

# РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОНДАКТАНСОВ В ОДНОМЕРНЫХ СИСТЕМАХ: ЗАВИСИМОСТЬ ОТ УРОВНЯ ФЕРМИ И ИДЕАЛЬНЫХ КОНТАКТОВ

*И. М. Суслов\**

*Институт физических проблем им. П. Л. Капицы Российской академии наук  
119334, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 10 марта 2019 г.,  
после переработки 10 марта 2019 г.  
Принята к публикации 23 апреля 2019 г.

Корректное определение проводимости конечных систем предполагает присоединение к системе массивных идеальных контактов. Влияние последних на свойства системы оказывается существенным и исследуется на простейшем примере одномерных систем. В логнормальном режиме оно сводится к изменению абсолютного масштаба кондактанса, но в общем случае изменяет всю функцию распределения. При изменении длины системы могут возникать периодические или аperiodические осцилляции в ее сопротивлении. При изменении уровня Ферми распределение кондактансов одномерной системы претерпевает качественные изменения, напоминающие сглаженный переход Андерсона.

DOI: 10.1134/S0044451019110129

## 1. ВВЕДЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Вопрос о правильном определении проводимости конечных систем является нетривиальным и в начале 1980-х гг. был предметом оживленной дискуссии [1–9] (см. обзор [10]). Причина разногласий состояла в том, что проводимость конечных систем является плохо определенной величиной. Это связано со спецификой формул теории линейного отклика: входящие в них  $\delta$ -функции должны быть уширены на величину  $\Gamma$ , которая устремляется к нулю лишь после перехода к термодинамическому пределу; такая процедура, очевидно, невозможна в конечных системах. Для преодоления этой трудности предложен довольно элегантный трюк [3]: конечная система присоединяется к идеальным контактам (рис. 1), которые предполагаются достаточно массивными, так что переход к термодинамическому пределу фактически производится в этих контактах. Такая конструкция решает вопрос об интерпретации формулы Кубо, но порождает новые проблемы: соответствующее ей определение проводимости относится к составной системе «образец + идеальные провода», тогда как вопрос о его отношении к изучаемой систе-

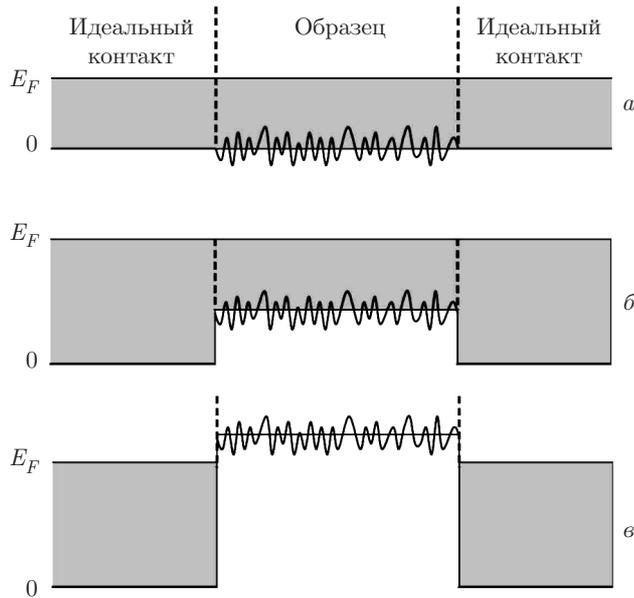
ме остается открытым. В работе [11] для решения этого вопроса предлагается введение слабопроницаемых границ, отделяющих систему от идеальных контактов. Вопрос о влиянии последних на свойства системы заведомо актуален вблизи перехода Андерсона [12], но обсуждался в работах [11, 12] лишь на абстрактном уровне. Ниже показано, что этот вопрос может быть предметом конструктивного анализа, который мы проиллюстрируем на простейшем примере одномерных систем.

В теоретических работах обычно предполагается, что в системе имеется единый уровень Ферми, а отличие идеальных контактов от изучаемого образца определяется лишь наличием в последнем случайного потенциала (рис. 2a). В практическом плане такая ситуация не очень реалистична: обычно в эксперименте подводящие провода изготавливаются из хорошего металла с большой энергией Ферми (так



**Рис. 1.** Корректное определение проводимости конечных систем предполагает присоединение к системе массивных идеальных контактов. Для обсуждения роли последних полезно введение полупроницаемых границ [11]

\* E-mail: suslov@kapitza.ras.ru



**Рис. 2.** а) В теоретических работах обычно предполагается, что отличие идеальных контактов от изучаемой системы определяется лишь наличием в последней случайного потенциала. б) Практически в эксперименте подводящие провода изготавливаются из хорошего проводника с большой энергией Ферми. в) Явное введение идеальных контактов оказывается неизбежным, если уровень Ферми в изучаемой системе соответствует запрещенной зоне идеального кристалла

что примеси эффективно экранируются), тогда как изучаемая система является полуметаллом или легированным проводником, в которых эффекты беспорядка проявляются наиболее ярко (рис. 2б). Тем не менее отличие от предыдущего случая (рис. 2а) выглядит непринципиальным и обычно игнорируется в теоретических работах. Однако введение чужеродных контактов оказывается неизбежным, если уровень Ферми в изучаемой системе соответствует запрещенной зоне идеального кристалла (рис. 2в), в которой разрешенные состояния возникают лишь из-за наличия случайного потенциала: попытка изготовить подводящие провода из того же материала, но без примесей, приведет к тому, что «идеальные контакты» окажутся непроводящими.

Явное введение идеальных контактов (рис. 2б,в) осуществляется с помощью краевых трансфер-матриц (см. разд. 2) и приводит к интересной физической задаче: путем небольшого изменения уровня Ферми (не ощутимого для идеальных контактов) можно переходить от квазиметаллического режима в изучаемой системе (рис. 2б) к флуктуационным состояниям, лежащим в глубине запрещенной зоны

(рис. 2в). При этом в распределении кондактансов одномерной системы происходят качественные изменения, напоминающие сглаженный переход Андерсона.

Если  $g$  — безразмерный кондактанс (полная проводимость  $G$  системы в квантовых единицах  $e^2/h$ ), то эволюция распределения  $P(\rho)$  безразмерных сопротивлений  $\rho = 1/g$  при изменении длины  $L$  системы описывается уравнением

$$\frac{\partial P(\rho)}{\partial L} = \alpha \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \rho(1 + \rho) \frac{\partial P(\rho)}{\partial \rho} \right], \quad (1)$$

которое получено во многих работах [13–18] и считается достаточно универсальным. Однако, как показано в работе [12], для одномерных систем справедливо более общее уравнение

$$\frac{\partial P(\rho)}{\partial L} = \tilde{\alpha} \frac{\partial}{\partial \rho} \times \left[ -\gamma(1 + 2\rho)P(\rho) + \rho(1 + \rho) \frac{\partial P(\rho)}{\partial \rho} \right], \quad (2)$$

которое в приближении случайных фаз сводится к уравнению (1). Последнее приближение хорошо работает в глубине разрешенной зоны при «естественных» идеальных контактах (рис. 2а), что обычно и предполагается в теоретических работах (см. ссылки в [19, 20]); ситуация внутри запрещенной зоны рассматривается сравнительно редко [21–23] и лишь на уровне волновых функций. Основная мотивация работы [12] состояла в том, что конечное значение параметра  $\gamma$  появляется в результате введения полупроницаемых границ (рис. 1), даже если приближение случайных фаз применимо к изучаемой системе.

При явном введении идеальных контактов получается еще более общее уравнение (см. разд. 7):

$$\frac{\partial P(\rho)}{\partial L} = \tilde{\alpha} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ -\gamma_1(1 + 2\rho)P(\rho) - 2\gamma_2\sqrt{\rho(1 + \rho)}P(\rho) + \rho(1 + \rho) \frac{\partial P(\rho)}{\partial \rho} \right], \quad (3)$$

которое сводится к уравнению (2) в области малых и больших  $L$ , когда типичные значения  $\rho$  соответственно малы и велики (при этом  $\gamma = \gamma_1$  в первом и  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$  во втором случае), так что уравнение (3) можно интерпретировать как уравнение (2) с переменным коэффициентом  $\gamma$ . Возможность изменения  $\gamma$  в процессе эволюции изначально допускалась в работе [12] и систематически исследуется в разд. 3. Предельное значение  $\gamma$  в области больших  $L$  определяется внутренними свойствами изучаемой системы и не зависит от идеальных контактов; на рис. 3

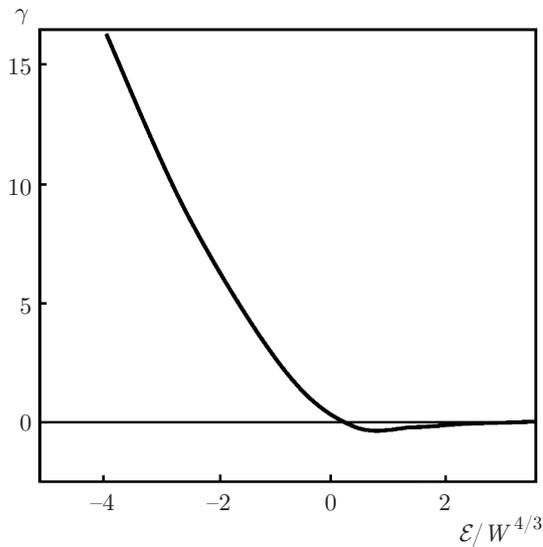


Рис. 3. Зависимость параметра  $\gamma$  в уравнении (2), относящегося к пределу больших  $L$ , от энергии  $\mathcal{E}$ , отсчитанной от нижнего края исходной зоны

показана его зависимость от  $\mathcal{E}/W^{4/3}$ , где  $\mathcal{E}$  — энергия Ферми, отсчитанная от нижнего края зоны, и  $W$  — амплитуда случайного потенциала (все энергии измеряются в единицах интеграла перекрытия для одномерной модели Андерсона, см. ниже уравнение (14)). Нетрудно видеть, что параметр  $\gamma$  формально всегда отличен от нуля, но принимает малые значения в глубине разрешенной зоны в согласии с приближением случайных фаз. Таким образом, конечность параметра  $\gamma$  определяется внутренними свойствами системы и введение полупроницаемых границ [12] не является для этого необходимым.

В плоскости  $(\mathcal{E}, W^2)$  можно выделить три характерные области (рис. 4): квазиметаллическую ( $|\gamma| \ll 1$ ); сильнолокализованную ( $\gamma \gg 1$ ) и «критическую» ( $\gamma \sim 1$ ). При изменении энергии  $\mathcal{E}$  для фиксированной амплитуды случайного потенциала  $W$  происходит что-то вроде сглаженного перехода Андерсона, который превращается в настоящий фазовый переход в пределе  $W \rightarrow 0$ , когда  $\gamma \rightarrow 0$  и  $\gamma \rightarrow \infty$  соответственно в металлической и диэлектрической фазах, тогда как ширина критической области ( $\gamma \sim 1$ ) неограниченно уменьшается.

Перейдем к зависимости результатов от свойств идеальных контактов. Начнем с простого примера, чтобы продемонстрировать наличие предмета для обсуждения. Если в ситуации рис. 26 устранить из системы случайный потенциал, то возникает простейшая квантовомеханическая задача о прохождении частицы через потенциальный барьер [24]. Вы-

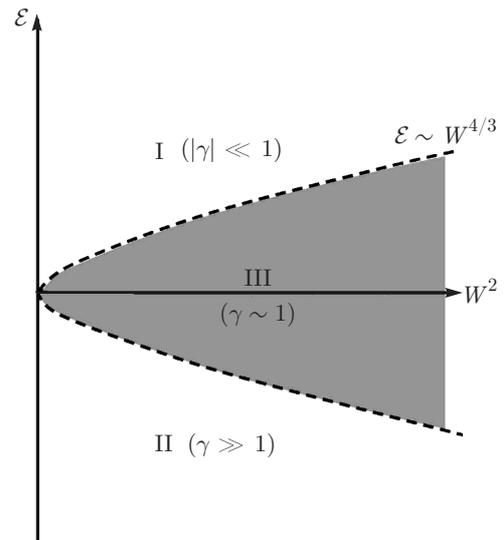


Рис. 4. В плоскости  $(\mathcal{E}, W^2)$  можно выделить три характерные области: I — квазиметаллическую ( $\gamma \ll 1$ ); II — сильнолокализованную ( $\gamma \gg 1$ ); III — «критическую» ( $\gamma \sim 1$ ). При изменении энергии  $\mathcal{E}$  для фиксированной амплитуды  $W$  случайного потенциала в распределении контактансов происходят качественные изменения, напоминающие сглаженный переход Андерсона. В пределе  $W \rightarrow 0$  возникает настоящий фазовый переход

числяя амплитуды прохождения ( $t$ ) и отражения ( $r$ ), легко найти ландауэровское сопротивление  $\rho = |r|^2/|t|^2$  такой системы:

$$\rho = \frac{1}{4} \left( \frac{k}{\kappa} + \frac{\kappa}{k} \right)^2 \text{sh}^2 \kappa L, \quad (4)$$

где  $k$  — фермиевский импульс в идеальных контактах,  $\kappa$  — декремент затухания волновых функций под барьером. Если зависимость  $\rho(L)$  определяется только параметром  $\kappa$ , т. е. внутренними свойствами изучаемой системы, то коэффициент пропорциональности зависит от импульса  $k$ , т. е. от свойств идеальных контактов.

Этот результат противоречит физической интуиции, поэтому рассмотрим вопрос о его интерпретации. Наша физическая интуиция сформирована на привычном омическом режиме, когда сопротивление  $\rho$  пропорционально длине системы  $L$  или полному числу  $n$  рассеивателей в ней; следовательно, каждый рассеиватель дает аддитивный вклад в сопротивление. Однако известно существование и локализованного режима, когда зависимость  $\rho(L)$  экспоненциальна, так что  $\ln \rho \propto L \propto n$  и каждый рассеиватель дает мультипликативный вклад в сопротивление. Поскольку сами по себе идеальные контакты не приводят к диссипации, их вклад в сопротивле-

ние обусловлен лишь границами раздела, который в экспоненциальном режиме является мультипликативным и влияет на коэффициент пропорциональности в выражении (4). Последний при изменении  $k$  меняется от единицы (при  $k = \kappa$ ) до бесконечности, так что влияние идеальных контактов оказывается очень существенным.

Уже из сказанного ясно, что в общем случае ситуация нетривиальна и вклад границ раздела не является ни аддитивным, ни мультипликативным (см. разд. 8). Кроме того, кондактанс конечной системы является сильнофлуктуирующей величиной [25, 26] и нужно рассматривать его функцию распределения. Зависимость же последней от граничных условий проявляется уже в металлическом режиме, где она может быть исследована как аналитически [27, 28], так и численно [29].

Зависимость распределения кондактансов одномерной системы от свойств идеальных контактов подробно исследована ниже (см. разд. 6). Отметим некоторые простые утверждения.

