

ПЕРЕХОДНЫЕ РЕЖИМЫ ВИНТОВОГО ДИНАМО

В. В. Титов^{a}, Р. А. Степанов^{a,b}, Д. Д. Соколов^{c,d}*

^a *Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук
614013, Пермь, Россия*

^b *Пермский национальный исследовательский политехнический университет
614990, Пермь, Россия*

^c *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет
119991, Москва, Россия*

^d *Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н. В. Пушкова Российской академии наук
108840, Троицк, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 7 июля 2019 г.,
после переработки 26 августа 2019 г.
Принята к публикации 28 августа 2019 г.

Винтовое динамо представляет собой критическое явление — самовозбуждение, которое происходит только при достижении магнитным числом Рейнольдса (Rm) некоторого порогового значения. Показано, что при значениях Rm , несколько меньших этого критического значения, происходит временной рост магнитного поля. Появление временного роста также ограничено снизу вторым критическим значением Rm . Если же затравочное магнитное поле присутствует постоянно, а не только в начальный момент эволюции, то временной подкритический рост магнитного поля приводит к возникновению стационарной магнитной конфигурации. Особенно сильным это стационарное магнитное поле оказывается, если затравочное поле в виде бегущей волны совпадает по фазовой скорости с магнитным полем, которое возникает при наличии самовозбуждения. Рассматриваются возможности обнаружения такого резонанса в подкритическом режиме работы экспериментальной установки, основанной на винтовом динамо.

DOI: 10.31857/S0044451020020121

1. ВВЕДЕНИЕ

Считается, что происхождение магнитных полей большинства небесных тел связано с работой механизма динамо (например, [1, 2]). Динамо основано на эффекте электромагнитной индукции и превращает кинетическую энергию проводящей среды в магнитную энергию. Этот механизм является пороговым, т. е. самовозбуждение магнитного поля происходит тогда, когда индукционные эффекты достаточно сильно превосходят диссипацию. Количество это превосходство характеризуется некоторым безразмерным числом, удобным для данной реализации механизма динамо. В простейших случаях этим числом является магнитное число Рейнольдса (Rm), которое должно превосходить соответствующее пороговое значение Rm^* .

Однако еще в 1956 г. Я. Б. Зельдович [3] обратил внимание на то, что если интенсивность работы динамо еще не достигает порогового значения, то магнитное поле не обязательно просто убывает, а может наблюдаться его временной рост. Это существенно отличает перенос магнитного поля от переноса, скажем, температуры, максимум которой в замкнутой системе может только убывать. Замечание Зельдовича широко известно среди специалистов по динамо, но до недавнего времени не привлекало внимание исследователей вероятно потому, что в небесных телах магнитные числа Рейнольдса, как правило, очень велики и возможность того, что они окажутся меньше критического значения не казалась актуальной.

Ситуация заметно изменилась после того, как на рубеже нового тысячелетия механизм динамо впервые был воспроизведен в лабораторных условиях (см. для обзора [4]). В самом деле, при постановке динамо-эксперимента борьба идет за каждую единицу магнитного числа Рейнольдса, так что обна-

* E-mail: titov.v@icmm.ru

ружение временного роста магнитного поля можно рассматривать как естественный шаг на пути развития экспериментов в этом направлении. В то же время современные динамо-эксперименты, при всей их полезности и поучительности, отвечают лишь на очень ограниченный круг вопросов теории динамо, а явление временного роста представляется интересным и само по себе. Тем не менее, работ, специально посвященных подкритическому временному росту магнитного поля, очень мало (см., например, [5]).

