ЖЭТФ, 2019, том 156, вып. 5 (11), стр. 905–917

ПОСТНЬЮТОНОВСКИЙ ПРЕДЕЛ ГИБРИДНОЙ $f(R)$-ГРАВИТАЦИИ

П. И. Дядина [a*], *С. П. Лабазова* [b**], *С. О. Алексеев* [a,c***]

[a] *Государственный астрономический институт им. П. К. Штернберга, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова 119234, Москва, Россия*

[b] *Кафедра астрофизики и звездной астрономии, Физический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова 119234, Москва, Россия*

[c] *Кафедра квантовой теории и физики высоких энергий, Физический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова 119234, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 19 июня 2019 г.,
после переработки 1 июля 2019 г.
Принята к публикации 3 июля 2019 г.

На основании последних, наиболее точных значений постньютоновских параметров γ и β, полученных АМС «Мессенджер», накладываются ограничения на недавно предложенную модель гибридной $f(R)$-гравитации в ее скалярно-тензорном представлении. Явно показано, что наличие легкого скалярного поля не противоречит экспериментальным данным не только по параметру γ (что уже было показано ранее), но и по всем остальным постньютоновским параметрам. Помимо этого, в работе обсуждается вопрос применения параметризованного постньютоновского формализма к теориям гравитации с массивными полями.

DOI: 10.1134/S0044451019110087

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время общая теория относительности (ОТО) является общепризнанной теорией гравитации, так как в течение последнего столетия многие проблемы физики были решены с ее помощью. При этом с ростом количества и качества наблюдений обнаружены явления, пока необъяснимые в рамках ОТО. Например, в конце XX столетия было установлено, что наша Вселенная ускоренно расширяется, но природа этого явления до сих пор до конца не раскрыта [1–3]. Другой загадкой современной физики является темная материя, проявляющаяся на масштабах галактик и их скоплений [4, 5]. Поиск решения этих проблем ведется различными способами: с помощью введения новых частиц или изменением геометрии пространства-времени. Второй путь приводит к появлению модифицированных моделей гравитации, которые основываются на изменении ОТО.

Среди различных способов расширения ОТО выделяется $f(R)$-гравитация [6–9]. Действие этой теории строится путем обобщения гравитационной части действия ОТО как произвольной функции скаляра Риччи R. Такие модели получили широкое распространение после того, как $f(R)$-гравитация была успешно применена в теориях инфляции [10]. Привлекательны $f(R)$-модели тем, что ускоренное расширение Вселенной может возникать здесь естественным образом как следствие гравитационной теории. Помимо этого, $f(R)$-гравитация интересна как альтернатива модели ΛCDM, поскольку она способна одновременно описывать инфляцию на ранних этапах и ускоренное расширение Вселенной, наблюдаемое в данный момент [11–18]. Более того, $f(R)$-модели могут обеспечивать хорошее согласие с данными наблюдений, будучи почти неотличимыми от модели ΛCDM [19].

* E-mail: guldur.anwo@gmail.com
** E-mail: sp.labazova@physics.msu.ru
*** E-mail: alexeyev@sai.msu.ru

Существуют два различных способа получения уравнений поля в рамках моделей $f(R)$-гравитации: метрический и Палатини. В метрическом подходе $g_{\mu\nu}$ — единственная динамическая переменная и действие варьируется только по ней. Метод Палатини основывается на том, что символы Кристоффеля объявляются независимыми от метрики величинами. Таким образом, варьирование происходит относительно и метрики, и символов Кристоффеля. Помимо этого, метод Палатини обеспечивает второй порядок для уравнений поля, тогда как в метрическом подходе они имеют четвертый порядок [20, 21].

Однако некоторые недостатки теории проявляются как в метрическом подходе, так и в методе Палатини. Одной из основных проблем метрической $f(R)$-гравитации является то, что эти модели имеют сложности с прохождением стандартных тестов в Солнечной системе [22–24]. Конечно, ограниченный класс жизнеспособных моделей в метрическом подходе существует и был детально изучен в работах [15, 18, 19]. Наиболее ярко особенности $f(R)$-гравитации проявляются в ее скалярно-тензорном представлении. В частности, ее метрическую модель можно интерпретировать как скалярно-тензорную теорию Бранса–Дикке с параметром $\omega_{BD} = 0$ (ω_{BD} — параметр Бранса–Дикке) и нетривиальным потенциалом $V(\phi)$. Чтобы теория удовлетворяла ограничениям, наложенным лабораторными экспериментами и наблюдениями в Солнечной системе, скалярное поле должно быть массивным, с диапазоном взаимодействия, не превышающим нескольких миллиметров. Такое скалярное поле, очевидно, не может влиять на космологию [25, 26]. Таким образом, метрические $f(R)$-теории жизнеспособны только тогда, когда скалярное поле каким-то образом можно «скрыть» в локальных экспериментах, при этом на космологических масштабах оно будет вести себя как дальнодействующее поле, что достигается с помощью хамелеонного механизма [14, 25, 27, 28].

С другой стороны, $f(R)$-модель Палатини можно представить как скалярно-тензорную теорию Бранса–Дикке с $\omega_{BD} = -3/2$ и тем же потенциалом $V(\phi)$, что и в метрической формулировке. Такая теория характеризуется нединамическим скалярным полем — превращением вакуумной модели в ОТО с эффективной космологической постоянной Λ_{eff}. Это свойство позволяет описать современное ускоренное расширение Вселенной, если Λ_{eff} мало. Несмотря на это привлекательное свойство, все изученные к настоящему моменту $f(R)$-модели Палатини с малым Λ_{eff} приводят к неприемлемым особенностям в эволюции космологических возмущений [29, 30].

Недавно в работе [31] была предложена теория, состоящая из суперпозиции метрического лагранжиана Эйнштейна–Гильберта с $f(R)$-членом, построенным по методу Палатини. Модель получила название гибридной $f(R)$-гравитации. Она исследовалась в скалярно-тензорном представлении. Было показано, что теория позволяет описывать космологическую крупномасштабную структуру, не влияя при этом на динамику Солнечной системы. Такие результаты вызвали многочисленные исследования гибридной $f(R)$-гравитации. Космологические следствия теории рассматривались во многих работах: были исследованы статическая Вселенная Эйнштейна [32] и различные космологические модели [33, 34]; в работе [35] получены космологические решения и описано ускоренное расширение Вселенной. Более того, гибридная $f(R)$-гравитация была изучена на астрофизических масштабах от звезд до скоплений галактик. В результате было показано, что различие вириальных и визуальных масс скоплений галактик может быть объяснено через геометрические члены в обобщенной теореме вириала [36]. Гибридная $f(R)$-гравитация также позволяет объяснить скорости вращения пробных частиц, движущихся вокруг галактик. Этот подход предоставляет возможность избежать введения большого количества темной материи [37]. Помимо этого, получены решения типа кротовая нора [38]. Позднее были рассмотрены свойства нейтронных и кварковых звезд в данной модели [39]. Все это наводит на мысль о перспективности гибридной $f(R)$-гравитации.

Основная концептуальная причина для введения гибридной $f(R)$-гравитации заключается в следующем. Как подробно обсуждалось ранее, если $f(R)$-гравитация представлена в скалярно-тензорном виде, то метрическая $f(R)$-модель соответствует теории Бранса–Дикке с параметром $\omega_{BD} = 0$, тогда как $f(R)$-гравитация Палатини — модели с $\omega_{BD} = -3/2$. Оба варианта несовместимы с ограничениями, накладываемыми наблюдениями в Солнечной системе, так как оригинальная теория Бранса–Дикке предсказывает, что $\omega_{BD} \to \infty$. Это несоответствие преодолевается, если рассмотреть такое действие, в котором стандартная часть ОТО, т. е. R, определяется согласно метрическому подходу, тогда как дальнейшие степени свободы гравитационного поля, т. е. $f(\mathfrak{R})$ задаются по методу Палатини. В этом случае скалярное поле является динамическим и устраняются недостатки как метрических моделей, так и моделей

Палатини. Привлекательной особенностью теории является то, что она допускает нестандартное скалярно-тензорное представление в терминах динамического скалярного поля (в отличие от моделей Палатини), которое не обязано иметь большую массу, чтобы соответствовать данным, полученным из лабораторных экспериментов и из наблюдений в Солнечной системе. Особенностей в эволюции космологических возмущений, которые появляются в моделях Палатини, здесь также не возникает, потому что скалярное поле слабо связано с веществом. Следовательно, в этой теории скалярное поле может играть активную роль в космологии, не вступая в противоречие с локальными экспериментами. Мы отсылаем читателя к работе [40] для обзора мотиваций для введения гибридной $f(R)$-гравитации.