1. При больших  $L$  для  $P(\rho)$  справедливо логнормальное распределение

$$P(\rho) = \frac{1}{\rho\sqrt{4\pi t}} \exp \left\{ -\frac{[\ln \rho - (2\gamma + 1)t]^2}{4t} \right\}, \quad (5)$$

$$t = \tilde{\alpha}L,$$

в которое входит предельное значение  $\gamma$  при  $L \rightarrow \infty$ . Оно является решением уравнения (2) при больших  $\rho$ , когда  $1 + 2\rho \approx 2\rho$ ,  $\rho(1 + \rho) \approx \rho^2$ . Параметры  $\tilde{\alpha}$  и  $\gamma$  устанавливаются (см. разд. 5) путем исследования эволюции вторых и четвертых моментов для элементов трансфер-матрицы (см. разд. 4); они определяются внутренними свойствами исследуемой системы и не зависят от свойств идеальных контактов. Последние оказывают влияние лишь на абсолютный масштаб кондактанса.

2. Для уровня Ферми в глубине запрещенной зоны (рис. 2б) последнее утверждение справедливо и за пределами логнормальной области: идеальные контакты не влияют на форму распределения  $P(\rho)$ , но изменяют абсолютный масштаб  $\rho$  на постоянный множитель,

$$P(\rho) \rightarrow AP(A\rho), \quad A = 1/\Delta_2^2, \quad (6)$$

где параметр  $\Delta_2$  определен ниже в формуле (9).

3. В критической области ситуация усложняется: идеальные контакты изменяют лишь общий масштаб кондактанса, но значение параметра  $A$  в выражении (6) различно в логнормальном режиме и в

области не слишком больших  $L$ . В последнем случае при «естественных» идеальных контактах (см. рис. 2а) реализуется распределение

$$P(\rho) = \frac{1}{\Gamma(\gamma + 1)} \frac{\rho^\gamma \exp(-\rho/t)}{t^{\gamma+1}}, \quad (7)$$

которое является решением уравнения (2) при малых  $\rho$ , когда  $1 + 2\rho \approx 1$ ,  $\rho(1 + \rho) \approx \rho$ . В критической области реализуется значение  $\gamma = -1/2$ , а параметр  $A$  в формуле (6) равен  $1/(\Delta_2 - \Delta_1)^2$ , где  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  определены ниже выражениями (9).

4. В глубине разрешенной зоны ситуация еще более усложняется и идеальные контакты изменяют всю функцию распределения в области не слишком больших  $L$ . Если для «естественных» контактов (рис. 2а) реализуется распределение (7) с  $\gamma = 0$ , то при введении чужеродных контактов (рис. 2б) его форма существенно изменяется. В частности, при формальном пределе  $L \rightarrow 0$  возникает универсальное распределение<sup>1)</sup>

$$P(\rho) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1}{\rho(\rho_c - \rho)}} \Theta(\rho_c - \rho), \quad (8)$$

эволюция которого при увеличении  $L$  показана на рис. 5а и 5б; последние различаются значениями параметров

$$\Delta_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{k}{\kappa} - \frac{\kappa}{k} \right), \quad \Delta_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{k}{\kappa} + \frac{\kappa}{k} \right). \quad (9)$$

Параметры (9) определены для запрещенной зоны, но в разрешенной зоне сохраняют тот же вид, если формально положить  $\bar{k} = \kappa$  для фермиевского импульса  $\bar{k}$  изучаемой системы; они связаны соотношением

$$\Delta_2^2 - \Delta_1^2 = 1, \quad (10)$$

которое имеет принципиальное значение для сохранения нормировки. В дальнейшем считаем  $\Delta_1$  свободным параметром, изменяющимся от  $-\infty$  до  $\infty$ , тогда как положительный параметр  $\Delta_2$  определяется соотношением (10).

Среднее значение  $\rho$  в одномерных системах, как правило, не репрезентативно, но при этом вполне наблюдаемо (см. разд. 8). Его эволюция допускает полное описание при произвольных  $L$ , что позволяет наглядно продемонстрировать влияние идеальных

<sup>1)</sup> Подчеркнем, что речь идет именно о формальном пределе  $L \rightarrow 0$ , так как фактически применимость результатов (7) и (8) ограничена условием  $L \gtrsim 1/\kappa$ .

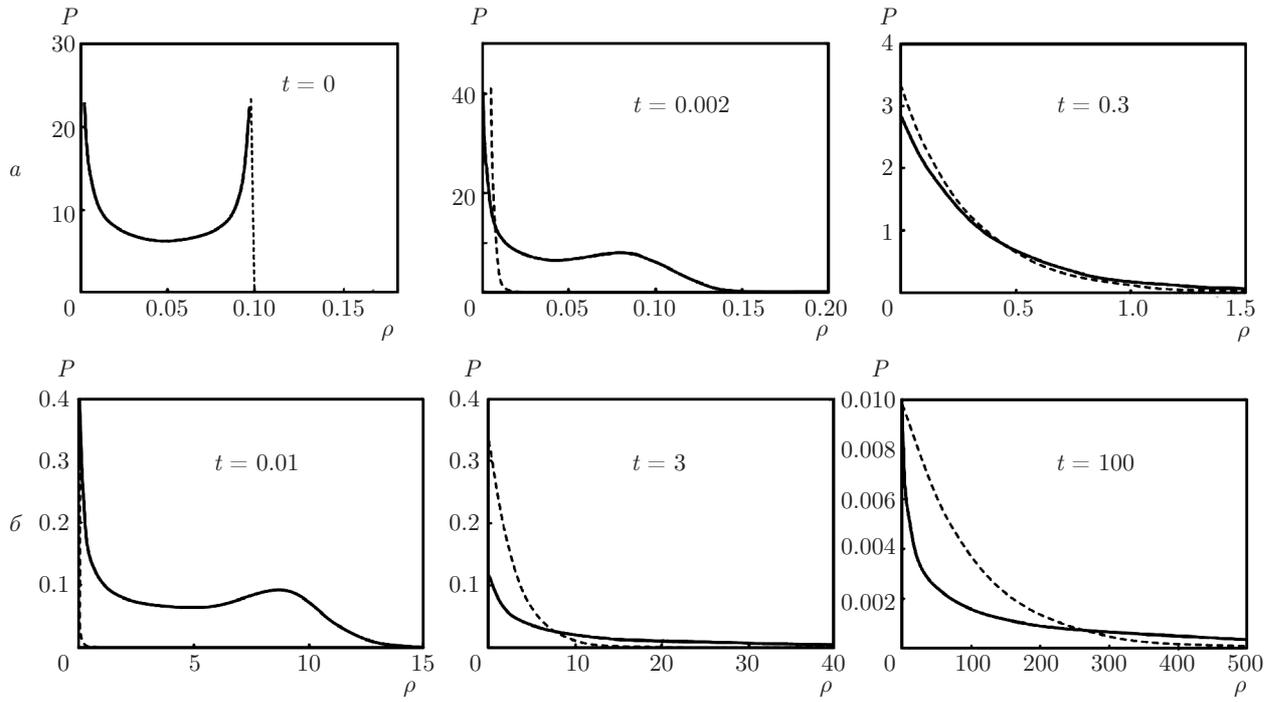


Рис. 5. Эволюция распределения  $P(\rho)$  в металлическом режиме (а) для слабого ( $\Delta_1^2 = 0.1$ ) и (б) для сильного ( $\Delta_1^2 = 10$ ) различий уровней Ферми в изучаемом образце и в идеальных контактах. Штриховая линия показывает распределение (7) с  $\gamma = 0$

контактов. При изменении  $L$  как  $\langle \rho \rangle$ , так и высшие моменты могут испытывать осцилляции с несоизмеримыми периодами, что обеспечивает аперриодический характер осцилляций  $\rho$  для конкретного образца (см. разд. 8).

## 2. РАЗЛИЧНЫЕ ВИДЫ ТРАНСФЕР-МАТРИЦ

Использование трансфер-матриц является естественным методом для исследования одномерных систем. Наиболее удобна трансфер-матрица  $T$  в волновом представлении, связывающая амплитуды волн слева ( $Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ ) и справа ( $Ce^{ikx} + De^{-ikx}$ ) от рассеивателя:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Она определяется амплитудами прохождения ( $t$ ) и отражения ( $r$ ) и при наличии инвариантности относительно обращения времени допускает параметризацию [1]:

$$T = \begin{pmatrix} 1/t & -r/t \\ -r^*/t^* & 1/t^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\rho+1} e^{i\varphi} & \sqrt{\rho} e^{i\theta} \\ \sqrt{\rho} e^{-i\theta} & \sqrt{\rho+1} e^{-i\varphi} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где  $\rho = |r/t|^2$  — сопротивление по Ландауэру [2]. При последовательном расположении рассеивателей их трансфер-матрицы перемножаются. Для слабого рассеивателя матрица  $T$  близка к единичной, что позволяет выводить дифференциальные уравнения эволюции для ее элементов и для ландауровского сопротивления  $\rho$ .

Для энергии внутри запрещенной зоны решения слева ( $Ae^{\kappa x} + Be^{-\kappa x}$ ) и справа ( $Ce^{\kappa x} + De^{-\kappa x}$ ) от рассеивателя являются суперпозицией растущей и затухающей экспонент и могут быть связаны псевдо-трансфер-матрицей:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \mathcal{T} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}, \quad (13)$$

для которой не справедлива параметризация (12) и не очевидна связь с ландауэровским сопротивлени-

Таблица. Достоинства и недостатки различных трансфер-матриц

Матрица	Недостатки	Достоинства
$T$	Ограничена разрешенной зоной	Определяется внутренними свойствами системы Прямая связь с $\rho$ Близка к единичной для слабого рассеивателя
$\mathcal{T}$	Ограничена запрещенной зоной Нет прямой связи с $\rho$	Определяется внутренними свойствами системы Близка к единичной для слабого рассеивателя Действительные матричные элементы
$\tau$	Нет прямой связи с $\rho$ Не близка к единичной для слабого рассеивателя	Определяется внутренними свойствами системы Применима при всех энергиях Действительные матричные элементы
$\tilde{T}$	Зависит от идеальных контактов	Применима при всех энергиях Прямая связь с $\rho$ Близка к единичной для слабого рассеивателя

ем. Элементы матрицы  $\mathcal{T}$  действительны, а ее детерминант равен единице, как и в случае (12).

Наконец, можно ввести трансфер-матрицу в координатном представлении, что удобно продемонстрировать для одномерной модели Андерсона, определяемой дискретным уравнением Шредингера

$$\Psi_{n+1} + \Psi_{n-1} + V_n \Psi_n = E \Psi_n, \quad (14)$$

где  $E$  — энергия, отсчитанная от центра зоны, а интеграл перекрытия принят за единицу. Переписывая (14) в виде

$$\begin{pmatrix} \Psi_{n+1} \\ \Psi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E - V_n & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_n \\ \Psi_{n-1} \end{pmatrix} \quad (15)$$

и итерируя  $n$  раз, легко получить

$$\begin{pmatrix} \Psi_{n+1} \\ \Psi_n \end{pmatrix} = \tau \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_0 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где матрица  $\tau$  является произведением  $n$  матриц типа (15).

Матрицы  $T$ ,  $\mathcal{T}$ ,  $\tau$  определяются внутренними свойствами системы; каждая из них обладает своим набором достоинств и недостатков (см. таблицу). Нетрудно видеть, что эти три матрицы не позволяют получить уравнение эволюции для  $\rho$ , применимое при всех энергиях. Матрица  $T$  обладает

нужными свойствами, но непосредственно применима лишь в разрешенной зоне; в запрещенной зоне ее роль переходит к псевдоматрице  $\mathcal{T}$ , которая не имеет прямой связи с ландауэровским сопротивлением  $\rho$ . Матрица  $\tau$  применима при всех энергиях, но не имеет прямой связи с  $\rho$  и не близка к единичной для слабого рассеивателя. Матрицы  $\mathcal{T}$  и  $\tau$  состоят из действительных элементов, что дает некоторые технические преимущества<sup>2)</sup>.

Для преодоления указанных трудностей определим «внешнюю» трансфер-матрицу  $\tilde{T}$ , которая учитывает наличие чужеродных контактов (рис. 2б) и связана с матрицей  $T$  изучаемой системы с помощью краевых матриц  $T_a$  и  $T_b$ :

$$\begin{aligned} \tilde{T} &= T_a T T_b = \\ &= \begin{pmatrix} a & a_1 \\ a_1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & b_1 \\ b_1 & b \end{pmatrix}, \\ a &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\bar{k}}{k} \right), \quad a_1 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\bar{k}}{k} \right), \\ b &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{k}{\bar{k}} \right), \quad b_1 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{k}{\bar{k}} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

<sup>2)</sup> В частности, исследование эволюции четвертых моментов для матриц с комплексными элементами представляется практически нереальным, так как требует диагонализации матрицы большого размера.

Краевые матрицы имеют простой смысл: например,  $T_a$  связывает амплитуды волн слева от границы раздела ( $Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ ) с амплитудами волн справа от нее ( $A_1e^{i\bar{k}x} + B_1e^{-i\bar{k}x}$ ). Очевидно,  $T_a T_b = 1$ , т. е. краевые матрицы являются взаимно обратными.

Для энергии внутри запрещенной зоны (рис. 2б) явное введение идеальных контактов является необходимым и также осуществляется путем использования краевых матриц, позволяющих превратить псевдоматрицу  $\mathcal{T}$  в истинную трансфер-матрицу  $\tilde{T}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{T} &= T_a \mathcal{T} T_b = \\ &= \begin{pmatrix} a & a^* \\ a^* & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & b^* \\ b^* & b \end{pmatrix}, \quad (18) \\ a &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\kappa}{ik} \right), \quad b = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{ik}{\kappa} \right). \end{aligned}$$

Соотношения (18) получаются из (17) заменой  $\bar{k} \rightarrow -ik$ .

Использование краевых матриц позволяет связать также  $\tilde{T}$  и  $\tau$ :

$$\begin{aligned} \tilde{T} &= \frac{1}{2i \sin ka_0} \begin{pmatrix} 1 & -\exp(-ika_0) \\ -1 & \exp(ika_0) \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(ika_0) & \exp(-ika_0) \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (19) \end{aligned}$$

где  $a_0$  — межатомное расстояние для модели (14). Таким образом, явное введение идеальных контактов приводит к линейному преобразованию элементов трансфер-матрицы. Линейное преобразование не изменяет показателей роста для вторых и четвертых моментов, которые определяются внутренними свойствами системы и не зависят от идеальных контактов (см. разд. 4). Как ясно из таблицы, матрица  $\tilde{T}$  обладает всеми необходимыми свойствами, но содержит зависимость от идеальных контактов; последнее можно считать недостатком, но фактически это отражение объективной реальности.

### 3. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ТОЧЕЧНЫХ РАССЕЙВАТЕЛЕЙ

Коэффициенты  $\tilde{\alpha}$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  уравнения (3) не являются постоянными и испытывают изменения в процессе эволюции. Чтобы получить представление об этой эволюции, рассмотрим последовательность из точечных рассеивателей. Для определенности будем рассматривать модель Андерсона (14) вблизи края зоны, где она соответствует дискретизации обычного уравнения Шредингера.