Винтовое динамо, впервые рассмотренное Пономаренко [6], использует для генерации магнитного поля вращающуюся струю проводящей жидкости. В оригинальной работе движение струи представляется как твердотельное движение бесконечно длинного цилиндра, так что индукционные эффекты возникают на границе цилиндра. В более реалистических моделях нет необходимости воспроизводить скачок угловой скорости буквально, но генерационные эффекты все равно сосредоточены недалеко от границы струи. Замечательным свойством винтового динамо является наиболее низкое критическое магнитное число Рейнольдса. Это критическое значение, конечно, несколько зависит от деталей задачи, в частности, от профиля угловой скорости, однако его минимальные оценки составляют $Rm^* \approx 17.7$ [7]. Было предложено несколько вариантов экспериментальной реализации винтового динамо, в частности, в ограниченном цилиндрическом канале [8] (г. Рига) и в замкнутом тороидальном канале [9] (г. Пермь). Рижская установка известна тем, что на ней порог генерации был достигнут и эффект динамо наблюдался в эксперименте [10]. Идея пермской динамо-установки была реализована в нескольких модификациях, которые послужили для экспериментального обнаружения ряда значимых турбулентных магнитогидродинамических эффектов [11–13]. Поиск режимов, которые бы обеспечили демонстрацию механизма винтового динамо в торе, по-прежнему представляет теоретический интерес в том, чтобы обнаружить абсолютную неустойчивость.

В данном исследовании, проведенном методами численного моделирования, мы отталкиваемся от недавней работы [5], посвященной подкритическому временному росту магнитного поля в задаче мелкомасштабного динамо. Мелкомасштабным принято называть динамо, в котором магнитное поле генерируется статистически однородным и изотропным потоком проводящей жидкости. Мотивация авторов этой работы была связана с изучением именно мелкомасштабного динамо, а не динамо-эксперимента,

а также тем, что сама идея Зельдовича была сформулирована в контексте изучения мелкомасштабного динамо. В данной работе мы проводим изучение временного роста магнитного поля для механизма динамо, на котором основано большинство динамо-экспериментов, а именно винтового динамо, и сопоставляем полученные выводы с результатами [5]. В частности, мы также допускаем, что интересующая нас задача имеет две достаточно независимые и различные по своим свойствам конкретизации — внешнее магнитное поле может вноситься в систему как начальное условие либо постоянно возобновляться внешним источником магнитного поля. Вторая постановка более востребована в рамках экспериментов по динамо, в которых, если не предпринимать специальных мер, внешнее магнитное поле постоянно присутствует в виде геомагнитного поля. Создание внешнего магнитного поля в экспериментальных условиях возможно также с использованием специальных внешних катушек, входящих в состав экспериментальной установки [14], которые позволяют реализовать бегущее поле с нужной симметрией. В рамках этой работы мы ориентируемся на вторую возможность, которая представляется нам более актуальной.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Генерация магнитного поля \mathbf{V} в движущейся со скоростью \mathbf{U} электропроводящей среде описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{V} &= \nabla \times (\mathbf{U} \times (\mathbf{V} + \mathbf{V}_0)) + \eta \nabla^2 \mathbf{V}, \\ \nabla \cdot \mathbf{V} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где η — коэффициент магнитной вязкости среды, \mathbf{V}_0 — внешнее магнитное поле. В задаче винтового динамо рассматривается осесимметричное твердотельное движение внутри цилиндрического канала, которое в цилиндрической системе координат (r, φ, z) может быть представлено в виде

$$\mathbf{U}(r, t) = \{0, ru(r, t), \chi u(r, t)\}, \quad (2)$$

где $u(r, t) = \zeta(r)v(t)$ — параметризация поля скорости, а параметр χ — шаг винта. Для описания скачка скорости на границе цилиндра была использована гладкая функция профиля в виде $\zeta(r) = (1 - \text{th}[100(r - 1)])/2$, при котором переход осуществляется в слое с характерной толщиной 0.01. В таком приближении отличие решения от решения со скачком составляет менее 1%. Решение уравнения (1) можно представить в факторизованном виде:

$$\mathbf{V}(r, \varphi, z, t) = \mathbf{b}(r, t)e^{i(m\varphi + kz)}, \quad (3)$$

где m и k — волновые числа. Используя условие соленидальности, можно выразить продольную компоненту магнитного поля через две другие,

$$b_z(r, t) = \frac{i}{kr} \frac{\partial(rb_r)}{\partial r} - \frac{mb_\varphi}{kr}, \quad (4)$$

и свести задачу к решению одномерной системы уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_r}{\partial t} &= D(b_r) - \frac{2imb_\varphi}{r^2} - \\ &\quad - iRm u(b_r + b_{0r})(m + k\chi), \\ \frac{\partial b_\varphi}{\partial t} &= D(b_\varphi) + \frac{2imb_r}{r^2} - iRm u(b_\varphi + b_{0\varphi}) \times \\ &\quad \times (m + k\chi) + rRm(b_r + b_{0r}) \frac{\partial u}{\partial r}, \end{aligned} \quad (5)$$

