, добавляя мнимую величину к частоте  $i\delta$ , чтобы избежать расходимости в интегралах. При этом должны выполняться неравенства  $\delta \ll v_u k_c$  и  $\delta \ll v_m k_c$ , где  $v_m = 2gM\alpha k$  — скорость спиновых волн, чтобы релаксация волн была обусловлена рассеянием на неоднородностях параметра связи, а не на этой искусственной добавке. Полученные выражения (38)–(41) подставляем в систему (33)–(36) и проводим численное интегрирование. Затем продолжаем процесс итерационных подстановок и численных интегрирований в системе уравнений (33)–(36) до получения сходящегося результата.

Дисперсионные кривые спиновых и упругих волн приведены на рис. 1 при пренебрежении взаимодействием между волновыми полями. Прямой линией показан закон дисперсии для упругих волн,

$$\omega = v_u k, \quad (42)$$

три параболы — законы дисперсии для спиновых волн при различных значениях частоты  $\omega_0$  однородного ферромагнитного резонанса,

$$\omega = \omega_0^{(l)} + \alpha g M k^2. \quad (43)$$

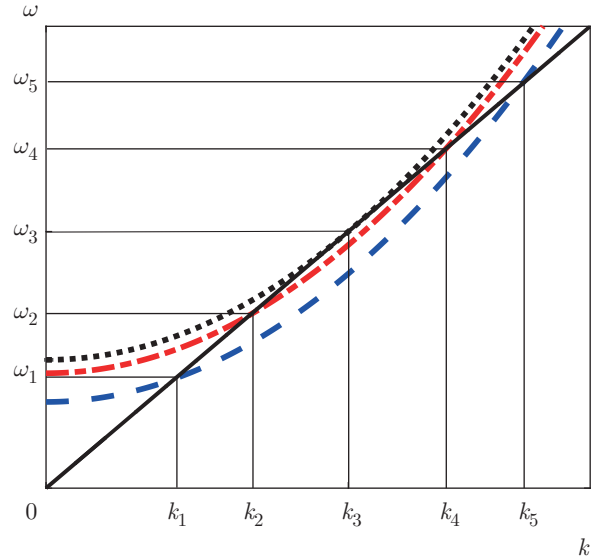


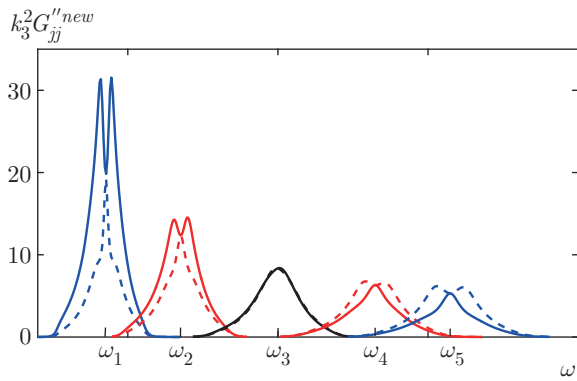
Рис. 1. Законы дисперсии. Прямая линия — закон дисперсии упругих волн, три параболы — законы дисперсии спиновых волн при различных значениях частоты  $\omega_0$  однородного ферромагнитного резонанса. Точки  $\omega_n, k_n$  соответствуют пересечению ( $n = 1, 2, 4, 5$ ) или касанию ( $n = 3$ ) дисперсионных кривых

Здесь  $l = 1, 2, 3$  и  $\omega_0^{(1)} < \omega_0^{(2)} < \omega_0^{(3)}$  соответствуют штриховой синей, штрихпунктирной красной и пунктирной черной кривым. Дисперсионные кривые в точках  $\omega_n$  и  $k_n$  пересекаются ( $n = 1, 2, 4, 5$ ) или касаются ( $n = 3$ ) друг друга.

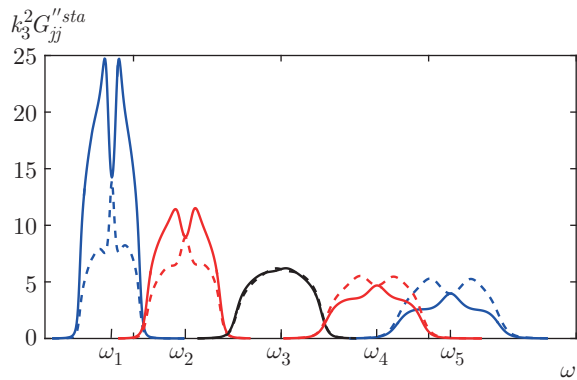
Диагональные компоненты усредненной функции Грина (33) и (34), которые численно рассчитаны, представляем в виде суммы действительной  $G'$  и мнимой  $G''$  частей:

$$G_{jj}(k) = G'_{jj}(k) + iG''_{jj}(k),$$

где  $j$  принимает значения  $m$  или  $u$ . На рис. 2 показаны зависимости мнимых частей функций Грина от частоты для каждого значения  $\omega_n, k_n$ . Расчет проведен при корреляционном волновом числе неоднородностей  $k_c$ , много меньшем значений волновых чисел  $k_n$ . С увеличением  $n$  ширина пиков в каждой точке пересечения кривых увеличивается, а их амплитуда уменьшается. В первых двух точках пересечения кривых  $n = 1, 2$  скорость распространения упругих волн больше скорости спиновых волн. На рис. 2 это появляется в виде тонкой структуры в форме узкого провала на вершинах мнимых частей функций Грина упругих волн и узкого пика на вершинах мнимых частей функций Грина спиновых волн. В последних двух точках,  $n = 4, 5$ , наоборот, скорость спиновых волн больше скорости упругих волн и, соответствен-