Нетрудно проверить, что точечному рассеивателю с потенциалом  $V\delta_{n0}$  соответствует трансфер-матрица

$$\begin{pmatrix} 1 - i\epsilon & -i\epsilon \\ i\epsilon & 1 + i\epsilon \end{pmatrix}, \quad (20)$$

где  $\epsilon = V/2ka_0$ . Если два точечных рассеивателя с амплитудами  $V_0$  и  $V_1$  находятся на расстоянии  $L$ , то они описываются трансфер-матрицей

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 - i\epsilon_0 & -i\epsilon_0 \\ i\epsilon_0 & 1 + i\epsilon_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-ikL} & 0 \\ 0 & e^{ikL} \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} 1 - i\epsilon_1 & -i\epsilon_1 \\ i\epsilon_1 & 1 + i\epsilon_1 \end{pmatrix}. \quad (21) \end{aligned}$$

Наконец, если рассеиватели с амплитудами  $V_0, V_1, V_2, \dots, V_n$  находятся в точках  $0, L_1, L_1 + L_2, \dots$ , то соответствующая трансфер-матрица имеет вид

$$T^{(n)} = T_{\epsilon_0} T_{\delta_1} T_{\epsilon_1} T_{\delta_2} T_{\epsilon_2} \dots T_{\delta_n} T_{\epsilon_n}, \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} T_{\epsilon_s} &= \begin{pmatrix} 1 - i\epsilon_s & -i\epsilon_s \\ i\epsilon_s & 1 + i\epsilon_s \end{pmatrix}, \\ T_{\delta_s} &= \begin{pmatrix} \exp(-i\delta_s) & 0 \\ 0 & \exp(i\delta_s) \end{pmatrix}, \quad (23) \\ \epsilon_s &= \frac{V_s}{2ka_0}, \quad \delta_s = kL_s. \end{aligned}$$

При изменении числа рассеивателей на единицу справедливо рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} T^{(n)} &= T^{(n-1)} \begin{pmatrix} u_n & v_n \\ v_n^* & u_n^* \end{pmatrix}, \quad (24) \\ u_n &= (1 - i\epsilon_n) \exp(-i\delta_n), \\ v_n &= -i\epsilon_n \exp(-i\delta_n). \end{aligned}$$

Для удобства будем полагать  $\epsilon_0 = 0$ , чтобы в качестве начального условия для  $T^{(0)}$  использовать единичную матрицу. Если все  $\epsilon_n$  малы, то при не слишком больших  $n$  можно ограничиться двумя первыми порядками по  $v_n$ . Проводя прямое перемножение матриц, получим

$$\begin{aligned} T_{11}^{(n)} &= u_1 u_2 \dots u_n + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n u_1 u_2 \dots u_{i-1} v_i \times \\ &\times u_{i+1}^* \dots u_{j-1}^* v_j^* u_{j+1} \dots u_n, \quad (25) \\ T_{12}^{(n)} &= \sum_{i=1}^n u_1 u_2 \dots u_{i-1} v_i u_{i+1}^* \dots u_n^* \end{aligned}$$

и  $T_{21} = T_{12}^*$ ,  $T_{22} = T_{11}^*$ .

В модели Андерсона (14) рассеиватели находятся на каждом узле решетки, поэтому все  $\delta_s$  одинаковы,  $\delta_s = ka_0$ . Выражения (25) можно привести к виду

$$T_{11}^{(n)} = \sqrt{1+S_1^2+S_2^2} \exp(-iS - in\delta), \quad (26)$$

$$T_{12}^{(n)} = S_1 - iS_2,$$

где в низшем порядке по  $\epsilon$  имеем

$$S = \sum_{s=1}^n \epsilon_s, \quad S_1 = \sum_{s=1}^n \epsilon_s \sin(n-2s)\delta, \quad (27)$$

$$S_2 = \sum_{s=1}^n \epsilon_s \cos(n-2s)\delta.$$

Принимая, как обычно, для модели Андерсона

$$\langle V_n \rangle = 0, \quad \langle V_n^2 \rangle = W^2, \quad (28)$$

получим нулевые средние значения для всех сумм в (27), тогда как для вторых моментов

$$\langle S^2 \rangle = 2\langle S_1^2 \rangle = 2\langle S_2^2 \rangle = \epsilon^2 n, \quad (29)$$

$$\langle SS_1 \rangle \sim \langle SS_2 \rangle \sim \langle S_1 S_2 \rangle \sim \epsilon^2,$$

где  $\epsilon^2 = W^2/4k^2 a_0^2$ . Приведенные выражения верны при условии

$$1/\delta \ll n \ll 1/\epsilon^2, \quad (30)$$

где левое неравенство обеспечивает большое число осцилляций синуса и косинуса в суммах (27), а правое необходимо для возможности пренебрежения высшими порядками по  $\epsilon$ . При больших  $n$  все суммы в (27) распределены по Гауссу и практически независимы, так что их совместное распределение вероятностей имеет вид

$$P(S, S_1, S_2) \sim \exp \left\{ -\frac{S^2}{2n\epsilon^2} - \frac{S_1^2}{n\epsilon^2} - \frac{S_2^2}{n\epsilon^2} \right\}. \quad (31)$$

Учитывая, что  $\rho = S_1^2 + S_2^2$ ,  $\varphi = -S - n\delta$ , имеем следующее распределение вероятностей для параметров трансфер-матрицы (12):

$$P(\rho, \varphi, \theta) \sim \exp \left\{ -\frac{(\varphi + n\delta)^2}{2n\epsilon^2} - \frac{\rho}{n\epsilon^2} \right\}. \quad (32)$$

Мы видим, что при  $\delta \gg \epsilon^2$ , т.е. в глубине разрешенной зоны, фаза  $\theta$  полностью стохастизируется на масштабе  $n \sim 1/\delta$ . Стохастизация фазы  $\varphi$  происходит на масштабе  $n \sim 1/\epsilon^2$ , но ее равномерное распределение возникает уже на масштабе  $1/\delta$  за счет регулярных изменений. Так или иначе, стохастизации  $\theta$  достаточно для применимости приближения

случайных фаз и исчезновения параметра  $\gamma$ , так как в уравнение эволюции входит лишь комбинация  $\psi = \theta - \varphi$  (см. разд. 7). Решение уравнения (2) при малых  $\rho$  имеет вид (7), который согласуется с (32) при  $\gamma = 0$  и  $t = \epsilon^2 n$ . Справедливость последних соотношений следует из формул (93) в разд. 7. При больших  $n$  экспоненциальный рост элементов  $T_{ij}$  определяется произведением  $|u_1| |u_2| \dots |u_n| \equiv \exp(w_n)$ , которое содержится как во всех членах выражений (25), так и членах высших порядков. Величина  $w_n$  имеет среднее значение  $\epsilon^2 n/2$ , что (ввиду  $\rho = |T_{12}|^2$ ) согласуется с результатом  $a = \epsilon^2$  для параметра  $a$  в логнормальном распределении (см. разд. 5). Отброшенные члены не дают вкладов  $O(\epsilon^2)$  в среднее значение величины  $w_n$ , но изменяют ее дисперсию.

Изложенное справедливо в глубине разрешенной зоны при «естественных» идеальных контактах (рис. 2а). При переходе в запрещенную зону имеем  $T^{(n)} = T_a \mathcal{T}^{(n)} T_b$ , где псевдоматрица  $\mathcal{T}^{(n)}$  определяется теми же соотношениями, что и выше, с заменой  $k \rightarrow -ik$ . В частности,

$$\mathcal{T}^{(n)} = \mathcal{T}^{(n-1)} \begin{pmatrix} u_n & v_n \\ v_n^* & u_n^* \end{pmatrix}, \quad (33)$$

$$u_n = (1 + \epsilon_n) \exp(-\delta_n), \quad v_n = \epsilon_n \exp(-\delta_n),$$

$$\epsilon_n = V_n/2ka_0, \quad \delta_n = \kappa L_n,$$

где звездочка отмечает не комплексное сопряжение, а изменение знаков  $\epsilon_n$  и  $\delta_n$ . С учетом этой модификации соотношения (25) формально сохраняются. Вынося из сумм множитель  $u_1^* u_2^* \dots u_n^* \equiv \exp(w_n)$ , имеем

$$\mathcal{T}^{(n)} =$$

$$= \begin{pmatrix} \exp(-\tilde{w}_n) - \exp(\tilde{w}_n) S_1 S_2 & \exp(\tilde{w}_n) S_1 \\ -\exp(\tilde{w}_n) S_2 & \exp(\tilde{w}_n) \end{pmatrix}, \quad (34)$$

$$S_1 = \sum_{s=1}^n \epsilon_s \exp(-2s\delta),$$

$$S_2 = \sum_{s=0}^{n-1} \epsilon_{n-s} \exp(-2s\delta),$$

где  $\tilde{w}_n$  отличается от  $w_n$  на вклад  $O(\epsilon^2)$  с нулевым средним, а  $S_1$  и  $S_2$  приведены в низшем порядке по  $\epsilon$ . Подстановка в (18) дает для фазовых переменных

$$\text{tg } \varphi = -\Delta_1 - \Delta_2(S_1 + S_2), \quad \text{ctg } \theta = \frac{S_1 - S_2}{\Delta_2}, \quad (35)$$

где  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  определены в (9). Замечая, что при условии (30)

$$\langle S_1^2 \rangle = \langle S_2^2 \rangle = \epsilon^2/4\delta, \quad \langle S_1 S_2 \rangle \approx 0, \quad (36)$$

видим, что флуктуации  $\varphi$  и  $\theta$  являются ограниченными и не возрастают с увеличением  $n$ . Случай  $k = \kappa$  является особым; при этом  $\Delta_1 = 0$  и  $\Delta_2 = 1$ , так что

$$\varphi = -(S_1 + S_2), \quad \theta = \pi/2 + (S_2 - S_1), \quad (37)$$

а переменная  $\psi = \theta - \varphi$  не имеет существенной эволюции, оставаясь локализованной вблизи  $\pi/2$  при всех  $n \lesssim 1/\epsilon^2$ . Как мы увидим в разд. 7, это свойство сохраняется и при  $n \gtrsim 1/\epsilon^2$ . При больших  $n$   $\exp(\tilde{w}_n)$  обеспечивает рост элементов  $t_{ij}$  и соответственно  $\rho \sim \exp(2\tilde{w}_n)$ ; величина  $2\tilde{w}_n$  имеет среднее значение  $(2\delta - \epsilon^2)n$  и дисперсию  $4\epsilon^2 n$ , что согласуется с результатами (56) в разд. 5.

Перейдем к критической области, определяемой условием  $\delta \ll \epsilon^2$ . Тогда при достаточно малых  $n$  можно положить  $\delta_s = 0$  в (23) и получить

$$T^{(n)} = \begin{pmatrix} 1 - iS & -iS \\ iS & 1 + iS \end{pmatrix}, \quad S = \sum_{s=1}^n \epsilon_s, \quad (38)$$

где сумма  $S$  распределена по Гауссу аналогично (31). Совместное распределение  $\rho, \varphi, \theta$  определяется соотношением

$$P(\rho, \varphi, \theta) = \int dS \frac{1}{\sqrt{2\pi n \epsilon^2}} \exp\left(-\frac{S^2}{2n\epsilon^2}\right) \times \delta(\rho - S^2) \delta(\varphi + \arctg S) \delta\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right), \quad (39)$$

и интегрирование по  $\varphi$  и  $\theta$  приводит к результату

$$P(\rho) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{1}{\sqrt{2\pi n \epsilon^2}} \exp\left(-\frac{\rho}{2n\epsilon^2}\right), \quad (40)$$

что согласуется с (7) при  $\gamma = -1/2, t = 2n\epsilon^2$ ; последнее следует из формулы (93) в разд. 7 при условии локализации  $\psi$  вблизи  $\pm\pi/2$ . Такая локализация действительно имеет место при малых  $\rho$ , когда  $\varphi \sim \sqrt{\rho} \ll 1, \theta = -\pi/2$ , а (40) является решением уравнения (2). Однако результат (40) справедлив в более широкой области  $n \lesssim (\epsilon^2 \delta^2)^{-1/3}$  (см. разд. 8), когда значение  $\rho \sim n\epsilon^2$  может быть велико; при этом  $\varphi$  локализуется вблизи  $\pm\pi/2$ , а  $\sin \psi$  становится малым в соответствии с результатами для логнормального режима (см. разд. 5, 7).

#### 4. ЭВОЛЮЦИЯ МОМЕНТОВ

Согласно (33), для элементов псевдо-трансфер-матрицы в запрещенной зоне справедливы уравнения эволюции

$$\begin{aligned} t_{11}^{(n)} &= u_n t_{11}^{(n-1)} + v_n^* t_{12}^{(n-1)}, \\ t_{12}^{(n)} &= v_n t_{11}^{(n-1)} + u_n^* t_{12}^{(n-1)} \end{aligned} \quad (41)$$

и такие же уравнения для  $t_{21}^{(n)}$  и  $t_{22}^{(n)}$ ; существенно, что величины  $t_{ij}^{(n-1)}$  не содержат  $\epsilon_n$  и статистически независимы от  $u_n, v_n$ . Вводя обозначения для вторых моментов,

$$\begin{aligned} z_1^{(n)} &= \left\langle [t_{11}^{(n)}]^2 \right\rangle, \quad z_2^{(n)} = \left\langle t_{11}^{(n)} t_{12}^{(n)} \right\rangle, \\ z_3^{(n)} &= \left\langle [t_{12}^{(n)}]^2 \right\rangle, \end{aligned} \quad (42)$$

получим систему линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами,

$$\begin{pmatrix} z_1^{(n)} \\ z_2^{(n)} \\ z_3^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2\delta + \epsilon^2 & -2\epsilon^2 & \epsilon^2 \\ \epsilon^2 & 1 - 2\epsilon^2 & \epsilon^2 \\ \epsilon^2 & -2\epsilon^2 & 1 + 2\delta + \epsilon^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} z_1^{(n-1)} \\ z_2^{(n-1)} \\ z_3^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad (43)$$

решение которой ищется в экспоненциальной форме,  $z_i^{(n)} \sim \lambda^n$  [30]. Нетрудно видеть, что  $\lambda$  есть собственное значение матрицы в (43). Полагая  $\lambda = 1 + x$ , получим уравнение для определения  $x$ :

$$x(x^2 - 4\delta^2) = 8\epsilon^2 \delta^2. \quad (44)$$

В (43), (44) мы имеем в виду предел

$$\delta \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0, \quad \delta/\epsilon^2 = \text{const}, \quad (45)$$

актуальный вблизи края зоны идеального кристалла, когда не существенны эффекты соизмеримости [31, 32], затрудняющие анализ. Поэтому в матрице (43) мы сохраняем члены первого порядка по  $\delta$  и второго по  $\epsilon$ .