где оператор

$$D = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} - k^2 + \frac{m^2 + 1}{r^2}. \quad (6)$$

Магнитное число Рейнольдса $Rm = r_0 u_0 / \eta$ получено при приведении к безразмерному виду с использованием следующих характерных величин: радиуса канала r_0 , скорости на границе канала u_0 , диффузионного времени r_0^2 / η . Математическая постановка дополняется граничными условиями осевой симметрии для моды $m = 1$ (здесь мы ограничиваемся рассмотрением этой, наиболее интересной, моды) при $r = 0$:

$$\partial_r b_r(0, t) = 0, \quad \partial_r b_\varphi(0, t) = 0, \quad (7)$$

и условием затухания магнитного поля $\mathbf{b}(r, t)$ при $r \rightarrow \infty$. Начальные условия и вид поля $\mathbf{B}_0(r, t)$ конкретизируются ниже.

3. ЭВОЛЮЦИЯ НАЧАЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Рассмотрим сначала стандартную постановку задачи об эволюции магнитного поля при заданном начальном условии и отсутствии внешнего источника ($\mathbf{B}_0(r, t) = 0$). Расчеты выполнены при следующих значениях параметров: $m = 1$, $k = -0.4$, $\chi = 1.3$. Этот набор соответствует режиму генерации при минимальном критическом значении числа Рейнольдса $Rm^* = 17.729$.

Начальные условия задачи с однородным и перпендикулярным к оси канала магнитным полем в цилиндрической системе координат имеют вид

$$b_r(r, 0) = 1, \quad b_\varphi(r, 0) = i. \quad (8)$$

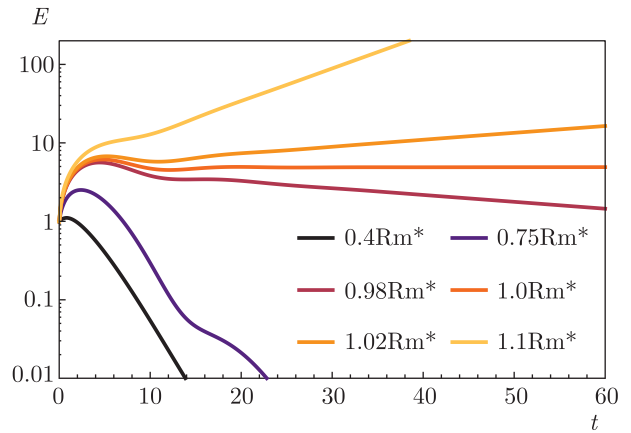


Рис. 1. (В цвете онлайн) Зависимость магнитной энергии внутри канала от времени при различных значениях магнитного числа Рейнольдса Rm , выраженных относительно критического значения Rm^*

По результатам численного решения уравнений (5) вычисляется средняя энергия поперечного магнитного поля в сечении канала:

$$E(t) = \int_0^{r_0} (|b_r(r, t)|^2 + |b_\varphi(r, t)|^2) r dr, \quad (9)$$

где выбранная нормировка соответствует $E(0) = 1$ для поля (8). Для вида (3) $E(t)$ не зависит от z и отражает эволюцию энергии всей системы, которая для рассматриваемого случая показана на рис. 1 при различных Rm . Для удобства значения выбраны в соответствии с заданными надкритичностями относительно порога генерации Rm^* . В самом деле, можно видеть, что до момента времени установления экспоненциального неограниченного роста энергии, который обнаруживается при $Rm > Rm^*$, наблюдается стадия быстрого роста продолжительностью нескольких характерных (диффузионных) единиц времени. Этот рост имеет место и для подкритических режимов. При $Rm = 0.75Rm^*$ энергия усиливается примерно в 2.5 раза. Схожее поведение наблюдали [5] в задаче мелкомасштабного динамо. Понятно, что в таких различных задачах прямое количественное сравнение затруднительно, хотя в нашем случае явление временного роста кажется существенно менее выраженным. Тем не менее, его в принципе можно было бы наблюдать в реальном эксперименте. Подробное обсуждение этого вопроса и оценка предлагаются в разд. 5.