**Рис. 2.** Мнимые части функций Грина спиновых  $G_{mm}^{''new}(\omega)$  (штриховые кривые) и упругих  $G_{uu}^{''new}(\omega)$  (сплошные кривые) волн, рассчитанные в новом SCA, в окрестностях частот пересечения ( $\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_5$ ) и касания ( $\omega_3$ ) дисперсионных кривых. Расчет проведен при  $k_c/k_3 = 0.01$



**Рис. 3.** Мнимые части функций Грина спиновых  $G_{mm}^{''sta}(\omega, k)$  (штриховые кривые) и упругих  $G_{uu}^{''sta}(\omega, k)$  (сплошные кривые) волн, рассчитанные в стандартном SCA, в окрестностях частот пересечения ( $\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_5$ ) и касания ( $\omega_3$ ) дисперсионных кривых. Расчет проведен при  $k_c/k_3 = 0.01$

но, тонкая структура имеет вид, противоположный структуре в точках  $n = 1, 2$ . Здесь узкий провал наблюдается на вершинах мнимых частей функций Грина спиновых волн, а пик — на вершинах мнимых частей функций Грина упругих волн. В точке касания дисперсионных кривых,  $n = 3$ , скорости упругих и спиновых волн одинаковы, и тонкая структура спектра отсутствует. Амплитуда тонкой структуры на вершинах мнимых частей функций Грина зависит от отношения скоростей взаимодействующих волн: чем больше это отношение, тем ярче проявляются узкие резонанс и антирезонанс.

На рис. 3 для каждого значения  $\omega_n, k_n$  показан вид тех же зависимостей мнимых частей функций Грина от частоты, что и на рис. 2, но расчи-

танных в более грубом стандартном SCA. В этом приближении в уравнениях (33) и (34) полагается  $\Gamma_{mm}(k_1, k - k_1) = 1$  и  $\Gamma_{uu}(k_1, k - k_1) = 1$ , уравнения (35) и (36) отбрасываются, а упрощенные таким образом уравнения (33) и (34) становятся полной системой уравнений самосогласования. На рис. 3 видно, как хорошо известный дефект метода стандартного SCA — куполообразная форма резонансных пиков — искажает более близкую к реальности картину, полученную на рис. 2 с помощью нового SCA. Однако качественно характер зависимости тонкой структуры от отношения скоростей взаимодействующих волн появляется вне зависимости от того, было ли использовано стандартное или новое SCA.

Обсудим возможность и условия наблюдения рассчитанных в этом разделе эффектов. Рассчитанная высокочастотная восприимчивость  $\chi_g(\omega, k)$ , как следует из общего выражения (30), определяется функцией Грина:

$$\chi_g(\omega, k_r) = \frac{m(\omega, k_r)}{h} = -\frac{G(\omega, k_r)}{\alpha}. \quad (44)$$

Расчет проведен в неограниченном пространстве при фиксированном значении волнового числа  $k = k_r$ , где  $k_r$  соответствует магнитоупругому резонансу. Зависимость  $\chi_g$  от частоты представляет собой непрерывную кривую, монотонно убывающую во всей области частот, за исключением узкой окрестности частоты  $\omega_r$  магнитоупругого резонанса; только эта окрестность представляет интерес для нас.

Прямой метод наблюдения эффектов магнитоупругого резонанса — это экспериментальное исследование формы высокочастотной восприимчивости спин-волнового резонанса на тонких магнитных пленках. Однако вид экспериментально наблюдаемой высокочастотной восприимчивости  $\chi_m(\omega, k)$  существенно отличается от рассчитанной восприимчивости  $\chi_g(\omega, k)$  в неограниченном пространстве. Ограниченность пленки приводит к дискретности спектра спиновых волн  $\omega_p(k_p)$  и, соответственно, к дискретным пикам восприимчивости  $\chi_m(\omega_p, k_p)$  при  $\omega = \omega_p$  в отсутствие затухания. Уширение линий спин-волнового резонанса благодаря затуханию или стохастическому распределению частот, обусловленному неоднородностями, приводит к тому, что наблюдаемая зависимость  $\chi_m$  от частоты представляет собой непрерывную кривую с максимумами при  $\omega = \omega_p$ . Для проявления эффектов магнитоупругого резонанса необходимо выполнение условия совпадения волнового числа  $k_p$  одного из этих резонансов с волновым числом  $k_r$ :

$$k_r = k_p = \pi p/d, \quad (45)$$

где  $d$  — толщина пленки,  $p = 1, 2, 3, \dots$ . Это равенство может быть достигнуто подбором толщины пленки. Следует также учесть, что при экспериментальном измерении  $\chi_m(\omega_p, z)$  происходит самоусреднение отклика по толщине пленки:

$$\langle m_p \rangle = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} m(\omega_p, z) dz. \quad (46)$$

Таким образом, из-за различия моделей расчета и условий наблюдения (неограниченное пространство и тонкая пленка) можно ожидать только качественное соответствие между рассчитанной  $\chi_g(\omega, k_r)$  и наблюдаемой  $\chi_m(\omega, k_r)$  высокочастотными восприимчивостями. Однако все особенности тонкой структуры магнитоупругого резонанса, рассчитанные для  $\chi_g(\omega, k_r)$ , будут проявляться на  $\chi_m(\omega, k_r)$ , если уширение линий спин-волнового резонанса благодаря затуханию много меньше уширения, обусловленного стохастическим распределением частот.