Аналогично для четвертых моментов положим

$$\begin{aligned} z_1^{(n)} &= \left\langle [t_{11}^{(n)}]^4 \right\rangle, \quad z_2^{(n)} = \left\langle [t_{11}^{(n)}]^3 t_{12}^{(n)} \right\rangle, \\ z_3^{(n)} &= \left\langle [t_{11}^{(n)}]^2 [t_{12}^{(n)}]^2 \right\rangle, \end{aligned} \quad (46)$$

$$z_4^{(n)} = \left\langle t_{11}^{(n)} [t_{12}^{(n)}]^3 \right\rangle, \quad z_5^{(n)} = \left\langle [t_{12}^{(n)}]^4 \right\rangle$$

и получим систему разностных уравнений

$$\begin{pmatrix} z_1^{(n)} \\ z_2^{(n)} \\ z_3^{(n)} \\ z_4^{(n)} \\ z_5^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 4\delta + 6\epsilon^2 & -12\epsilon^2 & 6\epsilon^2 & 0 & 0 \\ 3\epsilon^2 & 1 - 2\delta - 3\epsilon^2 & -3\epsilon^2 & 3\epsilon^2 & 0 \\ \epsilon^2 & 2\epsilon^2 & 1 - 6\epsilon^2 & 2\epsilon^2 & \epsilon^2 \\ 0 & 3\epsilon^2 & -3\epsilon^2 & 1 + 2\delta - 3\epsilon^2 & 3\epsilon^2 \\ 0 & 0 & 6\epsilon^2 & -12\epsilon^2 & 1 + 4\delta + 6\epsilon^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1^{(n-1)} \\ z_2^{(n-1)} \\ z_3^{(n-1)} \\ z_4^{(n-1)} \\ z_5^{(n-1)} \end{pmatrix}. \quad (47)$$

Принимая  $z_i^{(n)} \sim \lambda^n$  и полагая  $\lambda = 1 + x$ , получим уравнение для  $x$ :

$$x(x^2 - 4\delta^2)(x^2 - 16\delta^2) = 24\epsilon^2(7\delta^2x^2 - 16\delta^4). \quad (48)$$

Заметим, что уравнения (44) и (48) можно получить, составляя произведение диагональных элементов в матрицах (43), (47) и ограничиваясь вторым порядком по  $\epsilon$ . Дело в том, что недиагональные элементы вносят в детерминант вклады  $O(\epsilon^4)$  и выше, сокращение которых можно предвидеть заранее. Поскольку  $\epsilon^2 = W^2/4\delta^2$  (см. разд. 3), комбинации  $\epsilon^2, \epsilon^4, \dots, \epsilon^{10}$  и  $\delta^2\epsilon^4, \delta^2\epsilon^6$  имеют сингулярности при  $\delta \rightarrow 0$ , отсутствие которых очевидно из уравнений эволюции для координатной трансфер-матрицы (см. Приложение А). Допустимы лишь комбинации  $\delta^2\epsilon^2$  и  $\delta^4\epsilon^2$ , которые и входят в уравнения<sup>3)</sup> (44) и (48). В глубине разрешенной и запрещенной зон возможность ограничения диагональными элементами позволяет установить показатели роста для высших моментов и убедиться в их соответствии логнормальному распределению.

Для модели Андерсона (14) имеем  $\delta^2 = -\mathcal{E}$ ,  $4\epsilon^2\delta^2 = W^2$ , где  $\mathcal{E}$  — энергия, отсчитанная от нижнего края зоны. Поэтому уравнения (44), (48) могут быть переписаны в виде

$$\begin{aligned} x(x^2 + 4\mathcal{E}) &= 2W^2, \\ x(x^2 + 4\mathcal{E})(x^2 + 16\mathcal{E}) &= 42W^2x^2 + 96W^2\mathcal{E}. \end{aligned} \quad (49)$$

Уравнения (49) получены при  $\mathcal{E} < 0$ , но ввиду регулярности по  $\mathcal{E}$  могут быть аналитически продолжены на произвольные  $\mathcal{E}$ . Эти уравнения можно также вывести, рассматривая эволюцию координатной трансфер-матрицы (см. Приложение А), которая применима при произвольных  $\mathcal{E}$  и не требует аналитического продолжения. Один из корней для каждого из уравнений (49) остается положительным при всех физических значениях параметров. Среди всех корней уравнения он имеет максимальную действительную часть и определяет показатель роста для вторых ( $x_2$ ) или четвертых ( $x_4$ ) моментов. Поведение  $x_2$  и  $x_4$  как функций  $\mathcal{E}/W^{4/3}$  показано на рис. 6.

Нетрудно получить асимптотики для  $x_2$  и  $x_4$ . В глубине запрещенной зоны ( $\delta \gg \epsilon^2$ ) из (44), (48) имеем

$$x_2 = 2\delta + \epsilon^2, \quad x_4 = 4\delta + 6\epsilon^2. \quad (50a)$$

При переходе в разрешенную зону в (44), (48) происходит замена  $\delta \rightarrow i\delta$ ,  $\epsilon \rightarrow -i\epsilon$ , после чего в глубине зоны ( $\delta \gg \epsilon^2$ ) получим

$$x_2 = 2\epsilon^2, \quad x_4 = 6\epsilon^2. \quad (50b)$$

В критической же области ( $\delta \ll \epsilon^2$ ) справедливы результаты

$$x_2 = 2(\epsilon^2\delta^2)^{1/3}, \quad x_4 = 2(21\epsilon^2\delta^2)^{1/3}. \quad (50c)$$

В терминах  $\mathcal{E}$  и  $W$  имеем

$$\begin{aligned} x_2 &= 2|\mathcal{E}|^{1/2} + W^2/4|\mathcal{E}|, & x_4 &= 4|\mathcal{E}|^{1/2} + 3W^2/2|\mathcal{E}|, & -\mathcal{E} &\gg W^{4/3}, \\ x_2 &= (2W^2)^{1/3}, & x_4 &= (42W^2)^{1/3}, & |\mathcal{E}| &\ll W^{4/3}, \\ x_2 &= W^2/2\mathcal{E} - W^6/32\mathcal{E}^4, & x_4 &= 3W^2/2\mathcal{E} + 27W^6/64\mathcal{E}^4, & \mathcal{E} &\gg W^{4/3}, \end{aligned} \quad (51)$$

где последний результат приведен с более высокой точностью.

<sup>3)</sup> Выше мы перечислили все возможные комбинации. Действительно, изменение знака  $\delta$  в выражениях (43), (47) приводит к аналогичным матрицам, которые приводятся к прежнему виду, если перенумеровать компоненты столбцов в обратном порядке. Поэтому нечетных степеней  $\delta$  не возникает. Поскольку мы рассматриваем предел  $\delta \sim \epsilon^2 \rightarrow 0$  (см. (45)), возможны лишь комбинации  $\delta^{2n}\epsilon^{2m}$  с  $4n + 2m \leq 6$  в случае (43) и с  $4n + 2m \leq 10$  в случае (47). Из них лишь комбинации с  $n \geq m$  не имеют сингулярностей при  $\delta \rightarrow 0$ .

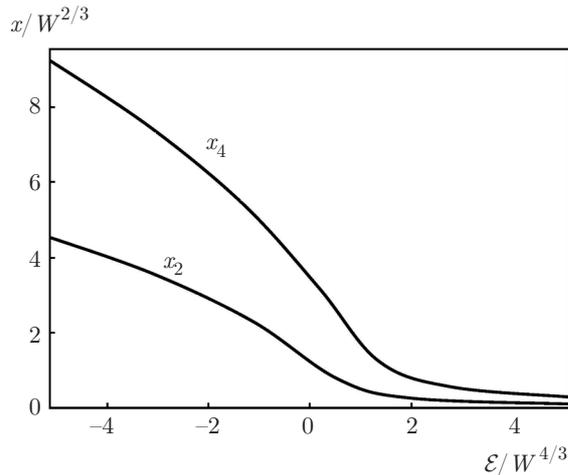


Рис. 6. Положительные корни первого ( $x_2$ ) и второго ( $x_4$ ) уравнений (49) как функции энергии  $\mathcal{E}$  в приведенных координатах

### 5. ПАРАМЕТРЫ ЛОГНОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

При больших  $L = na_0$  для  $P(\rho)$  справедливо логнормальное распределение

$$P(\rho) = \frac{1}{\rho\sqrt{2\pi bn}} \exp\left\{-\frac{(\ln \rho - an)^2}{2bn}\right\}, \quad (52)$$

которое для частных случаев получено во многих работах ([1, 13–18, 21–24]) и наиболее общим образом следует из модифицированного уравнения Дорохова–Мелло–Перейра–Кумара [33]; при наличии чужеродных контактов оно выводится в разд. 7. Нетрудно найти моменты для распределения (52),

$$\langle \rho^m \rangle = \exp(amn + bm^2n/2).$$

Поскольку  $\rho$  определяется выражением, квадратичным по элементам трансфер-матрицы, параметры  $a$  и  $b$  могут быть установлены из сопоставления с ростом вторых и четвертых моментов:

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle &= \exp\left(an + \frac{1}{2}bn\right) = C_1 \exp(x_2n), \\ \langle \rho^2 \rangle &= \exp(2an + 2bn) = C_2 \exp(x_4n). \end{aligned} \quad (53)$$

Легко видеть, что

$$a = 2x_2 - \frac{1}{2}x_4, \quad b = x_4 - 2x_2, \quad (54)$$

тогда как для параметра  $\gamma$  в (5) имеем

$$\gamma = \frac{a}{b} - \frac{1}{2} = \frac{3x_2 - x_4}{x_4 - 2x_2}. \quad (55)$$

Подстановка асимптотик (50) дает

$$\begin{aligned} a &= 2\delta - \epsilon^2, \quad b = 4\epsilon^2 \quad (\text{запрещенная зона}), \\ a &= \epsilon^2, \quad b = 2\epsilon^2 \quad (\text{разрешенная зона}), \\ a &= 1.24(\epsilon^2\delta^2)^{1/3}, \quad b = 1.52(\epsilon^2\delta^2)^{1/3} \quad (\text{критическая область}). \end{aligned} \quad (56)$$

Использование асимптотик (51) дает для параметра  $\gamma$  в распределении (5)

$$\gamma = \begin{cases} 2|\mathcal{E}|^{3/2}/W^2, & -\mathcal{E} \gg W^{4/3}, \\ 0.316, & |\mathcal{E}| \ll W^{4/3}, \\ -33W^4/32\mathcal{E}^3, & \mathcal{E} \gg W^{4/3}, \end{cases} \quad (57)$$

тогда как параметр  $\tilde{\alpha}$  связан с  $b$  соотношением  $\tilde{\alpha} = b/2a_0$ .

Как показано в разд. 2, введение чужеродных контактов приводит к линейному преобразованию элементов трансфер-матрицы, которое не влияет на показатели роста  $x_2$  и  $x_4$  для вторых и четвертых моментов. По этой причине последние не зависят от свойств идеальных контактов, так же как и связанные с ними параметры  $a$ ,  $b$ ,  $\gamma$ . От идеальных контактов зависят лишь коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  в (53), что изменяет абсолютный масштаб кондактанса и начало отсчета  $n$ .

### 6. ЗАВИСИМОСТЬ $P(\rho)$ ОТ ИДЕАЛЬНЫХ КОНТАКТОВ

Согласно (12), для элементов трансфер-матрицы в волновом представлении справедливы соотношения  $T_{22} = T_{11}^*$ ,  $T_{21} = T_{12}^*$ , которые следуют из инвариантности относительно обращения времени; поэтому достаточно рассматривать элементы

$$T_{11} = x + iy, \quad T_{12} = z + i\omega. \quad (58)$$

Если известно распределение  $P(\rho, \varphi, \theta)$  параметров матрицы (12), то функция распределения  $x, y, z, \omega$  составляется по правилу

$$\begin{aligned} P_1(x, y, z, \omega) &= \int d\rho d\varphi d\theta P(\rho, \varphi, \theta) \times \\ &\times \delta\left(x - \sqrt{1 + \rho} \cos \varphi\right) \delta\left(y - \sqrt{1 + \rho} \sin \varphi\right) \times \\ &\times \delta\left(z - \sqrt{\rho} \cos \theta\right) \delta\left(\omega - \sqrt{\rho} \sin \theta\right). \end{aligned} \quad (59)$$

Полагая  $\rho = r^2$ ,  $1 + \rho = R^2$  и вводя под интеграл разложение единицы

$$1 = \int dR^2 \delta(R^2 - r^2 - 1), \quad (60)$$

нетрудно получить связь  $P_1(x, y, z, \omega)$  с  $P(\rho, \varphi, \theta)$ :

$$P_1(x, y, z, \omega) = P\left(z^2 + \omega^2, \operatorname{Arctg} \frac{y}{x}, \operatorname{Arctg} \frac{\omega}{z}\right) \times 4\delta(x^2 + y^2 - z^2 - \omega^2 - 1). \quad (61)$$

Обратно, если известно распределение  $P_1(x, y, z, \omega)$ , то оно всегда содержит  $\delta$ -функцию:

$$P_1(x, y, z, \omega) = \tilde{P}(x, y, z, \omega) \times 4\delta(x^2 + y^2 - z^2 - \omega^2 - 1). \quad (62)$$

Тогда распределение  $P(\rho, \varphi, \theta)$  определяется соотношением

$$P(\rho, \varphi, \theta) = \tilde{P}\left(\sqrt{1 + \rho} \cos \varphi, \sqrt{1 + \rho} \sin \varphi, \sqrt{\rho} \cos \theta, \sqrt{\rho} \sin \theta\right). \quad (63)$$

Преобразование трансфер-матрицы  $T$  при изменении свойств идеальных контактов определяется соотношениями (17), (18), которые могут быть записаны в более компактной форме. Как ясно из изложенного выше, для ситуации внутри запрещенной зоны случай  $k = \kappa$  является выделенным — для него граница раздела имеет максимальную прозрачность (см. (4)), а фаза  $\psi = \theta - \varphi$  при всех  $L$  локализована вблизи  $\pi/2$  (см. разд. 3). Отмечая чертой значения параметров при  $k = \kappa$ , нетрудно показать, что соотношение (18) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} x &= \bar{x}, & y &= \Delta_2 \bar{y} - \Delta_1 \bar{\omega}, \\ z &= \bar{z}, & \omega &= -\Delta_1 \bar{y} + \Delta_2 \bar{\omega}, \end{aligned} \quad (64)$$

или, в обратную сторону,

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x, & \bar{y} &= \Delta_2 y + \Delta_1 \omega, \\ \bar{z} &= z, & \bar{\omega} &= \Delta_1 y + \Delta_2 \omega, \end{aligned} \quad (65)$$

где  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  определены в (9). Элементы  $\bar{T}_{11} = \bar{x} + i\bar{y}$  и  $\bar{T}_{12} = \bar{z} + i\bar{\omega}$  определяются лишь параметром  $\kappa$ , т. е. внутренними свойствами изучаемой системы, тогда как вся зависимость от фермиевского импульса  $k$  в идеальных контактах содержится в  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ .

Для ситуации внутри разрешенной зоны выделенным является случай  $k = \bar{k}$  (см. рис. 2а). Отмечая чертой параметры, соответствующие этому случаю, и полагая формально  $\bar{k} = \kappa$ , нетрудно убедиться, что связь элементов  $T_{ij}$  и  $\bar{T}_{ij}$  по-прежнему выражается соотношениями (64), (65). Если известно распределение  $\bar{P}(\rho, \varphi, \theta)$  для двух указанных базовых ситуаций (полностью определяемое внутренними свойствами системы), то можно перейти к распределению  $\bar{P}_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\omega})$  согласно (61), после чего

замена переменных (65) определяет распределение  $P_1(x, y, z, \omega)$ , зависящее от идеальных контактов, а формула (63) определяет  $P(\rho, \varphi, \theta)$ :

$$\begin{aligned} P(\rho, \varphi, \theta) &= \bar{P}(\rho', \varphi', \theta'), \\ \rho' &= \rho \cos^2 \theta + \left(\Delta_1 \sqrt{1 + \rho} \sin \varphi + \Delta_2 \sqrt{\rho} \sin \theta\right)^2, \\ \operatorname{tg} \varphi' &= \frac{\Delta_2 \sqrt{1 + \rho} \sin \varphi + \Delta_1 \sqrt{\rho} \sin \theta}{\sqrt{1 + \rho} \cos \varphi}, \\ \operatorname{tg} \theta' &= \frac{\Delta_1 \sqrt{1 + \rho} \sin \varphi + \Delta_2 \sqrt{\rho} \sin \theta}{\sqrt{\rho} \cos \theta}. \end{aligned} \quad (66)$$

В запрещенной зоне при  $k = \kappa$  имеем

$$\bar{P}(\rho, \varphi, \theta) = \bar{P}(\rho) \delta(\varphi) \delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right), \quad (67)$$

где  $\delta$ -функции нужно уширить на величину порядка  $\epsilon$ . В пренебрежении этим уширением нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} P(\rho, \varphi, \theta) &= \frac{1}{\Delta_2^2} \bar{P}\left(\frac{\rho}{\Delta_2^2}\right) \times \\ &\times \delta\left(\varphi + \arcsin \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \sqrt{\frac{\rho}{1 + \rho}}\right) \delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right), \end{aligned} \quad (68)$$

и интегрирование по  $\varphi$  и  $\theta$  дает результат (6), т. е. форма распределения  $\rho$  не зависит от идеальных контактов, и последние изменяют лишь абсолютный масштаб кондактанса.

В разрешенной зоне при  $k = \bar{k}$  (рис. 2а) распределение  $\bar{P}(\rho, \varphi, \theta)$  не зависит от фазовых переменных<sup>4)</sup>,

$$\begin{aligned} \bar{P}(\rho, \varphi, \theta) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \bar{P}(\rho) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 t} \exp\left(-\frac{\rho}{t}\right), \quad t = \alpha L, \end{aligned} \quad (69)$$

и  $\bar{P}(\rho)$  определяется формулой (7) при  $\gamma = 0$ . Для чужеродных контактов (рис. 2б) распределение  $\rho$  определяется интегралом

$$\begin{aligned} P(\rho) &= \frac{1}{(2\pi)^2 t} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \times \\ &\times \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \exp\left\{-\frac{\rho + S(\rho, \varphi, \theta)}{t}\right\}, \end{aligned} \quad (70)$$

где

$$\begin{aligned} S(\rho, \varphi, \theta) &= \Delta_1^2 (1 + \rho) \sin^2 \varphi + \\ &+ 2\Delta_1 \Delta_2 \sqrt{(1 + \rho)\rho} \sin \varphi \sin \theta + \Delta_2^2 \rho \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (71)$$

<sup>4)</sup> Строго говоря, для этого надо усреднить (32) по изменениям  $n$  порядка  $1/\delta$ .

Вычисление интеграла (см. Приложение В) приводит к следующим результатам.

При  $\Delta_1^2 \ll 1$  актуальны две области,  $t \ll \Delta_1^2$  и  $t \gg \Delta_1^2$ . В первой из них имеем

$$P(\rho) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{\pi\Delta_1^2 t}} \exp\left(-\frac{\rho}{2t}\right), & \rho \lesssim t, \\ \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1}{\rho(\rho_c - \rho)}}, & t \lesssim \rho, \quad \rho_c - \rho \gtrsim (t\Delta_1^2)^{1/2}, \\ \frac{1}{2\pi^2} \sqrt{\frac{\pi}{2\rho(t\Delta_1^2)^{1/2}}} \Gamma(1/4), & |\rho_c - \rho| \lesssim (t\Delta_1^2)^{1/2}, \\ \frac{1}{\pi\sqrt{AB}} \exp\left(-\frac{S_c}{t}\right), & \rho - \rho_c \gtrsim (t\Delta_1^2)^{1/2}, \end{cases} \quad (72)$$

где

$$\begin{aligned} S_c &= \left(\Delta_1\sqrt{1+\rho} - \Delta_2\sqrt{\rho}\right)^2 \Theta(\rho - \rho_c), \quad \rho_c = \Delta_1^2, \\ A &= 2\Delta_1\sqrt{1+\rho} \left(\Delta_2\sqrt{\rho} - \Delta_1\sqrt{1+\rho}\right), \\ B &= 2\Delta_1\sqrt{\rho} \left(\Delta_2\sqrt{1+\rho} - \Delta_1\sqrt{\rho}\right), \end{aligned} \quad (73)$$

а основная часть вероятности соответствует второму результату (72). Для области  $t \gg \Delta_1^2$  получим

$$P(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{\rho}{t}\right) \left[1 - \frac{\Delta_1^2}{2t} - \frac{\Delta_1^2\rho}{t} + \frac{\Delta_1^2\Delta_2^2\rho(1+\rho)}{2t^2}\right], & \rho(1+\rho) \lesssim t^2/\Delta_1^2, \\ \frac{1}{\pi\sqrt{AB}} \exp\left(-\frac{S_c}{t}\right), & \rho(1+\rho) \gtrsim t^2/\Delta_1^2, \end{cases} \quad (74)$$

и нормировочный интеграл определяется первой асимптотикой. Эволюция распределения при  $\Delta_1^2 \ll 1$  показана выше на рис. 5а. При малых  $t$  она сводится к сглаживанию сингулярностей распределения (8), а при больших  $t$  значение  $P(\rho)$  при  $\rho = 0$  стремится к таковому для распределения  $\bar{P}(\rho)$  и форма  $P(\rho)$  слабо отличается от последнего.

При  $\Delta_1^2 \gg 1$  актуальны три области,  $t \ll 1$ ,  $1 \ll t \ll \Delta_1^2$  и  $t \gg \Delta_1^2$ . В первой из них получаются результаты

$$P(\rho) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{\pi\Delta_1^2 t}} \exp\left(-\frac{\rho}{2t}\right), & \rho \lesssim t, \\ \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1}{\rho(\rho_c - \rho)}}, & t \lesssim \rho, \quad \rho_c - \rho \gtrsim (t\Delta_1^2\rho)^{1/2}, \\ \frac{1}{2\pi^2} \sqrt{\frac{\pi}{2\rho(t\Delta_1^2\rho)^{1/2}}} \Gamma(1/4), & |\rho_c - \rho| \lesssim (t\Delta_1^2\rho)^{1/2}, \\ \frac{1}{\pi\sqrt{AB}} \exp\left(-\frac{S_c}{t}\right), & \rho - \rho_c \gtrsim (t\Delta_1^2\rho)^{1/2}, \end{cases} \quad (75)$$

аналогичные (72) и соответствующие размытию сингулярностей распределения (8). При этом основная вероятность соответствует второй асимптотике. В области  $1 \ll t \ll \Delta_1^2$  имеем

$$P(\rho) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{\pi\Delta_1^2 t}} \exp\left(-\frac{\rho}{2t}\right), & \rho \lesssim 1, \\ \frac{1}{\pi^2} \sqrt{\frac{\pi}{\rho\Delta_1^2 t}} \ln \rho, & 1 \lesssim \rho \lesssim t, \\ \frac{1}{\pi^2} \sqrt{\frac{\pi}{\rho\Delta_1^2 t}} \ln t, & t \lesssim \rho \lesssim \Delta_1^2/t, \\ \frac{1}{2\pi^2} \sqrt{\frac{\pi}{\rho\Delta_1^2 t}} \ln \frac{\Delta_1^2 t}{\rho} \exp\left(-\frac{S_c}{t}\right), & \Delta_1^2/t \lesssim \rho \lesssim \Delta_1^2 t, \\ \frac{1}{\pi\sqrt{AB}} \exp\left(-\frac{S_c}{t}\right), & \rho \gtrsim \Delta_1^2 t, \end{cases} \quad (76)$$

тогда как в области  $t \gg \Delta_1^2$

$$P(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{\rho}{t}\right) \left[1 - \frac{\Delta_1^2}{2t} - \frac{\Delta_1^2 \rho}{t} + \frac{\Delta_1^2 \Delta_2^2 \rho(1+\rho)}{2t^2}\right], & \rho \lesssim t/\Delta_1^2, \\ \frac{1}{\pi^2} \sqrt{\frac{\pi}{\rho\Delta_1^2 t}} \ln \frac{\Delta_1^2 \rho}{t}, & t/\Delta_1^2 \lesssim \rho \lesssim t, \\ \frac{1}{2\pi^2} \sqrt{\frac{\pi}{\rho\Delta_1^2 t}} \ln \frac{\Delta_1^2 t}{\rho} \exp\left(-\frac{S_c}{t}\right), & t \lesssim \rho \lesssim \Delta_1^2 t, \\ \frac{1}{\pi\sqrt{AB}} \exp\left(-\frac{S_c}{t}\right), & \rho \gtrsim \Delta_1^2 t. \end{cases} \quad (77)$$

В обоих случаях основная вероятность сосредоточена на последних двух асимптотиках. Характерной особенностью выражений (76) и (77) является наличие быстрой экспоненты ( $\exp(-\rho/2t)$  или  $\exp(-\rho/t)$ ) при малых  $\rho$  и медленной экспоненты  $\exp(-\rho/\Delta_1^2 t)$  при больших  $\rho$ , тогда как в промежуточной области имеется степенное поведение  $P(\rho) \propto \rho^{-1/2}$  с точностью до логарифмических поправок. Эволюция распределения при  $\Delta_1^2 \gg 1$  выше показана на рис. 5б.

Выше мы учли, что результаты зависят лишь от  $|\Delta_1|$  (что проверяется заменой  $\varphi \rightarrow \varphi + \pi$  в (70), (71)) и без ограничения общности можно считать, что  $\Delta_1 > 0$ . Кроме того, мы предполагали, что распределение (69) задано аксиоматически, и не обсуждали условия его применимости: это позволяет лучше понять, как преобразуется распределение  $\rho$  за счет идеальных контактов. Фактически распределение (69) является решением уравнения (2) лишь для  $\rho \lesssim 1$ , что ограничивает применимость соотношений (76) и (77) условием  $\rho \lesssim \Delta_1^2$ .

В логнормальном режиме, возникающем при  $t \gg \gg 1$ , в качестве  $\bar{P}(\rho)$  в (69) нужно подставлять выражение (5) с  $\gamma = 0$ . При этом типичные значения  $\rho$  велики, и в формуле (66) можно положить  $\rho' = \rho K(\varphi, \theta)$ , где

$$K(\varphi, \theta) = \cos^2 \theta + (\Delta_1 \sin \varphi + \Delta_2 \sin \theta)^2. \quad (78)$$

Подстановка в (5), (66), (69) дает

$$P(\rho, \varphi, \theta) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{\rho K \sqrt{4\pi t}} \times \exp\left\{-\frac{(\ln K \rho - t)^2}{4t}\right\} \approx \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{\rho \sqrt{4\pi t}} \times \exp\left\{-\frac{(\ln \rho - t)^2}{4t}\right\} \left[\frac{1}{K} - \frac{2(\ln \rho - t) \ln K}{4tK}\right], \quad (79)$$

где мы провели разложение по  $1/t$ , учитывая, что  $(\ln \rho - t) \sim \sqrt{t}$  для основной части распределения. Интегрируя по  $\varphi$  и  $\theta$ , положим

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{1}{K(\varphi, \theta)} \equiv \frac{1}{K_0}, \quad (80)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{\ln K(\varphi, \theta)}{K(\varphi, \theta)} \equiv \frac{\ln K_1}{K_0}.$$

Тогда сохранение нормировки требует соотношения  $K_0 = 1$ , после чего  $P(\rho)$  записывается в виде

$$P(\rho) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{\rho \sqrt{4\pi t}} \exp\left\{-\frac{(\ln K_1 \rho - t)^2}{4t}\right\}. \quad (81)$$

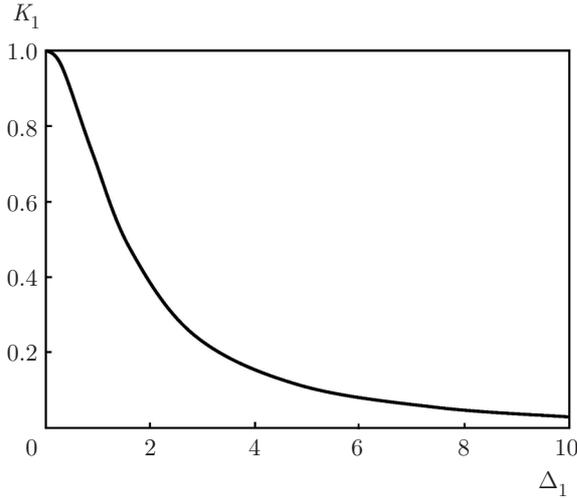


Рис. 7. Зависимость параметра  $K_1$  от  $\Delta_1$

Равенство  $K_0 = 1$  действительно имеет место, что проверяется прямым вычислением интеграла. Мы видим, что идеальные контакты не изменяют параметров логнормального распределения и перенормируют лишь абсолютный масштаб кондактанса, который определяется параметром  $K_1$  (рис. 7):

$$K_1 = \begin{cases} 1 - \Delta_1^2/2, & \Delta_1 \ll 1, \\ \text{const}/\Delta_1^2, & \Delta_1 \gg 1, \end{cases} \quad (82)$$

где численное значение константы близко к 4.

В критической области при достаточно малых  $n$  удобно исходить из выражения (38), определяющего распределение  $\bar{P}(\rho, \varphi, \theta)$  в виде (39). Преобразование переменных (64) приводит к замене  $S \rightarrow S(\Delta_2 - \Delta_1)$  в (38), (39) и перенормировке (6) абсолютного масштаба кондактанса с  $A = 1/(\Delta_2 - \Delta_1)^2$  в распределении (40).