Ранее следствия гибридной $f(R)$-гравитации изучались как на космологических масштабах, так и в пределе слабого поля. На теорию были наложены ограничения на основе экспериментальных данных по определению гравитационной постоянной и отклонению луча света в гравитационном поле Солнца (эксперимент «Кассини») [34]. Однако наиболее полным тестом теории гравитации в Солнечной системе является ее рассмотрение в рамках параметризованного постньютоновского формализма. Этому вопросу и посвящена данная работа. Основной нашей целью является ограничение теории с учетом последних наиболее точных значений постньютоновских параметров (γ и β), полученных из данных АМС «Мессенджер» [41–44].

Параметризованный постньютоновский (ППН) формализм был создан Уиллом и Нордтведтом [45–48]. В рамках ППН-формализма метрики различных гравитационных теорий представляют в виде обобщенной ППН-метрики, включающей ППН-потенциалы и ППН-параметры. Различия между гравитационными моделями и наблюдениями выражаются через набор из 10 ППН-параметров, в то время как форма ППН-потенциалов в различных теориях остается неизменной.

Картина меняется, когда в теории есть массивные поля. В этом случае метрика содержит не только стандартные ППН-потенциалы, но и потенциалы юкавского типа. Таким образом, ППН-формализм нельзя напрямую применить к моделям гравитации с массивными полями [49]. Существуют два способа модифицировать ППН-формализм. Первый заключается во введении новых ППН-потенциалов, включая потенциалы юкавского типа. В этом случае новые ППН-параметры остаются постоянными, однако необходимо обеспечить их связь со стандартными ППН-параметрами и с экспериментами в Солнечной системе [50]. Второй способ подразумевает сохранение стандартной формы ППН-потенциалов, но ППН-параметры становятся функциями, зависящими от пространственной переменной [51]. При этом ППН-параметры перестают быть константами, теряя свою универсальность, а их измеренное в эксперименте значение теперь зависит от расстояния, на котором проводился эксперимент. Тем не менее, этот метод также применим для проверки и ограничения моделей гравитации с массивными полями на конкретном расстоянии. В настоящей работе мы используем второй способ модификации ППН-формализма и накладываем ограничения на гибридную $f(R)$-гравитацию в режиме слабого поля.

Статья имеет следующую структуру. В разд. 2 рассматриваются действие и уравнения поля гибридной $f(R)$-гравитации в общем виде и в скалярно-тензорном представлении. В разд. 3 обсуждается ППН-формализм, решаются постньютоновские уравнения и выводятся аналитические выражения для эффективных ППН-параметров в рамках гибридной $f(R)$-гравитации. В разд. 4 рассматриваются ограничения на гибридную $f(R)$-гравитацию с использованием наблюдаемых значений ППН-параметров. В разд. 5 представлены краткое изложение основных результатов работы и их обсуждение.

В работе греческие индексы $(\mu, \nu, \ldots)$ пробегают значения $0, 1, 2, 3$ и используется сигнатура $(-, +, +, +)$. Все вычисления выполнены в системе единиц СГС.

2. ГИБРИДНАЯ $f(R)$-ГРАВИТАЦИЯ

Действие гибридной $f(R)$-гравитации имеет следующий вид [40]:

$$S = \frac{c^4}{2k^2} \int d^4x \sqrt{-g}\,[R + f(\mathfrak{R})] + S_m, \qquad (1)$$

где c — скорость света, $k^2 = 8\pi G$, R — скалярная кривизна, $\mathfrak{R} = g^{\mu\nu}\mathfrak{R}_{\mu\nu}$ — кривизна Палатини, g — определитель метрики, S_m — действие материи. Здесь кривизна Палатини $\mathfrak{R}$ определяется как функция $g_{\mu\nu}$ и символов Кристоффеля, не зависящих от метрики $\hat{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu}$:

$$\mathfrak{R} = g^{\mu\nu}\mathfrak{R}_{\mu\nu} = \\ = g^{\mu\nu}\left(\hat{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} - \hat{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu} + \hat{\Gamma}^{\alpha}_{\alpha\lambda}\hat{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} - \hat{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\lambda}\hat{\Gamma}^{\lambda}_{\alpha\nu}\right). \qquad (2)$$

Как и другие $f(R)$-теории, гибридную $f(R)$-гравитацию (1) можно представить как скалярно-тензорную модель:

$$S = \frac{c^4}{2k^2}\int d^4x\sqrt{-g}\,\times \times\left[(1+\phi)R + \frac{3}{2\phi}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi)\right] + S_m, \quad (3)$$

где ϕ — скалярное поле, $V(\phi)$ — скалярный потенциал. Здесь и ниже мы используем представление Йордана. После варьирования и нескольких преобразований можно получить уравнения поля в скалярно-тензорном представлении [31, 40]:

$$(1+\phi)R_{\mu\nu} = \frac{k^2}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right) - \frac{3}{2\phi}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left[V(\phi) + \nabla_\alpha\nabla^\alpha\phi\right] + \nabla_\mu\nabla_\nu\phi, \quad (4)$$

$$\nabla_\mu\nabla^\mu\phi - \frac{1}{2\phi}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{\phi[2V(\phi) - (1+\phi)V_\phi]}{3} = = -\frac{k^2}{3c^4}\phi T. \quad (5)$$

В отличие от моделей Палатини, в гибридной $f(R)$-гравитации скалярное поле является динамическим. Таким образом, теория не подвержена неустойчивостям, проявляющимся на малых масштабах в моделях Палатини [31, 40].

3. ППН-ПРЕДЕЛ ГИБРИДНОЙ $f(R)$-ГРАВИТАЦИИ

ППН-формализм был создан для сравнения различных теорий гравитации между собой и с экспериментом [48]. Постньютоновский (ПН) предел достигается в пределе малых скоростей, асимптотически плоского пространственно-временного фона и слабых гравитационных полей. Таким образом, ППН-формализм позволяет проверять теории гравитации в Солнечной системе с высокой точностью.

Изначально Уилл и Нордтведт (создатели ППН-формализма) развивали несколько разные подходы [45, 46]: Нордтведт исследовал постньютоновскую метрику для системы точечных гравитирующих масс, тогда как Уилл рассматривал материю системы в приближении идеальной жидкости [45, 46]. Позднее было показано, что оба метода эквиваленты [47]. Мы применяем подход Нордтведта.

Для рассмотрения гибридной $f(R)$-гравитации в пределе слабого поля разложим скалярное ϕ и тензорное $g_{\mu\nu}$ поля относительно их фоновых значений:

$$\phi = \phi_0 + \varphi, \qquad g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (6)$$

где ϕ_0 — асимптотическое значение скалярного поля вдали от источника, $\eta_{\mu\nu}$ — метрика Минковского, $h_{\mu\nu}$ и φ — малые возмущения соответственно тензорного и скалярного полей. В общем случае ϕ_0 не является константой, а представляет собой функцию, зависящую от времени, $\phi(t)$. Однако этой зависимостью можно пренебречь, если характерная шкала времени велика по сравнению с динамической шкалой времени, связанной с локальной системой. Таким образом, ϕ_0 предполагается постоянной величиной.

Полный постньютоновский предел требует оценки различных компонент возмущений метрики и скалярного поля до следующих порядков: $h_{00} \sim O(2) + O(4), h_{0j} \sim O(3), h_{ij} \sim O(2)$ и $\varphi \sim O(2) + O(4)$ [48]. Тогда скалярный потенциал $V(\phi)$ представим в виде разложения Тейлора относительно фонового значения скалярного поля ϕ_0 в следующем виде:

$$V(\phi) = V_0 + V'\varphi + \frac{V''\varphi^2}{2!} + \frac{V'''\varphi^3}{3!} + \ldots \quad (7)$$

Его производная по φ примет вид $V_\phi = V' + V''\varphi + V'''\varphi^2/2$.

Тензор энергии-импульса для системы точечных гравитирующих масс определяется как

$$T^{\mu\nu} = \frac{c}{\sqrt{-g}}\sum_a m_a \frac{u^\mu u^\nu}{u^0}\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a), \quad (8)$$

где m_a — масса a-й частицы, $\mathbf{r}_a$ — радиус-вектор a-й частицы, $u^\mu = dx^\mu_a/d\tau_a$ — четырехскорость a-й частицы, $d\tau = \sqrt{-ds^2}/c$, $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ — интервал, $u_\mu u^\mu = -c^2$, $\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a(t))$ — трехмерная дельта-функция Дирака.