Обращает на себя внимание также кратковременное уменьшение магнитной энергии после первичного этапа роста в самом начале эволюции. Оно

не отмечалось в [5] для рассматриваемой там задачи вероятно потому, что использовавшиеся в [5] уравнения уже предусматривают, что начальное магнитное поле довольно близко по своей структуре к собственной функции, которая появляется по достижении порога возбуждения. Также необходимо отметить, что уже при $Rm = 0.4Rm^*$ эффект временного роста магнитной энергии практически не проявляется. Наличие этого второго порога возбуждения также не отмечалось в задаче, рассмотренной в [5]. Происхождение этого порога кажется естественным — магнитная энергия не успевает перейти от падения на самом начальном этапе к временному росту до того, как вступает в действие диссипация. Различие двух порогов возбуждения, т. е. диапазон Rm , при которых заметен временной рост, невелико и составляет по грубой оценке 20–30%. Конечно, этот диапазон зависит от конфигурации начального магнитного поля, но, в принципе, при целенаправленных исследованиях он кажется достижимым в эксперименте.

4. ГЕНЕРАЦИЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕГО БЕГУЩЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Рассмотрим влияние внешнего постоянно действующего затравочного магнитного поля на временной рост энергии в подкритическом режиме динамо. Конечно, это влияние существенно зависит от конфигурации затравочного магнитного поля, причем естественно ожидать, что оно наиболее существенно тогда, когда это внешнее поле более-менее напоминает то магнитное поле, генерацию которого мы ожидали бы в надкритическом режиме. Поскольку в случае винтового динамо таким магнитным полем является бегущая волна квазистационарного магнитного поля, то \mathbf{V}_0 также полагается в виде бегущей волны. Итак, мы рассматриваем однородное поперечное поле (9), которое вращается вокруг оси с циклической частотой ω_0 . В этом случае компоненты внешнего магнитного поля \mathbf{V}_0 имеют вид

$$b_{0r} = \cos \omega_0 t + i \sin \omega_0 t, \quad (10)$$

$$b_{0\varphi} = -\sin \omega_0 t + i \cos \omega_0 t. \quad (11)$$

Подчеркнем, что выбор ω_0 имеет решающее значение. При совпадении собственной частоты задачи и частоты внешнего магнитного поля можно ожидать возникновения резонансных эффектов.

Собственная частота динамо-волны $\omega = 0.44$ получена из (5) при $Rm = Rm^*$ и тех же параметрах

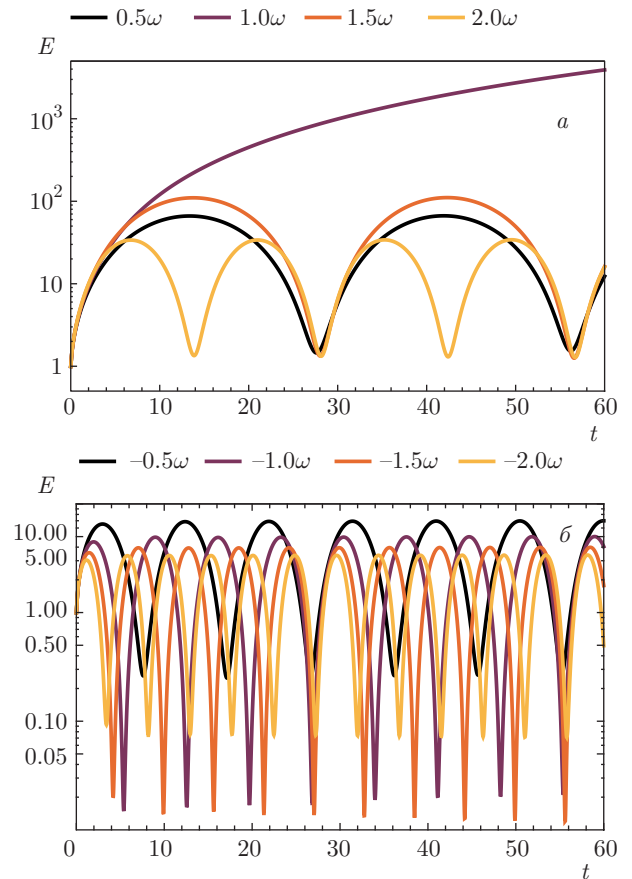


Рис. 2. (В цвете онлайн) Временная эволюция магнитной энергии E в зависимости от частоты внешнего бегущего магнитного поля ω_0 при фиксированном магнитном числе Рейнольдса $Rm = Rm^*$. Значения ω_0 представлены в единицах ω : $\omega_0/\omega > 0$ (а) и $\omega_0/\omega < 0$ (б)