### 7. УРАВНЕНИЕ ЭВОЛЮЦИИ $P(\rho)$ ПРИ НАЛИЧИИ ИДЕАЛЬНЫХ КОНТАКТОВ

Согласно разд. 3, трансфер-матрица  $T$  для системы точечных рассеивателей и «естественных» идеальных контактов (рис. 2а) имеет вид (22). Соответствующие параметры  $\epsilon_s$  будем отмечать как  $\bar{\epsilon}_s$ . При введении чужеродных контактов (рис. 2б) система описывается трансфер-матрицей  $\tilde{T} = T_a T T_b$ . Вводя между каждым двумя множителями в (22) произведение  $T_b T_a = 1$ , имеем

$$\tilde{T}^{(n)} = \tilde{T}_{\epsilon_0} \tilde{T}_{\delta_1} \tilde{T}_{\epsilon_1} \tilde{T}_{\delta_2} \tilde{T}_{\epsilon_2} \dots \tilde{T}_{\delta_n} \tilde{T}_{\epsilon_n}, \quad (83)$$

где

$$\tilde{T}_{\epsilon_s} = T_a T_{\epsilon_s} T_b, \quad \tilde{T}_{\delta} = T_a T_{\delta} T_b. \quad (84)$$

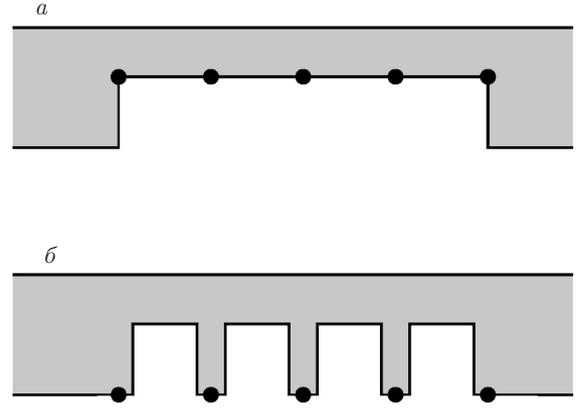


Рис. 8. Физический смысл перенормировки  $\epsilon_s$  состоит в переходе от ситуации а к ситуации б. В последнем случае для каждого рассеивателя создается потенциальная яма, ширина которой стремится к нулю

В разрешенной зоне отличие  $\tilde{T}_{\epsilon_s}$  от  $T_{\epsilon_s}$  сводится к перенормировке  $\bar{\epsilon}_s \rightarrow \epsilon_s = \bar{\epsilon}_s \bar{k}/k$ , которая имеет простой физический смысл. Представим изучаемую систему (рис. 8а) в виде последовательности однотипных рассеивателей (рис. 8б), создавая для каждого точечного рассеивателя потенциальную яму, ширина которой стремится к нулю. Тогда параметр  $\bar{\epsilon}_s = V_s/2\bar{k}a_0$ , определенный для фермиевского импульса  $\bar{k}$  изучаемой системы, заменяется на параметр  $\epsilon_s = V_s/2ka_0$ , содержащий фермиевский импульс  $k$  в идеальных контактах. При этом  $\tilde{T}_{\delta}$  является трансфер-матрицей для потенциального барьера, разделяющего два рассеивателя на рис. 8б:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{\delta} &= \begin{pmatrix} \cos \delta - i\Delta_2 \sin \delta & i\Delta_1 \sin \delta \\ -i\Delta_1 \sin \delta & \cos \delta + i\Delta_2 \sin \delta \end{pmatrix} \approx \\ &\approx \begin{pmatrix} 1 - i\Delta_2 \delta & i\Delta_1 \delta \\ -i\Delta_1 \delta & 1 + i\Delta_2 \delta \end{pmatrix}, \quad (85) \end{aligned}$$

где  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  определяются при  $\bar{k} = \kappa$  формулой (9). Ситуация в запрещенной зоне (рис. 2в) отличается лишь тем, что высота барьеров на рис. 8б превышает уровень Ферми, а  $\tilde{T}_{\delta}$  отличается от (84) заменой  $\bar{k}$  на  $i\kappa$ :

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{\delta} &= \begin{pmatrix} \text{ch } \delta - i\Delta_1 \text{sh } \delta & i\Delta_2 \text{sh } \delta \\ -i\Delta_2 \text{sh } \delta & \text{ch } \delta + i\Delta_1 \text{sh } \delta \end{pmatrix} \approx \\ &\approx \begin{pmatrix} 1 - i\Delta_1 \delta & i\Delta_2 \delta \\ -i\Delta_2 \delta & 1 + i\Delta_1 \delta \end{pmatrix}. \quad (86) \end{aligned}$$

Будем описывать потенциальный барьер трансфер-матрицей общего вида

$$\tilde{T}_\delta = \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & A^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1+\Delta^2} e^{i\alpha} & \Delta e^{-i\beta} \\ \Delta e^{i\beta} & \sqrt{1+\Delta^2} e^{-i\alpha} \end{pmatrix}, \quad (87)$$

близкой к единичной ( $\alpha, \Delta \ll 1$ ). Она имеет собственные значения  $e^{\pm\delta}$ , где  $\delta^2 = \Delta^2 - \alpha^2$ . Согласно (83),  $\tilde{T}^{(n)}$  получается умножением  $\tilde{T}^{(n-1)}$  на  $\tilde{T}_\delta \tilde{T}_{\epsilon_n}$ . Принимая  $\tilde{T}^{(n-1)}$  в виде (12), имеем

$$\tilde{T}_{12}^{(n)} = \sqrt{1+\rho} e^{i\varphi} (B+i\epsilon C) + \sqrt{\rho} e^{i\theta} (A^* - i\epsilon C^*), \quad (88)$$

где  $C = B - A$ . Возводя по модулю в квадрат, получим значение  $\tilde{\rho}$ , соответствующее матрице  $\tilde{T}^{(n)}$ :

$$\tilde{\rho} = \rho + D\sqrt{\rho(1+\rho)} + \epsilon^2(1+2\rho), \quad (89)$$

где

$$D = 2\Delta \cos(\psi + \beta) - 2\epsilon \sin \psi - 2\epsilon^2 \cos \psi, \quad (90)$$

$$\psi = \theta - \varphi, \quad (91)$$

и мы сохранили члены первого порядка по  $\delta$  и второго по  $\epsilon$ . Выражение (89) аналогично формуле (A.2) работы [12], и дальнейшие вычисления следуют Приложению А этой работы. В результате получается уравнение (3) с параметрами (мы полагаем  $a_0 = 1$ )

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{2\overline{D^2}}, \quad \gamma_1 \tilde{\alpha} = \epsilon^2 - \frac{1}{2\overline{D^2}}, \quad \gamma_2 \tilde{\alpha} = \frac{1}{2\overline{D}}, \quad (92)$$

что после подстановки (90) дает

$$\tilde{\alpha} = 2\epsilon^2 \overline{\sin^2 \psi}, \quad \gamma_1 \tilde{\alpha} = \epsilon^2 \left(1 - 2\overline{\sin^2 \psi}\right), \quad (93)$$

$$\gamma_2 \tilde{\alpha} = \overline{\Delta \cos(\psi + \beta) - \epsilon^2 \cos \psi},$$

где в актуальном случае  $\beta = -\pi/2$ . Другие значения  $\beta$  возникают при наличии на границах раздела  $\delta$ -образного потенциала.

Уравнение (3) с параметрами (93) позволяет проанализировать выделенные ситуации с  $\epsilon = \bar{\epsilon}$ , актуальные для разд. 6. В разрешенной зоне при  $k = \bar{k}$  имеем  $\Delta_1 = 0$  и  $\Delta = 0$  (ср. (85) и (87)). В случае однородного распределения для  $\psi$  формулы (93) дают  $\tilde{\alpha} = \epsilon^2$ ,  $\gamma_1 = 0$ ,  $\gamma_2 = 0$ , что согласуется с результатами разд. 4, 5 в глубине разрешенной зоны. Таким образом, однородное распределение для  $\psi$ , полученное в разд. 3 для  $n \lesssim 1/\epsilon^2$ , сохраняется и при  $n \gtrsim 1/\epsilon^2$ . В глубине запрещенной зоны при  $k = \kappa$  имеем  $\Delta_1 = 0$  и  $\Delta = \delta$  (ср. (86) и (87)). Результаты  $\tilde{\alpha} = 2\epsilon^2$ ,  $\gamma \tilde{\alpha} = \delta$  из разд. 4 и 5 согласуются с (93) при условии локализации  $\psi$  вблизи  $\pi/2$ , установленной в разд. 3 для  $n \lesssim 1/\epsilon^2$ , и указывают на ее сохранение при  $n \gtrsim 1/\epsilon^2$ . Для критической области  $\Delta_1 \approx \Delta_2$  и  $\Delta \sim \delta$ , и результаты  $\tilde{\alpha} \sim (\epsilon^2 \delta^2)^{1/3}$ ,  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \sim 1$ , полученные в разд. 4, 5, согласуются с (93) при локализации  $\psi$  в области малых значений порядка  $(\delta/\epsilon^2)^{1/3}$  в соответствии с анализом разд. 3.

### 8. ЭВОЛЮЦИЯ СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ $\rho$

Эволюция  $\langle \rho \rangle$  допускает полное описание и позволяет проиллюстрировать влияние идеальных контактов при произвольных размерах системы. Соотношение  $\tilde{T}^{(n)} = \tilde{T}^{(n-1)} \tilde{T}_\delta \tilde{T}_{\epsilon_n}$  в терминах матричных элементов имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{11}^{(n)} &= (1+i\alpha-i\epsilon_n)\tilde{T}_{11}^{(n-1)} + (-i\Delta+i\epsilon_n)\tilde{T}_{12}^{(n-1)}, \\ \tilde{T}_{12}^{(n)} &= (i\Delta-i\epsilon_n)\tilde{T}_{11}^{(n-1)} + (1-i\alpha+i\epsilon_n)\tilde{T}_{12}^{(n-1)}, \end{aligned} \quad (94)$$

где мы провели линеаризацию по  $\alpha$  и  $\Delta$  и положили  $\beta = -\pi/2$ . Вводя для вторых моментов обозначения

$$\begin{aligned} z_1^{(n)} &= \left\langle \left| \tilde{T}_{11}^{(n)} \right|^2 \right\rangle, & z_2^{(n)} &= \left\langle \tilde{T}_{11}^{(n)} \tilde{T}_{12}^{(n)*} \right\rangle, \\ z_3^{(n)} &= \left\langle \tilde{T}_{11}^{(n)*} \tilde{T}_{12}^{(n)} \right\rangle, & z_4^{(n)} &= \left\langle \left| \tilde{T}_{12}^{(n)} \right|^2 \right\rangle, \end{aligned} \quad (95)$$

получим систему разностных уравнений

$$\begin{pmatrix} z_1^{(n)} \\ z_2^{(n)} \\ z_3^{(n)} \\ z_4^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \epsilon^2 & i\Delta - \epsilon^2 & -i\Delta - \epsilon^2 & \epsilon^2 \\ -i\Delta + \epsilon^2 & 1 + 2i\alpha - \epsilon^2 & -\epsilon^2 & -i\Delta + \epsilon^2 \\ i\Delta + \epsilon^2 & -\epsilon^2 & 1 - 2i\alpha - \epsilon^2 & i\Delta + \epsilon^2 \\ \epsilon^2 & i\Delta - \epsilon^2 & -i\Delta - \epsilon^2 & 1 + \epsilon^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1^{(n-1)} \\ z_2^{(n-1)} \\ z_3^{(n-1)} \\ z_4^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad (96)$$

решение которой ищется в экспоненциальной форме,  $z_i^{(n)} \sim \lambda^n$ , и  $\lambda$  есть собственное значение матрицы. Полагая  $\lambda = 1 + x$ , получим уравнение

$$x [x(x^2 + 4\alpha^2 - 4\Delta^2) - 8\epsilon^2(\Delta - \alpha)^2] = 0, \quad (97)$$

имеющее решение  $x = 0$  и три нетривиальных корня. Последние совпадают с корнями уравнения (44) и не зависят от идеальных контактов, поскольку  $\delta^2 = \Delta^2 - \alpha^2$  и

$$8\epsilon^2(\Delta - \alpha)^2 = 8\epsilon^2\delta^2 (\Delta_2 - \Delta_1)^2 = 8\bar{\epsilon}^2\delta^2 = 2W^2. \quad (98)$$

Находя собственные векторы матрицы (96), получим общее решение системы

$$\begin{pmatrix} z_1^{(n)} \\ z_2^{(n)} \\ z_3^{(n)} \\ z_4^{(n)} \end{pmatrix} = C_0 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^3 C_i \begin{pmatrix} 1 \\ e_2(x_i) \\ e_3(x_i) \\ 1 \end{pmatrix} \exp(x_i n), \quad (99)$$

где  $x_1, x_2, x_3$  — нетривиальные корни уравнения (97) и

$$e_2(x) = \frac{\mathcal{A}x + \mathcal{B}}{p(x)}, \quad e_3(x) = \frac{\mathcal{A}^*x + \mathcal{B}^*}{p(x)}, \quad (100)$$

$$\mathcal{A} = 2\epsilon^2 - 2i\Delta, \quad \mathcal{B} = 4\alpha\Delta + 4i\epsilon^2(\alpha - \Delta),$$

$$p(x) = x^2 + 2\epsilon^2x + 4\alpha^2.$$

Выбирая в качестве начального условия единичную трансфер-матрицу, имеем  $z_1^{(0)} = 1, z_2^{(0)} = z_3^{(0)} = z_4^{(0)} = 0$ , что позволяет установить значения коэффициентов  $C_i$ . Поскольку  $z_4^{(n)}$  непосредственно определяет  $\langle \rho \rangle$ , имеем

$$\langle \rho \rangle = -\frac{1}{2} + \frac{(x_2 - x_3)p(x_1)}{2Q} \exp(x_1 n) - \frac{(x_1 - x_3)p(x_2)}{2Q} \exp(x_2 n) + \frac{(x_1 - x_2)p(x_3)}{2Q} \exp(x_3 n), \quad (101)$$

где

$$Q = x_1^2(x_2 - x_3) - x_2^2(x_1 - x_3) + x_3^2(x_1 - x_2). \quad (102)$$

Результат (101) имеет общий характер: при его выводе не сделано никаких приближений. При больших  $n$  доминирует одна из экспонент и ситуация оказывается мультипликативной. При малых  $n$  экспоненты могут быть разложены в ряд, что приводит к омическому режиму  $\rho \propto n$ .

В локализованном режиме ( $\delta \gg \bar{\epsilon}^2$ ) нетривиальные корни уравнения (97) имеют вид

$$x_1 = 2\delta + \bar{\epsilon}^2, \quad x_2 = -2\bar{\epsilon}^2, \quad x_3 = -2\delta + \bar{\epsilon}^2, \quad (103)$$

так что

$$\langle \rho \rangle = -\frac{1}{2} + \frac{\Delta_2^2}{4} [\exp(x_1 n) + \exp(x_3 n)] - \frac{\Delta_1^2}{2} \exp(x_2 n). \quad (104)$$

При больших  $n$  доминирует член с  $\exp(x_1 n)$  и подтверждает перенормировку абсолютного масштаба  $\rho$  на множитель  $\Delta_2^2$ , указанную в разд. 1. Изменение начала отсчета  $n$  (см. конец разд. 5) проявляется лишь при  $n \lesssim 1/\delta$ .