В постньютоновском приближении компоненты тензора энергии-импульса (8) и его след принимают вид

$$T_{00} = c^2\sum_a m_a\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a)\left[1 - \frac{3}{2}h_{00} + \frac{1}{2}\frac{v_a^2}{c^2} - \frac{1}{2}h\right], \quad (9)$$

$$T_{0i} = -c\sum_a m_a v_a^i \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a), \quad (10)$$

$$T_{ij} = \sum_a m_a v_a^i v_a^j \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a), \quad (11)$$

$$T = -c^2 \sum_a m_a \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)\times \times \left[1 - \frac{1}{2}h_{00} - \frac{1}{2}\frac{v_a^2}{c^2} - \frac{1}{2}h\right], \qquad (12)$$

где v_a — скорость a-й частицы.

Для вывода уравнений поля (4) и (5) в пределе слабого поля (6) применим калибровку Натку [52]:

$$h^{\alpha}_{\beta,\alpha} - \frac{1}{2}\delta^{\alpha}_{\beta}h^{\mu}_{\mu,\alpha} = \frac{\varphi_{,\beta}}{1+\phi_0}. \qquad (13)$$

3.1. Решения для $\varphi^{(2)}$, $h^{(2)}_{00}$, $h^{(2)}_{ij}$

Начнем с ньютоновского предела гибридной $f(R)$-гравитации. Уравнение поля (5) в терминах возмущений (6), в ведущем порядке ($O(2)$) принимает вид

$$\left(\nabla^2 - m_\varphi^2\right)\varphi^{(2)} = \frac{k^2\phi_0}{3c^2}\sum_a m_a\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a), \qquad (14)$$

где

$$m_\varphi^2 = [2V_0 - V' - (1+\phi_0)\phi_0 V'']/3$$

— масса скалярного поля. Член нулевого порядка $\phi_0[2V_0 - (1+\phi_0)V']/3$, появляющийся в уравнении, может быть поглощен переопределением координат. Верхний индекс «(2)» обозначает порядок возмущений.

Используя общее решение экранированного уравнения Пуассона и свойства дельта-функции Дирака, можно получить решение уравнения (14):

$$\varphi^{(2)} = -\frac{k^2\phi_0}{12\pi c^2}\sum_a m_a \frac{e^{-m_\varphi r_a}}{r_a}, \qquad (15)$$

где $r_a = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|$.

Выразим 00-компоненту уравнения (4) в ведущем порядке $O(2)$:

$$\nabla^2\left(h^{(2)}_{00} - \frac{\varphi^{(2)}}{1+\phi_0}\right) = -\frac{k^2}{c^2(1+\phi_0)}\times \times \sum_a m_a\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a) + \frac{V_0}{1+\phi_0}. \qquad (16)$$

Используя полученное выражение для $\varphi^{(2)}$ (15) и предполагая, что главный вклад в метрику Солнечной системы дает Солнце, находим решение для $h^{(2)}_{00}$:

$$h^{(2)}_{00} = \frac{k^2}{4\pi(1+\phi_0)c^2}\frac{M}{r}\left(1 - \frac{\phi_0}{3}e^{-m_\varphi r}\right) + + \frac{V_0}{1+\phi_0}\frac{r^2}{6}, \qquad (17)$$

где M — масса Солнца. Здесь $V_0/(\phi_0+1)$ — космологическая постоянная. Этот член пренебрежимо мал на масштабах Солнечной системы, поэтому ниже мы его не учитываем.

Из (17) можно выразить эффективную гравитационную постоянную [31, 40]:

$$G^{eff} = \frac{k^2}{8\pi(1+\phi_0)}\left(1 - \frac{\phi_0}{3}e^{-m_\varphi r}\right). \qquad (18)$$

Отметим, что верхним индексом «eff» мы обозначаем ППН-параметры, которые рассматриваются как функции, зависящие от расстояния. Верхний индекс «exp» используется для обозначения экспериментальных значений ППН-параметров. Для ППН-параметров оригинального ППН-формализма верхний индекс не используется. То же самое верно и для гравитационной постоянной.

В гибридной $f(R)$-гравитации эффективная гравитационная постоянная не является константой, а представляет собой функцию, зависящую от расстояния. Ньютоновский предел воспроизводится двумя путями: $\phi_0 \ll 1$ или $m_\varphi r \gg 1$. Первый способ подразумевает возможность существования легкого скалярного поля, следовательно, в этом случае нет необходимости использовать экранирующие механизмы для описания динамики Солнечной системы в гибридной $f(R)$-гравитации [31, 40].

Выразим ij-компоненты уравнений поля (4) в ведущем порядке $O(2)$:

$$\nabla^2\left(h^{(2)}_{ij} + \delta_{ij}\frac{\varphi^{(2)}}{1+\phi_0}\right) = -\left(\frac{k^2}{(1+\phi_0)c^2}\times \times \sum_a m_a\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a) - \frac{V_0}{1+\phi_0}\right)\delta_{ij}, \qquad (19)$$

где δ_{ij} — дельта-символ Кронекера. Получим уравнение, аналогичное $h^{(2)}_{00}$:

$$h^{(2)}_{ij} = \frac{\delta_{ij}k^2}{4\pi(1+\phi_0)c^2}\frac{M}{r}\left(1 + \frac{\phi_0}{3}e^{-m_\varphi r}\right) - - \delta_{ij}\frac{V_0}{1+\phi_0}\frac{r^2}{6}. \qquad (20)$$

Для нахождения значений модифицированных ППН-параметров необходимо сравнить полученную метрику с общей ППН-метрикой для системы точечных гравитирующих масс (34), введенной Нордтведтом [47] (см. Приложение A).

После сравнения (20) с (34) эффективный ППН-параметр γ^{eff} можно выразить как [31, 40]

$$\gamma^{eff} = \frac{1 + \phi_0 e^{-m_\varphi r}/3}{1 - \phi_0 e^{-m_\varphi r}/3}. \qquad (21)$$

Заметим, что γ^{eff} является функцией, зависящей от расстояния, а не константой. Современные наблюдения предсказывают, что $\gamma^{exp} \approx 1$ (в ОТО $\gamma = 1$) с высокой точностью [41–44, 53, 54]. Один из способов получить этот результат из γ^{eff} — рассмотреть случай $\phi_0 \ll 1$. Таким образом, итоговое выражение для γ^{eff} не противоречит предположению, что скалярное поле может быть легким [31, 40].

Помимо этого, есть и другой способ получения выражения для γ из решения уравнения распространения света. В работе [49] этот подход в деталях рассмотрен для массивной теории Бранса–Дикке. Ключевым моментом является учет неравенства наблюдаемой кеплеровской массы и массы, которая приводит к эффекту Шапиро. Поскольку гибридную $f(R)$-гравитацию можно представить как скалярно-тензорную модель, выражение для γ может быть найдено тем же способом. Результат идентичен выражению (21), что означает эквивалентность двух подходов.

3.2. Решения для $\varphi^{(4)}$, $h_{00}^{(4)}$

После подстановки возмущений (6) до порядка $O(4)$ уравнения поля (4) и (5) принимают вид

$$(\nabla^2 - m_\varphi^2)\varphi^{(4)} = \frac{k^2\phi_0}{3c^2}\sum_a m_a\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a) \times \left[-\frac{1}{2}h_{jj}^{(2)} - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right] + h_{ij}^{(2)}\varphi_{,ij}^{(2)} + \frac{k^2}{3c^2}\varphi^{(2)} \times \sum_a m_a\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a) + \varphi_{,00}^{(2)} + \frac{3\phi_0+1}{2\phi_0(1+\phi_0)}(\nabla\varphi^{(2)})^2 - \frac{(\varphi^{(2)})^2}{3} \times \left[\frac{V'''\phi_0(\phi_0+1)}{2} + V''(\phi_0+1)\right], \quad (22)$$

$$\nabla^2\left(h_{00}^{(4)} - \frac{\varphi^{(4)}}{1+\phi_0}\right) = -\frac{k^2}{c^2(1+\phi_0)} \times \sum_a m_a\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a)\left[-h_{00}^{(2)} + \frac{3}{2}\frac{v_a^2}{c^2} - \frac{1}{2}h_j^j\right] + h_{00,00}^{(2)} - (\nabla h_{00}^{(2)})^2 + h_{ij}^{(2)}h_{00,ij}^{(2)} - \frac{1}{1+\phi_0}h_{ij}^{(2)}\varphi_{,ij}^{(2)} - \frac{\varphi_{,00}^{(2)}}{1+\phi_0} - \frac{1}{1+\phi_0}h_{00}\delta\varphi^{(2)} - \frac{\varphi^{(2)}}{1+\phi_0}\delta h_{00}^{(2)} - \frac{1}{(1+\phi_0)^2}(\nabla\varphi)^2. \quad (23)$$