### 3. МОДЕЛЬ ПРОИСХОЖДЕНИЯ ТОНКОЙ СТРУКТУРЫ В СПЕКТРЕ КРОССИНГ-РЕЗОНАНСА

Для демонстрации происхождения тонкой структуры спектра кроссинг-резонанса в среде с неоднородным параметром связи мы используем простую модель с бесконечным радиусом корреляции ( $k_c = 0$ , модель независимых кристаллитов), которая описывается уравнениями (63) из работы [35]. В этом случае случайные функции  $\rho(\mathbf{x})$  превращаются в случайные величины  $\rho$ , стохастические свойства которых описываются некоторой функцией распределения  $f(\rho)$ , которая в общем случае может иметь произвольную форму. Элементы матричной функции Грина, зависящие от величин  $\rho$ , для случая полной стохастизации параметра связи ( $\varepsilon = 0$  и  $\Delta\varepsilon \neq 0$ ) принимают вид

$$\tilde{G}_{mm}(\omega, k; \rho) = \frac{\nu_u - k^2}{(\nu_m - k^2)(\nu_u - k^2) - (\gamma\rho k)^2}, \quad (47)$$

$$\tilde{G}_{uu}(\omega, k; \rho) = \frac{\nu_m - k^2}{(\nu_m - k^2)(\nu_u - k^2) - (\gamma\rho k)^2}. \quad (48)$$

Усредненные функции Грина определяются выражениями

$$\check{G}_{mm}(\omega, k) = \int \tilde{G}_{mm}(\omega, k; \rho) f(\rho) d\rho, \quad (49)$$

$$\check{G}_{uu}(\omega, k) = \int \tilde{G}_{uu}(\omega, k; \rho) f(\rho) d\rho. \quad (50)$$

Здесь мы дополним эту модель включением феноменологических затуханий  $\Gamma_m$  и  $\Gamma_u$  соответственно спиновых и упругих волн. Мы рассматриваем частоты в окрестности частоты  $\omega_r$  магнитоупругого резонанса при значении волнового числа  $k = k_r$ . Поэтому мы ограничимся только одной ветвью дисперсионной кривой упругих волн и запишем диагональные функции Грина связанных спиновых и упругих волн в следующем представлении:

$$\tilde{G}_{mm}(\omega) = \frac{\omega - \omega_u - i\Gamma_u}{(\omega - \omega_m - i\Gamma_m)(\omega - \omega_u - i\Gamma_u) - \eta^2}, \quad (51)$$

$$\tilde{G}_{uu}(\omega) = \frac{\omega - \omega_m - i\Gamma_m}{(\omega - \omega_m - i\Gamma_m)(\omega - \omega_u - i\Gamma_u) - \eta^2}, \quad (52)$$

где

$$\omega_m = \omega_0 + \omega_M \alpha k^2, \quad (53)$$

$$\omega_u = \nu_u k, \quad (54)$$

$$\eta \approx \Delta\varepsilon M \sqrt{\frac{\omega_M \omega_u}{2\mu}} \rho. \quad (55)$$

Рассмотрим уравнения (51) и (52) при  $k = k_r$ , когда  $\omega_m = \omega_u = \omega_r$ :

$$\tilde{G}_{mm}(\kappa) = \frac{\zeta - i\Gamma_u}{(\zeta - i\Gamma_m)(\zeta - i\Gamma_u) - \eta^2}, \quad (56)$$

$$\tilde{G}_{uu}(\kappa) = \frac{\zeta - i\Gamma_m}{(\zeta - i\Gamma_m)(\zeta - i\Gamma_u) - \eta^2}, \quad (57)$$

где  $\zeta = \omega - \omega_r$ . Из равенства нулю знаменателя этих уравнений получаем действительные и мнимые части частоты собственных колебаний как функции параметра связи  $\eta$ :

$$\omega'_\pm = \begin{cases} \omega_r, & \eta < \eta_c, \\ \omega_r \pm \sqrt{\eta^2 - \eta_c^2}, & \eta > \eta_c, \end{cases} \quad (58)$$

$$\omega''_\pm = \begin{cases} \Gamma \pm \sqrt{\eta^2 - \eta_c^2}, & \eta < \eta_c, \\ \Gamma, & \eta > \eta_c, \end{cases} \quad (59)$$

где

$$\eta_c = \frac{1}{2} |\Gamma_u - \Gamma_m|, \quad (60)$$

$$\Gamma = \frac{1}{2} (\Gamma_u + \Gamma_m). \quad (61)$$

Зависимости  $\omega'$  и  $\omega''$  от параметра связи  $\eta$  показаны на рис. 4. Видно, что снятие вырождения собственных частот является пороговым по величине параметра связи  $\eta$  эффектом. Действительные части