В металлическом режиме нужно сделать замену  $\delta \rightarrow i\delta, \epsilon \rightarrow -i\epsilon$  и рассмотреть предел  $\delta \gg \bar{\epsilon}^2$ . Тогда

$$x_1 = 2\bar{\epsilon}^2, \quad x_2 = -\bar{\epsilon}^2 + 2i\delta, \quad x_3 = -\bar{\epsilon}^2 - 2i\delta \quad (105)$$

и

$$\langle \rho \rangle = -\frac{1}{2} + \frac{\Delta_2^2}{2} \exp(2\bar{\epsilon}^2 n) - \frac{\Delta_1^2}{2} \exp(-\bar{\epsilon}^2 n) \cos 2n\delta, \quad (106)$$

что в ситуации рис. 2a (когда  $\Delta_1 = 0$ ) дает известный результат [1, 2, 15–17]

$$\langle \rho \rangle = \frac{1}{2} [\exp(2\bar{\epsilon}^2 n) - 1]. \quad (107)$$

При конечных  $\Delta_1$  возникают осцилляции, период которых определяется де-Бройлевской длиной волны (так как  $2n\delta = 2\bar{k}L$ ). Их происхождение определяется тем, что при  $\bar{\epsilon} = 0$  ландауэровское сопротивление  $\rho$  определяется трансфер-матрицей (85) потенциального барьера,

$$\rho = \Delta_1^2 \sin^2 \bar{k}L, \quad (108)$$

и коэффициент отражения обращается в нуль, если на длине системы укладывается полуцелое число длин волн де Бройля (аналогично просветлению в оптике). При конечных  $\bar{\epsilon}$  осцилляции становятся затухающими, но являются вполне наблюдаемыми: в металлическом режиме среднее значение  $\rho$  является репрезентативным, так как его флуктуации относительно малы.

В критической области ( $\delta \ll \bar{\epsilon}^2$ ) имеем

$$x_1 = 2(\bar{\epsilon}^2\delta^2)^{1/3}, \quad x_2 = x_1 \exp(2\pi i/3), \quad (109)$$

$$x_3 = x_1 \exp(-2\pi i/3).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle = & \frac{1}{6} \left[ \exp(x_1 n) + 2 \exp\left(-\frac{x_1 n}{2}\right) \times \right. \\ & \times \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x_1 n\right) - 3 \left. \right] + \frac{\epsilon^2}{3x_1} \left[ \exp(x_1 n) - \right. \\ & - 2 \exp\left(-\frac{x_1 n}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x_1 n + \frac{\pi}{3}\right) \left. \right] + \\ & + \frac{2\alpha^2}{3x_1^2} \left[ \exp(x_1 n) - 2 \exp\left(-\frac{x_1 n}{2}\right) \times \right. \\ & \times \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x_1 n - \frac{\pi}{3}\right) \left. \right]. \quad (110) \end{aligned}$$

Если продвижение в критическую область происходит из разрешенной зоны, то возможно использование «естественных» идеальных контактов (рис. 2а), для которых  $\epsilon = \bar{\epsilon}$ ; тогда в (109) доминирует второй член. Разложение по  $x_1 n$  дает  $\langle \rho \rangle = \epsilon^2 n$  в согласии с результатом из трансфер-матрицы (38), что определяет область применимости последней как  $n \lesssim 1/x_1$ .

Результат (110) остается конечным при  $\bar{k} \rightarrow 0$ , когда

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon^2}{3x_1} = \frac{(2W^2)^{2/3}}{24k^2 a_0^2}, \quad \frac{2\alpha^2}{3x_1^2} = \frac{2k^2 a_0^2}{3(2W^2)^{2/3}}, \quad (111) \\ x_1 = (2W^2)^{1/3}. \end{aligned}$$

Аналогично (106), имеются затухающие осцилляции, амплитуда которых существенно зависит от фермиевского импульса  $k$  в идеальных контактах: она порядка единицы при  $ka_0 \sim W^{2/3}$  (когда все три члена в (110) одного порядка), но возрастает как при уменьшении  $k$  (когда доминирует второй член в (110)), так и при его увеличении (когда доминирует третий член). Период осцилляций определяется амплитудой случайного потенциала, а фазовый сдвиг изменяется от  $\pi/3$  до  $-\pi/3$  при увеличении  $k$  от малых до больших значений.

Фактически наблюдаемая картина оказывается более сложной. В критической области флуктуации  $\rho$  велики и форма функции распределения существенно зависит от нескольких первых моментов<sup>5)</sup>.

<sup>5)</sup> Напомним, что фурье-преобразование  $P(\rho)$  определяет характеристическую функцию  $F(t) = \langle e^{i\rho t} \rangle$ , которая является производящей функцией моментов,  $F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (it)^n \langle \rho^n \rangle / n!$ . Если известны все моменты распределения, то по ним можно построить  $F(t)$ , после чего  $P(\rho)$  определяется обратным фурье-преобразованием.

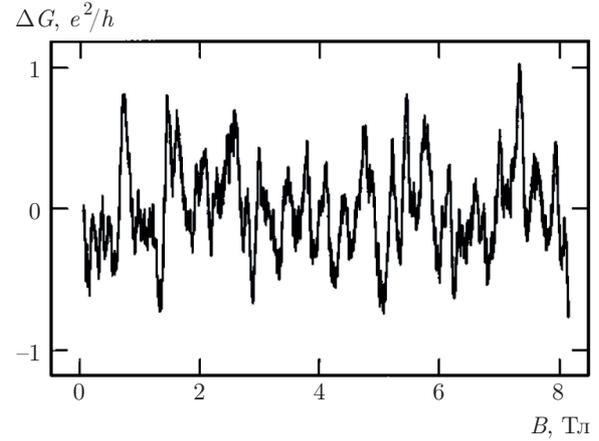


Рис. 9. Кондактанс  $G(B)$  тонкой проволоочки из Au [34] в магнитном поле  $B$  испытывает «универсальные» флуктуации порядка  $e^2/h$  при изменении конфигурации примесей [25,26]. Флуктуации  $G(B)$  и  $G(B + \Delta B)$  статистически независимы, если  $\Delta B$  превышает некоторый характерный масштаб [25,26]. Несмотря на случайный характер, картина флуктуаций полностью воспроизводима и характеризует конкретную реализацию случайного потенциала («магнитные отпечатки пальцев»)

Между тем высшие моменты  $\rho$  осциллируют с периодом того же порядка. Это связано с комплексными корнями уравнения (48) и аналогичных уравнений для высших моментов<sup>6)</sup>. Возникает сложная интерференция несоизмеримых осцилляций, приводящая к апериодическим осцилляциям для сопротивления  $\rho$  в конкретном образце. Такие осцилляции наблюдаются в магнитосопротивлении тонких проволоочек [34] (рис. 9) и имеют непосредственное отношение к изложенному выше: магнитное поле, перпендикулярное тонкой проволоочке, создает вдоль нее квадратичный потенциал, который эффективно ограничивает длину системы. Поэтому изменение магнитного поля аналогично изменению  $L$ . В принципе, рис. 9 объясняется теоретическими результатами работ [25,26], но нам не известны попытки описания осцилляций как таковых.

На рис. 10 приводятся экспериментальные результаты работы [35], которые демонстрируют воз-

<sup>6)</sup> Сопоставление (44) и (48) показывает, что периоды осцилляций для  $\langle \rho \rangle$  и  $\langle \rho^2 \rangle$  различаются в  $2^{1/3}$  раз. Как ясно из разд. 4 (см. примечание 3), в правой части уравнения для  $x$  допустимы лишь комбинации  $\delta^{2n} \epsilon^{2m}$  с  $n \geq m$ , из которых конечными при  $\delta \rightarrow 0$  остаются лишь  $\delta^{2n} \epsilon^{2n} \sim W^{2n}$ . Поскольку при  $x \sim \delta \sim \epsilon^2$  все члены уравнения одного порядка, показатель роста  $x$  для  $\langle \rho^n \rangle$  при  $\delta = 0$  удовлетворяет уравнению  $x^{2n+1} = c_1 \delta^2 \epsilon^2 x^{2n-2} + c_2 \delta^4 \epsilon^4 x^{2n-5} + \dots$ , нетривиальные корни которого имеют порядок  $(\delta^2 \epsilon^2)^{1/3}$  независимо от  $n$ .

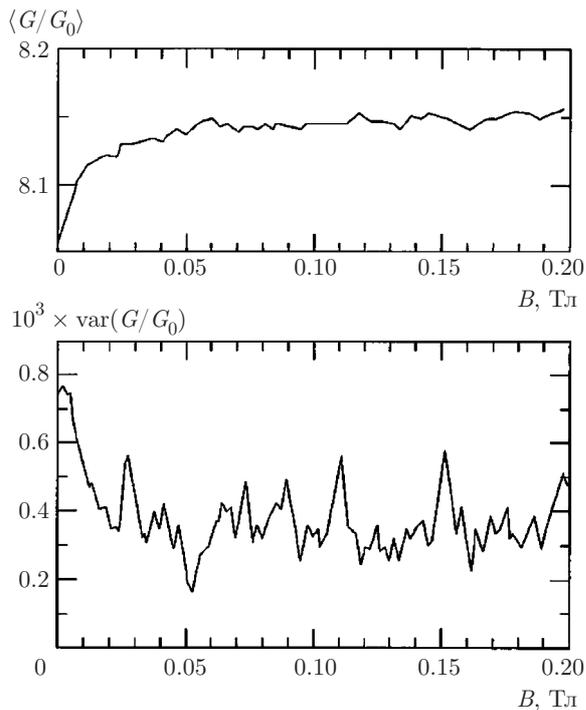


Рис. 10. Эволюция двух первых моментов кондактанса  $G$  при изменении магнитного поля для тонкой проволоочки из GaAs, легированного кремнием [35]

возможность наблюдения эволюции как полной функции распределения  $\rho$  или  $G$ , так и ее моментов. Независимые примесные конфигурации в тонкой проволочке из GaAs, легированного кремнием, создавались путем периодического отогрева ее до комнатной температуры, после чего проводилось усреднение по 50 конфигурациям. Результаты для двух первых моментов  $G$  указывают, что функция распределения не является стационарной, а испытывает систематические изменения, что согласуется с изложенным выше.

## 9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Массивные идеальные контакты, которые приходится вводить для корректного определения проводимости конечных систем, оказывают существенное влияние на свойства изучаемого образца. В настоящей работе оно исследовано на примере одномерных систем. В логнормальном режиме оно сводится к изменению абсолютного масштаба кондактанса, но в общем случае изменяет всю функцию распределения. При изменении длины системы могут возникать периодические или аperiodические осцилляции  $\rho$ . При сдвиге уровня Ферми происходят качественные изменения, напоминающие сглаженный переход Андерсона.

Используемое определение проводимости относится к составной системе «образец + идеальные провода», тогда как вопрос о его отношении к изучаемой системе остается открытым. В работе [11] для его решения предлагается введение полупроницаемых границ, отделяющих систему от идеальных контактов. При переходе к пределу слабопрозрачных границ возникают универсальные уравнения, не зависящие от способа исключения контактного сопротивления резервуара [10] (так как все формулы ландауэровского типа [2,5,6,8,9] сводятся к варианту Эконому – Соукоулиса [3,4]), которые затем могут быть экстраполированы к прозрачности порядка единицы. Такое определение заведомо относится к изучаемому образцу и обеспечивает бесконечное значение проводимости для идеальной системы. При этом абсолютный масштаб кондактанса фиксируется лишь по порядку величины. Это не имеет принципиального значения (физический смысл имеет лишь отношение кондактансов), но создает некоторые трудности при сопоставлении с другими результатами. Как ясно из изложенного выше, абсолютный масштаб кондактанса зависит от свойств идеальных контактов и в любом случае является условной величиной. Для устранения его неопределенности нужно как-то оговаривать свойства контактов: например, можно принять «золотой стандарт» и пересчитывать все результаты на контакты из золота.

Согласно уравнению (2), распределение кондактансов одномерной системы определяется двумя параметрами,  $\tilde{\alpha}L$  и  $\gamma$ . Такое двухпараметрическое описание естественным образом следует из гипотезы однопараметрического скейлинга [36], согласно которой свойства  $d$ -мерной кубической системы размера  $L$  полностью определяются отношением  $L/\xi$ , где  $\xi$  — корреляционный радиус. Составляя квазиодномерную систему размера  $L^{d-1}L_z$  из кубических блоков размера  $L$ , легко заключить, что ее кондактанс зависит от свойств одного блока ( $L/\xi$ ) и числа кубиков ( $L_z/L$ ). При  $L = a_0$  квазиодномерная система становится строго одномерной, но по-прежнему описывается двумя параметрами. Однопараметрический скейлинг в одномерных системах реализуется в глубине разрешенной зоны (когда справедливо уравнение (1)) и приближенно сохраняется в критической области<sup>7)</sup>. Его нарушение в запрещен-

<sup>7)</sup> В этом случае параметр  $\gamma$  порядка единицы и не имеет существенной эволюции.

ной зоне вполне естественно ввиду нарушения условия  $\xi \gg a_0$ . Необходимость двухпараметрического описания одномерных систем обсуждалась в работе [37] (см. также [21–24]) и в последнее время оно активно использовалось для описания распределения кондактансов [12, 38] в рамках скейлинговой схемы Шапиро [18].

Эволюция как полного распределения  $\rho$ , так и его моментов может изучаться экспериментально в духе работы [35], в которой конфигурация примесей в изучаемом образце изменялась путем его отогрева до достаточно высокой температуры.

**ПРИЛОЖЕНИЕ А**

**Эволюция моментов для координатной трансфер-матрицы**

Для координатной трансфер-матрицы справедливы уравнения эволюции

$$z_{n+1} = (E - V_n)z_n + y_n, \quad y_{n+1} = -z_n, \quad (A.1)$$

$$\begin{pmatrix} \overline{z_{n+1}^4} \\ \overline{z_{n+1}^3 y_{n+1}} \\ \overline{z_{n+1}^2 y_{n+1}^2} \\ \overline{z_{n+1} y_{n+1}^3} \\ \overline{y_{n+1}^4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E^4 + 6E^2 W^2 & 4E^3 + 12E W^2 & 6E^2 + 6W^2 & 4E & 1 \\ -E^3 - 3E W^2 & -3E^2 - 3W^2 & -3E & -1 & 0 \\ E^2 + W^2 & 2E & 1 & 0 & 0 \\ -E & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{z_n^4} \\ \overline{z_n^3 y_n} \\ \overline{z_n^2 y_n^2} \\ \overline{z_n y_n^3} \\ \overline{y_n^4} \end{pmatrix}. \quad (A.4)$$

Предполагая, что моменты растут как  $\lambda^n$  с  $\lambda = 1 + x$ , получим для  $x$  уравнение

$$\begin{aligned} & -x^5 + x^4(E^2 + 1)(E^2 - 4) + x^3(E^2 - 4) \times \\ & \times (-E^4 + 5E^2 + 1) - x^2 2E^2(E^2 - 4)^2 - xE^2(E^2 - 4)^2 + \\ & + W^2 [-6E^2(E^2 - 4) - 15xE^2(E^2 - 4) + \\ & + x^2(-12E^4 + 60E^2 - 6) + x^3(-3E^4 + 30E^2 - 9) + \\ & + x^4(6E^2 - 3)] = 0, \quad (A.5) \end{aligned}$$

где опущены члены более высокого порядка по  $W^2$ . Полагая  $E^2 - 4 = 4\delta^2$ ,  $W^2 = 4\epsilon^2\delta^2$  и сохраняя главные члены при указанном предельном переходе, получим уравнение (48).