Чтобы обеспечить адекватную космологическую картину, V_0 должен быть того же порядка, что и плотность энергии космологической постоянной. Дополнительно будем ожидать, что $V'(\phi_0)$ — достаточно малая величина и ее вкладом можно пренебречь. Причина заключается в том, что либо скалярное поле приближается к минимуму на поздних временах, либо потенциал принимает вид $V = V_0e^{-ak\phi}$ (где a порядка единицы), поэтому $V'(\phi_0) \sim kV_0$. Это предположение кажется правдоподобным во всех разумных моделях [55]. Следовательно, пренебрежем вкладами, содержащими V_0, V', умноженные на возмущения любого порядка (например, V_0h_{00}), так как эти члены не должны приводить к наблюдательным следствиям на масштабах Солнечной системы.

Для решения (22) и (23) удобно использовать следующие выражения:

$$(\nabla\varphi)^2 = \frac{1}{2}(\nabla^2 - m_\varphi^2)\varphi^2 - \varphi\left(\nabla^2 - \frac{m_\varphi^2}{2}\right)\varphi, \quad (24)$$

$$(\nabla h_{00})^2 = \frac{1}{2}\nabla^2 h_{00}^2 - h_{00}\nabla^2 h_{00}. \quad (25)$$

Далее, из (22) для $\varphi^{(4)}$ находим

$$\varphi^{(4)} = \frac{k^2\phi_0}{24\pi c^2}\sum_a m_a\partial_t\partial_t\frac{e^{-m_\varphi r_a}}{m_\varphi} + \frac{k^4\phi_0(1+3\phi_0)}{576\pi^2c^4(1+\phi_0)} \times \sum_a m_a\frac{e^{-m_\varphi r_a}}{r_a}\sum_b m_b\frac{e^{-m_\varphi r_b}}{r_b} + \frac{k^4\phi_0}{96\pi^2c^4(1+\phi_0)} \times \sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_am_b}{r_ar_{ab}}e^{-m_\varphi r_a}\left(1 + \frac{\phi_0}{3}e^{-m_\varphi r_{ab}}\right) - \frac{k^4\phi_0(\phi_0-1)}{288\pi^2c^4(1+\phi_0)}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_am_b}{r_ar_{ab}}e^{-m_\varphi r_a}e^{-m_\varphi r_{ab}} + \frac{k^2\phi_0}{24\pi c^4}\sum_a v_a^2\frac{m_a}{r_a}e^{-m_\varphi r_a} - \frac{k^4\phi_0 m_\varphi}{96\pi^2c^4(1+\phi_0)} \times \sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_am_b}{r_{ab}}\Big[-Ei(-2m_\varphi r_a)e^{-m_\varphi r_{ab}}e^{m_\varphi r_a} + Ei(-2m_\varphi r_b)e^{m_\varphi r_b} - \ln(r_a)e^{-m_\varphi r_b} + \ln(r_b)e^{-m_\varphi r_b}\Big] - \left[\frac{k^4\phi_0(1+7\phi_0)m_\varphi}{1152\pi^2c^4(1+\phi_0)} + \frac{k^4\phi_0^2(1+\phi_0)}{864\pi^2c^4m_\varphi}\left(V'' + \phi_0\frac{V'''}{2}\right)\right] \times \sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_am_b}{r_{ab}}\Big[Ei(-3m_\varphi r_b)e^{4m_\varphi r_{ab}}e^{m_\varphi r_a} - Ei(-3m_\varphi r_a)e^{m_\varphi r_{ab}}e^{m_\varphi r_a} - Ei(-m_\varphi r_b)e^{-m_\varphi r_a} + Ei(-m_\varphi r_a)e^{-m_\varphi r_b}\Big]. \quad (26)$$

Здесь Ei обозначает экспоненциальный интеграл, который определяется как

$$Ei(-x) = -\int\limits_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt. \tag{27}$$

Таким образом, используя решение (26) и выражения для $\varphi^{(2)}, h_{00}^{(2)}, h_{ij}^{(2)}$, из уравнения (23) получаем

$$\begin{gathered}
h_{00}^{(4)} = -\frac{k^4}{32\pi^2 c^4(1+\phi_0)^2}\sum_a \frac{m_a}{r_a}\left(1-\frac{\phi_0}{3}e^{-m_\varphi r_a}\right) \times \\
\times \sum_b \frac{m_b}{r_b}\left(1-\frac{\phi_0}{3}e^{-m_\varphi r_b}\right) + \frac{k^4\phi_0(1+\phi_0)}{576\pi^2c^4(1+\phi_0)^2} \times \\
\times \sum_a m_a \frac{e^{-m_\varphi r_a}}{r_a}\sum_b m_b \frac{e^{-m_\varphi r_b}}{r_b} - \frac{k^4}{32\pi^2c^4(1+\phi_0)^2} \times \\
\times \sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_a r_{ab}}\left(1-\frac{\phi_0}{3}e^{-m_\varphi r_a}\right)\left(1-\frac{\phi_0}{3}e^{-m_\varphi r_{ab}}\right) + \\
+ \frac{k^4\phi_0(\phi_0+1)}{288\pi^2c^4(1+\phi_0)^2}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_a r_{ab}} e^{-m_\varphi r_a} e^{-m_\varphi r_{ab}} + \\
+ \frac{k^2}{8\pi c^4(1+\phi_0)}\sum_a v_a^2 \frac{m_a}{r_a}\left(1-\frac{\phi_0}{3}e^{-m_\varphi r_a}\right) + \\
+ \frac{k^2}{4\pi c^4(1+\phi_0)}\sum_a v_a^2 \frac{m_a}{r_a}\left(1+\frac{\phi_0}{3}e^{-m_\varphi r_a}\right) - \\
- \frac{k^4\phi_0 m_\varphi}{96\pi^2c^4(1+\phi_0)^2}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_a r_{ab}} \times \\
\times \Big[- Ei(-2m_\varphi r_a) r_a e^{-m_\varphi r_{ab}} e^{m_\varphi r_a} + \\
+ Ei(-2m_\varphi r_b) r_a e^{m_\varphi r_b} - \ln(r_a) r_a e^{-m_\varphi r_b} + \\
+ \ln(r_b) r_a e^{-m_\varphi r_b}\Big] - \left[\frac{k^4\phi_0(1+7\phi_0)m_\varphi}{1152\pi^2c^4(1+\phi_0)^2} + \right. \\
\left. + \frac{k^4\phi_0^2}{864\pi^2c^4 m_\varphi}\left(V'' + \phi_0\frac{V'''}{2}\right)\right]\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_a r_{ab}} \times \\
\times \Big[Ei(-3m_\varphi r_b) r_a e^{4m_\varphi r_{ab}} e^{m_\varphi r_a} - \\
- Ei(-m_\varphi r_b) r_a e^{-m_\varphi r_a} + Ei(-m_\varphi r_a) r_a e^{-m_\varphi r_b} - \\
- Ei(-3m_\varphi r_a) r_a e^{m_\varphi r_{ab}} e^{m_\varphi r_a}\Big] + \frac{k^2}{4\pi c^2(1+\phi_0)} \times \\
\times \sum_a m_a \partial_t\partial_t\left(\frac{r_a}{2}\right) + \frac{k^2\phi_0}{24\pi c^2(1+\phi_0)} \times \\
\times \sum_a m_a \partial_t\partial_t\left(\frac{e^{-m_\varphi r_a}}{m_\varphi}\right).
\end{gathered} \tag{28}$$

Сравнивая ППН-метрику гибридной $f(R)$-гравитации с обобщенной метрикой Нордтведта (34), можно выразить оставшиеся эффективные ППН-параметры. Аналитическое выражение для β^{eff} получается из первых двух слагаемых (28). После добавления естественного предположения, что Солнце обеспечивает главный вклад в гравитацию Солнечной системы, β^{eff} принимает вид

$$\beta^{eff} = 1 - \frac{\phi_0(\phi_0+1)e^{-2m_\varphi r}}{18\left(1-\dfrac{\phi_0}{3}e^{-m_\varphi r}\right)^2}. \tag{29}$$

Таким образом, параметр β^{eff} (так же, как и γ^{eff}) предполагает наличие двух вариантов, при которых достигается значение $\beta^{eff} \approx 1$: $\phi_0 \ll 1$ или $m_\varphi r \gg 1$.