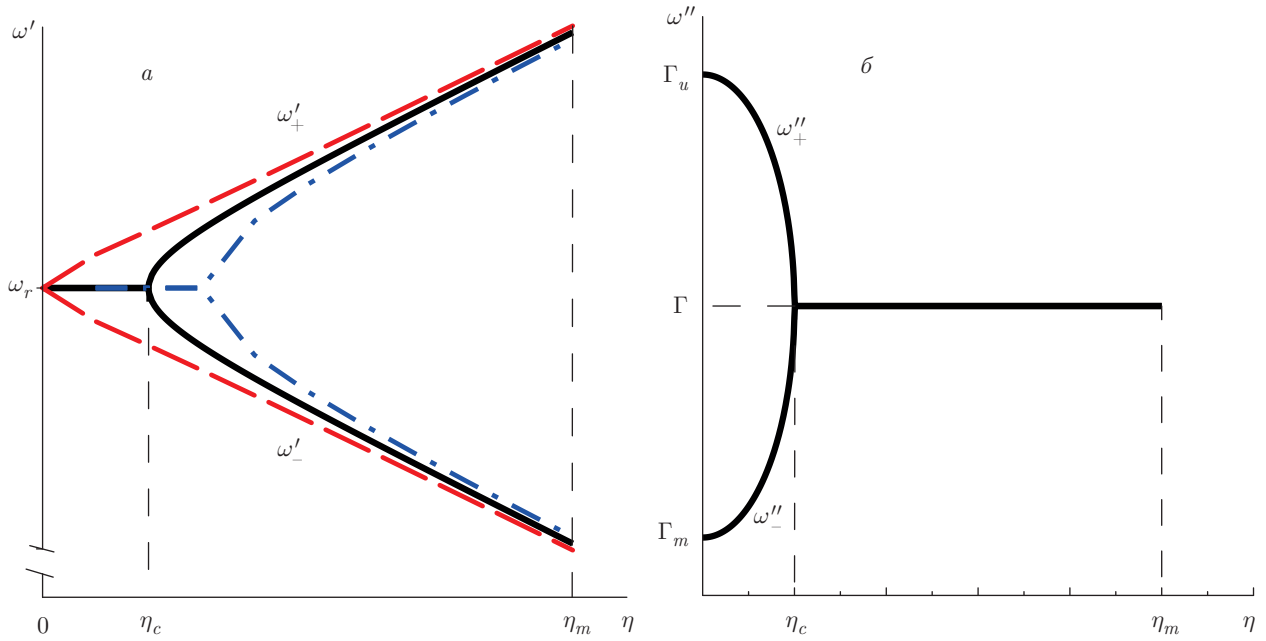


Рис. 4. Действительная (а) и мнимая (б) части частоты (черные сплошные кривые) и положения максимумов мнимых частей функций Грина  $\tilde{G}''_{uu}$  (красная штриховая кривая) и  $\tilde{G}''_{mm}$  (синяя штрихпунктирная кривая) в зависимости от параметра связи  $\eta$ . Критическое значение  $\eta = \eta_c$  разделяет вырожденную и невырожденную части спектра

частоты остаются вырожденными ( $\omega'_+ = \omega'_- = \omega_r$ ) при изменении параметра связи от нуля до критического (порогового) значения  $\eta = \eta_c$ , определяемого уравнением (60). Затем вырождение снимается, щель  $\Delta\omega = \omega'_+ - \omega'_-$  в спектре возникает и растет с ростом  $\eta$ , достигая максимальной величины при  $\eta = \eta_m$ ,

$$\Delta\omega = 2\sqrt{\eta_m^2 - \eta_c^2}, \tag{62}$$

где  $\eta_m$  соответствует максимальному значению параметра связи в данном материале. Мнимые части  $\omega''_{\pm}$  частот, в отличие от действительных частей, вырождены в интервале изменения  $\eta$  от  $\eta_c$  до  $\eta_m$ . Затухание собственных частот  $\omega''_{\pm}$  в этом интервале одинаково и определяется полусуммой затуханий  $\Gamma_m$  и  $\Gamma_u$ . При  $\eta < \eta_c$  вырождение мнимых частей частот снимается:  $\omega''_+$  растет, а  $\omega''_-$  уменьшается при уменьшении  $\eta$ , достигая предельных значений  $\omega''_+ = \Gamma_u$  и  $\omega''_- = \Gamma_m$  при  $\eta = 0$ . Для отрицательных значений параметра связи каждый из графиков на рис. 4 обладает зеркальной симметрией, если модули максимальных величин  $\eta_m$  одинаковы для  $\eta > 0$  и  $\eta < 0$

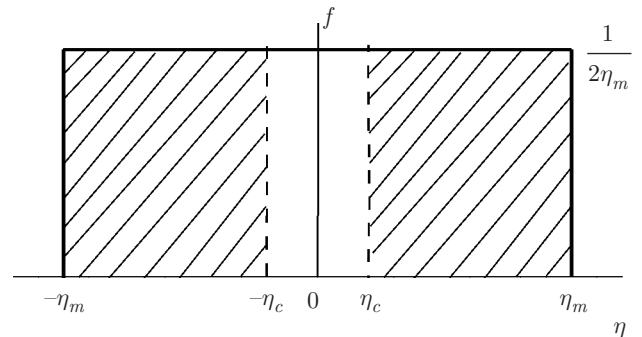


Рис. 5. Модель функции распределения  $f(\eta)$

(модули  $\eta_c$  одинаковы по определению, см. уравнение (60)).

Простейшая симметричная прямоугольная функция распределения случайных реализаций параметра связи,  $f(\eta)$ , при отличной от нуля разности затуханий в системе двух взаимодействующих волновых полей показана на рис. 5. Области в интервалах  $0 < |\eta| < |\eta_c|$  характеризуются тем, что в них собственные частоты  $\omega'_{\pm}$  вырождены, несмотря на присутствие взаимодействия  $\eta$ . Вырождение сни-

мается только в заштрихованных на этом рисунке областях, когда  $\eta$  превосходит пороговое значение  $\eta_c$ . Подчеркнем, что появление незаштрихованных допороговых областей связано не с затуханием, а с разностью затуханий: при  $\Gamma_u = \Gamma_m$  вырождение снимается при любом  $|\eta| \neq 0$ .

Мнимые части случайных реализаций функций Грина  $\tilde{G}_{mm}$  и  $\tilde{G}_{uu}$  имеют вид

$$\tilde{G}_{mm}''(\zeta; \eta) = \frac{\Gamma_u \tilde{\eta}^2 + \zeta^2 \Gamma_m}{(\zeta^2 - \tilde{\eta}^2)^2 + 4\Gamma^2 \zeta^2}, \quad (63)$$

$$\tilde{G}_{uu}''(\zeta; \eta) = \frac{\Gamma_m \tilde{\eta}^2 + \zeta^2 \Gamma_u}{(\zeta^2 - \tilde{\eta}^2)^2 + 4\Gamma^2 \zeta^2}, \quad (64)$$