где  $z_n = \tau_{12}^{(n-1)}$ ,  $y_n = \tau_{11}^{(n-1)}$  с начальными условиями  $z_1 = 0, y_1 = 1$ , либо  $z_n = \tau_{22}^{(n-1)}$ ,  $y_n = \tau_{21}^{(n-1)}$  с начальными условиями  $z_1 = 1, y_1 = 0$ . Для вторых моментов нетрудно получить

$$\begin{pmatrix} \overline{z_{n+1}^2} \\ \overline{z_{n+1} y_{n+1}} \\ \overline{y_{n+1}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E^2 + W^2 & 2E & 1 \\ -E & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{z_n^2} \\ \overline{z_n y_n} \\ \overline{y_n^2} \end{pmatrix}. \quad (A.2)$$

Предполагая для моментов экспоненциальный рост  $\lambda^n$  с  $\lambda = 1 + x$ , получим для  $x$  уравнение

$$x^3 - x^2(E^2 - 4) - x(E^2 - 4) = W^2(2 + 3x + x^2). \quad (A.3)$$

Полагая  $E^2 - 4 = 4\delta^2$ ,  $W^2 = 4\epsilon^2\delta^2$ , нетрудно убедиться, что в пределе  $\delta \rightarrow 0, \epsilon \rightarrow 0, \delta/\epsilon^2 = \text{const}$  уравнение (A.3) совпадает с (44).

Аналогично для четвертых моментов имеем уравнение

**ПРИЛОЖЕНИЕ В**

**Об асимптотиках интеграла (70)**

Учитывая четность подынтегрального выражения в (70) в переменных  $\tilde{\varphi} = \varphi - \pi/2, \tilde{\theta} = \theta - \pi/2$  и полагая  $x = \sin \varphi, y = \sin \theta$ , имеем

$$P(\rho) = \frac{1}{\pi^2 t} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \times \exp \left\{ -\frac{S(x, y)}{t} \right\}, \quad (A.6)$$

$$S(x, y) = (\Delta_1 \sqrt{1+\rho x} + \Delta_2 \sqrt{\rho y})^2 + \rho(1-y^2).$$

Конфигурация перевальных точек существенно различна для  $\rho < \rho_c$  и  $\rho > \rho_c$ , где  $\rho_c = \Delta_1^2$ . В первом случае максимум экспоненты достигается при

$x = x_c, y = -1$  или  $x = -x_c, y = 1$ , где  $x_c = \Delta_2\sqrt{\rho}/\Delta_1\sqrt{1+\rho}$ , а во втором — при  $x = 1, y = -1$  или  $x = -1, y = 1$ . Пусть  $\delta x$  и  $\delta y$  — отклонения  $x$  и  $y$  от точки экстремума. При  $\rho < \rho_c$  сохраним в  $S(x, y)$  квадратичный член по  $\delta x$  и линейный по  $\delta y$ , полагая в предэкспоненте  $x = x_c, 1 - y^2 = 2\delta y$ . Тогда

$$P(\rho) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1}{\rho(\rho_c - \rho)}}, \quad (\text{A.7})$$

что есть предельная форма распределения при  $t \rightarrow 0$ .

При  $\rho > \rho_c$  имеем

$$S(x, y) = S_c + A\delta x + B\delta y + C(\delta x - x_c\delta y)^2 - \rho(\delta y)^2, \quad (\text{A.8})$$

где  $S_c, A, B$  определены в (73) и  $C = \Delta_1^2(1 + \rho)$ . При больших  $\rho$  достаточно сохранить в (A.8) линейные по  $\delta x, \delta y$  члены и линеаризовать выражения под радикалами:

$$P(\rho) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1}{AB}} \exp\left(-\frac{S_c}{t}\right), \quad (\text{A.9})$$

что есть последняя асимптотика в (72), (74)–(77).

Результаты (A.7), (A.9) неприменимы для  $\rho$ , близких к  $\rho_c$ , поскольку коэффициент  $A$  обращается в нуль при  $\rho = \rho_c$ . Полагая  $\delta\tilde{x} = \delta x - x_c\delta y$  и опуская последний член в (A.8), имеем

$$S(x, y) = S_c + A\delta\tilde{x} + C(\delta\tilde{x})^2 + 2\rho\delta y. \quad (\text{A.10})$$

При  $A^2 \ll Ct$  флуктуации  $\delta\tilde{x}$  определяются квадратичным членом и  $A\delta\tilde{x}$  можно опустить. Тогда в малой окрестности  $\rho_c$

$$P(\rho) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2\pi\rho}} \frac{\Gamma(1/4)}{(Ct)^{1/4}}, \quad (\text{A.11})$$

$$|\rho - \rho_c| \lesssim (Ct)^{1/2},$$

что устраняет расходимость при  $\rho \rightarrow \rho_c$  и соответствует третьей асимптотике в (72) и (75). При указанном условии этот результат сохраняется и при  $\rho < \rho_c$ , когда коэффициент  $A$  отрицателен, но мал по абсолютной величине. Фактически результат (A.11) справедлив в случаях  $t \ll \Delta_1^2 \ll 1$  и  $t \ll 1 \ll \Delta_1^2$ , когда флуктуация  $\delta y \sim t/\rho$  мала по сравнению с  $\delta\tilde{x} \sim \sqrt{t/C}$ , так что  $\delta\tilde{x} \approx \delta x$  и в предэкспоненте можно положить  $1 - x^2 = 2\delta\tilde{x}, 1 - y^2 = 2\delta y$ . Обратная ситуация имеет место в случае  $\Delta_1^2 \gg 1, t \gg 1$ , когда  $\delta y \gg \delta\tilde{x}$  и в предэкспоненте  $1 - x^2 \approx 2\delta x = 2\delta\tilde{x} + 2x_c\delta y \approx 2\delta y$ , что дает результат

$$P(\rho) = \frac{1}{2\pi^2} \sqrt{\frac{\pi}{\rho\Delta_1^2 t}} \ln \frac{\Delta_1^2 t}{\rho} \exp\left(-\frac{S_c}{t}\right), \quad (\text{A.12})$$

$$\rho_c/t \lesssim \rho \lesssim \rho_c t,$$

определяющий предпоследнюю асимптотику в (76), (77). Условие  $A^2 \ll Ct$  дает  $(\rho - \rho_c)^2 \ll \Delta_1^2 \rho t$ , что при  $t \gg 1$  сводится к указанному в (A.12). Если результат (A.11) справедлив в малой окрестности  $\rho_c$ , то для применимости (A.12) возникает широкая область.

При малых  $\rho$  условия применимости перевальнойго приближения нарушаются и удобно пользоваться исходной формой интеграла (70). Если  $t \ll \Delta_1^2$ , то перевальное интегрирование по  $\varphi$  все еще возможно и приводит к результату

$$P(\rho) = \frac{1}{\pi^2 t} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \sqrt{\frac{\pi t}{\Delta_1^2 - \rho + \Delta_2^2 \rho \sin^2 \theta}} \times \exp\left\{-\frac{\rho}{t} \sin^2 \theta\right\}. \quad (\text{A.13})$$

При  $\Delta_1^2 \ll 1$  имеем  $\Delta_2 \approx 1$ ; если  $\rho \ll t$ , то в знаменателе дроби можно сохранить только  $\Delta_1^2$ , а интегрирование по  $\theta$  проводится путем разложения экспоненты,

$$P(\rho) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\Delta_1^2 t}} \exp\left(-\frac{\rho}{2t}\right), \quad \rho \ll t, \quad (\text{A.14})$$

что есть первый результат в (72), (75), (76). При  $\rho \gtrsim t$  справедливы перевальные результаты (A.7), (A.9), (A.10).

В случае  $\Delta_1^2 \ll 1$  и  $t \gg \Delta_1^2$  область малых  $\rho$  определяется условием  $\rho(1 + \rho) \ll t^2/\Delta_1^2$ , и вычисление интеграла в ней осуществляется путем разложения по  $S(\varphi, \theta)/t$  до второго порядка, что дает первый результат в (74), (77). При обратном соотношении имеем  $A \approx B \approx 2\Delta_1\Delta_2\sqrt{\rho(1 + \rho)} \gg t$  и  $A^2 \gg Ct$ , что обеспечивает справедливость (A.9).

В случае  $\Delta_1^2 \gg 1$  и  $t \ll \Delta_1^2$  по-прежнему справедливо выражение (A.13), но его исследование усложняется. При  $t \ll 1$  возникает знакомая ситуация: для  $\rho \lesssim t$  можно сохранить в знаменателе  $\Delta_1^2$  и получить (A.14), тогда как при  $\rho \gtrsim t$  справедливы перевальные результаты (A.7), (A.9), (A.10). Если же  $1 \ll \rho \lesssim 1 \ll \Delta_1^2$ , то результат (A.14) справедлив лишь при  $\rho \lesssim 1$ . В интервале  $1 \lesssim \rho \lesssim t$  в знаменателе (A.13) доминирует  $\Delta_2^2 \rho \sin^2 \theta$ , а учет величины  $\Delta_1^2 - \rho$  требуется лишь для обрезания логарифмической расходимости; при этом

$$P(\rho) = \frac{1}{\pi^2} \sqrt{\frac{\pi}{\rho\Delta_1^2 t}} \ln \frac{\Delta_1^2 \rho}{\rho_c - \rho}, \quad 1 \lesssim \rho \lesssim t. \quad (\text{A.15})$$

В интервале  $t \lesssim \rho \lesssim \rho_c$  экспонента ограничивает интегрирование значениями  $\theta^2 \lesssim t/\rho$  и  $\Delta_1^2 \rho$  в (A.15)

заменяется на  $\Delta_1^2 t$ . Фактически оба результата актуальны лишь при  $\rho \ll \rho_c$ , так как при  $\rho \gtrsim \rho_c/t$  расходимость при  $\rho \rightarrow \rho_c$  устраняется за счет нелинейных членов в (A.8) и справедлив результат (A.12); поэтому возникает  $\ln \rho$  для  $1 \lesssim \rho \lesssim t$  и  $\ln t$  для  $t \lesssim \rho \lesssim \rho_c/t$ , как это и отражено в (76).

В случае  $\Delta_1^2 \gg 1$  и  $t \gg \Delta_1^2$  разложение по  $S(\varphi, \theta)/t$  возможно при  $\rho \lesssim t/\Delta_1^2$ , и оно приводит к первому результату (77). При  $\rho \gtrsim t/\Delta_1^2$  справедливо выражение (A.13), где  $|\Delta_1^2 - \rho| \ll t$ ,  $\Delta_2^2 \rho \gg t$ , и потому в знаменателе сохраняется лишь последний член; логарифмическая расходимость устраняется ввиду ограничения  $(\Delta_2^2 \rho/t) \sin^2 \theta \gtrsim 1$ , которое необходимо для перевальной интегрирования по  $\varphi$  и справедливости (A.13). Если при этом  $\rho \lesssim t$ , то экспонента в (A.13) незначительна и получается второй результат в (77). При  $\rho \gtrsim t$  ситуация перевальная и справедливы результаты (A.12) и (A.9).

## ЛИТЕРАТУРА

1. P. W. Anderson, D. J. Thouless, E. Abrahams, and D. S. Fisher, Phys. Rev. B **22**, 3519 (1980).
2. R. Landauer, IBM J. Res. Dev. **1**, 223 (1957); Phil. Mag. **21**, 863 (1970); Z. Phys. **68**, 217 (1987).
3. E. N. Economou and C. M. Soukoulis, Phys. Rev. Lett. **46**, 618 (1981).
4. D. S. Fisher and P. A. Lee, Phys. Rev. B **23**, 6851 (1981).
5. D. C. Langreth and E. Abrahams, Phys. Rev. B **24**, 2978 (1981).
6. P. W. Anderson, Phys. Rev. B **23**, 4828 (1981); H. L. Engquist and P. W. Anderson, Phys. Rev. B **24**, 1151 (1981).
7. D. J. Thouless, Phys. Rev. Lett. **47**, 972 (1981).
8. M. Buttiker, Phys. Rev. Lett. **57**, 1761 (1986); M. Buttiker, Y. Imry, R. Landauer, and S. Pinhas, Phys. Rev. B **31**, 6207 (1985).
9. M. Ya. Azbel, J. Phys. C **14**, L225 (1981).
10. A. D. Stone and A. Szafer, IBM J. Res. Dev. **32**, 384 (1988).
11. И. М. Суслов, ЖЭТФ **142**, 1020 (2012).
12. И. М. Суслов, ЖЭТФ **151**, 897 (2017).
13. В. И. Мельников, ФТТ **23**, 782 (1981).
14. A. A. Abrikosov, Sol. St. Comm. **37**, 997 (1981).
15. N. Kumar, Phys. Rev. B **31**, 5513 (1985).
16. B. Shapiro, Phys. Rev. B **34**, 4394 (1986).
17. P. Mello, Phys. Rev. B **35**, 1082 (1987).
18. B. Shapiro, Phil. Mag. **56**, 1031 (1987).
19. И. М. Лифшиц, С. А. Гредескул, Л. А. Пастур, *Введение в теорию неупорядоченных систем*, Наука, Москва (1982).
20. X. Chang, X. Ma, M. Yezpez, A. Z. Genack, and P. A. Mello, Phys. Rev. B **96**, 180203 (2017).
21. L. I. Deych, D. Zaslavsky, and A. A. Lisyansky, Phys. Rev. Lett. **81**, 5390 (1998).
22. L. I. Deych, A. A. Lisyansky, and B. L. Altshuler, Phys. Rev. Lett. **84**, 2678 (2000); Phys. Rev. B **64**, 224202 (2001).
23. L. I. Deych, M. V. Erementchouk, and A. A. Lisyansky, Phys. Rev. Lett. **90**, 126601 (2001).
24. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1974).
25. Б. Л. Альтшулер, Письма в ЖЭТФ **41**, 530 (1985); Б. Л. Альтшулер, Д. Е. Хмельницкий, Письма в ЖЭТФ **42**, 291 (1985).
26. P. A. Lee and A. D. Stone, Phys. Rev. Lett. **55**, 1622 (1985); P. A. Lee, A. D. Stone, and Y. Fukuyama, Phys. Rev. B **35**, 1039 (1987).
27. D. Braun, E. Hofstetter, G. Montambaux, and A. MacKinnon, Phys. Rev. B **64**, 155107 (2001).
28. I. Travenec, Phys. Rev. B **69**, 033094 (2004).
29. M. Ruhlender, P. Markos, and C. M. Soukoulis, Phys. Rev. B **64**, 172202 (2001).
30. А. О. Гельфонд, *Исчисление конечных разностей*, Наука, Москва (1967).
31. M. Kappus and F. Wegner, Z. Phys. B **45**, 15 (1981).
32. V. E. Kravtsov and V. I. Yudson, Ann. Phys. (NY) **326**, 1672 (2011).
33. И. М. Суслов, ЖЭТФ **154**, 152 (2018).
34. S. Washburn and R. A. Webb, Adv. Phys. **35**, 375 (1986).
35. D. Mailly and M. Sanquer, J. de Phys. I **2**, 357 (1992).
36. E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello, and T. V. Ramakrishnan, Phys. Rev. Lett. **42**, 673 (1979).
37. A. Cohen, Y. Roth, and B. Shapiro, Phys. Rev. B **38**, 12125 (1988).
38. I. M. Suslov, Phil. Mag. **99**, 247 (2019).