Рассматривая члены вида $\sum_a v_a^2 m_a/r_a$, можно получить эффективные ППН-параметры $\alpha_3^{eff} = \zeta_1^{eff} = 0$. Члены вида $\sum_a\sum_{b\neq a} m_a m_b/r_a r_{ab}$ связаны с комбинацией параметров $-2\beta^{eff} + 1 + \zeta_2^{eff}$ в оригинальной метрике (34). После выделения всех членов с уже известными эффективными ППН-параметрами остаются только слагаемые с множителями, содержащими m_φ, V'', V'''. Все они должны вкладываться в ζ_2^{eff}. Здесь важно подчеркнуть, что в гибридной $f(R)$-гравитации параметры $\alpha_3 = \zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = \zeta_4$ равны нулю [56], потому что выполняется полный набор постньютоновских законов сохранения (энергии, импульса, момента импульса и движения центра масс) [31, 40]. Таким образом, все вклады, умноженные на m_φ, V'', V''', должны проявляться лишь в следующем ПН-порядке, поэтому ими можно пренебречь.

В (28) нерассмотренными остались только члены, содержащие производные по времени. Обсудим их вклад отдельно.

3.3. Решения для $h_{0i}^{(3)}$

Решение для $0i$-компоненты уравнения поля (4) до порядка $O(3)$ имеет следующий вид:

$$h_{0i}^{(3)} = -\frac{k^2}{2(1+\phi_0)c^3}\sum_a \frac{m_a}{r_a}v_a^i. \tag{30}$$

Мы используем конформную гармоническую калибровку (13). Чтобы привести ее к стандартной постньютоновской калибровке, проведем координатные преобразования $t = \bar{t} + \partial_{\bar{t}}X/2c^4$ и $x^j = \bar{x}^j$. Здесь X — суперпотенциал, определяемый как $\nabla^2 X = 2G^{eff}M/r$. Переходя к новым координатам в метрике $(\bar{t}, \bar{x}^j)$ и отбрасывая верхнюю черту у новых переменных, получаем, что решение для ij-компоненты останется прежним. В 00-компоненте все слагаемые с производными по времени уходят, в то время как $0i$-компонента принимает вид [57]

$$h_{0i}^{(3)} = -\frac{3k^2}{16\pi c^3(1+\phi_0)}\sum_a \frac{m_a v_a^i}{r_a} \times \times \left(1 - \frac{\phi_0}{3}e^{-m_\varphi r_a}\right) - \frac{k^2}{4\pi c^3(1+\phi_0)} \times \times \sum_a \frac{m_a v_a^i}{r_a}\left(1 + \frac{\phi_0}{3}e^{-m_\varphi r_a}\right) + \frac{k^2}{16\pi c^3(1+\phi_0)} \times \times \sum_a \frac{m_a r_a^i}{r_a^3}(\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{r}_a)\left(1 - \frac{\phi_0}{3}e^{-m_\varphi r_a}\right). \quad (31)$$

После сравнения этого выражения с обобщенной метрикой Нордтведта (34) получаем, что $\alpha_1^{eff} = \alpha_2^{eff} = 0$. Таким образом, в гибридной $f(R)$-гравитации нет эффектов привилегированной системы отсчета.

3.4. ППН-метрика в приближении идеальной жидкости

Помимо метрики для системы точечных гравитирующих масс, нами была также получена ППН-метрика в приближении идеальной жидкости для гибридной $f(R)$-гравитации (37). Мы приводим конечное выражение в Приложении В, здесь же представлено только обсуждение полученной метрики.

В первоначальном варианте ППН-формализма все ППН-параметры являются константами, так как изначально формализм создавался для теорий гравитации без массивных полей. Однако применение ППН-формализма к гравитационным моделям с массивными полями привело к тому, что ППН-параметры больше не являются постоянными, став функциями, зависящими от расстояния. Более того, мы обнаружили, что в приближении идеальной жидкости ППН-параметры становятся неотделимыми от ППН-потенциалов. Поэтому их выделение является трудновыполнимой задачей, а их физический смысл утрачивается. Однако некоторые детали из этой метрики извлечь можно.

В оригинальном варианте ППН-метрика в приближении идеальной жидкости (35) включает в себя 10 ППН-параметров: $\gamma, \beta, \xi, \zeta_{1,2,3,4}, \alpha_{1,2,3}$. Они эквивалентны ППН-параметрам, появляющимся в приближении системы точечных гравитирующих масс (34), но ξ и $\zeta_{3,4}$ не включены в метрику Нордтведта. Однако, сравнивая полученную метрику (37) с обобщенной метрикой Уилла (35), можно определить, что $\xi^{eff} = 0, \zeta_3^{eff} = 0$ в гибридной $f(R)$-гравитации. Параметр ζ_4^{eff} может быть выражен через комбинацию других ППН-параметров: $6\zeta_4 = 3\alpha_3 + 2\zeta_1 - 3\zeta_3$ [54]. Все параметры в этой комбинации равны нулю, следовательно, $\zeta_4^{eff} = 0$.

4. НАБЛЮДАТЕЛЬНЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ

Главной целью данной работы является наложение дополнительных ограничений на гибридную $f(R)$-гравитацию и изучение поведения этой модели в Солнечной системе. Чтобы найти ограничения на ϕ_0 и m_φ, используем данные проекта «Мессенджер» для γ и β [43]. В этом проекте недавно были получены новые наблюдательные данные для β [58]. Однако в работе [58] авторы комбинировали γ^{exp}, полученную из наблюдений аппарата «Кассини», с данными измерений вековой и периодической прецессии орбиты Меркурия, что позволяет оценить совместно β^{exp} и J_2. Таким образом, значение β^{exp} было найдено с использованием значения γ^{exp}, полученного на расстоянии от гравитирующего источника (Солнца), отличном от того, на котором проводился эксперимент «Мессенджера». Поэтому самые новые значения для β из работы [58] некорректно использовать для проверки массивных скалярно-тензорных теорий, так как ППН-параметры являются функциями r и их значения могут меняться в зависимости от расстояния, на котором они измерены.

В нашей работе мы ограничиваем гибридную $f(R)$-гравитацию, используя следующие экспериментальные значения параметров γ^{exp} и β^{exp} [41,43]: $\gamma^{exp} = 1 - 0.3\cdot 10^{-5} \pm 2.5\cdot 10^{-5}$ и $\beta^{exp} = 1 + 0.2\cdot 10^{-5} \pm 2.5\cdot 10^{-5}$. Ограничения на ϕ_0 и m_φ, полученные из этих данных, показаны на рисунке. Закрашенные области отражают исключенные значения параметров. Очевидно, что γ^{exp} дает лучшие ограничения по сравнению с β^{exp}. Показано, что для всех малых значений ϕ_0 масса скалярного поля может принимать любое значение, включая самые малые. При больших значениях массы скалярного поля значения ϕ_0 могут быть любыми. Далее рассмотрим два предельных случая, которые позволяют ограничить значение ϕ_0.