$m = 1, k = -0.4, \chi = 1.3$. Воздействие на собственной частоте $\omega_0 = \omega$ не изменяет порог генерации Rm^* , но способно существенно усилить амплитудные характеристики магнитного поля в подкритическом режиме. Оно важно и в критическом режиме, с которого мы и начинаем исследование.

На рис. 2 представлены временные зависимости магнитной энергии при $Rm = Rm^*$ и различных значениях частоты возбуждения ω_0 (значения указаны относительно ω). При $\omega_0 = \omega$ (и только в этом случае) энергия поля растет неограниченно (см. рис. 2а), хотя и не экспоненциально. При значениях ω_0 , близких к ω , можно добиться существенного периодического роста с частотой, обусловленной $\omega_0 - \omega$. Можно видеть, что при переходе от $\omega_0 = 1.5\omega$ к $\omega_0 = 2\omega$ частота осцилляций энергии удваивается. Это явление наблюдается и для ω_0 со знаком, противоположным знаку ω (см. рис. 2б). При $\omega_0 = -\omega$ энергия может временно усиливаться в 5–6 раз.

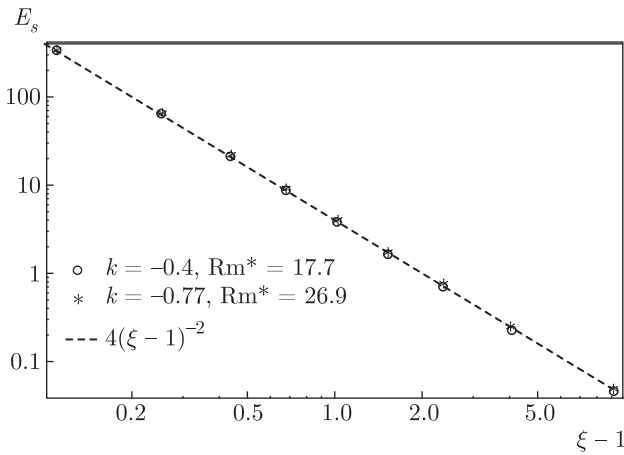


Рис. 3. Зависимости стационарного значения энергии E_s от параметра $\xi = Rm^*/Rm$ при различных значениях волнового числа k . Штриховой линией показана зависимость $4(\xi - 1)^{-2}$

Внешнее бегущее магнитное поле, действующее на резонансной частоте ($\omega_0 = \omega$), позволяет существенно увеличить энергию магнитного поля течения и для подкритических режимов $Rm < Rm^*$. Расчеты показали, что энергия индуцированного магнитного поля принимает стационарное значение E_s . Зависимости достигаемого усиления магнитного поля E_i от параметра подкритичности $\xi = Rm^*/Rm$ показаны на рис. 3. При этом характерное время насыщения генерации также зависит от ξ . Для $\xi = 10$ это время выхода к стационарному значению составляет около 10 характерных единиц, а для $\xi = 1.1$ — порядка 50. Мы провели исследование данной зависимости и при других значениях k . На рис. 3 приводятся результаты при $k = -0.77$, т.е. при $Rm = Rm^* = 26.9$, при котором собственная критическая частота равна $\omega = 3.68$. Зависимость $E_s(\xi)$ хорошо аппроксимируется функцией $4(\xi - 1)^{-2}$ (на рисунке показана штриховой линией). Данная зависимость представляется важной, так как позволяет в подкритических условиях эксперимента оценить близость к критическому значению числа Рейнольдса. Так, например, при $Rm = 0.5Rm^*$, т.е. $\xi - 1 = 1$, можно ожидать усиление E относительно внешнего поля в 4 раза.