где

$$\tilde{\eta}^2 = \eta^2 + \Gamma_u \Gamma_m. \quad (65)$$

Функции  $\tilde{G}_{mm}''(\zeta)$  и  $\tilde{G}_{uu}''(\zeta)$  при различных дискретных значениях  $\eta$  показаны на рис. 6. Серия кривых при различных значениях  $\eta > 1.5\eta_c$  соответствует областям снятия вырождения, заштрихованным на рис. 5. Здесь на каждой кривой наблюдаются обычные два максимума при значениях  $\zeta_{1,2} \approx \pm \tilde{\eta}$ . Функции  $\tilde{G}_{mm}''(\zeta)$  и  $\tilde{G}_{uu}''(\zeta)$  принимают в этих максимумах примерно равные значения:

$$\tilde{G}_{uu}''(\zeta)|_{\zeta^2=\tilde{\eta}^2} \approx \tilde{G}_{mm}''(\zeta)|_{\zeta^2=\tilde{\eta}^2} \approx \frac{1}{2\Gamma}. \quad (66)$$

При уменьшении  $\eta$  мы приближаемся к критической величине  $\eta_c$ , и начинает проявляться различие функций  $\tilde{G}_{mm}''(\zeta)$  и  $\tilde{G}_{uu}''(\zeta)$ . Один пик имеется при  $\eta < 1.5\eta_c$  на функции  $\tilde{G}_{mm}''(\zeta)$  и два пика — на функции  $\tilde{G}_{uu}''(\zeta)$  (синие штриховые кривые). Особенно сильные различия между этими функциями проявляются в области, соответствующей вырождению частот колебаний  $\eta \leq \eta_c$ . При  $\eta = \eta_c$  выражения (63) и (64) упрощаются:

$$\tilde{G}_{mm}''(\zeta) = \frac{\zeta^2 \Gamma_m + \Gamma_u \Gamma^2}{(\zeta^2 + \Gamma^2)^2}, \quad (67)$$

$$\tilde{G}_{uu}''(\zeta) = \frac{\zeta^2 \Gamma_u + \Gamma_m \Gamma^2}{(\zeta^2 + \Gamma^2)^2}. \quad (68)$$

Этим выражениям соответствуют красные сплошные жирные кривые на рис. 6. Математические конструкции обеих формул (67) и (68) одинаковы. Знаменатель соответствует одному резонансному максимуму в точке  $\zeta = 0$ , а числитель — резонансному минимуму в этой же точке. Характеристики резонансного максимума одинаковы для обеих функций,  $\tilde{G}_{mm}''(\zeta)$  и  $\tilde{G}_{uu}''(\zeta)$ , тогда как характеристики резонансных минимумов резко различны при различных  $\Gamma_u$  и  $\Gamma_m$ . Если, как в нашем случае,  $\Gamma_u > \Gamma_m$ , то

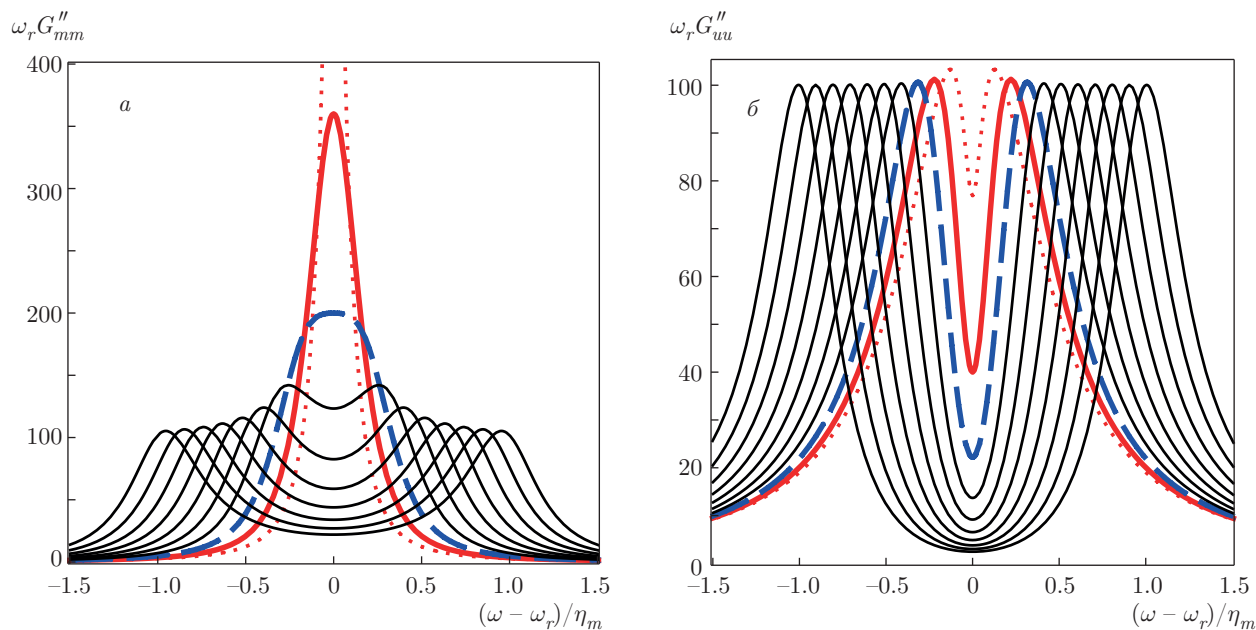
числитель функции  $\tilde{G}_{mm}''(\zeta)$  имеет неглубокий широкий минимум, который подавляется резким максимумом знаменателя. Из равенства нулю производной функции  $\tilde{G}_{mm}''(\zeta)$  следует, что при этом должен наблюдаться один максимум при  $\omega = \omega_r$ . Числитель функции  $\tilde{G}_{uu}''(\zeta)$  при этом имеет узкий резкий минимум при  $\omega = \omega_r$ , который проявляется на фоне более широкого максимума знаменателя. В результате два максимума на этой функции должны наблюдаться при  $\Gamma_u > 2\Gamma_m$  на частотах

$$\omega_{\pm} = \omega_r \pm \Gamma \sqrt{1 - \frac{2\Gamma_m}{\Gamma_u}}. \quad (69)$$