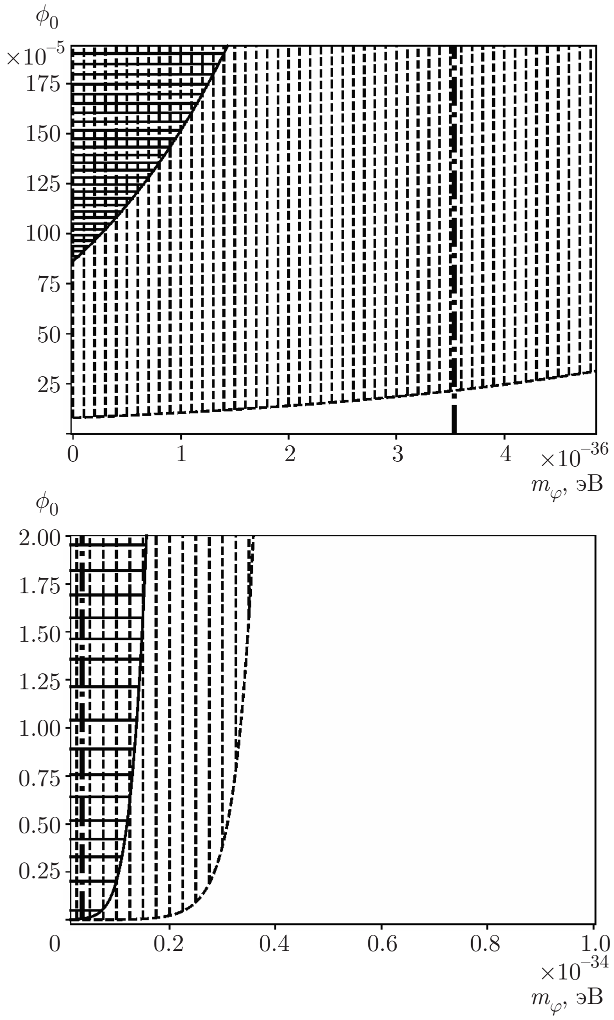
Сначала рассмотрим случай очень легкого скалярного поля: $m_\varphi r \ll 1$. Тогда можно ограничить ϕ_0:

$$-8\cdot 10^{-5} < \phi_0 < 7\cdot 10^{-5} \quad (32)$$

из γ^{exp} и

$$-9\cdot 10^{-4} < \phi_0 < 9\cdot 10^{-4} \quad (33)$$

из β^{exp} с точностью до 2σ. Ограничения, полученные из γ^{exp}, более строгие, чем полученные из β^{exp}.



Зависимости фонового значения скалярного поля от его массы. Два графика соответствуют разным масштабам. Вертикальные штриховые линии соответствуют исключенным значениям, полученным из данных γ^{exp}; горизонтальные сплошные линии соответствуют исключенным значениям, полученным из β^{exp}; вертикальная штрихпунктирная линия соответствует критическому значению массы скалярного поля $m_\varphi = 1/r_0$, где r_0 — расстояние от Солнца до Меркурия

В случае массивного скалярного поля $\gamma^{eff} \approx 1$ и $\beta^{eff} \approx 1$. Тогда ϕ_0 может быть ограничено из G^{eff} и его экспериментального значения [59]. В [34] показано, что в таком случае ϕ_0 имеет также очень малое значение ($|\phi_0| < 5 \cdot 10^{-4}$).

Таким образом, экспериментальные данные, полученные в рамках Солнечной системы, показывают, что параметр ϕ_0 близок к нулю. В этом случае m_φ может принимать любые значения, поэтому нет возможности установить ограничения на массу скалярного поля в слабополевом пределе в настоящий момент. Однако ограничения на m_φ были получены из других локальных систем, например, из двойных систем с пульсаром [60].

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрен постньютоновский предел гибридной $f(R)$-гравитации. Так как эта теория представима в скалярно-тензорном виде с массивным скалярным полем [31, 40], оригинальный параметризованный постньютоновский формализм [45–48, 57] не применим напрямую [49]. В этом случае возможны два пути использования ППН-формализма. Первый заключается в модифицировании ППН-формализма таким образом, чтобы включить в него не только стандартные ППН-потенциалы, но и дополнительно потенциалы юкавского типа. При таком подходе модифицированные ППН-параметры остаются константами, но требуют переопределения [50]. Второй способ заключается в сохранении ППН-потенциалов в их оригинальной форме и включении модификаций, связанных с присутствием массивных полей, в ППН-параметры. В этом случае последние уже будут не константами, а зависящими от расстояния функциями [51]. Мы использовали второй способ.

Модифицированная ППН-метрика гибридной $f(R)$-гравитации получена нами в двух различных приближениях: системы точечных гравитирующих масс и идеальной жидкости [47]. Первый подход использован для выделения эффективных ППН-параметров. Помимо этого, показано, что во втором случае ППН-параметры не только являются зависящими от расстояния функциями, но и становятся частью ППН-потенциалов. Таким образом, чтобы использовать приближение идеальной жидкости для проверки моделей гравитации с массивными полями в пределе слабого поля, необходимо модифицировать оригинальные ППН-потенциалы, оставляя ППН-параметры константами, при этом переопределяя их.

Мы получили выражения для 10 эффективных ППН-параметров в гибридной $f(R)$-гравитации. Из них только γ^{eff} и β^{eff} не равны нулю. Параметр γ^{eff} был получен ранее [31, 40], тогда как выражение для β^{eff} представлено впервые. Так же, как и в случае с γ^{eff}, ожидаемое значение $\beta^{eff} \approx 1$ достигается при двух условиях: $\phi_0 \ll 1$ или $m_\varphi r \gg 1$. Первый позволяет скалярному полю быть очень легким, оставляя поведение в Солнечной системе без изменений, но модифицируя космологическую и галактическую динамики без необходимости введения экранирующих механизмов. Более того, ранее было показано, что даже в случае очень массивного скалярного поля фоновое значение ϕ_0 должно оставаться малым ($|\phi_0| < 5\cdot 10^{-4}$) [34]. Эта проверка основывается на эффективной гравитационной постоянной гибридной $f(R)$-гравитации. В предположении, что скалярное поле легкое, мы наложили ограничения на фоновое значение ϕ_0 из γ^{eff} и β^{eff}, используя данные «Мессенджера» [41–44] с точностью 2σ. Показано, что ограничения, полученные из γ^{exp}, более строгие: $-8\cdot 10^{-5} < \phi_0 < 7\cdot 10^{-5}$.

Ранее было показано, что легкое скалярное поле в гибридной $f(R)$-гравитации не противоречит наблюдательным данным, полученным в Солнечной системе. Вывод был сделан на основании единственного ППН-параметра γ [34, 40]. В нашей работе мы провели полный постньютоновский анализ и явно показали, что легкое скалярное поле в гибридной $f(R)$-гравитации не противоречит экспериментальным данным не только по параметру γ, но и по всем остальным параметрам постньютоновского формализма.

Несмотря на тот факт, что гибридная $f(R)$-гравитация согласуется с данными наблюдений в пределе слабого поля, интересно проверить следствия теории и в режиме более сильного поля, реализующегося в двойных системах с пульсаром. Некоторые ограничения уже были получены с помощью проверки гибридной $f(R)$-гравитации на наблюдательных данных изменения орбитального периода в системах PSR J1738+0333, PSR J0737-3039 [60]. Для завершения работы требуется полный посткеплеровский тест с учетом всех посткеплеровских параметров, так как массы компонент двойных систем с пульсаром, предсказанные теорией, могут отличаться от масс, предсказанных ОТО, что влияет на конечные ограничения, накладываемые на модель [39].

Развитием данной работы может стать создание универсального аппарата для проверки теорий гравитации с массивными полями в пределе слабого поля (аналога оригинального ППН-формализма для безмассовых моделей), но эта тема требует более обширных исследований.

Благодарности. Авторы признательны Н. А. Авдееву и В. В. Колыбасовой за полезные обсуждения.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №18-32-00785).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Метрики ППН-формализма

Метрика для системы точечных гравитирующих масс имеет вид [47]

$$
\begin{aligned}
g_{00} = {} & -1 + 2\sum_k \frac{G}{c^2}\frac{m_k}{r_k} - 2\beta\left(\sum_k \frac{G}{c^2}\frac{m_k}{r_k}\right)^2 + \\
& + 2(1-2\beta+\zeta_2)\sum_k \frac{G}{c^2}\frac{m_k}{r_k}\sum_{j\neq k}\frac{G}{c^2}\frac{m_j}{r_{jk}} + \\
& + (2\gamma+1+\alpha_3+\zeta_1)\sum_k \frac{G}{c^4}\frac{m_k v_k^2}{r_k} - \\
& - \zeta_1\sum_k \frac{G}{c^4}\frac{m_k}{r_k^3}(\mathbf{v}_k\cdot\mathbf{r}_k)^2 - (\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)w^2 \times \\
& \times \sum_k \frac{G}{c^4}\frac{m_k}{r_k^3} - \alpha_2\sum_k \frac{G}{c^4}\frac{m_k}{r_k}(\mathbf{w}\cdot\mathbf{r}_k)^2 + \\
& + (2\alpha_3-\alpha_1)\sum_k \frac{G}{c^4}\frac{m_k}{r_k}(\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}_k),
\end{aligned} \tag{34}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{0j} = {} & -\frac{1}{2}(4\gamma+3+\alpha_1-\alpha_2+\zeta_1)\sum_k \frac{G}{c^3}\frac{m_k v_k^j}{r_k} - \\
& - \frac{1}{2}(1+\alpha_2-\zeta_1)\sum_k \frac{G}{c^3}\frac{m_k}{r_k^3}(\mathbf{v}_k\cdot\mathbf{r}_k)r_k^j - \\
& - \frac{1}{2}(\alpha_1-2\alpha_2)w^j\sum_k \frac{G}{c^3}\frac{m_k}{r_k} + \\
& + \alpha_2\sum_k \frac{G}{c^3}\frac{m_k}{r_k^3}(\mathbf{w}\cdot\mathbf{r}_k)r_k^j,
\end{aligned}
$$

$$
g_{ij} = \left(1 + 2\gamma\sum_k \frac{G}{c^2}\frac{m_k}{r_k}\right)\delta_{ij},
$$

здесь w^i — координатная скорость системы отсчета ППН относительно системы покоя Вселенной.