5. ГЕНЕРАЦИЯ В НЕСТАЦИОНАРНОМ ПОТОКЕ

Мы видели, что резонанс с затравочным внешним магнитным полем может дать существенное временное усиление поля. Этот результат приоб-

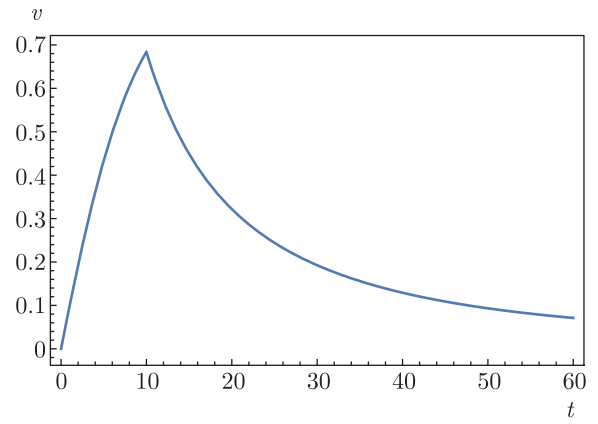


Рис. 4. Характерное изменение скорости v со временем в канале относительно стенок в процессе торможения канала ($t \leq 10$) и после его полной остановки в момент времени $t_s = 10$

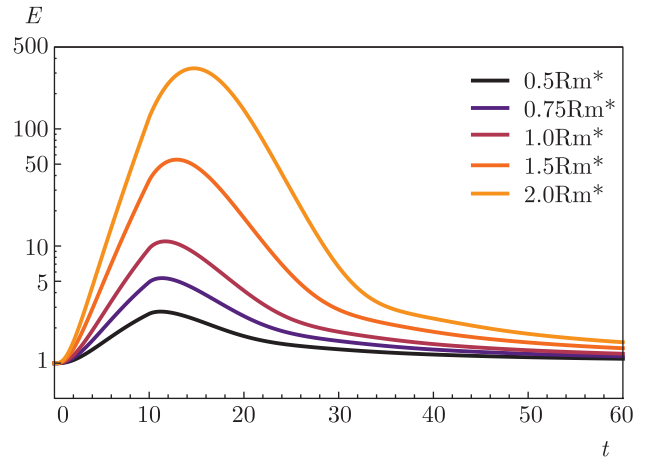


Рис. 5. (В цвете онлайн) Эволюция магнитной энергии в нестационарном винтовом движении при наличии внешне-го бегущего магнитного поля с $\omega_0 = \omega$; $k = -0.4$ и $\chi = 1.3$

ретает особую практическую ценность, если сопоставить время усиления с характерными гидродинамическими временами в существующей динамоустановке [4]. Ее особенность состоит в том, что интенсивный винтовой поток возникает за счет накопленной кинетической энергии вращающегося объема жидкого металла и последующей резкой остановки канала. На рис. 4 показана характерная эволюция интенсивности течения. Приблизительно линейный рост на интервале $t \leq 10$ соответствует торможению канала, а после полной остановки поток затухает. Время остановки канала t_s зависит от параметров установки и ускорения торможения, которые, в свою очередь, влияют на Rm . Значение $t_s = 10$ выбрано как одно из возможных среди са-

мых типичных для эксперимента динамо. На рис. 5 показана эволюция магнитной энергии при различных значениях Rm . Даже при значительных надкритичностях Rm поле со временем затухает. Тем не менее, можно наблюдать существенный скачок энергии к моменту остановки.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы последовательно изучили особенности подкритических режимов генерации магнитного поля в задаче винтового динамо и подтвердили возможность подкритического усиления начального магнитного поля относительно простой пространственной конфигурации при $Rm \lesssim Rm^*$. При включении внешнего периодического магнитного поля этот эффект становится более выраженным и дает постоянное индуцированное поле. Мы показали, что достижимое усиление определяется уровнем подкритичности Rm^*/Rm .