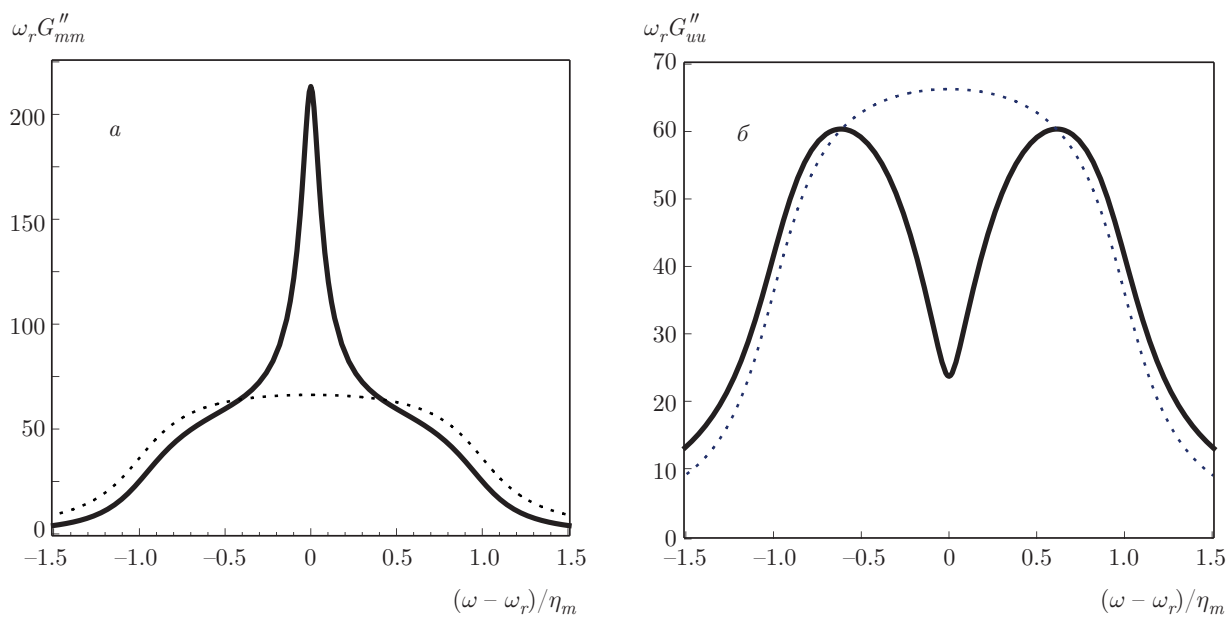
Красная жирная кривая на рис. 6б, соответствующая этой ситуации, похожа на соседние тонкие кривые, относящиеся к области снятия вырождения. Однако, как видно из формулы (69), расщепление ее максимума на два пика не означает появления щели в спектре. Интервалы между этими максимумами уменьшаются при дальнейшем уменьшении  $\eta$  (рис. 6б, красная пунктирная кривая). Зависимость от  $\eta$  интервала между пиками приведена на рис. 4а (красная штриховая кривая). На рис. 4а показано также положение максимумов функции  $\tilde{G}_{mm}''(\zeta)$  в зависимости от  $\eta$  (синяя штрихпунктирная кривая). Видно, что функции, описывающие зависимости положения максимумов функций  $\tilde{G}_{mm}''(\zeta)$  и  $\tilde{G}_{uu}''(\zeta)$  от  $\eta$ , существенно отличаются от функций, описывающих зависимости собственных частот от  $\eta$ .

Случайные реализации на рис. 6 можно рассматривать как функции Грина однородных образцов с соответствующими значениями параметра  $\eta$ . При этом каждая из функций  $\tilde{G}_{mm}''$  и  $\tilde{G}_{uu}''$  образца с  $\eta > \eta_c$  имеет одинаковую форму, стандартную для кроссинг-резонансов (одна из тонких черных кривых на каждом из рис. 6а и 6б), а форма функций  $\tilde{G}_{mm}''$  и  $\tilde{G}_{uu}''$  для образца с  $\eta < \eta_c$  различна и соответствует резонансу и антирезонансу (красные кривые соответственно на рис. 6а и 6б) тонкой структуры спектра.

Обе ситуации, соответствующие невырожденному и вырожденному спектрам собственных частот, можно наблюдать и в одном соответствующим образом ориентированном монокристалле. Во многих веществах величина и знак параметра  $\eta$  различны вдоль разных кристаллографических осей [36, 37]. Например, в монокристалле железа параметр  $\eta > 0$  вдоль осей типа [100] и  $\eta < 0$  вдоль осей [111] и имеет промежуточные значения вдоль других направлений. В ситуации с ориентированным монокристаллом, как и в ситуации с веществами с разными  $\eta$ ,



**Рис. 6.** Мнимые части диагональных функций Грина спиновых (а) и упругих (б) волн в точке  $k = k_r$  при различных значениях  $\eta$ :  $\eta > 1.5\eta_c$  (черные тонкие кривые),  $\eta = 1.5\eta_c$  (синие штриховые кривые),  $\eta = \eta_c$  (красные жирные кривые),  $\eta = 0.5\eta_c$  (красные пунктирные кривые)



**Рис. 7.** Усредненные мнимые части диагональных функций Грина спиновых (а) и упругих (б) волн в точке  $k = k_r$  при  $\Gamma_m \neq \Gamma_u$  (сплошные кривые) и  $\Gamma_m = \Gamma_u$  ( $\eta_c = 0$ ) (пунктирные кривые)

спектры, соответствующие вырождению и снятию вырождения, можно наблюдать только раздельно.