Метрика в приближении идеальной жидкости [57]:

$$
\begin{aligned}
g_{00} = {} & -1 + 2\frac{1}{c^2}U - 2\beta\frac{1}{c^4}U^2 + \\
& + (2\gamma+1+\alpha_3+\zeta_1-2\xi)\frac{1}{c^4}\Phi_1 - \\
& - 2(2\beta-1-\zeta_2-\xi)\frac{1}{c^4}\Phi_2 + 2(1+\zeta_3)\frac{1}{c^4}\Phi_3 + \\
& + \frac{1}{c^4}\Phi^{PF} + 2(3\gamma+3\zeta_4-2\xi)\frac{1}{c^4}\Phi_4 - \\
& - (\zeta_1-2\xi)\frac{1}{c^4}\Phi_6 - 2\xi\frac{1}{c^4}\Phi_W,
\end{aligned} \tag{35}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{0j} = {} & -\frac{1}{2}(4\gamma+3+\alpha_1-\alpha_2+\zeta_1-2\xi)\frac{1}{c^3}V_j - \\
& - \frac{1}{2}(1+\alpha_2-\zeta_1+2\xi)\frac{1}{c^3}W_j + \frac{1}{c^3}\Phi_j^{PF},
\end{aligned}
$$

$$
g_{ij} = \left(1 + 2\gamma\frac{1}{c^2}U\right)\delta_{ij},
$$

где ППН-потенциалы представлены как

$$\begin{aligned}
U &= \int G\frac{\rho'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\mathbf{r}', \quad \Phi_1 = \int G\frac{\rho' v'^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\mathbf{r}',\\
\Phi_2 &= \int G\frac{\rho' U'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\mathbf{r}', \quad \Phi_3 = \int G\frac{\rho' \Pi'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\mathbf{r}',\\
\Phi_4 &= \int G\frac{p'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\mathbf{r}', \quad V_j = \int G\frac{\rho v_j}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\mathbf{r}',\\
\Phi_6 &= \int G\rho' v'_j v'_k\frac{(r-r')^j(r-r')^k}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}d\mathbf{r}',\\
\Phi_j^{PF} &= -\frac{1}{2}\alpha_1 w_j U + \alpha_2 w^k U_{ij},\\
\Phi_W &= \int G^2\rho'\rho''\frac{(r-r')_j}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\left[\frac{(r'-r'')^j}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|} - \frac{(r-r'')^j}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|}\right]d\mathbf{r}'d\mathbf{r}'',\\
W_j &= \int G\frac{\rho'\mathbf{v}'(\mathbf{r}-\mathbf{r}')(r-r')_j}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}d\mathbf{r}',\\
U_{ij} &= \int G\frac{\rho'(r-r')_i(r-r')_j}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\mathbf{r}',\\
\Phi^{PF} &= (\alpha_3-\alpha_1)w^2U + \alpha_2 w^j w^k U_{ij} + (2\alpha_3-\alpha_1)w^j V_j.
\end{aligned} \tag{36}$$

Здесь индекс «PF» обозначает потенциалы, ответственные за наличие привилегированной системы отсчета.

ПРИЛОЖЕНИЕ B

5.1. ППН-метрика гибридной $f(R)$-гравитации в приближении идеальной жидкости

$$\begin{aligned}
g_{00} = &-1 + \frac{k^2}{4\pi(1+\phi_0)c^2}\int\frac{\rho'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\left(1-\frac{\phi_0}{3}e^{-m_\varphi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)d\mathbf{r}' - \frac{k^4}{32\pi^2(1+\phi_0)^2c^4}\times\\
&\times\int\frac{\rho'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\left(1-\frac{\phi_0}{3}e^{-m_\varphi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\frac{\rho''}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|}\left(1-\frac{\phi_0}{3}e^{-m_\varphi|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|}\right)d\mathbf{r}''d\mathbf{r}' + \frac{k^4}{32\pi^2(1+\phi_0)^2c^4}\,\frac{\phi_0(1+\phi_0)}{18}\times\\
&\times\int\frac{\rho'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}e^{-m_\varphi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\frac{\rho''}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|}e^{-m_\varphi|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|}d\mathbf{r}''d\mathbf{r}' + \frac{k^2}{4\pi(1+\phi_0)c^4}\int\frac{\Pi'\rho'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\left(1-\frac{\phi_0}{3}e^{-m_\varphi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)d\mathbf{r}' +\\
&+\frac{k^2}{2\pi(1+\phi_0)c^4}\int\frac{\rho' v'^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\mathbf{r}' + \frac{3k^2}{4\pi(1+\phi_0)c^4}\int\frac{p'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\left(1+\frac{\phi_0}{3}e^{-m_\varphi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)d\mathbf{r}' +\\
&+\frac{k^4}{32\pi^2(1+\phi_0)^2c^4}\int\frac{\rho'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\left[1-\frac{\phi_0}{3}e^{-m_\varphi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right]d\mathbf{r}'\int\frac{\hat\rho}{|\mathbf{r}'-\hat{\mathbf{r}}|}\left(1-\frac{\phi_0}{3}e^{-m_\varphi|\mathbf{r}'-\hat{\mathbf{r}}|}\right)d\hat{\mathbf{r}} +\\
&+\frac{3k^4}{32\pi^2(1+\phi_0)^2c^4}\int\frac{\rho'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\left[1-\frac{\phi_0}{3}e^{-m_\varphi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right]d\mathbf{r}'\int\frac{\hat\rho}{|\mathbf{r}'-\hat{\mathbf{r}}|}\left(1+\frac{\phi_0}{3}e^{-m_\varphi|\mathbf{r}'-\hat{\mathbf{r}}|}\right)d\hat{\mathbf{r}} -\\
&-\frac{k^4}{16\pi^2(1+\phi_0)^2c^4}\int\frac{\rho'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\left[1-\frac{\phi_0}{3}e^{-m_\varphi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right]d\mathbf{r}'\int\frac{\hat\rho}{|\mathbf{r}'-\hat{\mathbf{r}}|}\left(1-\frac{\phi_0}{3}e^{-m_\varphi|\mathbf{r}'-\hat{\mathbf{r}}|}\right)d\hat{\mathbf{r}} +\\
&+\frac{k^4}{16\pi^2(1+\phi_0)^2c^4}\frac{\phi_0(1+\phi_0)}{18}\int\frac{\rho'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}e^{-m_\varphi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\mathbf{r}'\int\frac{\hat\rho}{|\mathbf{r}'-\hat{\mathbf{r}}|}e^{-m_\varphi|\mathbf{r}'-\hat{\mathbf{r}}|}d\hat{\mathbf{r}} +\\
&+\frac{(7\phi_0+1)k^4\phi_0}{2304\pi^3(1+\phi_0)^2c^4}m_\varphi^2\int\frac{e^{-m_\varphi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\mathbf{r}'\left(\int\frac{\hat\rho}{|\mathbf{r}'-\hat{\mathbf{r}}|}e^{-m_\varphi|\mathbf{r}'-\hat{\mathbf{r}}|}\frac{\rho''}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|}e^{-m_\varphi|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|}d\hat{\mathbf{r}}d\mathbf{r}''\right) +\\
&+\frac{k^4\phi_0}{192\pi^3(1+\phi_0)^2c^4}m_\varphi\int\frac{e^{-m_\varphi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\mathbf{r}'\left(\int\frac{\hat\rho}{|\mathbf{r}'-\hat{\mathbf{r}}|}e^{-m_\varphi|\mathbf{r}'-\hat{\mathbf{r}}|}\frac{\rho''}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|}e^{-m_\varphi|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|}d\hat{\mathbf{r}}d\mathbf{r}''\right) +\\
&+\frac{k^4\phi_0^2}{1728\pi^3c^4}\left[V''-\frac{\phi_0}{2}V'''\right]\int\frac{e^{-m_\varphi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\mathbf{r}'\left(\int\frac{\hat\rho}{|\mathbf{r}'-\hat{\mathbf{r}}|}e^{-m_\varphi|\mathbf{r}'-\hat{\mathbf{r}}|}\frac{\rho''}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|}e^{-m_\varphi|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|}d\hat{\mathbf{r}}d\mathbf{r}''\right),
\end{aligned} \tag{37}$$