Полученные результаты в самом общем виде, конечно, подтверждают представление о временном росте магнитного поля при слегка подкритических магнитных числах Рейнольдса, восходящее к работе Зельдовича [3]. Однако оказывается, что в более конкретных свойствах этот подкритический рост существенно отличается от подкритического роста в задаче мелкомасштабного динамо, полученного в работе [5]. Это представляется естественным, поскольку физический механизм винтового динамо существенно связан с волновым характером магнитного поля, возбуждаемого механизмом динамо, чего не скажешь про механизм мелкомасштабного динамо. Это также, по-видимому, объясняет, почему в исследованиях винтового динамо с флуктуациями течения [15, 16] усиления генерации не наблюдалось — эти флуктуации не имели волнового характера.

Несколько неожиданно наше исследование выявило родство рассмотренной нами задачи с задачей о резонансных и близких к ним эффектах в явлении динамо. Изучение резонансных эффектов в динамо исторически связано с тем, что номинальная длина солнечного цикла близка к орбитальному периоду Юпитера (см. [17] и приведенные там ссылки). Нам кажется, что вопрос о резонансе в динамо заслуживает специального исследования вне рамок этого конкретного астрофизического вопроса [18]. Мы показали, что резонансное усиление магнитного поля в подкритическом режиме винтового динамо может быть существенным и представлять интерес для динамо-эксперимента.

При реалистичных параметрах экспериментальной установки эффект генерации винтовым динамо может давать 10-ти кратный рост энергии магнитного поля. Конечно, существенная нестационарность реализуемого в эксперименте течения негативно сказывается на возможности выделения эффекта, но эта возможность не кажется безнадежной. Проведенные в последнее время эксперименты с медленным торможением [19] показывают, что можно добиться квазистационарности на протяжении десятков диффузионных времен, что дает надежду на обнаружение резонансных эффектов в подкритическом режиме.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 18-41-06201).

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Паркер, *Космические магнитные поля*, Мир, Москва (1982).
2. Я. Б. Зельдович, А. А. Рузмайкин, Д. Д. Соколов, *Магнитные поля в астрофизике*, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевск (2006).
3. Я. Б. Зельдович, *ЖЭТФ* **31**, 154 (1956).
4. Д. Д. Соколов, Р. А. Степанов, П. Г. Фрик, *УФН* **184**, 313 (2014).
5. E. Yushkov, A. Lukin, and D. Sokoloff, *Phys. Rev. E* **97**, 063108 (2018).
6. Ю. Б. Пономаренко, *Прикл. мех. тех. физ.* № 6, 47 (1973).
7. А. Гайлитис, Я. Ж. Фрейберг, *Магн. гидрод.* № 2, 3 (1976).
8. A. Gailitis and G. Lipsbergs, *Magnetohydrodynamics* **53**, 349 (2017).
9. P. Frick, V. Noskov, S. Denisov et al., *Magnetohydrodynamics* **38**, 143 (2002).
10. A. Gailitis, O. Lielausis, S. Dement'ev et al., *Phys. Rev. Lett.* **84**, 4365 (2000).
11. R. Stepanov, R. Volk, S. Denisov et al., *Phys. Rev. E* **73**, 046310 (2006).
12. С. А. Денисов, В. И. Носков, Р. А. Степанов, П. Г. Фрик, *Письма в ЖЭТФ* **88**, 198 (2008) [S. A. Denisov, V. I. Noskov, R. A. Stepanov, and P. G. Frick, *JETP Lett.* **88**, 167 (2008)].

13. P. Frick, V. Noskov, S. Denisov et al., *Phys Rev. Lett.* **105**, 184502 (2010).
14. R. Khalilov, I. Kolesnichenko, and R. Stepanov, *Magnetohydrodynamics* **49**, 73 (2013).
15. M. Peyrot, F. Plunian, and C. Normand, *Phys. Fluids* **19**, 054109 (2007).
16. В. В. Титов, Р. А. Степанов, Д. Д. Соколов, *ЖЭТФ* **153**, 677 (2018) [V. V. Titov, R. A. Stepanov, and D. D. Sokoloff, *JETP* **126**, 566 (2018)].
17. F. Stefani, A. Giesecke, and T. Weier, *Sol. Phys.* **294**, 60 (2019).
18. A. Kalinin and D. Sokoloff, *Magnetohydrodynamics* **55**, 193 (2019).
19. V. Noskov, R. Stepanov, P. Frick et al., *Magnetohydrodynamics* **55**, 149 (2019).