Проведем теперь усреднение выражений (63) и (64) для мнимых частей функций Грина по  $\eta$  с функцией распределения (см. рис. 5) методом численного интегрирования (рис. 7). Видно, что на графиках усредненных функций Грина  $G''_{mm}(\zeta)$  и  $G''_{uu}(\zeta)$  в рассмотренной модели четко проявляется основная особенность явления тонкой структуры магнитоупругого резонанса: возникновение узкого резонанса на функции  $G''_{mm}(\zeta)$  и узкого антирезонанса на функции  $G''_{uu}(\zeta)$  при  $\omega = \omega_r$  на фоне широких максимумов, обусловленных стохастическим распределением собственных частот.

Таким образом, мы показали, что эффекты тонкой структуры магнитоупругого спектра, возникающие в неоднородных ферромагнетиках, обязаны своим происхождением вкладом случайных реализаций, соответствующих вырожденным состояниям магнитоупругой системы. Такие состояния всегда присутствуют в функции распределения параметра взаимодействия, если критическая величина параметра взаимодействия  $\eta_c$ , определяемая уравнением (60), отлична от нуля.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Работа посвящена выяснению происхождения тонкой структуры спектра кроссинг-резонанса двух волновых полей различной природы в неоднородной среде, которая была предсказана и исследована нами ранее аналитическими и численными методами [15–18, 33–35]. Для этого мы рассмотрели магнитоупругий резонанс в обеих точках пересечения дисперсионных кривых спиновых и упругих волн (разд. 2) и кроссинг-резонанс в модели неоднородной среды с бесконечным радиусом корреляций (разд. 3). Мы изучили взаимодействующие волновые поля в среде со стохастически неоднородным параметром связи между ними, среднее значение которого равно нулю, а связь между волновыми полями обеспечивается только пространственными флуктуациями этого параметра. Проведенное исследование позволило проследить формирование тонкой структуры спектра, начиная с кроссинг-резонанса в однородной среде.

Снятие вырождения собственных частот двух волновых полей различной природы,  $m(x, t)$  и  $u(x, t)$ , в точке пересечения их дисперсионных кривых,  $\omega = \omega_r$ ,  $k = k_r$ , при включении взаимодействия  $\eta$  между этими полями в однородной среде с различ-

ными параметрами релаксации соответствующих волн  $\Gamma_m$  и  $\Gamma_u$  является пороговым эффектом. Оно происходит, если величина  $\eta$  превосходит критическое значение  $\eta_c = |\Gamma_u - \Gamma_m|/2$ . Формы функций Грина  $\tilde{G}''_{mm}$  и  $\tilde{G}''_{uu}$  полей  $m(x, t)$  и  $u(x, t)$  резко различны в средах с вырождением частот ( $\eta < \eta_c$ ) и в средах со снятым вырождением ( $\eta > \eta_c$ ). В средах со снятым вырождением ( $\eta > \eta_c$ ) каждая из функций Грина,  $\tilde{G}''_{mm}$  и  $\tilde{G}''_{uu}$ , имеет стандартную для кроссинг-резонансов в однородном образце форму двух резонансных пиков с одинаковой полушириной  $(\Gamma_u + \Gamma_m)/2$  и интервалом  $2\eta$  между ними. В средах с вырождением частот ( $\eta < \eta_c$ ) функции Грина  $\tilde{G}''_{mm}$  и  $\tilde{G}''_{uu}$  имеют разную форму: если  $\Gamma_m < \Gamma_u$ , функция  $\tilde{G}''_{mm}(\zeta)$  представляет собой узкий пик резонанса на частоте  $\omega = \omega_r$ , а  $\tilde{G}''_{uu}$  — более широкий резонансный пик, расщепленный на вершине узким антирезонансом на той же частоте  $\omega = \omega_r$ .

Таким образом, основные свойства тонкой структуры кроссинг-резонанса в неоднородной среде — узкий резонанс на функции  $\tilde{G}''_{mm}$  и узкий антирезонанс на той же частоте  $\omega = \omega_r$  на функции  $\tilde{G}''_{uu}$  — это стандартный вид кроссинг-резонанса в однородном образце, в котором  $\eta < \eta_c$ . Каждая из картин спектра магнитоупругого резонанса, соответствующая либо  $\eta < \eta_c$ , либо  $\eta > \eta_c$  в однородном образце может наблюдаться только отдельно: либо на различных образцах, либо на одном монокристалле, обладающем широкими диапазонами изменения величины и знака параметра  $\eta$ , при различных ориентациях этого кристалла.

В неоднородном веществе (например, в поликристалле с различной ориентацией кристаллитов) функция распределения содержит области как с  $\eta < \eta_c$ , так и с  $\eta > \eta_c$ . Усреднение по областям  $\eta > \eta_c$  приводит к формированию широкого резонанса с полушириной резонансной линии порядка  $\langle \eta^2 \rangle^{1/2}$ , обусловленной стохастическим распределением резонансных частот. Усреднение по областям с  $\eta < \eta_c$  приводит к обострению пика резонанса на функции  $G''_{mm}$  и пика антирезонанса на функции  $G''_{uu}$  на одной и той же частоте  $\omega = \omega_r$ . В результате формируется картина кроссинг-резонанса в неоднородной среде: одинаковые широкие пики на обеих функциях,  $G''_{mm}$  и  $G''_{uu}$ , с узким пиком резонанса тонкой структуры на функции  $G''_{mm}$  и антирезонанса на функции  $G''_{uu}$ .

Таким образом, показано, что тонкая структура спектра любого кроссинг-резонанса двух волновых полей различной природы в неоднородной среде обязана своим происхождением вкладом случайных ре-

ализаций, соответствующих вырожденным состояниям частот собственных колебаний системы.