$$g_{0i} = -\frac{k^2}{4\pi(1+\phi_0)c^3}\int\frac{\rho' v_i'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\left(1+\frac{\phi_0}{3}e^{-m_\varphi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)d\mathbf{r}' - \frac{3k^2}{16\pi(1+\phi_0)c^3}\int\frac{\rho' v_i'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\left(1-\frac{\phi_0}{3}e^{-m_\varphi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)d\mathbf{r}' -$$

$$-\frac{k^2}{16\pi(1+\phi_0)c^3}\int\frac{\rho' x_i'(\mathbf{v}'\cdot\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\left[1-\frac{\phi_0}{3}e^{-m_\varphi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right]d\mathbf{r},$$

$$g_{ij} = \delta_{ij}\left(1+\frac{k^2}{4\pi(1+\phi_0)c^2}\int\frac{\rho'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\left(1+\frac{\phi_0}{3}e^{-m_\varphi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)d\mathbf{r}'\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Perlmutter et al., Astrophys. J. **517**, 565 (1999).

2. A. G. Riess et al., Astron. J. **116**, 1009 (1998).

3. A. G. Riess et al., Astrophys. J. **607**, 665 (2004).

4. F. Zwicky, Helvetica Phys. Acta **6**, 110 (1933).

5. J. H. Oort, Bull. Astron. Inst. Netherlands **6**, 249 (1932).

6. P. G. Bergmann, Int. J. Theor. Phys. **1**, 25 (1968).

7. A. De Felice and S. Tsujikawa, Living Rev. Rel. **13**, 3 (2010).

8. S. Nojiri, S. D. Odintsov, and V. K. Oikonomou, Phys. Rep. **692**, 1 (2017).

9. S. Nojiri and S. D. Odintsov, Phys. Rep. **505**, 59 (2011).

10. A. A. Starobinsky, Phys. Lett. B **91**, 99 (1980).

11. S. Nojiri and S. D. Odintsov, Phys. Rev. D **68**, 123512 (2003).

12. F. Briscese, E. Elizalde, S. Nojiri, and S. D. Odintsov, Phys. Lett. B **646**, 105 (2007).

13. D. Saez-Gomez, Gen. Rel. Grav. **41**, 1527 (2009).

14. S. Nojiri and S. D. Odintsov, Phys. Lett. B **657**, 238 (2007).

15. S. Nojiri and S. D. Odintsov, Phys. Rev. D **77**, 026007 (2008).

16. S. Nojiri, S. D. Odintsov, and D. Saez-Gomez, Phys. Lett. B **681**, 74 (2009).

17. G. Cognola, E. Elizalde, S. D. Odintsov, P. Tretyakov, and S. Zerbini, Phys. Rev. D **79**, 044001 (2009).

18. G. Cognola, E. Elizalde, S. Nojiri, S. D. Odintsov, L. Sebastiani, and S. Zerbini, Phys. Rev. D **77**, 046009 (2008).

19. S. D. Odintsov, D. Saez-Gomez, and G. S. Sharov, Eur. Phys. J. C **77**, 862 (2017).

20. S. Capozziello and M. Francaviglia, Gen. Rel. Grav. **40**, 357 (2008).

21. T. P. Sotiriou and V. Faraoni, Rev. Mod. Phys. **82**, 451 (2010).

22. T. Chiba, Phys. Lett. B **575**, 1 (2003).

23. G. J. Olmo, Phys. Rev. Lett. **95**, 261102 (2005).

24. G. J. Olmo, Phys. Rev. D **75**, 023511 (2007).

25. J. Khoury and A. Weltman, Phys. Rev. Lett. **93**, 171104 (2004).

26. S. Capozziello and S. Tsujikawa, Phys. Rev. D **77**, 107501 (2008).

27. J. Khoury and A. Weltman, Phys. Rev. D **69**, 044026 (2004).

28. W. Hu and I. Sawicki, Phys. Rev. D **76**, 064004 (2007) .

29. T. Koivisto and H. Kurki-Suonio, Class. Quant. Grav. **23**, 2355 (2006).

30. T. Koivisto, Phys. Rev. D **73**, 083517 (2006).

31. T. Harko, T. S. Koivisto, F. S. N. Lobo, and G. J. Olmo, Phys. Rev. D **85**, 084016 (2012).

32. C. G. Böhmer, F. S. N. Lobo, and N. Tamanini, Phys. Rev. D **88**, 104019 (2013).

33. N. A. Lima and V. Smer-Barreto, Astrophys. J. **818**, 186 (2016).

34. I. Leanizbarrutia, F. S. N. Lobo, and D. Sáez-Gómez, Phys. Rev. D **95**, 084046 (2017).

35. S. Capozziello, T. Harko, T. S. Koivisto, F. S. N. Lobo, and G. J. Olmo, JCAP **04**, 011 (2013).

36. S. Capozziello, T. Harko, T. S. Koivisto, F. S. N. Lobo, and G. J. Olmo, JCAP **07**, 024 (2013).

37. S. Capozziello, T. Harko, T. S. Koivisto, F. S. N. Lobo, and G. J. Olmo, Astropart. Phys. **50–52C**, 65 (2013).

38. S. Capozziello, T. Harko, T. S. Koivisto, F. S. N. Lobo, and G. J. Olmo, Phys. Rev. D **86**, 127504 (2012).

39. B. Danila, T. Harko, F. S. N. Lobo, and M. K. Mak, Phys. Rev. D **95**, 044031 (2017).

40. S. Capozziello, T. Harko, T. S. Koivisto, F. S. N. Lobo, and G. J. Olmo, Universe **1**, 199 (2015).

41. C. M. Will, Phys. Rev. Lett. **120**, 191101 (2018).

42. A. Fienga, J. Laskar, P. Kuchynka, H. Manche, G. Desvignes, M. Gastineau, I. Cognard, and G. Theureau, Celestial Mech. Dyn. Astron. **111**, 363 (2011).

43. A. Verma, A. Fienga, J. Laskar, H. Manche, and M. Gastineau, Astron. Astrophys. **561**, A115 (2014).

44. A. Fienga, J. Laskar, P. Exertier, H. Manche, and M. Gastineau, Celestial Mech. Dyn. Astron. **123**, 325 (2015).

45. K. Nordtvedt, Phys. Rev. **169**, 1017 (1968).

46. C. M. Will, Astrophys. J. **163**, 611 (1971).

47. C. M. Will and K. Nordtvedt, Astrophys. J. **177**, 757 (1972).

48. C. M. Will, *Theory and Experiment in Gravitational Physics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK (1993).

49. J. Alsing, E. Berti, C. M. Will, and H. Zaglauer, Phys. Rev. D **85**, 064041 (2012).

50. T. Helbig, Astrophys. J. **382**, 223 (1991).

51. L. Perivolaropoulos, Phys. Rev. D **81**, 047501 (2010).

52. Y. Nutku, Astrophys. J. **155**, 999 (1969).

53. B. Bertotti, L. Iess, and P. Tortora, Nature **425**, 374 (2003).

54. C. M. Will, Living Rev. Rel. **17**, 4 (2014).

55. T. P. Sotiriou and E. Barausse, Phys. Rev. D **75**, 084007 (2007).

56. D. L. Lee, Phys. Rev. D **10**, 2374 (1974).

57. E. Poisson and C. M. Will, *Gravity: Newtonian, Post-Newtonian, Relativistic*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK (2014).

58. R. S. Park, W. M. Folkner, A. S. Konopliv, J. G. Williams, D. E. Smith, and M. T. Zuber, Astron. J. **153**, 3, 121 (2017).

59. P. J. Mohr, D. B. Newell, and B. N. Taylor, Rev. Mod. Phys. **88**, 035009 (2016).

60. P. I. Dyadina, N. A. Avdeev, and S. O. Alexeyev, Month. Not. Roy. Astron. Soc. **483**, 947 (2019).