В ферромагнетике с пространственной неоднородностью параметра связи возникают затухания спиновых и упругих волн,  $\Gamma_m(k) \propto k_c v_m$  и  $\Gamma_u(k) \propto k_c v_u$ , пропорциональные корреляционному волновому числу  $k_c$  неоднородностей и скорости соответствующих волн, которые суммируются с однородными затуханиями  $\Gamma_m$  и  $\Gamma_u$  тех же волн. Эта ситуация рассмотрена в работе в рамках нового SCA для случая, когда вклад однородных затуханий пренебрежимо мал. Показано, что вид тонкой структуры на функциях  $G''_{mm}$  и  $G''_{uu}$  в точке второго (высокочастотного) пересечения дисперсионных кривых спиновых и упругих волн меняется на противоположный: узкий пик резонанса тонкой структуры возникает на функции  $G''_{uu}$  и антирезонанс на функции  $G''_{mm}$ , так как  $v_m < v_u$  в точке первого пересечения и  $v_m > v_u$  в точке второго. Если вклад однородных затуханий  $\Gamma_m$  и  $\Gamma_u$  велик, то вид тонкой структуры спектра как в точке первого, так и второго пересечения дисперсионных кривых определяется соотношением величин этих затуханий. В этой работе исследован случай полной стохастизации параметра связи:  $\varepsilon = 0$  и  $\Delta\varepsilon \neq 0$ , когда тонкая структура проявляется наиболее ярко. Как показано в работах [17, 35], тонкая структура проявляется и при отличном от нуля среднем значении параметра связи. Тонкая структура спектра магнитоупругого резонанса, насколько нам известно, пока еще не наблюдалась экспериментально.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Ахиезер, *Тезисы докладов и выступлений на совещании по физике магнитных явлений*, (Москва, май 23–31, 1956), Металлургиздат, Свердловск (1956).
2. Е. А. Туров, Ю. П. Ирхин, ФММ **3**, 15 (1956).
3. А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский, ЖЭТФ **35**, 228 (1958).
4. С. Kittel, Phys. Rev. **110**, 835 (1958).
5. А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, М. И. Каганов, УФН **71**, 533 (1960).
6. А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский, *Спиновые волны*, Наука, Москва (1967).
7. В. В. Леманов, в сб. *Физика магнитных диэлектриков*, под ред. Г. А. Смоленского, Наука, Ленинград (1975), с. 85.
8. О. Ю. Беляева, Л. К. Зарембо, С. Н. Карпачев, УФН **162**, 107 (1992).
9. V. G. Bar'yakhtar, A. G. Danilevich, and V. A. L'vov, Phys. Rev. B **84**, 134304 (2011).
10. V. A. Ignatchenko and L. I. Deich, Phys. Rev. B **50**, 16364 (1994).
11. Л. И. Дейч, В. А. Игнатченко, ЖЭТФ **107**, 842 (1995).
12. L. I. Deich and A. A. Lisyansky, Phys. Lett. A **220**, 125 (1996).
13. V. A. Ignatchenko, M. V. Erementchouk, A. A. Maradudin, and L. I. Deich, Phys. Rev. B **59**, 9185 (1999).
14. R. C. Bourret, Nuovo Cim. **26**, 1 (1962).
15. V. A. Ignatchenko and D. S. Polukhin, Sol. St. Phen. **190**, 51 (2012).
16. В. А. Игнатченко, Д. С. Полухин, ЖЭТФ **143**, 238 (2013).
17. В. А. Игнатченко, Д. С. Полухин, ЖЭТФ **144**, 972 (2013).
18. V. A. Ignatchenko and D. S. Polukhin, Sol. St. Phen. **215**, 105 (2014).
19. А. Б. Мигдал, ЖЭТФ **34**, 1438 (1958).
20. R. H. Kraichnan, J. Math. Phys. **2**, 124 (1961).
21. H. Bruus and K. Flensberg, *Introduction to Many-Body Quantum Theory in Condensed Matter Physics*, Ørsted Laboratory, Niels Bohr Institute, Copenhagen, Denmark (2002).
22. М. В. Садовский, *Диаграмматика. Лекции по избранным задачам теории конденсированного состояния*. Издание второе, Институт электрофизики УрО РАН, Екатеринбург (2005).
23. J. Cai, X. L. Lei, and L. M. Xie, Phys. Rev. B **39**, 11618 (1989).
24. V. N. Kostur and B. Mitrovic, Phys. Rev. B **50**, 12774 (1994).
25. C. Grimaldi, L. Pietronero, and S. Strässler, Phys. Rev. Lett. **75**, 1158 (1995).
26. Y. Takada and T. Higuchi, Phys. Rev. B **52**, 12720 (1995).
27. O. V. Danylenko, O. V. Dolgov, and V. V. Losyakov, Phys. Lett. A **230**, 79 (1997).
28. G. A. Ummarino and R. S. Gonnelli, Phys. Rev. B **56**, R14279 (1997).

29. F. Cosenza, L. De Cesare, and M. Fusco Girard, *Phys. Rev. B* **59**, 3349 (1999).
30. O. V. Danylenko and O. V. Dolgov, *Phys. Rev. B* **63**, 094506 (2001).
31. J. P. Hague and N. d'Ambrumenil, *J. Low Temp. Phys.* **151**, 1149 (2008).
32. Johannes Bauer, Jong E. Han, and Olle Gunnarsson, *Phys. Rev. B* **84**, 184531 (2011).
33. V. A. Ignatchenko and D. S. Polukhin, *J. Phys. A* **49**, 095004 (2016).
34. V. A. Ignatchenko, D. S. Polukhin, and D. S. Tsikalov, *J. Magn. Magn. Mater.* **440**, 83 (2017).
35. В. А. Игнатченко, Д. С. Полухин, *ЖЭТФ* **152**, 110 (2017).
36. К. П. Белов, *Магнитострикционные явления и их технические приложения*, Наука, Москва (1987).
37. А. П. Бабичев, Н. А. Бабушкина, А. М. Братковский и др., *Физические величины: Справочник*, под ред. И. С. Григорьева, Е. З. Мейлихова, Энергоатомиздат, Москва (1991).